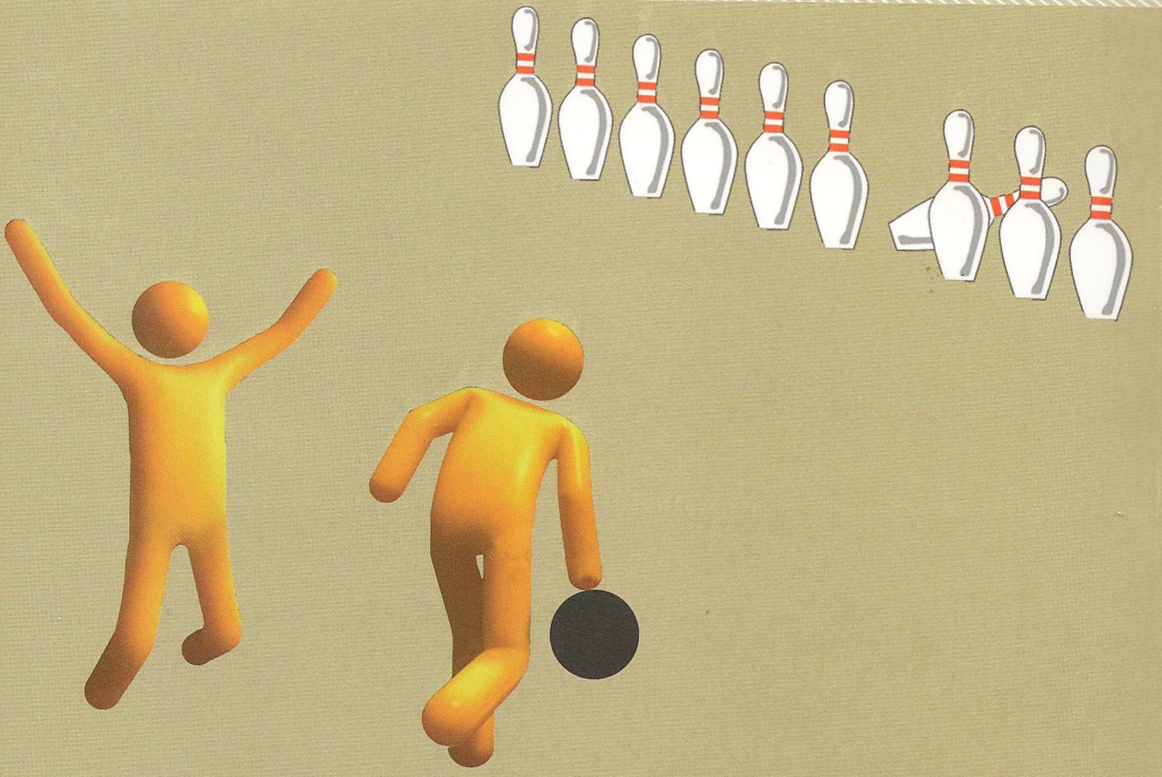
جهاد دانشگاهی
واحد صنعتی اصفهان

بازی‌های ترکیباتی



تألیف :
دکتر بهناز عمومی
رامین جوادی

۱۶۶-۲

Combinatorial Games

Dr. B. Omoomi
R. Javadi

کتاب حاضر که با هدف آشنایی علاقه‌مندان به ریاضی و کاربردهای آن با نظریه بازی‌های ترکیبیاتی تهیه شده، اولین کتاب تألیفی فارسی در این زمینه است. نظریه بازی‌های ترکیبیاتی به عنوان یک نظریه نوپا، پلی میان ریاضیات سرگرمی و ریاضیات مجرد محسوب می‌شود. در این نظریه، هدف تحلیل و بررسی ریاضی بازی‌های ترکیبیاتی و یافتن استراتژی برد برای بازیکنان است. این کتاب با ارائه مثال‌های متنوع از بازی‌های فکری و تحلیل آنها، ضمن آموزش مبانی نظریه بازی‌های ترکیبیاتی، زمینه مناسب جهت افزایش قدرت خلاقیت مخاطبان و آشنایی آنان با مفاهیم اساسی ریاضی را در بستری مهیج و سرگرم کننده فراهم می‌آورد. تنها پیش‌نیاز برای مطالعه این کتاب داشتن حداقل یک دانش سطحی از ریاضیات گسسته است.

بازی‌های ترکیباتی

تألیف:

دکتر بهناز عمومی

عضو هیأت‌علمی دانشکده علوم ریاضی

دانشگاه صنعتی اصفهان

رامین جوادی

بسم الله الرحمن الرحیم

سخن ناشر

جای خرسندی و شکر بسیار است که در آستانه تابش پرتوهای حیات‌بخش اسلام بر پهنهٔ زمین، خود را در زمانی می‌یابیم که اندیشهٔ اصلاح نه تنها عبث نیست که پیمودن راههای کمال و رشد در هر بعدی از ابعاد انسانی هموارتر و شدنی‌تر می‌نماید. وظیفهٔ آنان که در این دوره و در این سرزمین مقدس زندگی می‌کنند بس سنگین و دشوار است و بطور خاص مسئولیت دانشگاه و دانشگاهیان در کنار حوزه‌های مقدس علمیه جایگاهی حساس و تعیین‌کننده در روند حرکت اجتماع دارد. تلاش پیگیر و همه‌جانبه برای بریدن بندهای وابستگی، جهاد مقدسی است که باید از دانشگاه و حوزه شروع شود و انتشار کتب علمی از سوی ما کوششی است در راستای آنچه ذکر آن رفت. بدیهی است این کوشش زمانی به نتایج مفید می‌رسد که بطور مداوم از سوی استادان، دانشگاهیان و اندیشمندان متعهد مورد انتقاد و پیشنهادات سازنده قرار گیرد.

اینک که چاپ اول این کتاب تقدیم دانشگاهیان ارجمند و مشتاق علم می‌گردد جای دارد از تمامی عزیزانی که در آماده‌سازی و تدوین آن تلاش نموده و زحمات زیادی را متحمل شده‌اند تشکر و قدردانی بعمل آید.

مرکز انتشارات جهاددانشگاهی
واحد صنعتی اصفهان

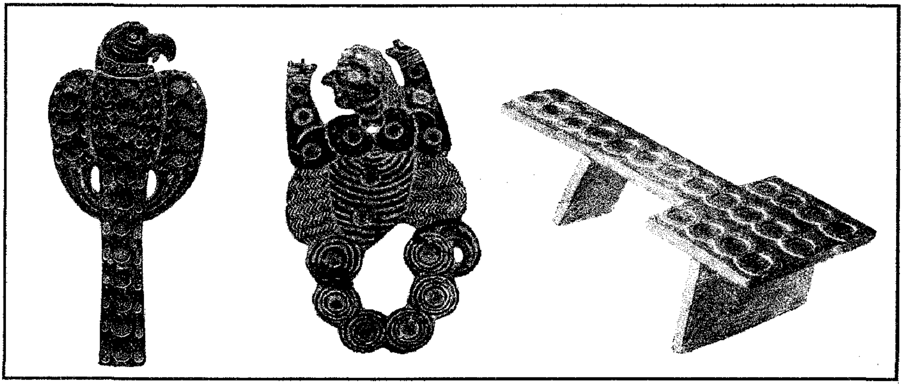
فهرست مندرجات

پیش گفتار

مجلهٔ فرهنگی پرشین در تاریخ بهمن ۱۳۸۳ مطلبی چاپ کرد که از کشف سه قطعه شیء در کاوش‌های باستان‌شناسی در منطقهٔ هلیل‌رود خبر می‌داد که مربوط به تمدن جیرفت بوده و قدمتی بیش از ۵۵۰۰ سال داشتند. این قطعه‌ها یکی به شکل عقاب، یکی به‌صورت عقربی با سر انسان و دیگری یک صفحهٔ تخت بود که روی آنها تعداد ۱۶ تا ۲۰ حفره به اندازهٔ مساوی قرار داشت (شکل ۱). بررسی‌های کارشناسانه نشان می‌داد که این صفحه‌ها مربوط به یک بازی بوده است که با تعدادی مهره انجام می‌شده و بین مردم ساکن آن منطقه به عنوان یک سرگرمی رایج بوده است. این سند را می‌توان قدیمی‌ترین سند کشف شده از بازی‌های صفحه‌ای دانست [۱۸].

تاریخ شروع تلاش انسان برای اختراع بازی‌هایی که بتواند اوقات فراغت خود را با آنها پر کند به قدمت تاریخ تمدن بشری می‌رسد. در این میان بازی‌های فکری از جایگاه ویژه‌ای برخوردار بوده‌اند. از قدیمی‌ترین بازی‌هایی که هنوز به فراوانی بین مردم رایج‌اند می‌توان به تخته نرد، گو و شطرنج اشاره کرد. اختراع شکل اولیهٔ این بازی‌ها به ترتیب به ۵۰۰۰ سال پیش در شهر سوخته در ایران، ۴۰۰۰ سال پیش در چین و ۱۵۰۰ سال پیش در هند برمی‌گردد [۲].

با توجه به ماهیت تحلیلی اکثر بازی‌های فکری، تحلیل و بررسی ریاضی این بازی‌ها مطلبی قابل تأمل است و این موضوع که بتوان با کمک تحلیل دقیق ریاضی، یک بازی را تجزیه و بررسی کرده و راه‌هایی برای بهتر بازی کردن و استراتژی‌هایی برای رسیدن به برد ارائه داد هیجان‌انگیز به نظر می‌رسد. اولین تحلیل ریاضی موفق از یک بازی به



شکل ۱ صفحه‌های بازی کشف شده در کاوش‌های باستان‌شناسی جیرفت.

سال ۱۹۰۲ برمی‌گردد که بوتون[۱] بازی‌ای به نام " نیم" را به طور کامل حل و راه‌های برنده شدن در این بازی را ارائه داد [۵]. این تحلیل نقطهٔ آغاز تولد یک نظریهٔ ریاضی بود که " نظریهٔ بازی‌های ترکیبیاتی" نام گرفت. هدف اصلی نظریهٔ بازی‌های ترکیبیاتی تحلیل و بررسی دستهٔ وسیعی از بازی‌ها با ویژگی‌های خاص است. این بازی‌ها در هر مرحله، در یک وضعیت قرار دارند. دو بازیکن وجود دارند که به نوبت و پشت سرهم حرکت می‌کنند (نه هم‌زمان) و هر حرکت، وضعیت بازی را طبق قانونی که از قبل تعریف می‌شود، تغییر می‌دهد. بازی در هر صورت، پس از تعداد متناهی حرکت پایان می‌یابد و یکی از بازیکنان بر طبق قانونی مشخص برنده می‌شود. در این بازی‌ها حرکت شانسی (مثل پرتاب تاس) و امکان بلوف‌زدن یا متحد شدن بازیکنان وجود ندارد و بازیکنان در هنگام حرکت از همهٔ اطلاعات بازی باخبرند. (اصطلاحاً بازی با اطلاعات کامل است.)

در تحلیل یک بازی، هدف اصلی یافتن استراتژی برد است؛ یعنی پیدا کردن پاسخی به این سؤال که چگونه می‌توان بازیکنان را راهنمایی کرد تا در هر وضعیت بهترین حرکت ممکن را انجام دهند. این هدف کمی بلند پروازانه است. در بسیاری از بازی‌های رایج، وضعیت‌ها به قدری پیچیده و متنوع‌اند که تعیین "بهترین حرکت ممکن" بسیار مشکل است. اما در بعضی از بازی‌ها این کار ممکن بوده و یک "راه حل" روشن و صریح (یعنی

[۱] C.L. Bouton

بهترین راه بازی کردن) برای بازی وجود دارد. حتی در مواردی نیز که بازی قابل حل نباشد، نظریهٔ بازی‌های ترکیبیاتی می‌تواند با ارائه راه‌کارهایی بازیکنان را در بهتر بازی کردن کمک کند. نکتهٔ کلیدی در موفقیت‌آمیز بودن تحلیل ریاضی یک بازی پاسخ به این سؤال است که آیا می‌توان وضعیت‌های بازی را به مجموعی از وضعیت‌های ساده‌تر تجزیه کرد؟ بسته به میزان مثبت یا منفی بودن این پاسخ در مورد یک بازی، نظریه به همان میزان در تحلیل آن بازی موفق یا ناموفق است.

هم از لحاظ تاریخی و هم از نظر محتوایی، نظریهٔ بازی‌های ترکیبیاتی به دو بخش مجزا تقسیم می‌شود. بخش اول به بررسی بازی‌های ترکیبیاتی بی‌طرفانه می‌پردازد. در این بازی‌ها، دو بازیکن در هر وضعیت، مجموعه حرکت‌های قانونی یکسانی دارند؛ به این معنی که اگر در یک وضعیت بازیکن اول مجاز به یک حرکت مشخص است، بازیکن دوم نیز درصورتی که نوبت حرکتش باشد، مجاز به این حرکت خواهد بود. اولین پیشرفت اصلی در نظریهٔ بازی‌های بی‌طرفانه، مربوط به دهه ۱۹۳۰ است که اسپراگ و گراندی[۱] مستقلاً تحلیل بوتون برای بازی نیم را برای همهٔ بازی‌های بی‌طرفانه تعمیم دادند و ثابت کردند، هر وضعیت در یک بازی بی‌طرفانه معادل یک دسته مهره در بازی نیم است [۱۲] و [۲۶]. کتاب گای به نام «بازی‌های منصفانه»، [۱] و [۱۳]، راهنمای مقدماتی خوبی در مورد این بازی‌ها است. همچنین درسنامهٔ نظریهٔ بازی‌ها از فرگوسن، [۹]، منبعی در دسترس در این زمینه است.

بخش دوم، بازی‌های جانبدارانه را تحلیل می‌کند که بازی‌هایی هستند که بی‌طرفانه نیستند. بازی‌هایی که با مهره‌های سیاه و سفید انجام می‌شوند و مهره‌های هم‌رنگ مربوط به یک بازیکن است، جانبدارانه هستند. منشأ پیدایش نظریهٔ بازی‌های جانبدارانه به دههٔ ۱۹۶۰ برمی‌گردد، وقتی که جان کانوی[۲] نشان داد که اعداد در تحلیل برخی از این بازی‌ها ظاهر می‌شوند و از آنجا توانست دستگاه اصول موضوعه‌ای را برای اعداد بنا کند که در واقع تعمیمی از کارهای ددکنید، کانتور و دیگران بود [۶]. به کارگیری و توسعهٔ کارهای کانوی به کمک برلکمپ و گای[۳]، منجر به ظهور نظریهٔ بازی‌های جانبدارنه گشت

[۱] R. Sprague & P.M. Grundy
[۲] J. Conway
[۳] E.R. Berlekamp & R. Guy

که به‌صورت مبسوط در کتاب «راه‌های برد»، [۳]، از این سه نویسنده مورد بررسی قرار گرفته است. برای آشنایی با نظریهٔ بازی‌های جانبدارانه، علاوه بر کتاب راه‌های برد، کتاب [۱۹] نیز مرجع مناسبی است.

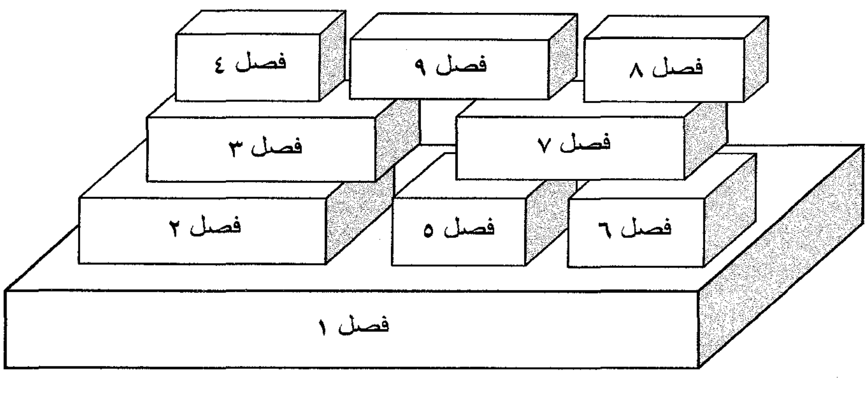
مهم‌ترین بازی رایج که نظریهٔ بازی‌های جانبدارانه در تحلیل آن بسیار موفق بوده، بازی گو است. ابزارهای تحلیل این بازی تا جایی پیش رفته است که رهنمودهای حاصل از این تحلیل‌ها در سطح قهرمانی نیز مورد استفاده قرار می‌گیرد [۴]. اما بازی شطرنج، از طرفی به دلیل امکان وجود وضعیت تساوی، در زمرهٔ بازی‌های ترکیبیاتی قرار نمی‌گیرد و از طرف دیگر به دلیل پیچیدگی و تنوع وضعیت‌ها و وسعت عملکرد مهره‌ها قابل تجزیه به وضعیت‌های ساده‌تر نیست و از نظر تحلیل دقیق ریاضی دست نیافتنی به نظر می‌رسد. با این وجود الکیز توانسته است به کمک ابزارهای نظریهٔ بازی‌های جانبدارنه، تحلیلی از وضعیت‌های نزدیک به پایان شطرنج، یعنی وقتی که معمولاً مهره‌های با دامنهٔ عملکرد وسیع از بازی حذف شده‌اند ارائه دهد [۸]. او به خاطر این کار جایزهٔ فدراسیون بین‌المللی شطرنج را برده است. نظریهٔ بازی‌های جانبدارانه در مورد تحلیل برخی بازی‌های رایج دیگر مثل دومینو، خط و نقطه و غیره نیز تا حدودی موفق بوده است.

در حال حاضر نظریهٔ بازی‌های ترکیبیاتی بخش مهمی از ریاضیات سرگرمی[۱] را تشکیل داده و ارتباطات زیادی با بخش‌های مختلف ریاضی پیدا کرده است و می‌توان چنین ادعا کرد که از لحاظ تاریخی به مرحلهٔ هیجان‌انگیز خود وارد شده است. در واقع این نظریه ابزارها و تکنیک‌های لازم و ضروری را جمع‌آوری کرده و آمادهٔ ورود به تحلیل بازی‌های جدی‌تر است. نظریهٔ بازی‌های ترکیبیاتی مطالب مشترکی با دیگر موضوعات ریاضی مثل فرکتال و نظریهٔ آشوب دارد و در آن ارتباطات متنوعی با شاخه‌های مختلف ریاضی و علوم کامپیوتر مثل الگوریتم‌ها، نظریهٔ پیچیدگی، اتوماتون‌های متناهی، منطق، نظریه اعداد و احتمال وجود دارد. لازم به ذکر است که "نظریهٔ بازی‌ها" به شاخه‌ای از علوم ریاضی اطلاق می‌شود که در ارتباط با مدل‌سازی ریاضی رقابت‌های اقتصادی، اجتماعی و غیره است. این نظریه قدمت بیشتری از نظریهٔ بازی‌های ترکیبیاتی دارد و مفاهیم و ابزارهای تحلیلی این دو نظریه مستقل از یکدیگر است.

---

[۱] recreational mathematics

کتاب حاضر به بررسی رئوس و پایه‌های اصلی نظریهٔ بازی‌های ترکیبیاتی می‌پردازد و با ذکر مثال‌های متنوع، دانش خواننده را در مورد این نظریه به تدریج توسعه می‌دهد. فصل‌های ۱ تا ۴ به مطالعهٔ بازی‌های ترکیبیاتی بی‌طرفانه و فصل‌های ۵ تا ۸ به مطالعهٔ بازی‌های ترکیبیاتی جانبدارانه اختصاص داده شده است. فصل ۱ به تعریف دقیق بازی‌های ترکیبیاتی، گراف بازی‌ها و وضعیت‌های برد می‌پردازد و در فصل‌های ۲ تا ۴ با معرفی جمع نیم، مقادیر اسپراگ—گراندی، مفهوم جمع بازی‌ها و ضرب نیم، تکنیک‌ها و مفاهیم نظریهٔ بازی‌های بی‌طرفانه معرفی می‌شوند. فصل ۵ بازی‌های جانبدارانه و وضعیت‌های برد آن را تشریح می‌کند، در فصل ٦ ساختار بازگشتی کانوی برای تولید اعداد توضیح داده می‌شود و در فصل‌های ۷ و ۸ این نظریه برای تحلیل بازی‌های جانبدارانه به کار گرفته می‌شود. فصل ۹ به عنوان کاربردی از نظریه‌های معرفی شده در فصول قبل، به تحلیل بازی‌ای به نام هرس بوته در دو نوع بی‌طرفانه و جانبدارانه می‌پردازد. بخش‌هایی از کتاب که با علامت § مشخص شده‌اند، بخش‌های اختیاری هستند و نخواندن آنها خللی در توالی فصل‌ها ایجاد نمی‌کند. شکل ۲ نحوهٔ وابستگی فصل‌های کتاب به یکدیگر را نشان می‌دهد و می‌تواند خواندن کتاب را تسهیل کند. این کتاب برای تدریس درس نظریهٔ بازی‌های ترکیبیاتی در مقطع کارشناسی در یک نیم‌سال تحصیلی تدوین شده است.



شکل ۲ نحوهٔ وابستگی فصل‌های کتاب.

در خاتمه مراتب قدردانی و تشکر خود را از داوران محترم و همهٔ کسانی که ما را در تهیهٔ این کتاب یاری نمودند ابراز می‌داریم. همچنین از دانشجویان کلاس‌های درس نظریهٔ بازی‌ها در دانشکدهٔ علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی اصفهان که استقبال آنان انگیزهٔ ما را در تهیهٔ این کتاب دو چندان کرد و از پیشنهادات آنان بهره بردیم، صمیمانه تشکر می‌کنیم. مؤلفین حداکثر تلاش خود را برای انتقال مفاهیم به بهترین نحو ممکن به کار بسته‌اند، اما بدون شک حاصل کار خالی از اشکال نیست. از این جهت مشتاقانه منتظر نظرات و پیشنهادات شما خواننده محترم هستیم.

بهناز عمومی[۱] — رامین جوادی[۲]
دانشکدهٔ علوم ریاضی — دانشگاه صنعتی اصفهان
زمستان ۱۳۸۸

[۱] bomoomi@cc.iut.ac.ir
[۲] ramin.javadi@gmail.com

فصل ۱

بازی‌های بی‌طرفانه

در این فصل ابتدا به‌طور دقیق مفهوم یک بازی ترکیبیاتی و انواع آن، بی‌طرفانه و جانبدارانه، را تعریف می‌کنیم. سپس بازی‌های ترکیبیاتی بی‌طرفانه را به وسیله گراف‌های جهت‌دار نمایش داده و چگونگی تحلیل وضعیت‌های بازی روی این گراف را تشریح می‌کنیم. در ادامه به عنوان یک مثال به معرفی و تحلیل بازی‌های تفاضلی می‌پردازیم. در پایان نیز ضمن بررسی بازی چُمپ، با تکنیکی به نام سرقت استراتژی آشنا می‌شویم.

۱.۱ بازی ترکیبیاتی چیست؟

ابتدا اجازه دهید مشخص کنیم که به‌طور دقیق منظور ما از یک بازی ترکیبیاتی چیست.

تعریف ۱.۱ یک **بازی ترکیبیاتی**، بازی است که در شرایط زیر صدق کند:

۱) دو بازیکن وجود دارند. معمولاً آنها را **بازیکن اول و دوم (چپ و راست)** می‌نامیم. اهداف این دو بازیکن در تقابل با یکدیگر است و ائتلافی بین آنها وجود ندارد.

۲) در بازی یک مجموعهٔ (معمولاً متناهی) از وضعیت‌ها و یک وضعیت مشخص که وضعیت شروع نامیده می‌شود، وجود دارد.

۳) مجموعه‌ای از **حرکت‌های قانونی** وجود دارد که برای هر بازیکن در هر وضعیت، مشخص می‌کند که کدام حرکت‌ها قانونی هستند.

۴) دو بازیکن پشت سرهم حرکت می‌کنند. حرکت هم‌زمان وجود ندارد.

۵) بازی هنگامی پایان می‌یابد که بازیکنی که نوبت حرکت او است، از وضعیت جاری هیچ حرکت قانونی نداشته باشد.

٦) بازیکنی که در نوبت خود قادر به هیچ حرکت قانونی نباشد، طبق قانون بازی برنده یا بازنده بازی است. در حالت اول بازی را با **قانون عادی** و در حالت دوم آن را با **قانون وارون** می‌خوانیم.

۷) بازی مستقل از چگونگی آن، پس از تعداد متناهی حرکت پایان می‌یابد. به این شرط، **شرط پایان‌پذیری** گفته می‌شود.[۱]

۸) بازی با **اطلاعات کامل** است؛ یعنی هر دو بازیکن از چگونگی روند بازی اطلاع کامل دارند و حرکت پنهانی یا کارت‌های مخفی وجود ندارد.

۹) هیچ حرکت تصادفی مانند انداختن تاس، توزیع ورق یا غیره وجود ندارد.

از بین بازی‌های معمول که می‌شناسیم کدام یک همهٔ شرایط فوق را دارا است؟ بازی‌هایی نظیر «ورق بازی» یا «تخته نرد» شرایط ۱ تا ۷ را دارند ولی چون یک بازی ترکیبیاتی با اطلاعات کامل است و در آن حرکت تصادفی وجود ندارد، این بازی‌ها در تعریف فوق نمی‌گنجند. با توجه به شرط ۴، در یک بازی ترکیبیاتی حرکت هم‌زمان وجود ندارد. در نتیجه بازی‌هایی مانند «سنگ—کاغذ—قیچی» از تعریف بازی‌های ترکیبیاتی خارج است. همچنین یک بازی ترکیبیاتی حتماً برنده دارد، پس هیچ وقت با تعداد متناهی حرکت، حالت تساوی اتفاق نمی‌افتد. در نتیجه بازی‌هایی مثل «تیک—تاک—تو» (دوز) و «شطرنج» بازی ترکیبیاتی نیستند. بازی «خط و نقطه» با وجود داشتن اکثر شرایط فوق، در شرط ٦ صدق نمی‌کند. زیرا در این بازی برنده کسی است که بیشترین خانه‌ها را به خود اختصاص دهد.

[۱] برخی مواقع از این شرط صرف‌نظر می‌کنیم، اما نظریه بر پایهٔ بازی‌های با شرط پایان‌پذیری ارائه می‌شود.

در زیر مثالی از یک بازی ترکیبیاتی ساده را که با برداشتن مهره‌هایی از یک دسته مهره انجام می‌گیرد، بیان می‌کنیم.

مثال ۱.۱

۱) دو بازیکن به عنوان بازیکن اول و بازیکن دوم مشخص می‌شوند.

۲) یک دسته ۲۱ تایی از مهره‌ها در وسط میز قرار دارد.

۳) یک حرکت قانونی خارج کردن یک، دو یا سه مهره از دسته است. حداقل ۱ و حداکثر ۳ مهره می‌تواند خارج شود.

۴) بازیکن‌ها با شروع از بازیکن اول، پشت سرهم حرکت می‌کنند.

۵) بازیکنی که آخرین مهره را خارج کند، برنده است.

به عنوان تمرین، شرایط ۱ تا ۹ تعریف ۱.۱ را برای این بازی تحقیق کنید.

بازی‌های ترکیبیاتی بر اساس اینکه قوانین بازی بین بازیکنان فرق بگذارند یا نه به دو دستهٔ بی‌طرفانه و جانبدارانه تقسیم می‌شوند.

تعریف ۲.۱ اگر در یک بازی ترکیبیاتی مجموعهٔ حرکت‌های قانونی در هر وضعیت برای دو بازیکن یکسان باشد، بازی را **بی‌طرفانه** و در غیر این‌صورت آن را **جانبدارانه** می‌گوییم.

در واقع در یک بازی ترکیبیاتی بی‌طرفانه، اگر در یک وضعیت مشخص نوبت بازیکن اول بوده و او مجاز به انجام حرکتی مشخص باشد، در این‌صورت اگر بازیکن دوم نیز در نوبت خود با چنین وضعیتی مواجه شود، همین حرکت برای او نیز مجاز است. اما در بازی‌های ترکیبیاتی جانبدارانه، بازیکنان اول و دوم (چپ و راست) هر کدام قوانین حرکت مخصوص به خودشان را دارند. همهٔ بازی‌های ترکیبیاتی که در آنها بازیکن اول و دوم، مهرهٔ سیاه و سفید مخصوص به خودشان را دارند، در زمرهٔ بازی‌های جانبدارانه جای دارند. مثال ۱.۱ یک بازی ترکیبیاتی بی‌طرفانه است. حال اگر در این مثال، قانون ۳ را با قانون ′۳ در زیر جایگزین کنیم، یک بازی ترکیبیاتی جانبدارانه به دست می‌آید.

(′۳) بازیکن اول در نوبت خود می‌تواند ۱ یا ۳ مهره از دسته خارج کند و بازیکن دوم در نوبت خود مجاز به خارج کردن ۲ یا ۴ مهره است.

در یک بازی ترکیبیاتی منظور از **استراتژی برد** برای یک بازیکن، یک روش بازی کردن برای او است به‌طوری که او بتواند با این روش برد خود را صرف‌نظر از هر حرکتی که رقیب انجام دهد، تضمین نماید. تا پایان فصل ۴ همه‌جا منظور از بازی ترکیبیاتی، بازی ترکیبیاتی بی‌طرفانه و با قانون عادی است، مگر در مواردی که قانون بازی ذکر شود.

۲.۱ گراف بازی‌های بی‌طرفانه

در این بخش برای یک بازی ترکیبیاتی، یک تفسیر معادل به شکل یک بازی که روی یک گراف جهت‌دار اجرا می‌شود، بیان می‌کنیم. در واقع ما وضعیت‌های بازی را با رأس‌ها و حرکت‌های بازی را با یال‌های یک گراف نشان می‌دهیم. این تفسیر در مطالعه و تحلیل بازی‌ها به کمک ما می‌آید. ابتدا تعریف ریاضی گراف جهت‌دار و گراف یک بازی ترکیبیاتی را بیان می‌کنیم.

تعریف ۳.۱ **گراف جهت‌دار** G، یک زوج مرتب (X, E) است که X یک مجموعهٔ غیرتهی به نام مجموعهٔ **رأس‌ها** و E مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب از مجموعهٔ X است که مجموعهٔ **یال‌ها** خوانده می‌شود. برای $x, y \in X$، اگر $(x, y) \in E$، آن‌گاه می‌گوییم x به y وصل شده است و y را **تالی** x می‌خوانیم. گراف جهت‌دار G را **متناهی** گوییم هرگاه مجموعهٔ X متناهی باشد.

تعریف ۴.۱ گراف یک بازی ترکیبیاتی بی‌طرفانه. برای یک بازی ترکیبیاتی بی‌طرفانه، گراف این بازی به‌صورت یک گراف جهت‌دار $G = (X, E)$ به همراه یک رأس مشخص $x_{\circ} \in X$ تعریف می‌شود که مجموعهٔ رأس‌ها X، مجموعهٔ همهٔ وضعیت‌های بازی و رأس $x_{\circ}$ وضعیت شروع را نشان می‌دهد. برای دو رأس $x, y \in X$،

داریم $(x,y) \in E$ اگر و تنها اگر بتوان با یک حرکت قانونی از وضعیت x به وضعیت y رسید. برای هر رأس $x \in X$، مجموعهٔ همهٔ تالی‌های x را با $F(x)$ نشان می‌دهیم. در واقع $F(x)$ مجموعهٔ وضعیت‌هایی است که یک بازیکن مجاز است از وضعیت x به آنها حرکت کند. اگر $F(x)$ تهی باشد، آن‌گاه x یک **وضعیت پایانی** است.

گراف یک بازی ترکیبیاتی به‌طور کامل اطلاعات مربوط به وضعیت‌ها و قوانین بازی را نمایش می‌دهد. در واقع می‌توانیم با داشتن گراف جهت‌دار $G = (X, E)$ و مشخص کردن وضعیت شروع $x_0 \in X$ و به کارگیری قوانین زیر، یک بازی ترکیبیاتی بی‌طرفانه با قانون عادی را روی گراف G اجرا کنیم.

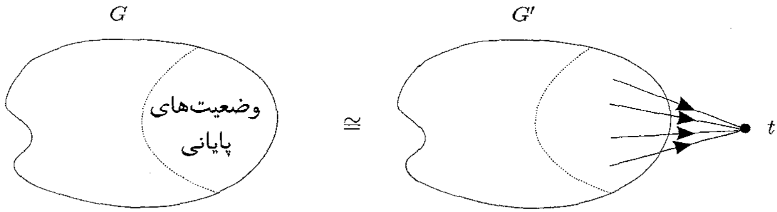
۱) بازیکن اول، ابتدا با شروع از رأس x_0 حرکت می‌کند.

۲) بازیکنان پشت سرهم حرکت می‌کنند.

۳) در وضعیت x، بازیکنی که نوبت حرکت او است، یک وضعیت $y \in F(x)$ از تالی‌های x را انتخاب کرده و به آن حرکت می‌کند.

۴) بازیکنی که در نوبت خود با یک وضعیت پایانی روبرو شود، بازنده است.

تذکر ۱.۱ اگر بازی بی‌طرفانه با قانون وارون اجرا شود، آن‌گاه بازیکنی که در نوبت خود با یک وضعیت پایانی روبه‌رو شود، برنده است. فرض کنید G گراف یک بازی بی‌طرفانه با قانون وارون باشد. حال یک وضعیت جدید t به رأس‌های گراف اضافه کرده و همهٔ وضعیت‌های پایانی در G را به وضعیت جدید t وصل کنید. گراف حاصل را G' بنامید (شکل ۱.۱). اکنون می‌توانیم ببینیم که اجرای بازی روی گراف G با قانون وارون معادل با اجرای بازی روی گراف G' با قانون عادی است و برعکس. زیرا بازیکنی که در بازی روی G، در نوبت خود با یک وضعیت پایانی روبرو و با قانون وارون برنده شده است، می‌تواند در بازی روی G'، با یک حرکت به وضعیت t رفته و با قانون عادی برنده شود. درنتیجه از این به بعد، بدون از دست‌دادن کلیت، می‌توانیم هر بازی با قانون وارون را به‌صورت یک بازی دیگر با قانون عادی در نظر بگیریم. ◊



بازی روی گراف G' با قانون عادی $\cong$ بازی روی گراف G با قانون وارون

شکل ۱.۱ بازی با قانون وارون و معادل آن با قانون عادی.

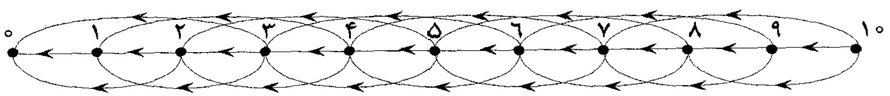
طبق آنچه تعریف شد، اجرای بازی روی یک گراف جهت‌دار دلخواه ممکن است پایان‌پذیر نباشد. برای جلوگیری از این امکان و تأمین شرط پایان‌پذیری بازی‌های ترکیبیاتی، خود را به گراف‌های جهت‌دار متوالیاً متناهی محدود می‌کنیم.

تعریف ۵.۱ در گراف جهت‌دار $G = (X, E)$، منظور از یک گشت، یک دنبالهٔ $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_m$ از رأس‌ها است، به‌طوری که برای $i = 1, 2, \ldots, m$، $(x_{i-1}, x_i) \in E$؛ عدد m را **طول گشت** می‌گوییم. یک دور، یک گشت $x_0, x_1, \ldots, x_m$ است به‌طوری که $x_m = x_0$ و بقیهٔ x_iها متمایز باشند. یک دنبالهٔ نامتناهی $x_0, x_1, x_2, \ldots$ را که برای هر $i \geq 1$، $(x_{i-1}, x_i) \in E$، یک **گشت نامتناهی** می‌خوانیم. گراف جهت‌دار G را **متوالیاً متناهی** گوییم هرگاه G گشت نامتناهی نداشته باشد.

شرط متوالیاً متناهی بودن گراف جهت‌دار G با شرط پایان‌پذیری بازی بی‌طرفانه روی گراف G معادل است. خلاصهٔ آنچه در این بخش مطرح شد را در نتیجهٔ زیر بیان می‌کنیم.

نتیجه ۱.۱ هر بازی ترکیبیاتی بی‌طرفانه را می‌توان با یک گراف جهت‌دار متوالیاً متناهی $G = (X, E)$، به همراه یک رأس شروع $x_0 \in X$ نمایش داد و همچنین روی هر گراف جهت‌دار متوالیاً متناهی می‌توان با شروع از یک رأس مشخص، یک بازی ترکیبیاتی بی‌طرفانه تعریف کرد.

برای مثال اجازه دهید گراف بازی مثال ۱.۱ با n مهره را به دست آوریم. بازی با یک دستهٔ n مهره‌ای شروع و هر وضعیت با تعداد مهره‌های باقیمانده مشخص می‌شود. بنابراین در اینجا $X = \{۰, ۱, \ldots, n\}$ مجموعهٔ رأس‌ها و دستهٔ خالی، وضعیت پایانی است، بنابراین $F(۰) = \emptyset$. همچنین داریم $F(۱) = \{۰\}$، $F(۲) = \{۰, ۱\}$ و برای k، $۳ \le k \le n$، داریم $F(k) = \{k - ۳, k - ۲, k - ۱\}$. به این ترتیب به‌طور کامل گراف بازی مشخص می‌شود. برای نمایش یک گراف جهت‌دار رأس‌ها را با نقطه‌ها و یال‌ها را با خط‌ها نشان می‌دهیم. روی هر خط پیکانی قرار گرفته که جهت انجام حرکت را مشخص می‌کند. به عنوان نمونه گراف این بازی که روی یک دسته با ۱۰ مهره اجرا می‌شود، در شکل ۱.۲ رسم شده است.



شکل ۱.۲ گراف بازی مثال ۱.۱ با شروع از ۱۰ مهره.

۳.۱ وضعیت‌های N و P

اجازه دهید به بازی مثال ۱.۱ برگردیم. چگونه می‌توان این بازی را تحلیل کرد؟ آیا یکی از بازیکن‌ها می‌تواند باخت را بر دیگری تحمیل کند؟ شما ترجیح می‌دهید کدام بازیکن باشید، بازیکنی که بازی را شروع می‌کند یا نفر بعدی؟ یک استراتژی برد چیست؟

بیایید این بازی را به‌طور معکوس از پایان به آغاز بررسی کنیم. این روش که در تحلیل بسیاری از بازی‌ها به کار می‌آید، **استقرای پسرو** نامیده می‌شود. اگر تنها ۱، ۲ یا ۳ مهره باقی مانده باشد، آن‌گاه بازیکنی که نوبت حرکت او است به سادگی با برداشتن همهٔ مهره‌های باقیمانده برنده بازی خواهد بود. فرض کنیم ۴ مهره باقی مانده باشد. بنابراین بازیکنی که نوبت حرکت او است باید ۱، ۲ یا ۳ مهره بردارد و رقیب قادر خواهد بود در حرکت بعدی برنده شود. بنابراین باقی‌ماندن ۴ مهره یک شکست برای بازیکن بعدی (بازیکنی که نوبت حرکت او است) و یک برد برای بازیکن قبلی محسوب می‌شود. اگر

۵، ۶ یا ۷ مهره باقی مانده باشد، آن‌گاه بازیکنی که نوبت حرکت او است، می‌تواند با برداشتن تعدادی مهره به‌طوری که ۴ مهره روی میز باقی بماند برنده بازی باشد. اگر ۸ مهره باقی مانده باشد، آن‌گاه بازیکن بعدی مجبور است ۵، ۶ یا ۷ مهره باقی بگذارد که در هر صورت باعث برد رقیب خود خواهد شد.

به این ترتیب می‌بینیم که وضعیت‌هایی با باقی‌ماندن ۰، ۴، ۸، ۱۲، ۱۶ و ... مهره، وضعیت‌های هدف هستند و ما می‌خواهیم هرچه زودتر به این وضعیت‌ها برسیم. حال بازی با ۲۱ مهره را تحلیل می‌کنیم.

عدد ۲۱ بر ۴ بخش‌پذیر نیست. پس بازیکنی که حرکت اول را انجام می‌دهد، می‌تواند با تبدیل تعداد مهره‌ها به مضربی از ۴ برنده شود. تنها حرکت بهینه برای نفر اول برداشتن ۱ مهره و باقی گذاشتن ۲۰ مهره روی میز و رسیدن به یک موقعیت هدف است.

همان‌طور که در این بازی دیدیم، وضعیت‌هایی وجود دارند که بازیکن بعدی (بازیکنی که نوبت حرکت او است) می‌تواند با یک بازی خوب برد خود را تضمین کند و در بقیهٔ وضعیت‌ها مشروط به بازی خوب رقیب هیچ شانسی برای برد بازیکن بعدی وجود ندارد. این حالت در همهٔ بازی‌های ترکیبیاتی بی‌طرفانه اتفاق می‌افتد. وضعیت‌هایی که در آنها بازیکن قبلی (بازیکنی که با حرکت خود این وضعیت‌ها را ایجاد کرده است) استراتژی برد دارد، وضعیت‌های P نامیده می‌شوند (مانند وضعیت‌هایی با تعداد مهره‌های مضرب ۴ در مثال بالا) و وضعیت‌هایی که بازیکن بعدی استراتژی برد دارد، وضعیت‌های N خوانده می‌شوند.

در ادامه وضعیت‌های N و P را برای یک بازی بی‌طرفانه تعریف کرده و ثابت می‌کنیم در همهٔ بازی‌های ترکیبیاتی، هر وضعیت یک وضعیت N یا P است. همچنین الگوریتمی برای پیدا کردن وضعیت‌های N و P ارائه کرده و نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان حرکت منجر به برد از یک وضعیت N را پیدا کرد.

تعریف ۱.۶ فرض کنید $\mathcal{P}$ مجموعه‌ای از وضعیت‌ها در یک بازی ترکیبیاتی بی‌طرفانه و $\mathcal{N}$ مجموعهٔ مکمل $\mathcal{P}$ باشد که دارای سه خاصیت زیر هستند.

۱) همهٔ وضعیت‌های پایانی، در بازی با قانون عادی، متعلق به مجموعهٔ $\mathcal{P}$ و در بازی با قانون وارون، متعلق به مجموعهٔ $\mathcal{N}$ هستند.

۲) از هر وضعیت غیرپایانی در مجموعهٔ $\mathcal{N}$، حداقل یک حرکت قانونی به یکی از وضعیت‌ها در مجموعهٔ $\mathcal{P}$ وجود دارد.

۳) از هر وضعیت در مجموعهٔ $\mathcal{P}$، همهٔ حرکت‌های قانونی به وضعیتی در مجموعهٔ $\mathcal{N}$ منجر می‌شود.

در این‌صورت هر وضعیت در مجموعهٔ $\mathcal{P}$ را یک **وضعیت P** و هر وضعیت در مجموعهٔ $\mathcal{N}$ را یک **وضعیت N** می‌نامیم.

درصورتی که مجموعهٔ $\mathcal{P}$ با خواص مشخص شده در تعریف فوق یافت شود، استراتژی حرکت به یک وضعیت P، استراتژی برد است. زیرا اگر شما در نوبت خود به یک وضعیت P حرکت کنید، رقیب شما از این وضعیت P، تنها می‌تواند به وضعیت N حرکت کند (خاصیت ۳) و شما می‌توانید مجدداً با یک حرکت مناسب به یک وضعیت P حرکت کنید (خاصیت ۲). این حرکت‌ها ادامه می‌یابد تا اینکه بازی در یک وضعیت پایانی تمام می‌شود (شرط پایان‌پذیری). بنابراین با به کار بردن این استراتژی، همواره در وضعیت‌های N، نوبت حرکت با شما و در وضعیت‌های P نوبت حرکت با رقیب است. حال در بازی با قانون عادی، وضعیت پایانی، وضعیت P است (خاصیت ۱) و لذا شما آخرین حرکت را انجام داده‌اید و برنده هستید و در بازی با قانون وارون، وضعیت پایانی، وضعیت N است (خاصیت ۱) و لذا رقیب شما آخرین حرکت را انجام داده و باز شما برنده هستید. نتیجه این بحث این است که:

در هر وضعیت P، بازیکن قبلی (بازیکنی که با حرکت خود این وضعیت را ایجاد کرده است) و در هر وضعیت N، بازیکن بعدی (بازیکنی که نوبت حرکت اوست) با یک بازی مناسب می‌تواند برد خود را تضمین کند. در نتیجه با مشخص شدن نوع وضعیت‌ها، استراتژی برد که همواره حرکت به وضعیت P است، برای بازیکنان معلوم می‌شود. لذا منظور از تحلیل یا حل یک بازی، مشخص کردن نوع وضعیت‌ها در آن بازی است.

برای تکمیل شدن بحث کافی است نشان دهیم در هر بازی ترکیبیاتی بی‌طرفانه، مجموعهٔ $\mathcal{P}$ با مشخصات تعریف ۶.۱، وجود دارد و یکتا است. برای اثبات این مطلب ابتدا مفهوم هسته در یک گراف جهت‌دار را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۱.۷ یک هسته در یک گراف جهت‌دار $G = (X, E)$، یک زیرمجموعه از رأس‌ها، $K \subset X$، است به‌طوری که

۱) برای هر $x \in X - K$، یک $y \in K$ یافت شود که $(x, y) \in E$؛ یعنی هر رأس خارج از K حداقل یک تالی در K داشته باشد،

۲) برای هر $x, y \in K$، داشته باشیم $(x, y) \notin E$؛ یعنی برای هر $x \in K$، همهٔ تالی‌های x خارج از K باشند.

قضیهٔ زیر وجود یک هستهٔ یکتا در گراف‌های متوالیاً متناهی را تضمین می‌کند. در اینجا اثبات وجود هسته را تنها برای گراف‌های متناهی بیان می‌کنیم. اثبات در حالت گراف نامتناهی به مفهوم استقرای ترامتناهی نیاز دارد. برای اثبات این قضیه در حالت نامتناهی، پیوست الف.۴ را ببینید.

قضیه ۱.۱ هر گراف جهت‌دار متوالیاً متناهی یک هستهٔ یکتا دارد.

برهان. ابتدا یکتایی هسته را ثابت می‌کنیم. فرض کنید G یک گراف جهت‌دار و K_1, K_2 دو هستهٔ متمایز برای گراف G باشند. برای هر رأس $x \in K_1 - K_2$، با توجه به خاصیت ۱ هسته، x حداقل یک تالی $y \in K_2$ دارد و با توجه به خاصیت ۲ هسته، $y \notin K_1$. پس هر رأس در $K_1 - K_2$ یک تالی در $K_2 - K_1$ دارد و برعکس. حال با توجه به متمایز بودن K_1 و K_2، یک عضو $x_0 \in K_1 - K_2$ در نظر می‌گیریم. طبق آنچه گفته شد، x_0 یک تالی $x_1 \in K_2 - K_1$ و x_1 یک تالی $x_2 \in K_1 - K_2$ دارد. به همین ترتیب دنباله $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots$ از رأس‌ها به دست می‌آید که x_{i+1} تالی x_i است. این مطلب نشان می‌دهد که G متوالیاً متناهی نیست. بنابراین در گراف‌های جهت‌دار متوالیاً متناهی، هسته یکتا است.

حال وجود هسته را برای گراف‌های متناهی و متوالیاً متناهی ثابت می‌کنیم. فرض کنید $G = (X, E)$ یک گراف جهت‌دار متناهی و متوالیاً متناهی باشد. بنابراین هر زیرگراف القایی G حداقل یک رأس پایانی دارد (رأس بدون تالی). برای هر زیرمجموعهٔ $Y \subseteq X$، $N(Y)$ را مجموعهٔ همهٔ رأس‌هایی بگیرید که حداقل یک تالی در Y دارند و قرار دهید $N[Y] = Y \cup N(Y)$. حال قرار دهید $G_0 := G$ و K_0 را مجموعهٔ همهٔ رأس‌های

پایانی $G_\circ$ بگیرید. اگر K_i انتخاب شده باشد، آن‌گاه درصورتی که $X = N[K_i]$، قرار دهید $K := K_i$ و درصورتی که $X \neq N[K_i]$، به مجموعهٔ K_i، همهٔ رأس‌های پایانی در زیرگراف القایی روی $X - N[K_i]$ (یعنی زیرگراف تولید شده روی رأس‌های مجموعهٔ $X - N[K_i]$) را اضافه کرده و نام مجموعهٔ جدید را K_{i+1} بگذارید. چون در هر مرحله حداقل یک رأس به K_i اضافه می‌شود و X متناهی است، این کار در متناهی گام پایان می‌گیرد و برای یک $i_\circ$ داریم، $K = K_{i_\circ}$ و $X = N[K_{i_\circ}]$. در نتیجه هر رأس بیرون K حداقل یک تالی در K دارد (خاصیت ۱ تعریف هسته). حال کافی است خاصیت ۲ تعریف هسته را بررسی کنیم. فرض کنید $x, y \in K$ و x در مرحلهٔ i ام و y در مرحلهٔ j ام به K اضافه شده باشند که $i < j \leq i_\circ$. چون $x \in K_i$ و $y \in X - N[K_i]$، پس x تالی y نیست. همچنین چون x رأس پایانی گراف القایی روی مجموعهٔ $X - N[K_{i-1}]$ است و $y \in X - N[K_{i-1}]$، رأس y نیز تالی x نیست. لذا خاصیت ۲ هسته نیز برقرار است. در نتیجه K یک هسته برای گراف G است.

نتیجه ۲.۱ در هر بازی ترکیبیاتی بی‌طرفانه، هر وضعیت، یک وضعیت P یا یک وضعیت N است.

برهان. فرض کنید G گراف یک بازی ترکیبیاتی بی‌طرفانه باشد. اگر این بازی با قانون عادی اجرا شود، آن‌گاه قرار دهید $\mathcal{P} := K$ که K هسته گراف G است. با توجه به تعریف هسته، واضح است که هر وضعیت در $\mathcal{P}$ یک وضعیت P و بقیهٔ وضعیت‌ها، وضعیت N هستند. حال فرض کنید بازی ترکیبیاتی با قانون وارون اجرا می‌شود. اگر G' گراف حاصل از G مطابق ساختار ارائه شده در تذکر ۱.۱ و K' هسته G' باشد، آن‌گاه قرار دهید $\mathcal{P} := K' - \{t\}$. چون $t \in K'$، وضعیت‌های پایانی G متعلق به K' نیستند. لذا شرط (۱) تعریف ۶.۱ برقرار است. بقیهٔ شروط نیز با توجه به تعریف هسته، به راحتی نتیجه می‌شوند.

اثبات قضیهٔ ۱.۱ در واقع الگوریتمی برای پیدا کردن وضعیت‌های N و P در بازی‌های ترکیبیاتی بی‌طرفانه به دست می‌دهد. این الگوریتم در واقع همان روشی است که در ابتدای این بخش برای تحلیل بازی مثال ۱.۱ به کار بردیم.

الگوریتم پیدا کردن وضعیت‌های N و P در بازی‌های بی‌طرفانه

- مرحلهٔ ۱. هر وضعیتِ پایانی را در بازی با قانون عادی با P و در بازی با قانون وارون با N برچسب بزن.
- مرحلهٔ ۲. هر وضعیتی که بتواند با یک حرکت به یک وضعیت با برچسب P تبدیل شود را با N برچسب بزن.
- مرحلهٔ ۳. هر وضعیتی که همهٔ حرکت‌های ممکن از آن به وضعیتی با برچسب N منجر شود را با P برچسب بزن.
- مرحلهٔ ۴. اگر هیچ وضعیت P جدیدی در مرحلهٔ ۳ یافت نشد، توقف کن؛ در غیر این‌صورت به مرحلهٔ ۲ برو.

در پایان این بخش مجدداً یادآوری می‌کنیم که در همهٔ بازی‌های بی‌طرفانه، استراتژی برد، حرکت به یک وضعیت P است و اولین بازیکنی که رقیبش را با یک وضعیت P مواجه کند، می‌تواند برد خود را تضمین نماید.

۴.۱ بازی‌های تفاضلی

در این بخش به معرفی خانواده‌ای از بازی‌های ترکیبیاتی به نام بازی‌های تفاضلی پرداخته و وضعیت‌های N و P را در آنها بررسی می‌کنیم. این بازی‌ها در واقع تعمیمی از مثال ۱.۱ هستند. یک مجموعه غیرتهی از اعداد صحیح مثبت، مانند S در نظر بگیرید. بازی تفاضلی با مجموعهٔ تفاضلی S روی یک دسته با n مهره به این‌صورت اجرا می‌شود. دو بازیکن پشت سرهم حرکت می‌کنند و یک حرکت، برداشتن s مهره از این دسته است که $s \in S$. بازیکنی که آخرین حرکت را انجام می‌دهد برنده است.

بازی مثال ۱.۱، یک بازی تفاضلی با مجموعهٔ تفاضلی $S = \{۱, ۲, ۳\}$ است. برای روشن شدن موضوع، یک بازی تفاضلی با مجموعهٔ تفاضلی $S = \{۱, ۳, ۴\}$ را با پیدا

کردن وضعیت‌های P آن تحلیل می‌کنیم. تنها یک وضعیت پایانی وجود دارد و آن وضعیت با ۰ مهره است. پس وضعیت ۰ یک وضعیت P و وضعیت‌هایی با ۱، ۳ و ۴ مهره وضعیت N هستند، زیرا با یک حرکت به وضعیت ۰ تبدیل می‌شوند. یک دسته با ۲ مهره یک وضعیت P است زیرا تنها حرکت قانونی از ۲، حرکت به ۱ است که یک وضعیت N می‌باشد. پس دستهٔ با ۵ یا ۶ مهره باید وضعیت‌های N باشند، چون می‌توانند با یک حرکت به ۲ تبدیل شوند. حال می‌بینیم که دستهٔ با ۷ مهره باید یک وضعیت P باشد، چون تنها، حرکت از ۷ به ۶، ۴ یا ۳ مجاز است که هر سه وضعیت N هستند. به همین ترتیب ادامه می‌دهیم و می‌بینیم که دسته‌هایی با ۸، ۱۰ و ۱۱ مهره وضعیت‌های N و با ۹ مهره وضعیت P است. همچنین دسته‌هایی با ۱۲ و ۱۳ مهره وضعیت‌های N هستند و با ۱۴ مهره وضعیت P است. این روند با استقرا دنبال می‌شود، در نتیجه مجموعهٔ وضعیت‌های P عبارت است از $\mathcal{P} = \{۰, ۲, ۷, ۹, ۱۴, ۱۶, \ldots\}$، یعنی مجموعهٔ اعداد صحیح نامنفی که باقیماندهٔ آنها بر ۷ برابر ۰ یا ۲ است.

تعداد مهره‌ها	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	...
وضعیت	P	N	P	N	N	N	N	P	N	P	N	N	N	N	P	...

می‌بینیم که الگوی $PNPNNNN$ به طول ۷ مرتب تکرار می‌شود. پس همهٔ اعداد مثبتی که باقیماندهٔ آنها بر ۷، ۰ یا ۲ است، وضعیت‌های P و بقیهٔ وضعیت‌های N هستند. حال پاسخ دادن به این سؤال، راحت است. در بازی با ۱۱۰ مهره چه کسی برنده است؟ بازیکن اول یا دوم؟ باقیماندهٔ تقسیم ۱۱۰ بر ۷ برابر ۵ بوده و بنابراین وضعیت ۱۱۰، یک وضعیت N است و نفر اول می‌تواند با حرکت به یک وضعیت P برنده شود. حرکت برد برای او برداشتن ۳ مهره و باقی گذاشتن ۱۰۷ مهره است.

۵.۱ بازی چُمپ (§)

بازی چُمپ در سال ۱۹۵۲ توسط فرد شاو[۱] تحت عنوان "بازی مقسوم علیه‌ها" اختراع شد [۲۲]. این بازی روی یک مجموعهٔ به‌طور جزئی مرتب P با کوچک‌ترین عضو صفر

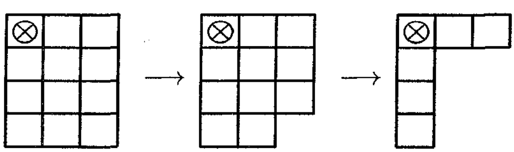
[۱] Fred Schuh

انجام می‌شود و هر حرکت عبارت است از انتخاب یک عضو از P و حذف آن عضو و همهٔ اعضای بزرگ‌تر از آن. کسی که عضو صفر را انتخاب کند بازنده است. در سال ۱۹۷۴ دیوید گیل [1] فرم کاملاً متفاوتی از این بازی را به نام چُمپ اختراع کرد [۱۰]. البته اولین بار مارتین گاردنر [2] این نام را برای این بازی به کار برد [۱۱].

این بازی ترکیبیاتی، روی یک تختهٔ شکلات مربع—مربع $m \times n$ انجام می‌شود که مربع بالایی و سمت چپ آن سمی است. بازیکنان باید در هر نوبت یک مربع را انتخاب کرده و آن قطعه را همراه با همهٔ قطعه‌های سمت راست و پایین آن بخورند. بازیکنی که مجبور به خوردن قطعهٔ سمی شکلات بشود بازنده است. می‌توانید این بازی را در وب‌گاه زیر بازی کنید.

http://www.math.ucla.edu/~tom/games/chomp.html

این بازی را روی یک ماتریس $m \times n$ نیز می‌توان انجام داد که خانهٔ سمی آن درایه $(1, 1)$ است و هر حرکت عبارت است از انتخاب درایه‌ای مانند (i_0, j_0)، $1 \leq i_0 \leq m$، $1 \leq j_0 \leq n$، و حذف همهٔ درایه‌های (i, j) که $i \geq i_0$ و $j \geq j_0$. به عنوان مثال شکل زیر موقعیت شروع بازی برای $m = 4$ و $n = 3$ و سپس حرکت بازیکن اول و به دنبال آن حرکت بازیکن دوم را نشان می‌دهد. قطعهٔ سمی با $\otimes$ مشخص شده است. بازیکن اول در حرکت اول درایه $(4, 3)$ را انتخاب می‌کند و بازیکن دوم با انتخاب درایه $(2, 2)$ جواب می‌دهد.



می‌دانیم که در هر بازی ترکیبیاتی، هر وضعیت، یک وضعیت P یا یک وضعیت N است. گاهی می‌توان ثابت کرد که یک وضعیت در یک بازی، وضعیت N است، بدون اینکه حرکت منجر به برد را ارائه نمود. این قبیل گزاره‌ها براساس تکنیک‌های وجودی

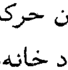
[1] David Gale
[2] Martin Gardner

ثابت می‌شوند که مهم‌ترین آنها روشی به نام **سرقت استراتژی** است. در قضیهٔ زیر به کمک این روش، ثابت می‌کنیم که در بازی چُمپ $m \times n$، همواره وضعیت شروع یک وضعیت N است و لذا بازیکن اول همیشه استراتژی برد دارد. هرچند هنوز هیچ‌کس نمی‌داند که در حالت کلی این استراتژی برد چیست.

قضیه ۲.۱ در بازی چُمپ $m \times n$، $mn > ۱$، وضعیت شروع یک وضعیت N است و لذا بازیکن اول استراتژی برد دارد.

برهان. بازیکن اول در نوبت اول خانهٔ گوشهٔ پایین و سمت راست (m, n) را انتخاب می‌کند. اگر وضعیت حاصل یک وضعیت P باشد، بازیکن اول که وضعیت P را ایجاد کرده است، استراتژی برد دارد و حکم ثابت شده است. در غیر این‌صورت این وضعیت، یک وضعیت N است و لذا بازیکن دوم یک جواب مناسب به این حرکت دارد که منجر به برد او می‌شود. اما هر حرکتی که در این وضعیت (وضعیتی با $mn - ۱$ خانه) قابل انجام باشد در وضعیت اولیه نیز قابل انجام بوده است. بنابراین بازیکن اول می‌تواند حرکتی را که بازیکن دوم در نوبت خود انجام داده است، در وضعیت شروع انجام دهد و به یک وضعیت P برسد. لذا وضعیت شروع یک وضعیت P است. به این روش، **سرقت استراتژی** گفته می‌شود.

در فصل ۵، نمونهٔ دیگری از روش سرقت استراتژی را در بازی‌های جانبدارانه بیان می‌کنیم.

در بازی چُمپ، پیدا کردن استراتژی برد برای بازیکن اول در حالت کلی کار ساده‌ای نیست. اما در بعضی از حالت‌های خاص به آسانی می‌توان آن را به دست آورد. به عنوان مثال در حالت $m = n$، انتخاب خانه $(۲, ۲)$ در اولین حرکت یک حرکت منجر به برد برای بازیکن اول است، زیرا پس از این حرکت وضعیت به شکل  خواهد بود و با هر حرکت بازیکن دوم در یک شاخه، بازیکن اول می‌تواند عین آن حرکت را در شاخه دیگر انجام دهد. درنتیجه همیشه بعد از حرکت بازیکن اول تعداد خانه‌های دو شاخه مساوی است. در نهایت به وضعیتی می‌رسیم که فقط خانه $(۱, ۱)$ باقی مانده است و نوبت بازیکن دوم است و او چاره‌ای جز خوردن خانهٔ سمی ندارد.

نماد ۱.۱ یک وضعیت چُمپ با λ_i خانه در سطر i ام، $1 \leq i \leq m$، که $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_m$، را با $[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m]$ نمایش می‌دهیم.

یک وضعیت بدیهی دیگر در بازی چُمپ، وضعیت دو سطری است.

گزاره ۱.۱ یک وضعیت چُمپ با دو سطر، یک وضعیت P است اگر و تنها اگر به فرم $[a, a-1]$ باشد $(a \geq 1)$؛ یعنی سطر بالایی یک خانه بیشتر از سطر پایینی داشته باشد. علاوه‌براین اگر $[a, b]$ یک وضعیت N باشد آن‌گاه درصورتی که $a - b \geq 2$، رفتن به وضعیت $[b+1, b]$ و درصورتی که $a - b = 0$، رفتن به وضعیت $[b, b-1]$ یک حرکت منجر به برد است.

برهان. مجموعهٔ $\mathcal{P}$ را مجموعهٔ همهٔ وضعیت‌هایی به فرم $[a, a-1]$، $a \geq 1$، قرار می‌دهیم. واضح است که وضعیت پایانی $[1, 0]$ متعلق به $\mathcal{P}$ است. از هر وضعیت در $\mathcal{P}$، هر حرکتی به یکی از وضعیت‌های $[a, a-i]$، $i = 2, \ldots, a$، یا $[a-j, a-j]$، $j = 1, \ldots, a-1$، منجر می‌شود که همگی خارج از $\mathcal{P}$ هستند. همچنین از هر وضعیت خارج از $\mathcal{P}$، یعنی $[a, b]$ که $a - b \neq 1$، یک حرکت مجاز برای رسیدن به یک وضعیت در $\mathcal{P}$ وجود دارد، که این حرکت‌ها در صورت گزاره بیان شده‌اند. بنابراین بنا به تعریف ۶.۱، وضعیت‌های مجموعهٔ $\mathcal{P}$ وضعیت‌های P هستند.

تعیین همهٔ وضعیت‌های N و P حتی برای چُمپ با سه سطر نیز کار آسانی نیست. دی. زیلبرگر و اس.اچ. ایخاد[1] برنامه‌ای تحت عنوان بسته نرم‌افزاری Chomp3Rows[2] در برنامه میپل نوشته‌اند که برای c_0 داده شده، $c_0 \leq 115$، همهٔ وضعیت‌های P موجود به فرم $[a, b, c_0]$ را مشخص می‌کند [۳۲]. همچنین ایکس. سان[3] برنامه‌ای در میپل[4] نوشته است که الگوی وضعیت‌های P در چُمپ‌های k سطری با $k - 2$ سطر ثابت را پیدا می‌کند [۲۸].

[1] D. Zeilberger & S.H. Ekhad

[2] این بسته نرم‌افزاری را می‌توانید از وب‌گاه http://www.math.temple.edu/~zeilberg/ بگیرید.

[3] X. Sun

[4] این برنامه در وب‌گاه http://www.mah.temple.edu/~xysun قابل دسترسی است.

۶.۱ تمرین

۱) برای بازی‌های تفاضلی با مجموعه‌های تفاضلی زیر، وضعیت‌های P را پیدا کنید.

الف) $S = \{۱, ۳, ۵, ۷\}$.　　　ب) $S = \{۱, ۳, ٦\}$.

ج) $S = \{۱, ۲, ۴, ۸, \ldots, ۲^n, \ldots\}$.

د) اگر هر کدام از این بازی‌ها با ۱۰۰ مهره شروع شوند، کدام بازیکن برنده خواهد بود؟

۲) بازی مثال ۱.۱ با قانون وارون را در نظر بگیرید؛ یعنی بازیکنی که آخرین حرکت را انجام می‌دهد بازنده است. در اینجا هدف مجبور کردن حریف به برداشتن آخرین مهره است. این بازی را تحلیل کرده و وضعیت‌های P آن را به دست آورید.

۳) الف) فرض کنید در یک بازی با یک دسته شامل تعداد زیادی مهره، شما می‌توانید در هر نوبت ۱ تا ٦ مهره بردارید. وضعیت‌های P کدام است؟ استراتژی برد چیست؟

ب) اگر در ابتدا ۳۱ مهره در دسته قرار داشته باشد، کدام بازیکن برنده است؟

۴) **بازی سی و یک.** از یک دسته ورق، ورق‌های تک، دولو، سه‌لو، چهارلو، پنج‌لو و شش‌لو از هر خال را بردارید. این ۲۴ ورق به‌طور مرتب شده به رو، روی میز قرار می‌گیرند. هر بازیکن در یک نوبت، یکی از ورق‌های به رو را پشت و رو می‌کند و مجموع شمارهٔ کارت‌های پشت و رو شده بعد از هر حرکت محاسبه می‌شود. هر خال تک، ۱ شمرده می‌شود. بازیکنی که برای اولین بار مجموع را به بیش از ۳۱ برساند، بازنده است. شاید به نظر برسد که این بازی معادل بازی تمرین قبل است. اما یک مشکل وجود دارد، هیچ عددی نمی‌تواند بیش از ۴ بار انتخاب شود.

الف) اگر شما بازیکن اول باشید و استراتژی پیدا شده در تمرین قبل را به کار برید و رقیب شما مرتب ۴ را انتخاب کند، چه اتفاقی می‌افتد؟

ب) با وجود این، بازیکن اول می‌تواند با یک استراتژی بهینه برنده شود. چگونه؟

۵) **خالی کردن و توزیع.** دو جعبه موجود است که در ابتدا جعبهٔ اول حاوی m مهره و جعبهٔ دوم حاوی n مهره است. چنین وضعیتی را با (m, n) نشان می‌دهیم که $m, n > ۰$. دو بازیکن به نوبت پشت سرهم حرکت می‌کنند. یک حرکت عبارت است از خالی کردن یکی از جعبه‌ها و تقسیم محتویات جعبه دیگر، بین دو جعبه به‌طوری که در هر جعبه حداقل یک مهره قرار گیرد. تنها یک وضعیت پایانی $(۱, ۱)$ وجود دارد. آخرین بازیکنی که حرکت می‌کند، برنده است. همهٔ وضعیت‌های P را بیابید.

٦) دو دسته چوب کبریت داریم که در ابتدا، در یک دسته m چوب کبریت و در دیگری n چوب کبریت وجود دارد، $m > n$. دو بازیکن به نوبت چوب کبریت‌هایی از دسته‌ها برمی‌دارند. در هر حرکت می‌توان از یک دسته به تعداد مضربی از تعداد چوب کبریت‌های دستهٔ دیگر برداشت (باید حداقل یک مهره برداشته شود). کسی بازی را برده است که آخرین چوب کبریت را از یک دسته بردارد. ثابت کنید اگر $m > ۲n$، آن‌گاه بازیکن اول استراتژی برد دارد.

۷) **بازی‌های تفاضلی پویا.** می‌توانیم بازی‌های تفاضلی را به گونه‌ای تعمیم دهیم که مجموعه تفاضلی بتواند وابسته به آخرین حرکت رقیب باشد. مثال‌های زیادی از بازی های تفاضلی پویا را می‌توانید در فصل ۱۲ از [۲۳] ببینید. در اینجا سه نمونه از این بازی‌ها را بیان می‌کنیم.

الف) یک دسته با n مهره وجود دارد. بازیکن اول می‌تواند هر تعداد دلخواه مهره بردارد (حداقل یک مهره و نه همهٔ دسته). پس از آن دو بازیکن به نوبت حرکت می‌کنند. هیچ بازیکنی اجازه ندارد تعداد مهره‌های بیشتری از آنچه رقیب او در حرکت قبل برداشته است، بردارد. یک حرکت بهینه برای بازیکن اول در حالت $n = ۴۴$ چیست؟ برای چه مقادیری از n بازیکن دوم پیروز خواهد بود؟

ب) **نیم فیبوناچی** [۳۰]. قوانین این بازی مشابه (الف) است با این تفاوت که یک بازیکن می‌تواند حداکثر دو برابر تعداد مهره‌هایی که رقیب او در حرکت قبل برداشته است، بردارد. تحلیل این بازی مشکل‌تر از قسمت قبل است و به دنبالهٔ اعداد فیبوناچی که به‌صورت $F_1 = 1$، $F_2 = 2$، $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$، $n \geq 2$، تعریف می‌شود مربوط است. قضیهٔ زیر حل مسأله را ساده می‌کند.

قضیه زکندورف.[1] هر عدد صحیح مثبت می‌تواند به طور یکتا به‌صورت جمعی از اعداد فیبوناچی متمایز و غیرمجاور نوشته شود.[2]

ممکن است راه‌های زیادی برای نوشتن یک عدد به‌صورت جمعی از اعداد فیبوناچی وجود داشته باشد، ولی تنها یک راه برای نوشتن هر عدد به‌صورت یک جمع از اعداد فیبوناچی غیرمجاور وجود دارد. به عنوان مثال $1 + 8 + 34 = 43$ تنها راه نوشتن ۴۳ است. اگرچه $1 + 3 + 5 + 34 = 43$، ولی ۵ و ۳ دو عدد فیبوناچی مجاور هستند. حرکت بهینه برای بازیکن اول در حالت $n = 43$ چیست؟ برای چه مقادیری از n نفر دوم برنده است؟

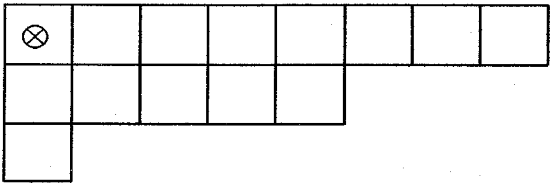
ج) یک دسته با n مهره وجود دارد. دو بازیکن به نوبت از این دسته تعدادی مهره برمی‌دارند. هر بازیکن در k امین حرکت می‌تواند به دلخواه از ۱ تا k مهره بردارد. کسی بازی را می‌برد که آخرین مهره را بردارد. برای چه مقادیری از n نفر اول برنده است؟

۸) وضعیت چُمپ زیر روی یک تخته 8×3 بعد از دو حرکت به وجود آمده است. علامت $\otimes$ نشان دهنده قطعهٔ سمی است.

---

[1] Zeckendorf

[2] اثبات قضیه زکندورف: (استفاده از استقرای قوی)، برای عدد صحیح مثبت n، F_m را بزرگ‌ترین عدد فیبوناچی کوچک‌تر از n در نظر می‌گیریم. طبق فرض استقرا، $n - F_m < n$ دارای نمایش یکتا از اعداد فیبوناچی غیرمجاور است. حال اگر در نمایش $n - F_m$ یک عدد فیبوناچی مجاور با F_m ظاهر شود، از مجموع آن دو، عدد فیبوناچی بزرگ‌تر و نابیشتر از n به دست می‌آید که این با انتخاب F_m متناقض است. بنابراین n را می‌توان به‌صورت مجموع اعداد فیبوناچی غیرمجاور نوشت. علاوه‌براین با استفاده از استقرا می‌توان نشان داد که $\sum_{i=1}^{m-2} F_i < F_m$، در نتیجه در هر نمایش n به‌صورت مجموع اعداد فیبوناچی غیرمجاور، F_m ظاهر می‌شود. بنابراین نمایش به دست آمده برای n نیز یکتا است.



الف) با یافتن یک حرکت موفقیت‌آمیز برای بازیکن اول، نشان دهید که این وضعیت، یک وضعیت N است. آیا این حرکت یکتا است؟

ب) ثابت کنید یک وضعیت چُمپ k سطری به‌صورت $[a, b, \overbrace{۱, \dots, ۱}^{k-۲}]$، یک وضعیت P است اگر و تنها اگر

$$k = \begin{cases} \left\lfloor \frac{۲a+b}{۲} \right\rfloor & a+b \text{ زوج} \\ \min\left\{ \left\lceil \frac{۲a-b}{۲} \right\rceil, \left\lceil \frac{۳(a-b)}{۲} \right\rceil \right\} & a+b \text{ فرد} \end{cases}$$

۹) دو بازیکن بازی زیر را روی یک میز دایره‌ای به شعاع R انجام می‌دهند. هر بازیکن در نوبت خود یک سکه به شعاع ۱ را روی میز قرار می‌دهد. سکه‌ها نباید روی هم قرار بگیرند. بازیکنی که در نوبت خود نتواند سکه‌ای را روی میز قرار دهد، بازنده است. در این بازی کدام بازیکن استراتژی برد دارد؟

۱۰) **بازی SOS.** صفحه‌ای شامل یک ردیف از n مربع است که در ابتدا همگی خالی هستند. بازیکن‌ها به نوبت یک مربع خالی را انتخاب کرده و در آن یک S یا یک O می‌نویسند. بازیکنی که اولین بار موفق به کامل کردن کلمه SOS در سه مربع متوالی شود برنده بازی است. اگر همهٔ ردیف بدون ظهور هیچ SOS متوالی پر شود، بازی مساوی شده است.

الف) فرض کنید $n = ۴$ و بازیکن اول در مربع اول یک S می‌نویسد. نشان دهید بازیکن دوم برنده است.

ب) نشان دهید برای $n = ۷$ بازیکن اول و برای $n = ۲۰$ بازیکن دوم برنده است. برای $n = ۱۴$، کدام بازیکن برنده می‌شود؟

فصل ۲

بازی نیم و جمع نیم

یکی از معروف‌ترین بازی‌های ترکیبیاتی، بازی نیم است که به‌صورت زیر اجرا می‌شود.

فرض کنید n دسته از مهره‌ها، به ترتیب شامل x_1، x_2، ... و x_n مهره وجود دارند. این وضعیت را با $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ نشان می‌دهیم. دو بازیکن به ترتیب حرکت می‌کنند. هر حرکت شامل انتخاب یک دسته و برداشتن تعدادی مهره از آن دسته است. بازیکنان در یک نوبت اجازه برداشتن مهره از بیش از یک دسته را ندارند ولی می‌توانند از دسته‌ای که انتخاب کرده‌اند هر تعداد مهره که دوست دارند، بردارند؛ از یک مهره تا همهٔ مهره‌ها. برنده بازیکنی است که آخرین مهره را برمی‌دارد. بازی نیم را می‌توانید در وب‌گاه‌های زیر بازی کنید.

http://www.chlond.demon.co.uk/nim.html
http://www.dotsphinx.com/nim/

در این فصل به تحلیل وضعیت‌های بازی نیم پرداخته و نشان می‌دهیم که وضعیت‌های N و P در این بازی به مفهومی به نام جمع نیم مربوط است (قضیه بوتون). مفهوم جمع نیم به طرز شگفت‌انگیزی در تحلیل همهٔ بازی‌های بی‌طرفانه به کار می‌آید که در فصل آینده به تفصیل مورد بحث قرار خواهد گرفت. در ادامهٔ این فصل به معرفی و تحلیل مثال‌هایی از بازی‌های ترکیبیاتی می‌پردازیم که عمدتاً تفسیرهای معادل با بازی نیم

دارند و در آخر تعمیمی از بازی نیم که بازی k–نیم مور نام دارد را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

تحلیل مقدماتی بازی نیم

بدیهی است که در بازی نیم یک دسته‌ای تنها وضعیت P، وضعیت پایانی دسته بدون مهره است. سایر وضعیت‌ها با برداشتن همهٔ مهره‌های موجود به یک وضعیت P منجر می‌شوند و لذا وضعیت N هستند. در بازی نیم با دو دسته، تنها یک وضعیت پایانی وجود دارد و آن $(\circ, \circ)$ است که یک وضعیت P می‌باشد. هر وضعیت $(\circ, x)$، $x > \circ$، با برداشتن همهٔ مهره‌ها به وضعیت پایانی منجر شده و یک وضعیت N است. در وضعیت‌هایی که دو دستهٔ غیرخالی وجود دارد، دیدن این موضوع ساده است که تنها وضعیت‌های P، دو دسته با مهره‌های مساوی هستند. زیرا با هر حرکت رقیب، تساوی دو دسته به هم می‌خورد و شما می‌توانید دوباره این تساوی را برقرار کنید تا سرانجام به وضعیت $(\circ, \circ)$ برسید و برنده شوید.

حال بازی نیم سه دسته‌ای را در نظر بگیرید. مشابه حالت قبل به راحتی دیده می‌شود که وضعیت‌های $(\circ, x_۱, x_۲)$، $x_۱ \neq x_۲ \geq \circ$، وضعیت N و وضعیت‌های $(\circ, x, x)$، $x \geq \circ$، وضعیت P هستند. حال اگر هر سه دسته غیرخالی باشند، تحلیل وضعیت پیچیده‌تر است. به وضوح، وضعیت‌های $(۱, ۱, ۱)$، $(۱, ۱, ۲)$، $(۱, ۱, ۳)$ و $(۱, ۲, ۲)$ همگی وضعیت‌های N هستند، زیرا می‌توانند با یک حرکت به وضعیت‌های $(۱, ۱, \circ)$، $(\circ, ۱, ۱)$، $(۱, ۱, \circ)$ و $(\circ, ۲, ۲)$ تبدیل شوند که همه وضعیت P هستند. ساده‌ترین وضعیت بعدی $(۱, ۲, ۳)$ است که باید یک وضعیت P باشد. زیرا همهٔ حرکت‌ها از آن به یکی از وضعیت‌های N قبلی ختم می‌شود. می‌توانیم این روند را ادامه دهیم و ببینیم که ساده‌ترین وضعیت‌های P بعدی، وضعیت‌های $(۱, ۴, ۵)$ و $(۲, ۴, ٦)$ هستند. ولی چگونگی تعمیم آن ساده نیست. آیا $(۵, ۷, ۹)$ یا $(۱۵, ۲۳, ۳\circ)$ وضعیت‌های P هستند؟

اگر تحلیل فوق را ادامه دهید، ممکن است بتوانید یک الگو کشف کنید. راه حل در حالت کلی غیربدیهی و به مفهوم جدیدی به نام جمع نیم مربوط است.

۱.۲ جمع نیم

جمع نیمِ دو عدد صحیح نامنفی عبارت است از جمع آنها در مبنای ۲، بدون رقم انتقالی (دو بر یک). هر عدد صحیح نامنفی، یک نمایش یکتا در مبنای ۲ به فرم $x = x_m\, ۲^m + x_{m-۱}\, ۲^{m-۱} + \cdots + x_۱\, ۲ + x_۰$، $m \geq ۰$، دارد، به‌طوری که هر x_i، صفر یا یک است. عبارت $(x_m\ x_{m-۱}\ \ldots\ x_۱\ x_۰)_۲$ را برای نشان دادن این نمایش از x در مبنای ۲ به کار می‌بریم. به عنوان مثال $(۱۰۱۱۰)_۲ = ۱ \times ۱۶ + ۰ \times ۸ + ۱ \times ۴ + ۱ \times ۲ + ۰ \times ۱ = ۲۲$.

تعریف ۱.۲ **جمع نیم** عددهای $(x_m\ \ldots\ x_۰)_۲$ و $(y_m\ \ldots\ y_۰)_۲$، برابر عدد $(z_m\ \ldots\ z_۰)_۲$ است و می‌نویسیم $(x_m\ \ldots\ x_۰)_۲ \oplus (y_m\ \ldots\ y_۰)_۲ = (z_m\ \ldots\ z_۰)_۲$ که برای هر k، $۰ \leq k \leq m$، $z_k = x_k + y_k \pmod{۲}$؛ یعنی $z_k = ۱$ اگر $x_k + y_k = ۱$ و در غیر این صورت $z_k = ۰$.

به عنوان مثال می‌توانیم جمع نیم ۲۲ و ۵۱ را به‌صورت زیر به دست آوریم.

$$\begin{array}{rrcl} & ۲۲ & = & (۱۰۱۱۰)_۲ \\ \oplus & ۵۱ & = & (۱۱۰۰۱۱)_۲ \\ \hline & ۲۲ \oplus ۵۱ & = & (۱۰۰۱۰۱)_۲ = ۳۷. \end{array}$$

جمع نیم خاصیت شرکت‌پذیری و جابجایی دارد، یعنی $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$ و $x \oplus y = y \oplus x$، چون جمع عادی در مبنای ۲ این خاصیت‌ها را دارد. پس می‌توانیم بدون نیاز به مشخص کردن ترتیب جمع، بنویسیم $x \oplus y \oplus z$. علاوه‌براین صفر عضو همانی جمع نیم است، یعنی $x = x \oplus ۰$ و هر عدد، قرینهٔ خودش است، $x \oplus x = ۰$. پس قانون حذف در جمع نیم هم برقرار است؛ یعنی $x \oplus y = x \oplus z$ نتیجه می‌دهد $z = y$. بنابراین جمع نیم شباهت زیادی با جمع معمولی دارد.

حال به بازی نیم بازگردیم. دیدیم که تحلیل نیم یک دسته‌ای بدیهی و نیم دو دسته‌ای ساده بود. چون تحلیل نیم سه دسته‌ای پیچیده‌تر است، ممکن است حدس بزنیم که برای

نیم چهار دسته‌ای باید بسیار سخت‌تر باشد، ولی این‌گونه نیست. قضیهٔ زیر از بوتون[۱] نوع وضعیت‌ها در بازی نیم را در حالت کلی مشخص می‌کند.

قضیه ۱.۲ (بوتون) یک وضعیت نیم n دسته‌ای به شکل $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ یک وضعیت P است اگر و تنها اگر جمع نیم مؤلفه‌های آن صفر باشد؛ یعنی $x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n = 0$. ◈

برهان. مجموعهٔ $\mathcal{P}$ را مجموعهٔ همهٔ وضعیت‌های بازی با جمع نیم صفر و $\mathcal{N}$ را مکمل آن در نظر می‌گیریم. درستی شرایط تعریف ۶.۱ را بررسی می‌کنیم.

(۱) همهٔ وضعیت‌های پایانی عضو $\mathcal{P}$ هستند. زیرا تنها وضعیت پایانی وضعیتی است که هیچ مهره‌ای در هیچ‌کدام از دسته‌ها نباشد. پس $0 = 0 \oplus 0 \oplus \cdots \oplus 0$.

(۲) از هر وضعیت موجود در مجموعهٔ $\mathcal{N}$ یک حرکت به یک وضعیت در مجموعهٔ $\mathcal{P}$ وجود دارد. در اینجا چگونگی ساختن این حرکت را بیان می‌کنیم. ابتدا جمع نیم عددها را به‌صورت ستونی زیر هم بنویسید. حداقل در یکی از ستون‌ها تعداد یک‌ها فرد است. به اولین ستون از سمت چپ که تعداد یک‌های آن فرد است نگاه کنید. حال یکی از عددهایی که رقم این ستون برای آن یک است را در نظر گرفته و آن را به گونه‌ای تغییر دهید که تعداد یک‌های همهٔ ستون‌های بعدی زوج شود. با این کار عدد مذکور کوچک می‌شود، زیرا بزرگ‌ترین رقمی که تغییر می‌کند، برابر ۱ است که به ۰ تبدیل می‌شود. در نتیجه این یک حرکت قانونی از یک وضعیت در مجموعهٔ $\mathcal{N}$ به یک وضعیت در مجموعهٔ $\mathcal{P}$ است.

(۳) هر حرکت از یک وضعیت در مجموعهٔ $\mathcal{P}$ به یک وضعیت در مجموعهٔ $\mathcal{N}$ ختم خواهد شد. اگر وضعیت $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ در $\mathcal{P}$ باشد و مثلاً x_1 با یک حرکت به x'_1 تبدیل شود، $x'_1 < x_1$، تساوی $x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n = 0 = x'_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n$ درست نیست، زیرا طبق قانون حذف خواهیم داشت $x'_1 = x_1$، که تناقض است. پس داریم $x'_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n \neq 0$ و در نتیجه $(x'_1, x_2, \ldots, x_n)$ در مجموعهٔ $\mathcal{N}$ است.

این سه خاصیت نشان می‌دهد که $\mathcal{P}$ مجموعهٔ همهٔ وضعیت‌های P است. در ضمن

---
[۱] L. Bouton

توجه به این نکته هم جالب است که طبق (۲) در بازی نیم تعداد حرکت‌های منجر به برد از یک وضعیت N برابر تعداد یک‌ها در اولین ستون از سمت چپ با تعداد یک‌های فرد است. به‌ویژه، همیشه تعداد فرد حرکت منجر به برد خواهیم داشت.

به عنوان یک مثال، وضعیت (۱۳, ۱۲, ۸) را در نظر بگیرید. آیا این یک وضعیت P است؟ در صورت وجود، یک حرکت منجر به برد چیست؟ برای یافتن جواب، جمع نیم ۱۲،۱۳ و ۸ را حساب می‌کنیم.

$$\begin{array}{rrcl} & ۱۳ & = & (۱۱۰۱)_۲ \\ \oplus & ۱۲ & = & (۱۱۰۰)_۲ \\ \oplus & ۸ & = & (۱۰۰۰)_۲ \\ \hline & \text{جمع نیم} & = & (۱۰۰۱)_۲ = ۹ \neq ۰ \end{array}$$

طبق قضیهٔ ۱.۲، این یک وضعیت N است. شما باید حرکتی را انجام دهید که به یک وضعیت P ختم شود؛ یعنی به یک وضعیت با تعداد یک‌های زوج در هر ستون برسید. یکی از این حرکت‌ها می‌تواند برداشتن ۹ مهره از دستهٔ اول و باقی‌گذاشتن ۴ مهره در آن باشد. زیرا وضعیت حاصل از این حرکت دارای جمع نیم صفر است.

$$\begin{array}{rrcl} & ۴ & = & (۰۱۰۰)_۲ \\ \oplus & ۱۲ & = & (۱۱۰۰)_۲ \\ \oplus & ۸ & = & (۱۰۰۰)_۲ \\ \hline & \text{جمع نیم} & = & (۰۰۰۰)_۲ = ۰ \end{array}$$

یک حرکت منجر به برد دیگر، کم کردن ۷ مهره از دستهٔ دوم و باقی‌گذاشتن ۵ مهره است. یک حرکت دیگر هم وجود دارد. آیا می‌توانید آن را پیدا کنید؟

۲.۲ بازی نیم با قانون وارون

وقتی بازی نیم را با قانون وارون اجرا می‌کنیم چه اتفاقی می‌افتد؟ آیا هنوز می‌توانیم در هر وضعیت دلخواه، برنده را تشخیص داده و یک استراتژی برد ساده بدهیم؟ وضعیت‌های

N و P کدام است؟ قضیهٔ زیر به این سؤالات پاسخ می‌دهد.

قضیه ۲.۲ در بازی نیم با قانون وارون وضعیت $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$، وضعیت P است اگر و تنها اگر یکی از دو شرط زیر را دارا باشد.
الف) هر دسته شامل حداکثر یک مهره و تعداد دسته‌های یک مهره‌ای فرد باشد.
ب) حداقل دو دسته شامل بیش از یک مهره وجود داشته و جمع نیم دسته‌ها صفر باشد، $x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n = 0$.

برهان. مجموعهٔ $\mathcal{P}$ را مجموعهٔ همهٔ وضعیت‌های $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ قرار می‌دهیم که یکی از دو شرط (الف) و (ب) را دارا باشند. ثابت می‌کنیم مجموعهٔ $\mathcal{P}$ شرایط تعریف ۶.۱ را دارد و لذا اعضای $\mathcal{P}$، همهٔ وضعیت‌های P در بازی نیم با قانون وارون هستند.
(۱) چون در وضعیت پایانی هیچ دسته‌ای با بیش از یک مهره وجود ندارد، وضعیت پایانی عضو $\mathcal{P}$ نیست.
(۲) برای یک وضعیت $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ خارج از $\mathcal{P}$، اگر همهٔ دسته‌ها تک مهره‌ای باشند، به وضوح برداشتن یک مهره به یک وضعیت در مجموعهٔ $\mathcal{P}$ منجر می‌شود. اگر حداقل دو دسته با بیش از یک مهره وجود داشته باشد و $x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n \neq 0$، آن‌گاه حرکت بهینه در بازی نیم با قانون عادی می‌تواند این وضعیت را به یک وضعیت با جمع نیم صفر برساند. در ضمن در وضعیت جدید، چون جمع نیم دسته‌ها صفر است، همچنان حداقل دو دسته با بیش از یک مهره وجود دارد. لذا وضعیت حاصل در مجموعهٔ $\mathcal{P}$ است. حال اگر دقیقاً یک دسته با بیش از یک مهره وجود داشته باشد، آن دسته را به صفر یا یک مهره تقلیل می‌دهیم به‌طوری که تعداد فرد دسته با یک مهره باقی بماند. وضعیت حاصل در مجموعهٔ $\mathcal{P}$ است.
(۳) هر حرکت از یک وضعیت در مجموعهٔ $\mathcal{P}$ به وضعیتی خارج از مجموعهٔ $\mathcal{P}$ منجر خواهد شد، زیرا با یک حرکت نمی‌توان از یک وضعیت با شرایط (ب) به وضعیتی با شرایط (الف) رسید. همچنین هر حرکت از وضعیتی با جمع نیم صفر به وضعیتی با جمع نیم غیرصفر منجر می‌شود.

تحلیلی مشابه آنچه گفته شد برای بسیاری از بازی‌های دیگر نیز به کار می‌رود ولی معمولاً تحلیل بازی با قانون وارون پیچیده‌تر از بازی با قانون عادی است. بعضی بازی‌ها با وجود داشتن یک تحلیل ساده در قانون عادی، تحت قانون وارون بسیار پیچیده هستند، مانند بازی شطرنج داوسون و بازی کیلز که در بخش ۵.۳ بررسی می‌شوند.

۳.۲ بازی‌های مشابه نیم

بازی‌های ترکیبیاتی زیادی وجود دارند که علی‌رغم ظاهر متفاوت، تفسیری مشابه با بازی نیم دارند و در نتیجه تحلیل نوع وضعیت‌ها به کمک جمع نیم در این بازی‌ها میسر است. همچنین برخی بازی‌ها با وجود شباهتی که با بازی نیم دارند، تحلیلی متفاوت با این بازی دارند. در ادامهٔ این فصل چند نمونه از این بازی‌ها را معرفی و بررسی می‌کنیم.

مثال ۱.۲ نیم پوکر

این بازی مشابه بازی نیم با چند دسته مهره انجام می‌شود. مانند بازی نیم، هر بازیکن در نوبت خود می‌تواند یک دسته را انتخاب کرده و هر تعداد مهره که می‌خواهد از آن دسته بردارد. اما در این بازی به هر بازیکن اجازه می‌دهیم که به جای این حرکت، یک دسته را انتخاب و تعدادی از مهره‌هایی که در حرکت‌های قبلی جمع کرده است را به آن دسته اضافه کند. در واقع در این بازی دست بازیکنان را برای اضافه کردن مهره‌ها به یک دسته باز می‌گذاریم.

ابتدا توجه کنید که این بازی در شرط پایان‌پذیری (شرط ۷ از تعریف ۱.۱) صدق نمی‌کند و بازیکنان می‌توانند تا ابد به بازی ادامه دهند. علی‌رغم برآورده نکردن شرط پایان‌پذیری، در این بازی می‌توانیم به یکی از بازیکنان استراتژی‌ای معرفی کنیم که بتواند مستقل از هر حرکت رقیب، با تعداد متناهی حرکت به برد برسد. ممکن است ابتدا فکر کنید که گسترش حرکت‌ها به اضافه کردن مهره به دسته، نوع وضعیت‌های بازی را نسبت به بازی نیم معمولی تغییر می‌دهد. اما وضعیت‌های N و P در این بازی هیچ فرقی با بازی نیم معمولی ندارد. در واقع یک وضعیت n دسته‌ای با $(x_۱, x_۲, \dots, x_n)$ مهره در

بازی نیم پوکر یک وضعیت P است اگر و تنها اگر $x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n = 0$.

با توجه به قضیهٔ بوتون، اگر جمع نیم دسته‌ها صفر نباشد، می‌توانیم با برداشتن تعدادی مهره از یک دسته، جمع نیم را صفر کنیم. بنابراین برای اثبات ادعا کافی است نشان دهیم درصورتی که جمع نیم دسته‌ها صفر باشد، اضافه کردن تعدادی مهره به یک دسته، نمی‌تواند جمع نیم را صفر نگه دارد. فرض کنید در وضعیت ۱، جمع نیم دسته‌ها صفر است و یک بازیکن تعدادی مهره به یک دسته اضافه کرده و به وضعیت ۲ می‌رسد. در این‌صورت بازیکن بعدی می‌تواند مهره‌های اضافه شده توسط رقیب را بردارد و به وضعیت ۱ با جمع نیم صفر برگردد. چون طبق قضیهٔ بوتون برداشتن مهره نمی‌تواند وضعیتی با جمع نیم صفر را به وضعیتی با جمع نیم صفر تبدیل کند، وضعیت ۲، وضعیتی با جمع نیم غیرصفر است. بنابراین می‌توان استراتژی برد در بازی نیم پوکر را به این‌صورت بیان کرد. مانند بازی نیم بازی می‌کنیم و هر وقت رقیب تعدادی مهره به یک دسته اضافه کرد، همان تعداد مهره را از آن دسته برمی‌داریم. چون همیشه در حال برداشتن مهره از دسته‌ها هستیم، بازی صرف‌نظر از حرکت رقیب پس از تعداد متناهی حرکت تمام می‌شود و طبق قضیهٔ بوتون برنده می‌شویم.

مثال ۲.۲ بازی نورتکات

بازی نورتکات روی یک صفحهٔ شطرنجی که در هر سطر آن یک مهرهٔ سفید و یک مهرهٔ سیاه قرار گرفته است، انجام می‌شود. بازیکن سفید، مهره‌های سفید و بازیکن سیاه، مهره‌های سیاه را حرکت می‌دهد. یک مهره می‌تواند به هر تعداد خانه در طول سطری که در آن قرار دارد حرکت کند. ولی نمی‌تواند از روی یک مهره بپرد یا در خانه‌ای قرار گیرد که مهرهٔ دیگری وجود دارد. بازیکنان پشت سرهم حرکت می‌کنند و آخرین بازیکنی که حرکت می‌کند، برنده است. می‌توانید این بازی را در وب‌گاه زیر امتحان کنید.

http://www.chlond.demon.co.uk/northcott.html

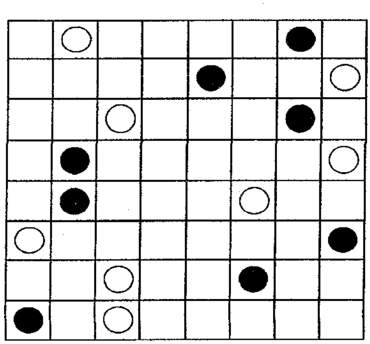
در اینجا دو نکته حائز اهمیت است:

۱ــ این یک بازی جانبدارانه است، زیرا بازیکنان سیاه و سفید از یک وضعیت ثابت حرکت‌های قانونی متفاوتی دارند.

۲ــ این بازی در شرط پایان‌پذیری صدق نمی‌کند (شرط ۷ از تعریف ۱.۱) و بازیکنان می‌توانند تا ابد حرکت کنند.

با این وجود می‌توانیم برای این بازی تفسیری مشابه بازی نیم بیان کرده و به کمک قضیهٔ بوتون، یک استراتژی برد برای این بازی ارائه کنیم که بتواند برد یکی از بازیکنان را با تعداد متناهی حرکت تضمین نماید. در هر وضعیت، تعداد خانه‌های خالی بین دو مهرهٔ سیاه و سفید در سطر i ام را با x_i نشان می‌دهیم. حال معادل با بازی نورتکات n سطری، یک بازی با n دسته با $x_۱$، $x_۲$، ... و x_n مهره در نظر می‌گیریم. حرکت یک مهره در یک سطر در بازی نورتکات، متناظر با کم یا زیاد کردن تعداد مهره‌های دستهٔ i ام در بازی معادل است. در تحلیل بازی نیم پوکر دیدیم که اجازهٔ اضافه کردن مهره به دسته‌ها، تغییری در نوع وضعیت‌های بازی نیم ایجاد نمی‌کند. بنابراین طبق قضیهٔ بوتون یک وضعیت در بازی نورتکات با x_i خانهٔ خالی بین دو مهرهٔ سیاه و سفید در سطر i ام یک وضعیت P است اگر و تنها اگر $x_۱ \oplus x_۲ \oplus \cdots \oplus x_n = ۰$.

به عنوان مثال در شکل زیر x_iها از بالا به پایین به ترتیب برابر ۴،۲،۳،۵،۳،۶،۲ و ۱ هستند که جمع نیم آنها ٦ می‌باشد. بنابراین برای بازیکنی که نوبت حرکت او است یک حرکت منجر به برد وجود دارد. به عنوان مثال تغییر فاصلهٔ دو مهره در سطر ششم از ٦ به ۰ یک حرکت منجر به برد است.



مثال ۳.۲ نیم پلکانی

در بازی نیم پلکانی [۲۶]، یک پلکان با n پله شامل مهره‌هایی روی بعضی از پله‌ها وجود دارد. وضعیتی با x_i مهره روی پلهٔ i ام، $i = 1, 2, \ldots, n$، را با $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ نشان می‌دهیم. یک حرکت در بازی نیم پلکانی انتقال حداقل یک مهره، از پلهٔ i ام، به یک پله پایین‌تر است. مهره‌هایی که به زمین (پله صفر) می‌رسند، از بازی خارج می‌شوند. پس در یک حرکت مثلاً x مهره از پلهٔ i ام به پلهٔ $(i - 1)$ ام می‌رود، $1 \leq x \leq x_i$، در نتیجه $x_i - x$ مهره روی پلهٔ i ام و $x_{i-1} + x$ مهره روی پلهٔ $(i - 1)$ ام باقی می‌ماند. بازی هنگامی پایان می‌یابد که همهٔ مهره‌ها روی زمین قرار گیرند. بازیکنان پشت سرهم حرکت می‌کنند و بازیکنی که آخرین حرکت را کرده است، برنده می‌شود.

در بازی نیم پلکانی نیز می‌توان مشابه اثبات قضیهٔ بوتون وضعیت‌های P را به راحتی مشخص کرد. ادعا می‌کنیم وضعیت $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ یک وضعیت P است اگر و تنها اگر جمع نیم تعداد مهره‌های روی پله‌های با شمارهٔ فرد صفر باشد. به عبارت دیگر وضعیت $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ یک وضعیت P است اگر و تنها اگر $(x_1, x_3, x_5, \ldots, x_k)$ یک وضعیت P در بازی نیم معمولی باشد، که برای n فرد، $k = n$ و برای n زوج، $k = n - 1$.

برای اثبات ادعا، درستی سه شرط وضعیت‌های N و P را نشان می‌دهیم.

۱) همهٔ وضعیت‌های پایانی P هستند، زیرا تنها وضعیت پایانی وضعیتی است که هیچ مهره‌ای روی پله‌ها وجود ندارد. پس $x_1 \oplus x_3 \oplus x_5 \oplus \cdots \oplus x_k = 0$.

۲) از هر وضعیتی که $x_1 \oplus x_3 \oplus x_5 \oplus \cdots \oplus x_k \neq 0$، یک حرکت به یک وضعیت P وجود دارد. این حرکت انتقال تعداد مناسب مهره از پله‌ای با شمارهٔ فرد به یک پله پایین‌تر است، به‌طوری که جمع نیم مهره‌های پله‌های فرد در وضعیت جدید صفر شود (مانند اثبات قضیهٔ بوتون).

۳) هر حرکت از وضعیتی که $x_1 \oplus x_3 \oplus \cdots \oplus x_k = 0$، چون باعث افزایش و یا کاهش تعداد مهره‌های یکی از پله‌ها با شمارهٔ فرد خواهد شد، بنا به آنچه در اثبات قضیهٔ بوتون دیدیم منجر به یک وضعیت با $x'_1 \oplus x'_3 \oplus \cdots \oplus x'_k \neq 0$ می‌شود که یک وضعیت N است.

مثال ۴.۲ بازی وایتهوف

این بازی یک نسخهٔ تغییر یافته از بازی نیم با دو دسته است که توسط وایتهوف[۱] معرفی و تحلیل شد [۳۱]. این بازی، **نیم چینی** نیز گفته می‌شود. دو دسته مهره وجود دارد. هر بازیکن در هر نوبت می‌تواند (۱) هر تعداد مهره را از یک دسته بردارد یا (۲) تعداد مساوی مهره از دو دسته بردارد. بازیکنی که آخرین مهره را بردارد، برنده است. برخلاف بازی نیم معمولی، وضعیت دو دسته با تعداد مساوی مهره در این بازی، یک وضعیت N است. زیرا می‌توانیم در یک حرکت هر دو دسته را خالی کرده و به وضعیت پایانی برسیم. بنابراین تحلیل بازی نیم برای این بازی جواب نمی‌دهد.

اجازه دهید وضعیتی با دو دستهٔ حاوی x و y مهره را با (x, y) نشان دهیم. وضعیت پایانی $(۰, ۰)$ یک وضعیت P است. کوچک‌ترین وضعیت P بعدی، وضعیت $(۱, ۲)$ است. حال گزارهٔ زیر را در مورد وضعیت‌های P در بازی وایتهوف بیان می‌کنیم.

گزاره ۱.۲ فرض کنید k یک عدد صحیح نامنفی باشد. از بین همهٔ وضعیت‌ها به‌صورت $(x, x+k)$، دقیقاً یکی از آنها وضعیت P است. ♠

برهان. ابتدا یگانگی را ثابت می‌کنیم. دو وضعیت $(x, x+k)$ و $(x', x'+k)$ با $x < x'$ را در نظر بگیرید. با کم کردن $x' - x$ مهره از هر دو دسته، از وضعیت $(x', x'+k)$ به وضعیت $(x, x+k)$ می‌رسیم. پس هر دو این وضعیت‌ها نمی‌توانند وضعیت P باشند.

حال وجود را با استقرا روی k ثابت می‌کنیم. از بین وضعیت‌هایی با اختلاف دو دسته ۰ یا ۱ مهره، تنها وضعیت P، به ترتیب وضعیت $(۰, ۰)$ و $(۱, ۲)$ است. فرض کنید برای $۰ \leq i \leq k - ۱$، از بین وضعیت‌هایی با اختلاف دو دسته i مهره، تنها وضعیت P، وضعیت (x_i, y_i) باشد که $y_i - x_i = i$. به دنبال یک وضعیت P با اختلاف k مهره می‌گردیم. کلیهٔ وضعیت‌های (x_i, s) و (y_i, t)، برای هر $s > y_i$ و $t > x_i$، وضعیت N هستند. زیرا با یک حرکت به وضعیت (x_i, y_i) تبدیل می‌شوند. حال فرض کنید a کوچک‌ترین عدد

---
[۱] Wythoff

طبیعی باشد که در مجموعهٔ $\{x_i, y_i : \circ \leq i \leq k - ۱\}$ نیست. همهٔ تالی‌های وضعیت $(a, a + k)$ در زیر نشان داده شده‌اند.

دسته اول	$(a', a' + k), \quad a' < a$
دسته دوم	$(a', a + k), \quad a' < a$
دسته سوم	$(a, a''), \quad a'' < a + k$

برای هر $a' < a$، داریم $a' = x_i$ یا $a' = y_i$، برای یک $\circ \leq i \leq k - ۱$. پس وضعیت‌های دستهٔ اول و دوم و همچنین دستهٔ سوم وقتی $a'' < a$، همگی وضعیت N هستند. همچنین در وضعیت‌های دستهٔ سوم، وقتی $a'' \geq a$، اختلاف دو دسته حداکثر $k - ۱$ است و هیچ‌کدام وضعیت (x_i, y_i) نیستند. بنابراین طبق فرض استقرا وضعیت‌های دستهٔ سوم نیز وضعیت N هستند. لذا همهٔ تالی‌های وضعیت $(a, a + k)$، وضعیت N هستند. در نتیجه وضعیت $(a, a + k)$، یگانه وضعیت P در بین وضعیت‌ها با اختلاف k مهره است.

به کمک استقرائی که در اثبات قضیهٔ فوق بیان کردیم، می‌توان همهٔ وضعیت‌های P در بازی وایتهوف را پیدا کرد. در جدول ۱.۲ وضعیت‌های P که اختلاف دو دسته در آنها $k = \circ, ۱, ۲, \ldots, ٦$ مهره است را نشان داده‌ایم.

جدول ۱.۲ وضعیت‌های P در بازی وایتهوف.

وضعیت	(۰, ۰)	(۱, ۲)	(۳, ۵)	(۴, ۷)	(٦, ۱۰)	(۸, ۱۳)	(۹, ۱۵)
اختلاف دو دسته	۰	۱	۲	۳	۴	۵	٦

همان‌طور که در این جدول می‌بینید، اولین عدد در هر زوج برابر کوچک‌ترین عددی است که هنوز ظاهر نشده است. وایتهوف توانسته است فرمول کلی وضعیت‌های P در این بازی را به دست آورد. در واقع همهٔ وضعیت‌های P در بازی وایتهوف، وضعیت‌هایی به‌صورت $(\lfloor k\tau \rfloor, \lfloor k\tau \rfloor + k)$، برای عدد صحیح نامنفی k، هستند که τ عدد طلایی $\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ است [۳۱].

۴.۲ k—نیم مور (§)

یک تعمیم از بازی نیم به همراه یک نظریهٔ زیبا و مشابه با بازی نیم، توسط ای.اچ. مور[۱] معرفی شد. این بازی، k—نیم مور نامیده می‌شود [۱۷]. در این بازی n دسته مهره وجود دارد و بازی مانند نیم جلو می‌رود، با این تفاوت که در هر حرکت، یک بازیکن می‌تواند حداکثر k دسته را انتخاب و هر تعداد دلخواه مهره از این دسته‌ها بردارد (k ثابت است). باید حداقل یک مهره از حداقل یک دسته برداشته شود. برای $k = ۱$، این بازی همان نیم معمولی است. (بنابراین نیم معمولی، ۱—نیم مور است.)

در ادامه قصد داریم تعمیمی از جمع نیم ارائه کرده و به کمک آن، بازی k—نیم مور را تحلیل کنیم. مشابه جمع نیم، جمع k—نیمِ دو عدد صحیح نامنفی را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف ۲.۲ جمع k—نیمِ دو عدد صحیح نامنفی که در مبنای ۲ نوشته شده‌اند، عبارت است از جمع آنها در مبنای $k + ۱$، بدون در نظر گرفتن رقم انتقالی. به عبارت دیگر جمع k—نیم عددهای $x = (x_m \ \ldots \ x_۰)_۲$ و $y = (y_m \ \ldots \ y_۰)_۲$، برابر عدد $z = (z_m \ \ldots \ z_۰)_{(k+۱)}$ است که برای هر k، $۰ \le k \le m$، $z_k = x_k + y_k \pmod{k+۱}$. در این‌صورت می‌نویسیم $x \oplus_k y = z$.

مانند جمع نیم، جمع k—نیم نیز دارای خاصیت جابجایی و شرکت‌پذیری است. به عنوان یک مثال در زیر جمع ۲—نیم سه عدد ۱۳، ۱۲ و ۸ را محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{array}{rcl} ۱۳ & = & (۱۱۰۱)_۲ \\ \oplus_۲ \ ۱۲ & = & (۱۱۰۰)_۲ \\ \oplus_۲ \ \ ۸ & = & (۱۰۰۰)_۲ \\ \hline \text{جمع ۲—نیم} & = & (۰۲۰۱)_۳ = ۱۹. \end{array}$$

قضیهٔ زیر نوع وضعیت‌ها در بازی k—نیم مور را به کمک جمع k—نیم اندازهٔ دسته‌ها مشخص می‌کند.

---

[۱] E.H. Moore

قضیه ۳.۲ (مور) وضعیت $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ در بازی k—نیم مور، یک وضعیت P است اگر و تنها اگر $x_1 \oplus_k x_2 \oplus_k \cdots \oplus_k x_n = 0$.

برهان. مجموعهٔ $\mathcal{P}$ را مجموعهٔ همهٔ وضعیت‌های بازی با جمع k—نیم صفر و $\mathcal{N}$ را مکمل آن در نظر گرفته و درستی سه شرط وضعیت‌های N و P را نشان می‌دهیم.
(۱) همهٔ وضعیت‌های پایانی عضو $\mathcal{P}$ هستند. زیرا تنها وضعیت پایانی وضعیتی است که هیچ مهره‌ای در هیچ‌کدام از دسته‌ها نباشد و داریم $0 \oplus_k \cdots \oplus_k 0 = 0$.
(۲) از هر وضعیت موجود در $\mathcal{N}$ یک حرکت به یک وضعیت در $\mathcal{P}$ وجود دارد. در اینجا چگونگی ساختن این حرکت را بیان می‌کنیم. ابتدا عددها را در مبنای ۲ زیر هم می‌نویسیم. حداقل در یکی از ستون‌ها تعداد یک‌ها بر $k + 1$ بخش‌پذیر نیست. به اولین ستون از سمت چپ که تعداد یک‌های آن به پیمانه $k + 1$ عددی مخالف صفر مانند t است توجه کنید. t سطری که رقم متناظر این ستونشان یک است را علامت می‌زنیم. اگر $t < k$، اولین ستون بعدی که تعداد یک‌های آن مضرب $k + 1$ نیست را در نظر می‌گیریم و این کار را تکرار می‌کنیم، تا جایی که k سطر علامت زده شود یا ستون دیگری یافت نشود که تعداد یک‌های آن مضرب $k + 1$ نباشد. حال در سطرهای علامت زده شده رقم‌ها را به گونه‌ای تغییر می‌دهیم که تعداد یک‌های هر ستون مضرب $k + 1$ بشود. با این کار عدد مذکور کوچک می‌شود، زیرا بزرگ‌ترین رقمی که تغییر می‌کند، برابر ۱ است که به ۰ تبدیل می‌شود. در نتیجه این یک حرکت قانونی از یک وضعیت در $\mathcal{N}$ به یک وضعیت در $\mathcal{P}$ است.

(۳) هر حرکت از یک وضعیت در مجموعهٔ $\mathcal{P}$ به یک وضعیت در مجموعهٔ $\mathcal{N}$ منجر خواهد شد. اگر وضعیت $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ در $\mathcal{P}$ باشد و مثلاً $x_1, x_2, \ldots, x_t$ با یک حرکت به $x'_1, x'_2, \ldots, x'_t$ تبدیل شود، $1 \leq t \leq k$، که $(x'_1 < x_1)$، $(x'_2 < x_2)$، ... و $(x'_t < x_t)$، آن‌گاه نمی‌توانیم داشته باشیم $x_1 \oplus_k \cdots \oplus_k x_t \oplus_k \cdots \oplus_k x_n = 0 = x'_1 \oplus_k \cdots \oplus_k x'_t \oplus_k x_{t+1} \oplus_k \cdots \oplus_k x_n$ زیرا طبق قانون حذف خواهیم داشت $x_1 \oplus_k x_2 \oplus_k \cdots \oplus_k x_t = x'_1 \oplus_k x'_2 \oplus_k \cdots \oplus_k x'_t$. اگر اعداد x_1 تا x_t را زیر هم و x'_1 تا x'_t را زیر هم بنویسیم، چون $t \leq k$، تعداد یک‌های هر ستون در جمع x_1 تا x_t با تعداد یک‌های آن ستون در جمع x'_1 تا x'_t برابر است. حال

فرض کنید اولین تغییر در ستون j ام اتفاق بیفتد و رقم ۱ در x_i، در x'_i به ۰ تغییر کند. چون تعداد یک‌ها در ستون j ام تغییر نمی‌کند، پس باید در یک x_l، برای رسیدن به x'_l، رقم صفر ستون j ام به ۱ تغییر نماید. اما این کار عدد x_l را بزرگ می‌کند که مجاز نیست. پس داریم $x'_1 \oplus_k \cdots \oplus_k x'_t \oplus_k x_{t+1} \oplus_k \cdots \oplus_k x_n \neq 0$ و در نتیجه $(x'_1, \ldots, x'_t, x_{t+1}, \ldots, x_n)$ در $\mathcal{N}$ است.

این سه خاصیت نشان می‌دهد که $\mathcal{P}$ مجموعهٔ همهٔ وضعیت‌های P است.

۵.۲ تمرین

۱) الف) جمع نیم ۲۷ و ۱۷ چند است؟

ب) جمع نیم ۳۸ و x، برابر ۲۵ است. x را پیدا کنید.

ج) یک بازی نیم سه دسته‌ای که در آن دسته‌ها شامل ۷ و ۹ و x مهره هستند در نظر بگیرید. به ازای چه مقداری از x بازیکن اول بازنده است؟ آیا x یکتا است؟

۲) همهٔ حرکت‌های منجر به برد را در بازی نیم در حالت‌های زیر پیدا کنید.

الف) سه دسته حاوی ۱۲، ۱۹ و ۲۷ مهره.

ب) چهار دسته حاوی ۱۳، ۱۷، ۱۹ و ۲۳ مهره.

ج) به (الف) و (ب) بازی با قانون وارون پاسخ دهید.

۳) در بازی k—نیم مور با قانون وارون، بازی بهینه را تشریح کنید.

۴) نیم فرد. این بازی مشابه بازی نیم است با این تفاوت که در هر حرکت تنها می‌توانید تعداد فرد مهره از یک دسته بردارید. وضعیت‌های N و P را در بازی نیم فرد پیدا کنید. (راهنمایی: نشان دهید یک وضعیت در این بازی، وضعیت N است، اگر و تنها اگر تعداد دسته‌ها با فرد مهره، فرد باشد.)

۵) **نیمبل.** بازی نیمبل روی یک ردیف از خانه‌های شماره‌گذاری شده بازی می‌شود. تعداد متناهی سکه روی این خانه‌ها قرار گرفته است و یک خانه می‌تواند بیش از یک سکه را در خود جای دهد. یک حرکت عبارت است از برداشتن یکی از سکه‌ها و گذاشتن آن در یکی از خانه‌های سمت چپ آن. امکان رد شدن از روی بقیهٔ سکه‌ها و گذاشتن آن در خانه‌ای که حاوی یک یا چند سکه است نیز وجود دارد. بازیکن‌ها به نوبت حرکت می‌کنند و بازی هنگامی که همهٔ سکه‌ها در خانهٔ شمارهٔ صفر قرار گرفتند، پایان می‌یابد. بازیکنی که آخرین حرکت را کرده، برنده است. نشان دهید این بازی با تغییر ظاهر، همان بازی نیم است.
در وضعیت زیر با ٦ مهره، چه کسی برنده می‌شود؟ اگر بازیکن بعدی برنده می‌شود، حرکت منجر به برد او چیست؟

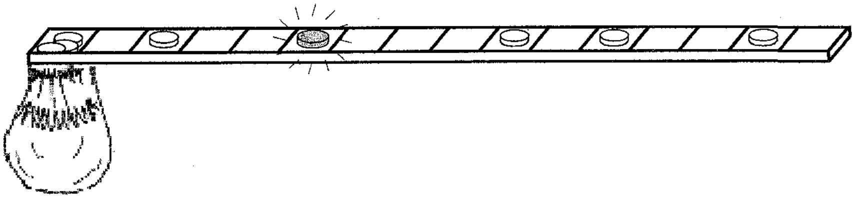
۰	۱	۲	۳	۴	۵	٦	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴
				○				○○	○	○			○	

٦) یک بازی با ۲۵ مهره روی یک ردیف شامل ۲۵ خانه انجام می‌شود. هر بازیکن در نوبت خود می‌تواند یک مهره را در یک خانهٔ آزاد قرار دهد یا مهره‌ای که پیش از آن در جدول گذاشته شده است را یک خانه به سمت راست منتقل کند (درصورتی که آن خانه آزاد باشد). در آغاز بازی همهٔ خانه‌ها آزاد هستند. بازی وقتی تمام می‌شود که همهٔ خانه‌ها به وسیلهٔ مهره‌ها اشغال شده باشند. کدام بازیکن برنده است؟ در حالت کلی برای مقادیر مختلف n، بازی را تحلیل کنید؟

۷) تعدادی سکه روی یک نوار که خانه‌بندی شده، قرار گرفته است و در هر خانه حداکثر یک سکه قرار دارد. یک حرکت عبارت است از حرکت یک سکه به سمت چپ با این محدودیت که یک خانه نمی‌تواند بیش از یک سکه را در خود جای دهد و یک سکه نمی‌تواند از روی سکهٔ دیگر عبور کرده و یا از نوار خارج شود. بازیکنان به نوبت حرکت می‌کنند و بازیکنی که آخرین حرکت را می‌کند برنده است. نشان دهید این بازی با یک تغییر ظاهر همان بازی نیم پلکانی است.
در وضعیت زیر با ۸ مهره کدام بازیکن برنده است؟

	○	○	○		○			○	○					○			○

۸) دلار نقره‌ای. این بازی توسط دو برین[۱] معرفی شد. در این بازی، قوانین مشابه قوانین بازی تمرین ۷ است، با این تفاوت که خانهٔ اول می‌تواند بیش از یک مهره را در خود جای دهد. (در واقع خانه اول به عنوان کیسه محسوب می‌شود.) علاوه‌براین، در میان سکه‌ها، یک سکهٔ مشخص با عنوان دلار نقره‌ای وجود دارد. بازیکنی که دلار نقره‌ای را در کیسه (خانهٔ اول) قرار دهد، بازنده است. با کمک تحلیل بازی تمرین ۷، تحلیلی برای این بازی ارائه دهید. در وضعیت شکل زیر کدام بازیکن برنده است؟ (دلار نقره‌ای با رنگ متمایز مشخص شده است.)



۹) ولتر. بازی ولتر توسط اسپراگ و ولتر معرفی شد و مورد بررسی قرار گرفت [۲۷] و [۲۹]. این بازی مشابه بازی نیمبل، تمرین ۵، است تنها با این تفاوت که در هر خانه حداکثر یک سکه جای می‌گیرد. به‌طور معادل می‌توانید بازی‌ای مشابه بازی نیم در نظر بگیرید که قوانین آن مثل بازی نیم است، فقط در طول بازی هیچ دو دسته‌ای نمی‌توانند اندازهٔ مساوی داشته باشند. اگر خانه‌های نوار از چپ به راست و با شروع از صفر شماره‌گذاری شوند، یک وضعیت در بازی ولتر با k سکه در مکان‌های x_1، x_2، ... و x_k را با $[x_1|x_2|\ldots|x_k]$ نشان می‌دهیم.

الف) ثابت کنید بازی ولتر با چهار سکه، معادل بازی نیم با چهار دسته است. (راهنمایی: ثابت کنید صفر کردن جمع نیم چهار دستهٔ غیرمساوی، هیچ‌گاه باعث مساوی کردن دو دسته نمی‌شود.)

ب) به کمک (الف) بازی ولتر با سه سکه را تحلیل کنید.

ج) ثابت کنید وضعیت $[x_1|x_2]$ در بازی ولتر با دو سکه، یک وضعیت P است، اگر و تنها اگر $x_1 \oplus x_2 = 1$.[۲]

[۱] De Bruijn

[۲] تحلیل بازی ولتر با k سکه بسیار پیچیده‌تر است. برای مشاهدهٔ نظریهٔ مرتبط با تحلیل این بازی در حالت کلی، [٦] را ببینید.

۱۰) **لاک‌پشت‌گردان.** یک خانواده از بازی‌ها که به بازی‌های سکه‌گردان معروف است، با یک ردیف از سکه‌ها اجرا می‌شود. یک حرکت شامل پشت و رو کردن تعدادی از سکه‌ها از پشت به رو یا از رو به پشت است. یک نظریهٔ چشمگیر در مورد این نوع بازی‌ها را می‌توانید در فصل ۴ ببینید. اینجا یک مثال ساده را مورد بحث قرار می‌دهیم که لاک‌پشت‌گردان نامیده می‌شود.

یک ردیف افقی از n سکه (یا لاک‌پشت) چیده شده است که بعضی از سکه‌ها به رو هستند و بعضی به پشت. یک حرکت عبارت است از پشت و رو کردن یکی از سکه‌ها از رو به پشت و علاوه‌براین، در صورت تمایل، پشت و رو کردن یکی از سکه‌های سمت چپ آن سکه (از رو به پشت یا از پشت به رو). برای مثال به دنباله‌ای از $n = ۱۳$ سکه توجه کنید. پشت را با T و رو را با H نشان داده‌ایم.

T	H	T	T	H	T	T	T	H	H	T	H	T
۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳

یک حرکت ممکن در این وضعیت، پشت و رو کردن سکهٔ نهم از رو به پشت و سکهٔ چهارم از پشت به رو است. می‌توانید این بازی را در وب‌گاه زیر امتحان کنید.

http://www.chlond.demon.co.uk/coins.html

الف) نشان دهید که این بازی با یک تغییر ظاهر، همان بازی نیم است. هر علامت H در مکان n را به عنوان یک دستهٔ نیم با n مهره در نظر بگیرید.

ب) با فرض درستی (الف)، یک حرکت منجر به برد را در وضعیت فوق بیان کنید.

فصل ۳

تابع SG و مجموع بازی‌ها

در فصل قبل با یک بازی مهم ترکیبیاتی به نام نیم آشنا شدیم و دیدیم که مفهوم جمع نیم چگونه می‌تواند این بازی را به‌طور کامل تحلیل نماید. ار. اچ. اسپراگ [۱] و پی. ام. گراندی [۲] هر کدام به‌طور مستقل ثابت کردند که این تحلیل را می‌توان به همهٔ بازی‌های ترکیبیاتی بی‌طرفانه تعمیم داد [۱۲] و [۲۵]. به این منظور به هر وضعیت در بازی، یک مقدار عددی نسبت داده و ثابت می‌شود هر بازی ترکیبیاتی بی‌طرفانه با یک دستهٔ نیم با تعدادی مشخص مهره معادل است. در نتیجه اگر بتوان یک بازی ترکیبیاتی را به چند بازی ساده‌تر که مستقل از یکدیگر هستند تجزیه کرد، آن‌گاه می‌توان با تحلیل هر یک از بازی‌های ساده‌تر و استفاده از نظریهٔ اسپراگ—گراندی، تحلیلی برای بازی اصلی ارائه داد. در این فصل به بیان دقیق نظریهٔ اسپراگ—گراندی پرداخته و در پایان برای دیدن کاربرد این نظریه در تحلیل بازی‌های ترکیبیاتی پیچیده‌تر، دسته‌ای از بازی‌ها به نام بازی‌های برداشتن و شکستن را معرفی و تحلیل می‌کنیم.

---

[۱] R. P. Sprague

[۲] P. M. Grundy

۱.۳ تابع اسپراگ—گراندی

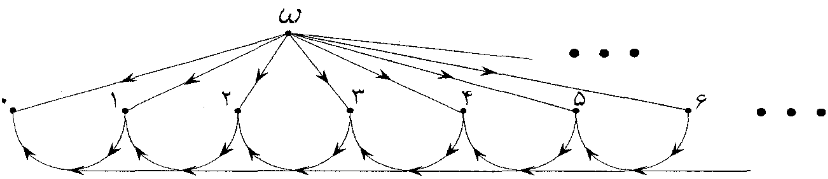
در این بخش می‌خواهیم به هر وضعیت در یک بازی بی‌طرفانه یک مقدار عددی نسبت دهیم که به نوع وضعیت‌های بازی مرتبط است. این نگاشت را تابع اسپراگ—گراندی، SG، می‌نامیم. در بخش ۲.۱ گراف یک بازی ترکیبیاتی را معرفی کردیم و دیدیم که شرط پایان‌پذیری بازی‌های ترکیبیاتی باعث می‌شود که گراف این بازی‌ها متوالیاً متناهی باشد. اگرچه می‌توان تابع SG را برای همهٔ گراف‌های متوالیاً متناهی تعریف کرد، اما تعریف این تابع در حالت کلی ممکن است مستلزم توسیع برد این تابع به اعداد اردینال باشد. برای اجتناب از این حالت، شرایط گراف بازی را به حالت خاص‌تری محدود می‌کنیم.

تعریف ۱.۳ گراف جهت‌دار $G = (X, E)$ را **متوالیاً کران‌دار** گوییم هرگاه برای هر رأس $x_0 \in X$، یک عدد N موجود باشد (احتمالاً وابسته به x_0) به‌طوری که هر گشت با شروع از x_0، طولی کمتر یا مساوی N داشته باشد.

اگر گراف G متناهی باشد، آن‌گاه شرط‌های متوالیاً کران‌دار و متوالیاً متناهی معادل‌اند و هر دو معادل با این هستند که گراف هیچ دوری نداشته باشد. (تمرین ۱)

توجه داشته باشید که گراف یک بازی ترکیبیاتی لزوماً متوالیاً کران‌دار نیست. به عنوان مثال، بازی‌ای را در نظر بگیرید که در آن ابتدا بازیکن اول تعداد مهره‌ها را انتخاب می‌کند و سپس بازیکنان با آن تعداد مهره بازی نیم را انجام می‌دهند. گراف این بازی که در شکل ۱.۳ نشان داده شده است، یک گراف متوالیاً متناهی است که متوالیاً کران‌دار نیست. زیرا هر گشتی از وضعیت شروع طول متناهی دارد و در نتیجه گراف متوالیاً متناهی است. اما چون هیچ کران بالایی برای طول یک گشت از وضعیت شروع وجود ندارد، گراف متوالیاً کران‌دار نیست.

حال تابع اسپراگ—گراندی را برای یک گراف جهت‌دار متوالیاً کران‌دار تعریف می‌کنیم.



شکل ۱.۳ یک گراف متوالیاً متناهی که متوالیاً کران‌دار نیست.

تعریف ۲.۳ تابع اسپراگ—گراندیِ گراف متوالیاً کران‌دار (X,E)، یک تابع $g\ :\ X \longrightarrow \mathbb{Z}^+ \cup \{\circ\}$ است به‌طوری که

$$g(x) = \min\{n\ :\ n \geq \circ\ ,\ \ n \neq g(y),\ \ y \in F(x)\}.$$

در واقع، $g(x)$ کوچک‌ترین عدد نامنفی است که در بین مقادیر اسپراگ—گراندیِ تالی‌های x یافت نشود. اگر **کمترین ناموجود** یا mex یک مجموعه از اعداد نامنفی را کوچک‌ترین عدد نامنفی بیرون از آن مجموعه تعریف کنیم، می‌توانیم به سادگی بنویسیم $g(x) = \text{mex}\{g(y)\ :\ y \in F(x)\}$. توجه کنید که $g(x)$ به‌طور بازگشتی تعریف شده است؛ یعنی برای تعریف $g(x)$، فرض می‌کنیم $g(y)$، برای همهٔ yهای تالی x، تعریف شده و به وسیلهٔ آنها $g(x)$ را تعریف می‌کنیم. علت اینکه با این روش می‌توان $g(x)$ را برای هر $x \in X$ تعریف کرد، به متوالیاً متناهی بودن گراف برمی‌گردد. برای اثبات این مطلب، مثال الف.۴ در پیوست الف را ببینید.

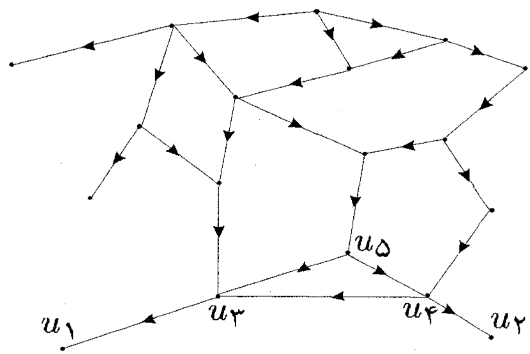
طبق تعریف برای یک رأس پایانی مانند x، داریم $g(x) = \circ$، $F(x) = \emptyset$. برای xهای غیرپایانی که همهٔ تالی‌های آنها پایانی هستند، داریم $g(x) = ۱$ و به همین ترتیب یافتن این تابع برای رأس‌های دیگر ممکن است.

تعریف تابع اسپراگ—گراندی می‌تواند به گراف‌های متوالیاً متناهی تعمیم یابد. این تعمیم نیازمند یک تغییر جزئی در تعریف ۲.۳ است. در یک گراف متوالیاً متناهی اگر X متناهی نباشد ممکن است مقادیر SG تالی‌های یک رأس همهٔ اعداد نامنفی را اختیار کنند. بنابراین باید در تعریف ۲.۳، برد g را به جای $\mathbb{Z}^+ \cup \{\circ\}$، یک اردینال قرار دهیم. به عنوان مثال در بازی شکل ۱.۳ مقدار SG وضعیت ابتدائی برابر کوچک‌ترین اردینال بزرگ‌تر از

همهٔ اعداد طبیعی است که معمولاً با ω نشان می‌دهیم. همچنین ممکن است وضعیت‌هایی با مقادیر SG، $\omega+1$، $\omega+2$، ...، 2ω، ...، ω^2، ...، ω^ω، ... نیز به دست بیاید. در این فصل به جز تمرین ۱۴، بیش از این به این موضوع نمی‌پردازیم. برای آشنایی مختصر با اعداد اردینال و تعریف تابع SG برای گراف‌های متوالیاً متناهی، پیوست الف.۴ را ببینید.

در ادامه برای تبیین مطلب، چند مثال می‌آوریم. در کلیه مثال‌ها $g(x)$ را به‌طور استقرائی پیدا می‌کنیم. گرچه برای برخی گراف‌ها یافتن این تابع نیازمند روش‌های جزئی‌تر است، ولی تابع اسپراگ—گراندی برای همهٔ گراف‌های متوالیاً کران‌دار به‌طور یکتا موجود و متناهی است.

مثال ۱.۳ گراف جهت‌دار زیر را در نظر بگیرید.



برای نمونه مقدار SG چند رأس را به دست می‌آوریم. رأس‌های u_1 و u_2 پایانی هستند، بنابراین $g(u_1) = g(u_2) = 0$. تنها تالی رأس u_3، رأس پایانی u_1 است، لذا $g(u_3) = 1$. تالی‌های رأس u_4، رأس‌های u_2 و u_3 هستند، در نتیجه $g(u_4) = \text{mex}\{0, 1\} = 2$. تالی‌های رأس u_5، رأس‌های u_3 و u_4 هستند که مقدار SG آنها ۱ و ۲ است، در نتیجه $g(u_5) = \text{mex}\{1, 2\} = 0$. به همین صورت می‌توان مقادیر SG بقیه رأس‌ها را به دست آورد.

مثال ۲.۳ بازی تفاضلی با مجموعهٔ تفاضلی $S = \{1, 2, 3\}$ را در نظر بگیرید. رأس پایانی ۰ مقدار SG صفر دارد. رأس ۱ تنها به ۰ حرکت می‌کند و $g(0) = 0$، پس

$g(1)=\mathrm{mex}\{0\}=1$. به‌طور مشابه، رأس ۲ می‌تواند به ۰ و ۱ حرکت کند و $g(0)=0$ و $g(1)=1$، پس $g(2)=\mathrm{mex}\{0,1\}=2$. رأس ۳ می‌تواند به ۰، ۱ و ۲ حرکت کند و $g(0)=0$، $g(1)=1$ و $g(2)=2$، پس $g(3)=3$. ولی رأس ۴ تنها به ۱، ۲ و ۳ حرکت می‌کند که به ترتیب مقادیر SG ۱، ۲ و ۳ دارند، پس $g(4)=\mathrm{mex}\{1,2,3\}=0$. اگر این روش را ادامه دهیم، می‌بینیم که

x	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	...
$g(x)$	۰	۱	۲	۳	۰	۱	۲	۳	۰	۱	۲	۳	۰	۱	۲	...

بنابراین $g(x)=(x \pmod 4)$؛ یعنی $g(x)$ برابر با باقیماندهٔ x بر ۴ است. در حالت کلی تابع SG بازی تفاضلی $G(m)$ با مجموعهٔ تفاضلی $S_m=\{1,2,\ldots,m\}$، به‌صورت $g_m(x)=(x \pmod{m+1})$ است (تمرین ۴).

مثال ۳.۳ حداقل نصف. بازی‌ای با یک دسته مهره را در نظر بگیرید با این قانون که هر بازیکن در نوبت خود در هر حرکت باید حداقل نصف مهره‌ها را بردارد. تنها وضعیت پایانی، صفر است. اگر تابع SG را محاسبه کنیم، خواهیم داشت

x	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	...
$g(x)$	۰	۱	۲	۲	۳	۳	۳	۳	۴	۴	۴	۴	۴	...

با استفاده از استقرا روی x به راحتی می‌بینیم که $g(x)$ برابر کوچک‌ترین k ای است که 2^k بزرگ‌تر از x باشد، $g(x)=\min\{k : 2^k > x\}$. (تمرین ۴)

۲.۳ تابع SG و وضعیت‌های N و P

وقتی تابع اسپراگ–گراندیِ گراف یک بازی برای همهٔ وضعیت‌های آن داده شده باشد، تحلیل آن بازی ساده است. این مطلب را در قضیه زیر می‌بینیم.

قضیه ۱.۳ در هر بازی ترکیبیاتی بی‌طرفانه با تابع اسپراگ—گراندی g، وضعیت x، یک وضعیت P است اگر و تنها اگر $g(x) = 0$. در نتیجه استراتژی برد در هر وضعیت، حرکت به وضعیتی با مقدار SG صفر است.

برهان. برای اثبات قضیه قرار می‌دهیم $\mathcal{P} = \{x \ : \ g(x) = 0\}$. کافی است شروط وضعیت‌های N و P در تعریف ۶.۱ را برای مجموعهٔ $\mathcal{P}$ بررسی کنیم.

۱) اگر x یک وضعیت پایانی باشد، آن‌گاه $g(x) = 0$ و $x \in \mathcal{P}$.

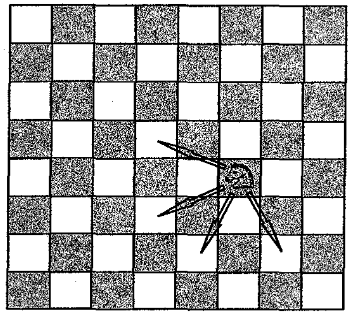
۲) برای هر $x \notin \mathcal{P}$، یعنی $g(x) \neq 0$، حداقل یک تالی y موجود است که $g(y) = 0$، یعنی $y \in \mathcal{P}$، زیرا $g(x) \neq 0$ به این معنی است که عدد ۰ در مقدار SG تالی‌های x ظاهر شده است.

۳) برای هر وضعیت $x \in \mathcal{P}$، $g(x) = 0$، در نتیجه برای هر تالی x مثل y، داریم $g(y) \neq 0$، یعنی $y \notin \mathcal{P}$.

در مثال زیر تابع SG یک بازی به نام اسب سفید را محاسبه می‌کنیم.

مثال ۴.۳ بازی اسب سفید. در این بازی یک اسب سفید در صفحهٔ شطرنج قرار دارد و در هر نوبت می‌تواند یک حرکت به‌صورت L انجام دهد (دو خانه در یک جهت و یک خانه در جهت دیگر) اما باید حرکت دو خانه در یک جهت به سمت چپ یا پایین باشد. وقتی که اسب نتواند حرکت قانونی انجام دهد بازی تمام می‌شود و بازیکنی که آخرین حرکت را انجام داده، برنده است. در شکل ۲.۳ (الف) حرکت‌های مجاز در بازی اسب سفید نشان داده شده است.

هر خانه از صفحهٔ شطرنج را با مختصات آن نمایش داده و مقدار SG وضعیتی که اسب در خانهٔ (i, j) قرار دارد را درون آن خانه یادداشت می‌کنیم. مثلاً وضعیت‌های (۱, ۱)، (۱, ۲)، (۲, ۱) و (۲, ۲) وضعیت‌های پایانی هستند و مقدار SG آنها صفر است. از وضعیت‌های (۱, ۳) و (۳, ۱) همهٔ حرکت‌ها به وضعیت پایانی منجر می‌شود و لذا مقدار SG این وضعیت‌ها ۱ است. با ادامهٔ استدلال فوق به جدول شکل ۲.۳ (ب) می‌رسیم.



(الف)

۱	۱	۲	۳	۱	۱	۲	۱
۱	۱	۲	۲	۱	۲	۲	۲
۰	۰	۲	۳	۰	۰	۲	۱
۰	۰	۳	۴	۰	۰	۱	۱
۱	۱	۲	۱	۴	۳	۲	۳
۱	۲	۲	۲	۳	۲	۲	۲
۰	۰	۲	۱	۰	۰	۱	۱
۰	۰	۱	۱	۰	۰	۱	۱

(ب)

شکل ۲.۳ الف) حرکت‌های مجاز در بازی اسب سفید. ب) مقادیر SG وضعیت‌های بازی اسب سفید.

از روی جدول شکل ۲.۳(ب) می‌بینیم که مقدار SG وضعیت شکل ۲.۳(الف) برابر ۳ است. لذا بنا به قضیهٔ ۱.۳ این وضعیت، یک وضعیت N بوده و تنها حرکت منجر به برد از آن، حرکت به دو خانه به پایین و یک خانه به چپ است که به مقدار SG صفر منجر می‌شود.

تابع SG علاوه بر نشان دادن P یا N بودن یک وضعیت، اطلاعات بیشتری نیز در اختیار ما قرار می‌دهد. همان‌گونه که در بخش بعد خواهیم دید، این اطلاعات اضافی به ما اجازه می‌دهد تا مجموع چند بازی را که قطعاً پیچیده‌تر از تک تک بازی‌ها است، تحلیل کنیم.

۳.۳ مجموع بازی‌ها

با داشتن چند بازی ترکیبیاتی مختلف، می‌توانیم یک بازی جدید ایجاد کنیم که طبق قوانین زیر اجرا می‌شود. فرض می‌کنیم هر یک از بازی‌ها در یک وضعیت شروع قرار گرفته است. بازیکنان به ترتیب حرکت می‌کنند. یک حرکت قانونی برای یک بازیکن عبارت است از انتخاب یکی از بازی‌ها و انجام یک حرکت قانونی در آن بازی و دست نخورده گذاشتن بقیهٔ بازی‌ها. بازی تا جایی که همهٔ بازی‌ها به وضعیت پایانی برسند،

ادامه می‌یابد. وقتی که هیچ حرکتی ممکن نیست، بازیکنی که آخرین حرکت را انجام داده، برنده است. بازی‌ای که از ترکیب چند بازی به صورت فوق تشکیل می‌شود، مجموع بازی‌ها نامیده می‌شود. حال این سؤال مطرح می‌شود که آیا می‌توان با در دست داشتن اطلاعات وضعیت‌ها در هر یک از بازی‌های مؤلفه، اطلاعاتی در مورد وضعیت‌های بازی مجموع به دست آورد؟

در فصل ۱ دیدیم که یک روش مناسب برای نمایش یک بازی ترکیبیاتی، استفاده از گراف‌های جهت‌دار است. مجموع چند بازی ترکیبیاتی را نیز می‌توان با استفاده از گراف‌های جهت‌دار به‌طور دقیق نمایش داد.

تعریف ۳.۳ فرض کنید n گراف جهت‌دار $G_1 = (X_1, E_1)$، $G_2 = (X_2, E_2)$، ... و $G_n = (X_n, E_n)$ از n بازی ترکیبیاتی داده شده است. گراف جدید $G = (X, E)$ را که به‌صورت زیر تعریف می‌شود **مجموع** G_1، G_2، ... و G_n نامیده و با $G = G_1 + G_2 + \cdots + G_n$ نشان می‌دهیم. مجموعهٔ رأس‌های X برابر حاصل‌ضرب دکارتی X_iها است، $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$؛ یعنی هر رأس G یک n—تایی مرتب $(x_1, \ldots, x_n)$ است که برای هر i، $x_i \in X_i$. برای یک رأس $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X$، مجموعهٔ همهٔ تالی‌های x به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\begin{aligned} F(x) = F(x_1, \ldots, x_n) \quad &= \quad F_1(x_1) \times \{x_2\} \times \cdots \times \{x_n\} \\ &\cup \quad \{x_1\} \times F_2(x_2) \times \cdots \times \{x_n\} \\ &\cup \quad \cdots \\ &\cup \quad \{x_1\} \times \{x_2\} \times \cdots \times F_n(x_n). \end{aligned}$$

بنابراین یک حرکت از $x = (x_1, \ldots, x_n)$، عبارت است از حرکت دقیقاً یکی از x_iها به یکی از تالی‌های آن در G_i، یعنی یک رأس در $F_i(x_i)$. بازی ترکیبیاتی که روی گراف G اجرا می‌شود، **مجموع بازی‌های** G_1، G_2، ... و G_n نامیده می‌شود.

به عنوان مثال می‌توان بازی نیم سه دسته‌ای را به عنوان مجموع سه بازی نیم یک دسته‌ای در نظر گرفت. این مثال نشان می‌دهد که ممکن است هر یک از مؤلفه‌ها، یک بازی بدیهی باشند ولی مجموع، پیچیده باشد. توجه کنید که اگر هر یک از گراف‌های G_i

متوالیاً کران‌دار باشد، گراف مجموع نیز متوالیاً کران‌دار است و ماکزیمم طول یک گشت در گراف مجموع، برابر مجموع ماکزیمم طول گشت‌ها در هر یک از گراف‌های مؤلفه است.

۴.۳ قضیه اسپراگ—گراندی

در این بخش نشان می‌دهیم چگونه می‌توان با به کار بردن توابع SG بازی‌های مؤلفه، تابع SG مجموع این بازی‌ها را به دست آورد.

قضیهٔ زیر روشی برای پیدا کردن تابع SG مجموع بازی‌های ترکیبیاتی، هنگامی که تابع SG هر یک از مؤلفه‌ها داده شده است، به دست می‌دهد. این قضیه که قضیهٔ اسپراگ—گراندی نامیده می‌شود، بیان می‌کند که تابع SG مجموع چند بازی با جمع نیم توابع SG مؤلفه‌های آن بازی برابر است. این قضیه می‌تواند به عنوان یک تعمیم شگفت‌آور از قضیهٔ بوتون (قضیه ۱.۲) در نظر گرفته شود. اثبات آن نیز مشابه اثبات قضیهٔ بوتون است.

قضیه ۲.۳ (اسپراگ—گراندی) اگر g_i تابع SG گراف G_i، $i = ۱, ۲, \ldots, n$، و g تابع SG گراف $G = G_۱ + G_۲ + \cdots + G_n$ باشد، آن‌گاه برای هر رأس $(x_۱, \ldots, x_n)$ در گراف G داریم

$$g(x_۱, \ldots, x_n) = g_۱(x_۱) \oplus \cdots \oplus g_n(x_n).$$

برهان. قضیه را با استقرا ثابت می‌کنیم. رأس دلخواه $x = (x_۱, \ldots, x_n)$ از X را در نظر بگیرید. اگر x در G پایانی باشد آن‌گاه همهٔ x_iها نیز در G_i پایانی هستند. بنابراین $g(x) = ۰ = ۰ \oplus \cdots \oplus ۰ = g_۱(x_۱) \oplus \cdots \oplus g_n(x_n)$. حال فرض کنید قضیه برای همهٔ تالی‌های x درست است و قرار دهید $b = g_۱(x_۱) \oplus \cdots \oplus g_n(x_n)$. دو مطلب را برای تابع g نشان می‌دهیم.

۱) برای هر عدد نامنفی $a < b$، مقدار g در حداقل یکی از تالی‌های x برابر a است.

۲) مقدار g در هیچ‌کدام از تالی‌های x برابر b نیست.

در نتیجه مقدار SG در x، یعنی کوچک‌ترین عدد نامنفی که در تالی‌های x ظاهر نشده است، برابر b است.

برای اثبات (۱)، قرار می‌دهیم $d = a \oplus b$ و k را تعداد ارقام d در بسط دودویی آن در نظر می‌گیریم. بنابراین $۲^{k-۱} \leq d < ۲^k$ و رقم k ام d از سمت راست برابر ۱ است. اما چون $a < b$، پس رقم k ام b برابر ۱ و رقم k ام a برابر ۰ است. چون $b = g_۱(x_۱) \oplus \cdots \oplus g_n(x_n)$، حداقل یک x_i وجود دارد که رقم k ام $g_i(x_i)$ برابر ۱ باشد. پس $d \oplus g_i(x_i) < g_i(x_i)$، در نتیجه در گراف G_i، مقدار $d \oplus g_i(x_i)$ در تالی‌های x_i ظاهر می‌شود، یعنی یک حرکت از x_i به یک x'_i موجود است به‌طوری که $g_i(x'_i) = d \oplus g_i(x_i)$. بنابراین حرکت از $(x_۱, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ به $(x_۱, \ldots, x_{i-۱}, x'_i, x_{i+۱}, \ldots, x_n)$ یک حرکت قانونی در بازی G است و طبق فرض استقرا داریم

$$
\begin{aligned}
g(x_۱, \ldots, x_{i-۱}, x'_i, x_{i+۱}, \ldots, x_n) &= g_۱(x_۱) \oplus \cdots \oplus g_i(x'_i) \oplus \cdots \oplus g_n(x_n) \\
&= d \oplus g_۱(x_۱) \oplus \cdots \oplus g_i(x_i) \oplus \cdots \oplus g_n(x_n) = d \oplus b = a.
\end{aligned}
$$

برای نشان دادن (۲) با استفاده از برهان خلف، فرض می‌کنیم x، یک تالی با مقدار تابع g برابر b داشته باشد. بدون کم شدن از کلیت مسأله فرض می‌کنیم این حرکت در بازی اول اتفاق افتاده است؛ یعنی $(x'_۱, x_۲, \ldots, x_n)$ یک تالیِ $(x_۱, x_۲, \ldots, x_n)$ است که $g_۱(x'_۱) \oplus g_۲(x_۲) \oplus \cdots \oplus g_n(x_n) = b = g_۱(x_۱) \oplus g_۲(x_۲) \oplus \cdots \oplus g_n(x_n)$. طبق قانون حذف داریم $g_۱(x'_۱) = g_۱(x_۱)$ و این یک تناقض است، چون مقدار SG هیچ وضعیتی نمی‌تواند با مقدار SG تالی آن برابر باشد.

یک نتیجه قابل توجه از این قضیه، این است که هر بازی ترکیبیاتی بی‌طرفانه، هنگامی که به عنوان یکی از مؤلفه‌های یک جمع از چنین بازی‌هایی در نظر گرفته می‌شود، رفتاری مانند یک دستهٔ نیم دارد؛ یعنی می‌تواند بدون تغییر نتیجه و صرف‌نظر از اینکه مؤلفه‌های دیگر چه باشند، با یک دسته نیم از یک تعداد مناسب مهره جایگزین شود. این مقدار مناسب برابر با مقدار SG آن مؤلفه در وضعیت شروع است.

نتیجه ۱.۳ هر بازی ترکیبیاتی بی‌طرفانه با یک دستهٔ نیم معادل است.

در نتیجه اگر بتوان یک بازی ترکیبیاتی را به چند بازی مستقل تجزیه کرد، برای تحلیل این بازی، کافی است تابع SG هر یک از بازی‌های مؤلفه را به دست آورده و جمع نیم این توابع را محاسبه کنیم. سپس با استفاده از قضیهٔ ۱.۳، نوع وضعیت‌ها و استراتژی‌های برد را مشخص نماییم. در ادامه با استفاده از قضیهٔ اسپراگ—گراندی به تحلیل چند بازی می‌پردازیم.

مثال ۵.۳ مجموع بازی‌های تفاضلی

در مثال ۲.۳ دیدیم که تابع SG بازی تفاضلی $G(m)$ با مجموعهٔ تفاضلی $S_m = \{۱, ۲, \ldots, m\}$، به‌صورت $g_m(x) = (x \pmod{m + ۱})$ است. حال به مجموع سه بازی توجه کنید. در بازی اول، $m = ۳$ و دسته ۹ مهره دارد. در بازی دوم، $m = ۵$ و دسته ۱۰ مهره دارد و در بازی سوم، $m = ۷$ و دسته ۱۴ مهره دارد. بنابراین در حال اجرای بازی $G(۳) + G(۵) + G(۷)$ هستیم که وضعیت شروع آن $(۹, ۱۰, ۱۴)$ است. مقدار SG این وضعیت برابر است با $g(۹, ۱۰, ۱۴) = g_۳(۹) \oplus g_۵(۱۰) \oplus g_۷(۱۴) = ۱ \oplus ۴ \oplus ۶ = ۳$ که وضعیت N است. یک حرکت مناسب برای تبدیل این وضعیت به یک وضعیت P انجام یک حرکت در بازی $G(۷)$ است به گونه‌ای که مقدار SG برابر ۵ داشته باشد. این حرکت عبارت است از برداشتن یک مهره از دستهٔ ۱۴تایی و باقی‌گذاشتن ۱۳ مهره در آن. حرکت منجر به برد دیگری هم وجود دارد. آیا می‌توانید آن را پیدا کنید؟

با این مثال اهمیت دانستن تابع SG یک بازی مشخص شد. حال مثال‌های بیشتری از محاسبهٔ تابع SG برای بازی‌های یک دسته‌ای مختلف بیان می‌کنیم.

مثال ۶.۳ زوج اگر نه همه— همه اگر فرد

به یک بازی یک دسته‌ای توجه کنید با این قانون که هر بازیکن در نوبت حرکت خود می‌تواند (۱) هر تعداد زوج مهره بردارد به شرط اینکه همهٔ دسته نباشد، (۲) همهٔ دسته را بردارد به شرط اینکه تعداد مهره‌های موجود، فرد باشد. دو وضعیت پایانی ۰ و ۲ وجود دارد. به روش استقرائی جدول زیر را محاسبه می‌کنیم.

x	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	...
$g(x)$	۰	۱	۰	۲	۱	۳	۲	۴	۳	۵	۴	...

می‌بینیم که برای $k \geq ۱$، $g(۲k) = k - ۱$ و $g(۲k - ۱) = k$. فرض کنیم این بازی با سه دستهٔ ۱۰، ۱۵ و ۲۰ مهره‌ای اجرا شود. مقادیر SG عبارتند از $g(۱۰) = ۴$، $g(۱۵) = ۸$ و $g(۲۰) = ۹$. چون $۴ \oplus ۸ \oplus ۹ = ۵$ صفر نیست، این یک وضعیت N است. یک حرکت منجر به برد تغییر مقدار SG دستهٔ اول از ۴ به ۱ است. چون $g(۴) = ۱$، برای این کار می‌توانیم ۶ مهره از دستهٔ ۱۰تایی را برداشته و ۴ مهره باقی بگذاریم.

مثال ۷.۳ مجموع سه بازی مختلف

فرض کنید شما یک بازی برداشتنی با سه دسته را بازی می‌کنید. برای دستهٔ اول با ۱۸ مهره، قوانین بازی قبل (زوج اگر نه همه— همه اگر فرد) به کار می‌رود. برای دستهٔ دوم با ۱۷ مهره، قوانین حداقل نصف اجرا می‌شود (مثال ۳.۳) و برای دستهٔ سوم با ۷ مهره قوانین نیم برقرار است. ابتدا مقادیر SG سه دسته را به ترتیب ۸، ۵ و ۷ به دست می‌آوریم. جمع نیم این سه عدد برابر ۱۰ بوده و در نتیجه وضعیت $(۱۸, ۱۷, ۷)$ یک وضعیت N است که می‌تواند با تغییر مقدار SG اولین دسته به ۲، به یک وضعیت P تبدیل شود. از جدول فوق می‌بینیم که دسته‌هایی با ۳ و ۶ مهره در بازی اول دارای مقدار SG برابر ۲ هستند. نمی‌توانیم از ۱۸ به ۳ حرکت کنیم، ولی می‌توانیم به ۶ حرکت کنیم. پس یک حرکت بهینه، انجام بازی اول و برداشتن ۱۲ مهره از دستهٔ ۱۸ مهره‌ای و باقی گذاشتن ۶ مهره است.

۵.۳ بازی‌های برداشتن و شکستن

تعداد زیادی از بازی‌های ترکیبیاتی بی‌طرفانهٔ دیگری وجود دارند که با به کارگیری روش‌های گفته شده حل می‌شوند. در این بخش بازی‌های برداشتن و شکستن را توضیح

می‌دهیم. بازی‌های برداشتن و شکستن، بازی‌هایی هستند که تحت قوانین آن بازیکنان می‌توانند تعدادی مهره بردارند و (یا) تحت شرایط خاصی یک دسته را به دو یا چند دسته تقسیم کرده و در نتیجه تعداد دسته‌ها را افزایش دهند.

مثال ۸.۳ نیم لاسکر

یک تعمیم بازی نیم به یک بازی «برداشتن و شکستن»، نیم لاسکر نام دارد که توسط امانوئل لاسکر[۱] قهرمان مسابقات جهانی شطرنج در سال‌های ۱۸۹۴ تا ۱۹۲۱ ارائه شد [۱۵].

فرض کنید هر بازیکن در نوبت خود اجازه دارد:
(۱) مانند بازی نیم از یک دسته به هر تعداد دلخواه مهره بردارد یا (۲) یک دسته شامل حداقل دو مهره را به دو دستهٔ غیرتهی تقسیم کند (حق حذف هیچ مهره‌ای را ندارد).
به وضوح تابع SG برای یک بازی یک دسته‌ای از این نوع، در $g(۰) = ۰$ و $g(۱) = ۱$ صدق می‌کند. تالی‌های ۲ عبارتند از ۰ و ۱ و $(۱, ۱)$ که به ترتیب مقادیر SG برابر ۰، ۱ و $۰ = ۱ \oplus ۱$ دارند؛ بنابراین $g(۲) = ۲$. تالی‌های ۳ عبارتند از ۰، ۱، ۲ و $(۱, ۲)$ با مقادیر SG برابر ۰، ۱، ۲ و $۳ = ۲ \oplus ۱$؛ پس $g(۳) = ۴$. اگر این روند را ادامه دهیم، می‌بینیم

x	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	...
$g(x)$	۰	۱	۲	۴	۳	۵	۶	۸	۷	۹	۱۰	۱۲	...

بنابراین حدس می‌زنیم برای هر $k \geq ۰$، $g(۴k+۱) = ۴k+۱$، $g(۴k+۲) = ۴k+۲$، $g(۴k+۳) = ۴k+۴$ و $g(۴k+۴) = ۴k+۳$. درستی این حدس به سادگی به وسیله استقرا قابل تشخیص است.

۱) تالی‌های $۴k + ۱$ که فقط یک دسته دارند، دارای مقادیر SG از ۰ تا $۴k$ هستند و آنهایی که شامل دو دسته هستند، $(۴k, ۱)$، $(۴k - ۱, ۲)$، ...، $(۲k + ۱, ۲k)$،

---
[۱] E. Lasker

مقادیر SG زوج دارند. پس $g(۴k + ۱) = ۴k + ۱$.

۲) تالی‌های $۴k + ۲$ که شامل یک دسته هستند، مقادیر SG از ۰ تا $۴k + ۱$ دارند و آنهایی که شامل دو دسته هستند، $(۴k + ۱, ۱)$، $(۴k, ۲)$، …، $(۲k + ۱, ۲k + ۱)$، یکی در میان دارای مقادیر SG تقسیم‌پذیر بر ۴ و فرد می‌باشند، پس $g(۴k + ۲) = ۴k + ۲$.

۳) تالی‌های $۴k + ۳$ که فقط یک دسته دارند، دارای مقادیر SG از ۰ تا $۴k + ۲$ می‌باشند و آنهایی که شامل دو دسته هستند، $(۴k + ۲, ۱)$، $(۴k + ۱, ۲)$، …، $(۲k + ۲, ۲k + ۱)$، مقادیر SG فرد دارند؛ به‌ویژه $g((۴k + ۲, ۱)) = ۴k + ۳$، بنابراین $g(۴k + ۳) = ۴k + ۴$.

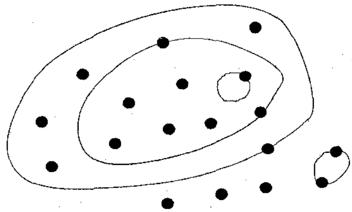
۴) نهایتاً، تالی‌های $۴k + ۴$ که شامل یک دسته هستند، مقادیر SG از ۰ تا $۴k + ۲$ دارند و آنهایی که شامل دو دسته هستند، $(۴k + ۳, ۱)$، $(۴k + ۲, ۲)$، …، $(۲k + ۲, ۲k + ۲)$، یکی در میان دارای مقادیر SG با باقیمانده ۱ بر ۴ و زوج می‌باشند، پس $g(۴k + ۴) = ۴k + ۳$.

فرض کنید شما یک نیم لاسکر را بازی می‌کنید و در وضعیتی با سه دسته حاوی ۲، ۵ و ۷ مهره هستید. حرکت شما چیست؟ ابتدا تابع SG وضعیت‌های مؤلفه‌ها را به ترتیب ۲، ۵ و ۸ به دست می‌آوریم. جمع نیم این سه عدد برابر ۱۵ است و شما باید وضعیت با مقدار SG برابر ۸ را به وضعیتی با مقدار SG برابر ۷ تغییر دهید. این کار با تقسیم دستهٔ ۷ مهره‌ای به دو دستهٔ ۱ و ٦ مهره‌ای امکان‌پذیر است. در حرکت بعدی، رقیب شما با یک نیم لاسکر چهار دسته‌ای مواجه خواهد شد که هر کدام شامل ۱، ۲، ۵ و ٦ مهره هستند. این وضعیت، مقدار SG صفر دارد و بنابراین یک وضعیت P است.

مثال ۹.۳ بازی ریمز

یک وضعیت در بازی ریمز، یک مجموعهٔ متناهی از نقاط یک صفحه است که احتمالاً به وسیلهٔ تعدادی حلقهٔ بسته غیرمتقاطع از هم جدا شده‌اند. یک حرکت عبارت است از

کشیدن یک حلقهٔ بسته که از حداقل یکی از نقاط می‌گذرد ولی هیچ حلقهٔ دیگری را قطع نمی‌کند. بازیکنان به نوبت حرکت کرده و آخرین بازیکنی که حرکت می‌کند، برنده است.



شکل ۳.۳ یک وضعیت در بازی ریمز.

اگر به ازاء هر ناحیهٔ بسته، یک دسته با تعداد مهره‌های برابر با تعداد نقاط محصور در آن ناحیه در نظر بگیریم، این یک بازی برداشتن و شکستن خواهد بود که در آن در هر نوبت یک بازیکن می‌تواند چند مهره از یک دسته بردارد (حداقل یک مهره) و در صورت تمایل آن دسته را به دو دستهٔ کوچک‌تر تقسیم کند. نقاط روی حلقهٔ رسم شده متناظر با مهره‌های حذف شده و نقاط درون و بیرون حلقه متناظر با شکستن دسته است. بنابراین کافی است تابع SG هر دسته را بیابیم.

با استفاده از استقرا ثابت می‌کنیم برای هر دسته با n مهره، $g(n) = n$. مقادیر SG تالی‌های یک دسته با n مهره، همهٔ مقادیر ۰ تا $n - ۱$ را شامل می‌شود (با برداشتن مهره بدون تقسیم دسته). همچنین اگر یک دستهٔ n مهره‌ای با یک حرکت به دو دسته با $n_۱$ و $n_۲$ مهره تبدیل شود، طبق فرض استقرا $g(n_۱) = n_۱$ و $g(n_۲) = n_۲$. می‌دانیم که همواره $n_۱ \oplus n_۲ \leq n_۱ + n_۲ < n$، پس n در مقادیر SG تالی‌های دستهٔ n مهره‌ای ظاهر نمی‌شود. بنابراین $g(n) = n$.

با توضیحات فوق می‌بینیم که بازی ریمز را می‌توان فرم تغییر یافته‌ای از بازی نیم در نظر گرفت. به عنوان مثال وضعیت داده شده در شکل ۳.۳ معادل بازی نیم با دسته‌های ۳ و ۴ و ۵ مهره‌ای است. چون $۳ \oplus ۴ \oplus ۵ = ۲$، این یک وضعیت N است. یک حرکت منجر به برد برای بازیکن بعدی رسم یک حلقه روی دو نقطه از نقاط بیرونی یعنی دسته ۳تایی و تبدیل آن به ۱ است، زیرا $۱ \oplus ۴ \oplus ۵ = ۰$.

مثال ۱۰.۳ بازی کیلز

بازی کیلز یک قرن پیش توسط سَم لوید[۱] و دودنی[۲] معرفی شد. دو بولینگ باز با یک ردیف از n قطعهٔ بولینگ مواجه هستند. فرض می‌شود که این دو بازیکن قدیمی بولینگ، به اندازهٔ کافی مهارت یافته‌اند تا هر تک قطعه یا هر دو قطعهٔ کنار هم (مجاور) دلخواه را در یک حرکت بیندازند. آنها به نوبت بازی را عوض می‌کنند و توافق شده است که بازیکنی که آخرین قطعه را انداخت، برنده باشد. در واقع این یک بازی ترکیبیاتی با دسته‌ای از مهره‌ها است که حرکت‌ها در آن می‌تواند این‌گونه بیان شود: هر بازیکن در هر حرکت می‌تواند یک یا دو مهره از هر دسته بردارد و بعد از آن در صورت تمایل می‌تواند دسته را به دو دستهٔ غیرتهی تقسیم کند. حذف یک یا دو مهره از یک دسته بدون تقسیم آن، متناظر با انداختن یک یا دو قطعه از دو سر ردیف و حذف یک یا دو مهره از یک دسته و تقسیم آن به دو دسته، متناظر با انداختن یک یا دو قطعه از قطعه‌های درونی ردیف است. بنابراین یک ردیف از ۱۳ قطعهٔ بولینگ در حالی که قطعهٔ دوم قبلاً افتاده است متناظر با یک بازی برداشتن و شکستن به‌صورت فوق با دو دستهٔ ۱ و ۱۱ مهره‌ای است. اجازه دهید تابع اسپراگ—گراندی $g(x)$ را برای این بازی پیدا کنیم.

تنها موقعیت پایانی، یک دستهٔ بدون مهره است؛ پس $g(\circ) = \circ$ و $g(۱) = ۱$. یک دسته با دو مهره می‌تواند به وضعیت‌هایی با یک دسته صفر یا یک مهره‌ای تبدیل شود؛ پس $g(۲) = ۲$. یک دسته با سه مهره می‌تواند به یک دسته با یک یا دو مهره، با مقادیر SG برابر ۱ و ۲، یا دو دستهٔ یک مهره‌ای، با مقدار SG برابر $۱ \oplus ۱ = \circ$ تبدیل شود؛ بنابراین $g(۳) = ۳$. با ادامهٔ این روش می‌توانیم مقادیر SG وضعیت‌های بیشتری را پیدا کنیم. این مقادیر در جدول ۱.۳ داده شده است. مقدار هرخانه برابر $g(۱۲k + r)$ است که مقدار k در ستون سمت چپ و مقدار r در ردیف بالا قرار دارد. از $x = ۷۲$ به بعد، مقادیر SG با دورهٔ تناوب ۱۲ با مقادیر آخرین ردیف جدول تکرار می‌شوند. تنها ۱۴ استثناء برای این دنباله وجود دارد که زیر آنها خط کشیده شده است و آخرین استثناء در $x = ۷\circ$ رخ می‌دهد.

---

[۱] Sam loyd

[۲] H.E. Dudeney

جدول ۱.۳ مقادیر SG بازی کیلز.

$k\backslash r$	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱
۰	۰	۱	۲	۳	۱	۴	۳	۲	۱	۴	۲	۶
۱	۴	۱	۲	۷	۱	۴	۳	۲	۱	۴	۶	۷
۲	۴	۱	۲	۸	۵	۴	۷	۲	۱	۸	۶	۷
۳	۴	۱	۲	۳	۱	۴	۷	۲	۱	۸	۲	۷
۴	۴	۱	۲	۸	۱	۴	۷	۲	۱	۴	۲	۷
۵	۴	۱	۲	۸	۱	۴	۷	۲	۱	۸	۶	۷
۶	۴	۱	۲	۸	۱	۴	۷	۲	۱	۸	۲	۷

اکنون شما تئوری را می‌دانید و جدول ۱.۳ را در دست دارید، پس می‌توانید به وب‌گاه زیر رفته و کامپیوتر را شکست دهید.

http://www.chlond.demon.co.uk/Kayles.html

مثال ۱۱.۳ شطرنج داوسون

یکی از مسائل جالب داوسون در کتاب [7]، شطرنجی است که با پیاده بازی می‌شود. دو خط موازی از پیاده‌های رو به روی هم داده شده، مهره‌های سفید در ردیف سوم و سیاه در ردیف پنجم در n ستون مجاور قرار دارند و بازی به‌طور عادی انجام می‌شود. فقط در این بازی، زدن مهره‌های حریف الزامی است؛ یعنی تنها وقتی می‌توانید یک خانه به جلو بروید که امکان زدن هیچ یک از پیاده‌های حریف را نداشته باشید.

آنهایی که با حرکت پیاده در شطرنج آشنایی ندارند، می‌توانند این بازی را روی یک ردیف با n مربع در نظر بگیرند، به‌طوری که هر بازیکن در هر نوبت می‌تواند یک X روی یکی از مربع‌های خالی قرار دهد، مشروط بر اینکه در کنار مربعی که قبلاً پر شده است، نباشد. بازیکنی که نتواند حرکت کند بازنده است. (چرا این دو بازی معادل هستند؟)

این بازی می‌تواند به عنوان یک بازی برداشتن و شکستن تلقی شود. اگر $n = ۱$، تنها یک حرکت به $n = ۰$ وجود دارد که پایان‌دهندهٔ بازی است (قراردادن یک X در

آن خانه). برای $n > ۱$، گذاشتن یک X در انتهای هر خط، دو خانه از ردیف را حذف می‌کند، که متناظر با برداشتن ۲ مهره از دسته است. قرار دادن یک X در خانهٔ یکی مانده به انتهای هر خط، سه خانه را حذف کرده و متناظر با حذف سه مهره از دسته است. قراردادن یک X در یکی از مربع‌های غیرپایانی و غیر از مربع مجاور آن، متناظر با حذف سه مهره از دسته و تقسیم دسته به دو بخش است. بنابراین قوانین بازی عبارتند از:

۱) اگر دسته‌ای یک مهره داشته باشد، می‌توانید آن را بردارید.

۲) می‌توانید از یک دسته، ۲ مهره بردارید.

۳) می‌توانید از یک دسته، ۳ مهره بردارید و در صورت تمایل آن دسته را به دو بخش تقسیم کنید.

دنبالهٔ اسپراگ—گراندی بازی این‌گونه شروع می‌شود

x	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	...
$g(x)$	۰	۱	۱	۲	۰	۳	۱	۱	۰	۳	۳	...

و نهایتاً با دوره تناوب ۳۴ تکرار می‌شود. تنها ۷ استثناء وجود دارد که آخرین استثناء در $n = ۵۱$ اتفاق می‌افتد.

۶.۳ تناوب دنبالهٔ اسپراگ—گراندی

در بخش قبل با چند بازی برداشتن و شکستن آشنا شدیم. روش کلی برای پیدا کردن تابع اسپراگ—گراندی این بازی‌ها چنین بود که طی انجام محاسبات طاقت‌فرسا (احتمالاً به کمک کامپیوتر) تابع SG را برای مقادیر کوچک محاسبه می‌کنیم. در بازی‌های کیلز و شطرنج داوسون دیدیم که دنباله مقادیر SG، بعد از چند استثناء، با یک دوره تناوب تکرار می‌شوند؛ یعنی اعداد e,p وجود دارند که برای هر $n > e$، $g(n+p) = g(n)$. عدد p دوره تناوب و عدد e، آخرین جایی است که استثناء اتفاق می‌افتد.

اما چطور می‌توانیم مطمئن باشیم که این دنباله‌ها واقعاً متناوب‌اند و مقدار استثنایی دیگری رخ نخواهد داد. برای اطمینان از متناوب بودن دنباله SG باید برهانی (احتمالاً به کمک استقرا) ارائه کنیم. در این بخش، این استدلال را برای دستهٔ کلی از بازی‌های برداشتن و شکستن که شامل بازی‌های کیلز و شطرنج داوسون نیز می‌شوند بیان می‌کنیم.

ابتدا اجازه دهید یک بازی برداشتن و شکستن را در حالت کلی به‌صورت رسمی تعریف کنیم.

تعریف ۴.۳ فرض کنید S یک زیرمجموعهٔ غیرتهی از اعداد صحیح نامنفی و برای هر $s \in S$، A_s یک زیرمجموعه از اعداد صحیح نامنفی است که $\circ, \text{۱} \notin A_\circ$. در این‌صورت بازی برداشتن و شکستن با مجموعه‌های S و A_s، $s \in S$، یک بازی با چند دسته از مهره‌ها است که هر بازیکن در نوبت خود باید یک دسته را انتخاب کرده و s مهره از آن بردارد که $s \in S$، سپس باید مهره‌های باقیمانده در آن دسته را به t دستهٔ غیرتهی تقسیم کند که $t \in A_s$.[۱] بازیکنی که در نوبت خود حرکت مجازی نداشته باشد، بازنده است.

توجه کنید که شرط $\circ, \text{۱} \notin A_\circ$ برای تأمین شرط پایان‌پذیری بازی‌های ترکیبیاتی است. به عنوان مثال در بازی نیم لاسکر، $S = \mathbb{N} \cup \{\circ\}$ و برای هر $i \in \mathbb{N}$، $A_i = \{\circ, \text{۱}\}$ و $A_\circ = \{\text{۲}\}$. همچنین در بازی کیلز داریم $S = \{\text{۱}, \text{۲}\}$ و $A_\text{۱}, A_\text{۲} = \{\circ, \text{۱}, \text{۲}\}$ و درنهایت در بازی شطرنج داوسون داریم $S = \{\text{۱}, \text{۲}, \text{۳}\}$ که $A_\text{۱} = \{\circ\}$، $A_\text{۲} = \{\circ, \text{۱}\}$ و $A_\text{۳} = \{\circ, \text{۱}, \text{۲}\}$. یک بازی تفاضلی با مجموعهٔ S، در واقع یک بازی برداشتن و شکستن با مجموعه‌های S و $A_s = \{\circ, \text{۱}\}$، $s \in S$، است.

قضیهٔ زیر بیان می‌کند که در یک بازی برداشتن و شکستن که مجموعه‌های S و A_s برای هر $s \in S$، متناهی هستند، اگر بتوانیم متناوب بودن دنبالهٔ SG را برای یک بازهٔ به اندازه کافی بزرگ نشان دهیم، آن‌گاه متناوب بودن آن برای همهٔ اعداد بعد از این بازه ثابت می‌شود.

[۱] دقت کنید که تقسیم مهره‌های باقیمانده به صفر دسته، به این معنی است که مهره‌ای باقی نمانده است.

قضیه ۳.۳ فرض کنید مجموعه‌های S و A_s برای هر $s \in S$، متناهی هستند و g تابع SG بازی برداشتن و شکستن با این مجموعه‌ها است. قرار دهید

$$\sigma := \max\{s:\ s \in S\}, \quad \tau := \max\{t:\ t \in A_s,\ s \in S\}.$$

اگر اعداد e,p یافت شوند به‌طوری که برای هر $e < n \leq \tau e + (\tau - ۱)p + \sigma$، $g(n+p) = g(n)$، آن‌گاه برای هر $n > e$، داریم $g(n+p) = g(n)$.

به عنوان مثال در بازی کیلز با محاسبهٔ مقادیر اولیهٔ تابع SG، حدس ما برای دوره تناوب، $p = ۱۲$ و برای آخرین استثناء، $e = ۷۰$ است. بنابراین برای اثبات متناوب بودن تابع SG این بازی، کافی است متناوب بودن آن را برای $۷۰ < n \leq ۲e + p + ۲ = ۱۵۴$ چک کنیم.

برهان. قضیه را با استقرا روی n ثابت می‌کنیم. قضیه برای $e < n \leq \tau e + (\tau - ۱)p + \sigma$ درست است. فرض کنید $n > \tau e + (\tau - ۱)p + \sigma$ و قضیه برای هر $e < n' < n$ درست باشد (فرض استقرا). طبق قضیهٔ اسپراگ—گراندی داریم

$$g(n+p) = \operatorname{mex}\ \{\ g(x_۱) \oplus g(x_۲) \oplus \cdots \oplus g(x_t):$$
$$x_۱ + x_۲ + \cdots + x_t = n + p - s,\ s \in S,\ t \in A_s\}.$$

برای یک $s \in S$ و $t \in A_s$، اگر $x_۱ + x_۲ + \cdots + x_t = n + p - s$، آن‌گاه $n + p - s > \tau(e + p)$ و درنتیجه یک x_i وجود دارد که $e + p < x_i < n + p$. لذا طبق فرض استقرا $g(x_i) = g(x_i - p)$. بنابراین

$$g(n+p) = \operatorname{mex}\ \{\ g(y_۱) \oplus g(y_۲) \oplus \cdots \oplus g(y_t):$$
$$y_۱ + y_۲ + \cdots + y_t = n - s,\ s \in S,\ t \in A_s\} = g(n).$$

درنتیجه حکم قضیه برای هر $n > e$ ثابت می‌شود.

متناوب بودن دنبالهٔ SG برخی از بازی‌های برداشتن و شکستن مثل کیلز، شطرنج داوسون و ... مشخص شده، اما برای بسیاری از بازی‌های برداشتن و شکستن، سؤال متناوب بودن دنباله SG آنها بی‌جواب مانده است. یک سوال باز این است که آیا یک بازی برداشتن و شکستن با مجموعه‌های متناهی وجود دارد که دنباله SG آن نهایتاً متناوب نباشد؟

۷.۳ تمرین

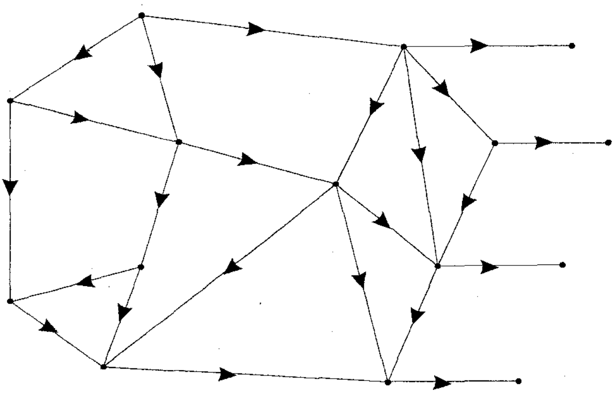
۱) ثابت کنید در گراف متناهی G موارد زیر معادل هستند:

الف) گراف G متوالیاً متناهی است.

ب) گراف G متوالیاً کران‌دار است.

ج) گراف G دور ندارد.

۲) تابع SG گراف زیر را پیدا کنید.



۳) بازی یک دسته‌ای را در نظر بگیرید که هر بازیکن در هر حرکت می‌تواند حداکثر نصف مهره‌ها و حداقل یک مهره را بردارد. بنابراین وضعیت‌های پایانی ۰ و ۱

هستند. تابع SG این بازی را بیابید.

۴) ثابت کنید تابع SG بازی تفاضلی با مجموعهٔ تفاضلی $S_m = \{۱, ۲, \ldots, m\}$، برابر $g_m(x) = (x \pmod{m + ۱})$ است. همچنین ثابت کنید تابع SG بازی حداقل نصف (مثال ۳.۳) برابر $g(x) = \min\{k : ۲^k > x\}$ است.

۵) به بازی برداشتنی با این قانون توجه کنید که هر بازیکن در هر حرکت می‌تواند (۱) هر تعداد زوج مهره از یک دسته بردارد، یا اینکه (۲) یک دسته شامل یک مهره را خالی کند. تنها وضعیت پایانی، صفر است. تابع SG این بازی را به دست آورید.

۶) به بازی یک دسته‌ای با این قانون توجه کنید که هر بازیکن در هر حرکت می‌تواند (۱) به هر تعداد بخش‌پذیر بر ۳، مهره بردارد به شرطی که همهٔ دسته را برندارد، (۲) همهٔ دسته را بردارد به شرطی که باقیماندهٔ تعداد مهره‌های دسته بر ۳، ۲ باشد. (یعنی ۲ یا ۵ یا ۸ یا ... مهره وجود داشته باشد.) موقعیت‌های پایانی ۰، ۱ و ۳ هستند. تابع SG این بازی را به دست آورید.

۷) فرض کنید یک بازی تفاضلی با سه دسته را بازی می‌کنید به‌طوری که برای دستهٔ اول با ۱۸ مهره، قانون تمرین ۵ برقرار است. برای دستهٔ دوم با ۱۷ مهره، قانون تمرین ۶ به کار می‌رود و برای دستهٔ سوم با ۷ مهره، قانون نیم اجرا می‌شود. مقدار SG این وضعیت چیست؟ یک حرکت بهینه را پیدا کنید.

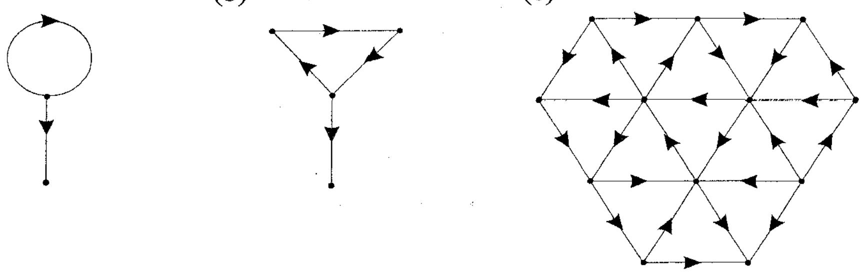
۸) **بازی دیم.** در این بازی هر بازیکن در هر حرکت می‌تواند از یک دستهٔ n مهره‌ای، c مهره بردارد اگر و تنها اگر c، n را بشمارد. اگر مجاز باشیم همهٔ دسته را برداریم این بازی را دیم$^+$ می‌گوییم و در غیر این‌صورت آن را دیم$^-$ می‌خوانیم. به عنوان مثال از یک دستهٔ ۱۲ مهره‌ای در بازی دیم$^+$ می‌توانیم ۱، ۲، ۳، ۴، ۶ یا ۱۲ مهره برداریم و در بازی دیم$^-$ می‌توانیم تنها ۱، ۲، ۳، ۴ یا ۶ مهره برداریم. تنها وضعیت پایانی در دیم$^+$، وضعیت ۰ و در دیم$^-$، وضعیت ۱ است. تابع SG را برای دیم$^+$ و دیم$^-$ بیابید و آنها را با هم مقایسه کنید. بازی دیم$^-$، گاه **آلیکیوت** نیز خوانده می‌شود [۲۴]. می‌توانید این بازی را در وب‌گاه زیر ببینید.

http://www.cut-the-knot.com/SimpleGames/Aliquots.html

۹) **بازی پریم.** در این بازی هر بازیکن در هر حرکت می‌تواند از یک دستهٔ n مهره‌ای، m مهره بردارد اگر و تنها اگر m و n نسبت به هم اول باشند. اگر علاوه‌براین برداشتن یک مهره از یک دستهٔ یک مهره‌ای مجاز باشد آن را پریم$^+$ و در غیر این‌صورت آن را پریم$^-$ می‌گوییم. تابع SG را برای پریم$^+$ و پریم$^-$ بیابید و آنها را با هم مقایسه کنید.

۱۰) گراف‌های جهت‌دار زیر متوالیاً متناهی نیستند، بنابراین تابع اسپراگ—گراندی ندارند. وضعیت‌های N و P را در این گراف‌ها پیدا کنید.

(a) (b) (c)

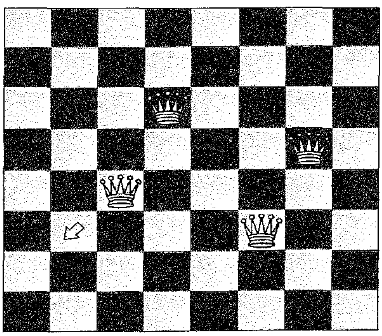


۱۱) نشان دهید هر بازی تفاضلی با مجموعهٔ تفاضلی متناهی یک تابع اسپراگ—گراندی دارد که نهایتاً متناوب است.

۱۲) **بازی های تفاضلی بی‌صبرانه.** فرض کنید در بازی‌های تفاضلی یک حرکت اضافی برای بازیکنان بی‌صبر مجاز باشد؛ به این معنی که هر بازیکن می‌تواند علاوه بر برداشتن s مهره از دسته که s در مجموعهٔ تفاضلی S است، همهٔ دسته را نیز بردارد. $g(x)$ را تابع اسپراگ—گراندی بازی تفاضلی با مجموعهٔ تفاضلی S و $g^+(x)$ را تابع اسپراگ—گراندی بازی تفاضلی بی‌صبرانه با مجموعهٔ تفاضلی S در نظر بگیرید. نشان دهید که برای هر $x \geq ۱$، $g^+(x) = g(x - ۱) + ۱$.

۱۳) **شطرنج وایتهوف.** تعدادی مهرهٔ وزیر روی یک صفحهٔ شطرنج قرار داده شده است. یک خانه می‌تواند چند وزیر را در خود جای دهد. بازیکنان که در یک طرف صفحه نشسته‌اند به نوبت یکی از مهره‌ها را انتخاب و آن را حرکت می‌دهند. هر مهرهٔ وزیر تنها می‌تواند عمودی رو به پایین، افقی به سمت چپ و ضرب دری به سمت پایین و چپ حرکت کند و مجاز است از روی مهره‌های دیگر بپرد. هنگامی که همهٔ وزیرها به گوشهٔ پایین و چپ صفحه برسند، بازی تمام شده و آخرین بازیکنی که حرکت کرده است، برنده خواهد بود. می‌توانید این بازی را در وب‌گاه زیر امتحان کنید.

http://www.chlond.demon.co.uk/queen.html

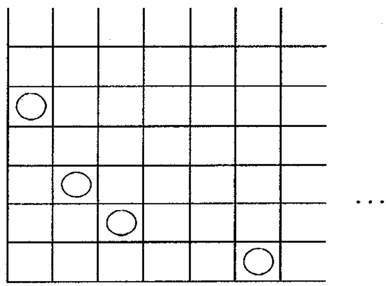


شکل ۴.۳ یک وضعیت در بازی شطرنج وایتهوف.

الف) بازی شطرنج وایتهوف با یک مهرهٔ وزیر در صفحه را در نظر گرفته و با نوشتن مقادیر SG در هر مربع از صفحه ۸ × ۸، تابع SG این بازی را به دست آورید. نشان دهید بازی شطرنج وایتهوف با یک مهرهٔ وزیر، با یک تغییر شکل، همان بازی وایتهوف است که در مثال ۴.۲ معرفی شد.

ب) با توجه به قسمت (الف) و قضیهٔ اسپراگ—گراندی، مقدار SG وضعیت بازی در شکل ۴.۳ را پیدا کنید. این یک وضعیت P است یا N؟ حرکت منجر به برد چیست؟

۱۴) **بازی نیم دوبعدی.** این بازی روی یک صفحهٔ شطرنجی بازی می‌شود که از سمت بالا و راست نامتناهی است و تعداد متناهی مهره روی برخی از خانه‌ها قرار دارد. یک حرکت عبارت است از برداشتن یک مهره و حرکت آن به سمت چپ به هر تعداد خانهٔ دلخواه روی همان ردیف، یا حرکت آن به یکی از خانه‌های یکی از ردیف‌های پایین‌تر. هر خانه می‌تواند هر تعداد مهره را جای دهد. اگر همهٔ مهره‌ها روی پایین‌ترین ردیف قرار گرفته باشند، این همان بازی نیمبل تمرین ۵ از فصل ۲ است.



شکل ۵.۳ یک وضعیت در بازی نیم دوبعدی.

الف) برای بازی نیم دوبعدی با یک مهره در صفحه، مقادیر SG همهٔ وضعیت‌ها را بیابید.

ب) با توجه به قسمت الف و قضیهٔ اسپراگ—گراندی، مقدار SG وضعیت بازی در شکل ۵.۳ را پیدا کنید. این یک وضعیت P است یا N؟ حرکت منجر به برد چیست؟ با چه تعداد حرکت این بازی پایان می‌یابد؟ آیا بازی در شرط پایان‌پذیری صدق می‌کند؟

۱۵) فرض کنید در هر نوبت، یک بازیکن می‌تواند (۱) یک یا دو مهره بردارد، یا (۲) یک مهره بردارد و مهره‌های باقیمانده را به دو دسته تقسیم کند.

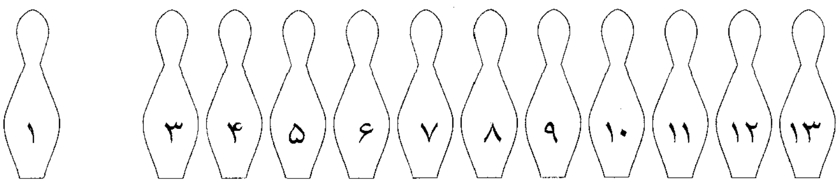
الف) تابع SG این بازی را به دست آورید.

ب) اگر وضعیت شروع شامل یک دسته با ۱۵ مهره باشد، حرکت بهینه اول را به دست آورید.

۱۶) الف) فرض کنید در هر نوبت، یک بازیکن می‌تواند (۱) یک مهره بردارد، به شرطی که دسته یک مهره‌ای باشد، یا (۲) دو یا بیشتر مهره بردارد و در صورت تمایل مهره‌های باقیمانده را به دو دسته تقسیم کند. تابع SG این بازی را به دست آورید.

ب) فرض کنید در هر نوبت، یک بازیکن می‌تواند یک دسته انتخاب کرده و c مهره از آن بردارد، به شرطی که باقیمانده c بر ۳، برابر ۱ باشد و در صورت تمایل مهره‌های باقیمانده را به دو دسته تقسیم کند. تابع SG این بازی را بیابید.

۱۷) از ۱۳ قطعهٔ بولینگ در یک ردیف، قطعهٔ دوم افتاده و شکل زیر باقی مانده است.



الف) نشان دهید این یک وضعیت N است. می‌توانید از جدول ۱.۳ استفاده کنید.

ب) یک حرکت منجر به برد را پیدا کنید. کدام قطعه(ها) باید حذف شوند.

۱۸) **بازی ریلز.** شمار زیادی از بازی‌های هندسی نظیر ریمز وجود دارند که در فصل ۱۷ کتاب [۳] بیان شده‌اند. در یکی از آنها که ریلز خوانده می‌شود، وضعیت‌ها مانند ریمز هستند، فقط هر حلقه بسته باید دقیقاً از یک یا دو نقطه بگذرد.

الف) نشان دهید که این بازی یک فرم تغییریافته از بازی کیلز است.

ب) در وضعیت داده شده در شکل ۳.۳، یک حرکت منجر به برد را در صورت وجود پیدا کنید.

۱۹) فرض کنید در هر نوبت، یک بازیکن می‌تواند دسته‌ای دلخواه که بیش از دو مهره دارد را به دو دستهٔ کوچک‌تر تقسیم کند. بازی تا جایی ادامه می‌یابد که هیچ دسته‌ای بیش از یک مهره نداشته باشد. تابع SG این بازی را به دست آورید.

۲۰) **بازی گراندی.** تنها حرکت قانونی در این بازی، شکستن یک دسته به دو دستهٔ غیرتهی با اندازه‌های متفاوت است. بنابراین تنها وضعیت‌های پایانی، دسته‌هایی با اندازه ۱ یا ۲ هستند. این بازی را در وب‌گاه زیر امتحان کنید.

http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Games/Grundy.shtml

الف) تابع SG برای بازی گراندی را برای یک دستهٔ n مهره‌ای، $n = ۱, ۲, \ldots, ۱۳$ پیدا کنید. (موضوع متناوب بودن دنباله SG این بازی هنوز ناشناخته مانده است، اگرچه تا سال ۱۹۹۶ مقدار آن تا $n = ۱,۰۰۰,۰۰۰$ محاسبه شده است.)

ب) در بازی گراندی با سه دسته به اندازه‌های ۵، ۸ و ۱۳، همهٔ حرکت‌های منجر به برد را در صورت وجود پیدا کنید.

۲۱) **نوار دومینو (کیلز داوسون).** یک نوار با n خانه وجود دارد و بازیکنان در هر نوبت یک دومینو را روی این نوار قرار می‌دهند. هر دومینو دو خانه مجاور را اشغال می‌کند. دومینوها نباید روی هم قرار گیرند. بازیکنی که نتواند دومینوای را روی نوار جا دهد بازنده است.

الف) نشان دهید این بازی فرم معادلی از بازی کیلز است، با این تفاوت که بازیکنان حتماً باید در یک حرکت، دو بولینگ مجاور را بیندازند.

ب) ثابت کنید مقدار SG وضعیتی با یک نوار n خانه‌ای خالی در بازی نوار دومینو، برابر مقدار SG وضعیتی با $n - ۱$ جفت سرباز در بازی شطرنج داوسون است.

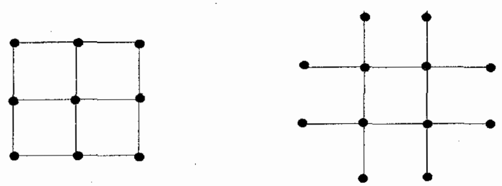
۲۲) یک بازی روی یک گراف متناهی (غیر جهت‌دار) این‌گونه اجرا می‌شود. بازیکنان به نوبت حرکت می‌کنند. یک حرکت عبارت است از حذف یک رأس و همهٔ یال‌های واقع بر آن رأس، با این استثناء که یک رأس تنها نمی‌تواند حذف شود،

یعنی در هر حرکت حداقل یک یال باید حذف شود. آخرین بازیکنی که حرکت کرده، برنده است.

الف) مقدار اسپراگ—گراندی گراف S_n، ستاره با n نقطه، را پیدا کنید. (ستاره با n نقطه، گرافی با $n + ۱$ رأس و n یال است که همگی در یک رأس مشترک هستند.)

ب) مقدار اسپراگ—گراندی گراف P_n، مسیری با n یال و $n + ۱$ رأس و گراف C_n، دور با n رأس و n یال، را پیدا کنید. مقدار اسپراگ—گراندی یک ستارهٔ دوگانه را پیدا کنید. (یک ستارهٔ دوگانه، یک گراف شامل دو ستاره است که رأس‌های مرکزی آنها به وسیلهٔ یک یال به هم وصل می‌شوند.)

ج) در بازی با گراف‌های شکل زیر، کدام بازیکن برنده است؟



فصل ۴

بازی‌های سکه‌گردان و ضرب نیم

در تمرین ۱۰ فصل ۲ بازی‌ای به نام لاک‌پشت‌گردان معرفی کردیم که در واقع یک نسخهٔ تغییر شکل یافته از بازی نیم است. این بازی نمونه‌ای از رده‌ای از بازی‌ها به نام بازی‌های سکه‌گردان است که توصیفی مشابه دارند و به‌صورت پشت و رو کردن سکه‌ها اجرا می‌شوند. بازی‌های سکه‌گردان اولین بار توسط لنسترا[۱] معرفی شدند. توسیع این بازی‌ها به حالت دوبعدی به یک نظریهٔ زیبا دربارهٔ ضرب نیم منجر می‌شود که همراه با جمع نیم معرفی شده در بخش ۱.۲، اعداد صحیح نامنفی را به یک میدان تبدیل می‌کند. حاصل‌ضرب دو بازیِ سکه‌گردان که بازی‌های تارتان نام دارد به کمک ضرب نیم قابل تحلیل است.

۱.۴ بازی‌های سکه‌گردان یک بعدی

یادآوری می‌کنیم که بازی لاک‌پشت‌گردان با یک ردیف از سکه‌ها به‌صورت زیر اجرا می‌شود. یک ردیف افقی از n سکه (یا لاک‌پشت) وجود دارد که بعضی از سکه‌ها به رو و بعضی به پشت هستند. یک حرکت عبارت است از پشت و رو کردن یکی از سکه‌ها از رو به پشت و علاوه‌براین، در صورت تمایل، پشت و رو کردن یکی از سکه‌های سمت چپ

[۱] H.W. Lenstra

آن سکه (از رو به پشت یا از پشت به رو). این بازی مثالی از دسته‌ای از بازی‌ها به نام سکه‌گردان است.

یک بازی سکه‌گردان (یک بعدی) به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

۱) تعداد متناهی سکه در یک ردیف داده شده که هر کدام به رو یا به پشت هستند.

۲) یک حرکت عبارتست از پشت و رو کردن مجموعه‌ای از سکه‌ها که این مجموعه را قانون بازی تعیین می‌کند.

۳) قانون بازی همیشه به گونه‌ای است که از میان سکه‌های پشت و رو شده، سکهٔ آخر (سکهٔ سمت راست) باید از رو به پشت تبدیل شود. هدف این قانون این است که پایان‌پذیری بازی تضمین شود.

۴) مجموعهٔ سکه‌های مجاز برای پشت و رو شدن در یک حرکت تنها به سکهٔ سمت راست از میان سکه‌های پشت و رو شده بستگی دارد و مستقل از حرکت‌های قبلی یا تعداد حرکت‌های قبلی یا آرایش بقیهٔ سکه‌ها است.

۵) بازی بی‌طرفانه بوده و آخرین بازیکنی که حرکت می‌کند برنده است.

بازی‌هایی که در شرایط فوق صدق می‌کنند را می‌توان به مجموع بازی‌های ساده‌تر تجزیه کرد. در نتیجه می‌توان از نظریهٔ اسپراگ—گراندی برای ساده کردن تحلیل این بازی‌ها کمک گرفت. از این به بعد ردیف سکه‌ها در یک بازی سکه‌گردان را از چپ به راست شماره‌گذاری کرده و وضعیتی که در آن n سکهٔ به رو در مکان‌های $x_۱$، $x_۲$، ... و x_n قرار دارند و بقیهٔ سکه‌ها به پشت هستند را با $[x_۱, x_۲, \dots, x_n]$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۱.۴ مقدار تابع SG بازی سکه‌گردان G در وضعیت $[x_۱, x_۲, \dots, x_n]$ برابر با مقدار تابع SG بازی $\underbrace{G + G + \cdots + G}_{n \text{ مرتبه}}$ در وضعیت $([x_۱], [x_۲], \dots, [x_n])$ است؛ یعنی در بازی سکه‌گردان، هر وضعیت با n سکهٔ به رو در مکان‌های $x_۱$، $x_۲$، ... و x_n را می‌توان معادل با وضعیتی در مجموع n بازی سکه‌گردان در نظر گرفت که در مؤلفهٔ i ام تنها یک

سکهٔ به رو در مکان x_i وجود دارد. بنابراین

$$g([x_1, \dots, x_n]) = g([x_1]) \oplus \cdots \oplus g([x_n]).$$

قبل از اثبات، برای روشن شدن صورت قضیه، فرض کنید سکهٔ رو را با H و سکهٔ پشت را با T نشان دهیم. به عنوان مثال این قضیه بیان می‌کند که وضعیت THHTTH برابر مجموع سه بازی در وضعیت‌های TH، TTH و TTTTTH است. لذا برای پیدا کردن تابع SG یک وضعیت کافی است تنها تابع SG وضعیت‌هایی با یک سکهٔ به رو را پیدا کنیم. در این مثال

$$g(\mathrm{THHTTH}) = g(TH) \oplus g(\mathrm{TTH}) \oplus g(\mathrm{TTTTTH}).$$

برهان. فرض کنید در قانون بازی سکه‌گردان G در هر حرکت، تنها دو سکه پشت و رو می‌شود. وضعیت $x = [x_1, \dots, x_n]$ را در بازی G در نظر گرفته و فرض کنید قضیه برای همهٔ تالی‌های این وضعیت درست باشد. برای اثبات قضیه کافی است نشان دهیم مقدار SG هر تالی وضعیت x در G برابر مقدار SG یک تالی از وضعیت $([x_1], \dots, [x_n])$ در بازی $\underbrace{G + G + \cdots + G}_{n \text{ مرتبه}}$ است و برعکس.

در هر حرکت از وضعیت x، سکهٔ مکان x_j از رو به پشت و برای یک $a < x_j$، سکهٔ مکان a پشت و رو می‌شود. بنابراین اگر سکهٔ مکان a از پشت به رو تبدیل شود به وضعیت $y = [x_1, \dots, x_{j-1}, a, x_{j+1}, \dots, x_n]$ می‌رسیم و اگر سکهٔ مکان a از رو به پشت تبدیل شود، آن‌گاه برای یک $i < j$، $a = x_i$ داریم، در نتیجه به وضعیت $z = [x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n]$ می‌رسیم. در هر یک از این دو حالت، بنا به فرض داریم

$$g(y) \quad = \quad g([x_1], \dots, [x_{j-1}], [a], [x_{j+1}], \dots, [x_n]),$$

و

$$g(z) \quad = \quad g([x_1], \dots, [x_{i-1}], [x_{i+1}], \dots, [x_{j-1}], [x_{j+1}], \dots, [x_n])$$

$$= \quad g([x_1]) \oplus \cdots \oplus g([x_{i-1}]) \oplus g([x_{i+1}]) \oplus \cdots \quad (۱.۴)$$

$$\oplus g([x_{j-1}]) \oplus g([x_{j+1}]) \oplus \cdots \oplus g([x_n])$$

$$= \quad g([x_1]) \oplus \cdots \oplus g([x_{j-1}]) \oplus g([x_i]) \oplus g([x_{j+1}]) \oplus \cdots \quad (۲.۴)$$

$$\oplus g([x_n])$$

$$= \quad g([x_1], \ldots, [x_{j-1}], [x_i], [x_{j+1}], \ldots, [x_n]). \quad (۳.۴)$$

دلیل روابط (۱.۴) و (۳.۴)، قضیهٔ اسپراگ—گراندی و دلیل رابطهٔ (۲.۴) این است که $g([x_i]) \oplus g([x_i]) = ۰$. اما وضعیت‌های $([x_1], \ldots, [x_{j-1}], [a], [x_{j+1}], \ldots, [x_n])$ و $([x_1], \ldots, [x_{j-1}], [x_i], [x_{j+1}], \ldots, [x_n])$ تالی‌های وضعیت $([x_1], \ldots, [x_n])$ در بازی $\underbrace{G + G + \cdots + G}_{n \text{ مرتبه}}$ هستند. در نتیجه مقدار SG وضعیت x و وضعیت $([x_1], \ldots, [x_n])$ برابر است. به راحتی دیده می‌شود که عکس این مطلب نیز درست است.

قضیه در بازی‌ای که در هر حرکت بیش از دو سکه پشت و رو می‌شود نیز به‌طور مشابه ثابت می‌شود.

در ادامه مثال‌هایی از بازی‌های سکه‌گردان را می‌بینید.

مثال ۱.۴ بازی‌های تفاضلی

بسیاری از بازی‌های ترکیبیاتی بی‌طرفانه که با دسته‌ای از مهره‌ها بازی می‌شوند تفسیری به‌صورت یک بازی سکه‌گردان دارند و برعکس. در برخی از آنها توصیف به‌صورت بازی با مهره‌ها و در بعضی توصیف به‌صورت بازی سکه‌گردان ساده‌تر است. یک نمونه از این بازی‌ها، بازی‌های تفاضلی است که در بخش ۴.۱ معرفی شدند. به عنوان نمونه بازی مثال ۱.۱ را در نظر بگیرید. یک دستهٔ n مهره‌ای وجود دارد و در هر حرکت می‌توانیم ۱، ۲ یا ۳ مهره از دسته برداریم. به‌طور معادل یک بازی با یک ردیف از n سکه در نظر بگیرید که از چپ به راست با اعداد ۱ تا n شماره‌گذاری شده‌اند و همهٔ سکه‌ها به جز سکهٔ سمت راست به پشت هستند. یک حرکت عبارتست از پشت و رو کردن سکهٔ شماره x از رو به پشت و پشت و رو کردن یکی از سکه‌های شمارهٔ $x - ۱$، $x - ۲$ یا $x - ۳$، مگر اینکه $x \leq ۳$ که در این‌صورت می‌توانیم سکهٔ دوم را پشت و رو نکنیم. اجازه دهید تابع SG

این بازی را پیدا کنیم. از وضعیت [۱]، یعنی وضعیت H، تنها یک حرکت به وضعیت T (وضعیت پایانی) وجود دارد، لذا $g([۱]) = ۱$. وضعیت [۲]، یعنی TH می‌تواند به وضعیت‌های TT (وضعیت پایانی) و HT (وضعیت [۱]) تبدیل شود، لذا $g([۲]) = ۲$. با ادامه این روند جدول زیر را به دست می‌آوریم.

x	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	...
$g([x])$	۱	۲	۳	۰	۱	۲	۳	۰	۱	۲	۳	...

که عیناً مشابه نتایجی است که قبلاً در بخش ۱.۱ به دست آوردیم.

به‌طور کلی یک بازی تفاضلی با مجموعهٔ تفاضلی S را می‌توان به‌صورت یک بازی سکه‌گردان با یک ردیف از سکه‌ها در نظر گرفت که یک حرکت عبارتست از برگرداندن یک سکه x از رو به پشت و پشت و رو کردن یک سکه $y = x - s$ که $s \in S$، مگر اینکه برای یک $s \in S$، $x - s = ۰$ که در این حالت می‌توانیم سکهٔ دوم را پشت و رو نکنیم. طبق قضیه ۱.۴، این بازی سکه‌گردان روی یک ردیف سکه با n سکهٔ به رو، معادل با مجموع n بازی تفاضلی است.

مثال ۲.۴ دوقلوها

این بازی مشابه بازی لاک‌پشت‌گردان است با این تفاوت که در این بازی باید دقیقاً دو سکه را برگردانیم به‌طوری که سکهٔ سمت راست از رو به پشت برگردد. اگر سکه‌ها را از چپ به راست با شروع از صفر شماره‌گذاری کنیم، در این‌صورت تابع SG این بازی در $g([x]) = x$ صدق می‌کند که دقیقاً برابر با تابع SG بازی نیم است (تمرین ۱).

مثال ۳.۴ لاک‌پشت‌نما

این بازی مشابه بازی لاک‌پشت‌گردان است با این تفاوت که در هر مرحله می‌توانیم تا سه سکه را پشت و رو کنیم. در واقع یک حرکت عبارتست از پشت و رو کردن یک، دو یا سه سکه به‌طوری که سکهٔ سمت راست از رو به پشت برگردد. بار دیگر سکه‌ها را از چپ به راست و با شروع از صفر شماره‌گذاری می‌کنیم. از وضعیت [۰]، یعنی H تنها

یک حرکت به وضعیت پایانی وجود دارد، لذا $g([\circ]) = ۱$. وضعیت [۱]، یک حرکت به وضعیت [۰] و یک حرکت به وضعیت پایانی دارد، پس $g([۱]) = ۲$. وضعیت [۲] می‌تواند به وضعیت‌های TTT (وضعیت پایانی)، HTT (وضعیت [۰])، THT (وضعیت [۱]) و همچنین وضعیت HHT تبدیل شود. اما طبق قضیهٔ ۱.۴

$$g(\mathrm{HHT}) = g(\mathrm{H}) \oplus g(\mathrm{TH}) = ۱ \oplus ۲ = ۳.$$

با ادامه روند فوق جدول زیر را به دست می‌آوریم.

x	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	$\cdots$
$g([x])$	۱	۲	۴	۷	۸	۱۱	۱۳	۱۴	۱۶	۱۹	۲۱	۲۲	۲۵	۲۶	$\cdots$

در این جدول برای هر x، $g([x])$ برابر $۲x$ یا $۲x + ۱$ است، اما کدام یک؟ جواب این سؤال به تعداد یک‌های ظاهر شده در بسط دودویی x وابسته است. یک عدد صحیح نامنفی، **فردگون** گفته می‌شود، اگر تعداد یک‌ها در بسط دودویی آن فرد باشد و در غیر این‌صورت **زوج‌گون** خوانده می‌شود. بنابراین اعداد ۱، ۲، ۴ و ۷ فردگون هستند، چون بسط دودویی آنها به ترتیب ۱، ۱۰، ۱۰۰ و ۱۱۱ است و اعداد ۰، ۳، ۵ و ۶ زوج‌گون هستند، زیرا بسط دودویی آنها به ترتیب ۰، ۱۱، ۱۰۱ و ۱۱۰ است.

همان‌طور که می‌بینیم اعداد $g(x)$ در جدول بالا، اعداد فردگون به ترتیب از کوچک به بزرگ هستند. بنابراین به نظر می‌رسد در حالت کلی قضیهٔ زیر برقرار باشد.

قضیه ۲.۴ برای یک وضعیت $[x]$ در بازی لاک‌پشت‌نما که $x = \circ, ۱, \ldots$، $g([x])$ برابر $۲x$ است اگر x فردگون باشد و برابر $۲x + ۱$ است اگر x زوج‌گون باشد.

کلید اثبات مطلب فوق در این حقیقت کلی است که جمع نیم دو عدد زوج‌گون یا دو عدد فردگون، زوج‌گون است. همچنین جمع نیم یک عدد زوج‌گون و یک عدد فردگون، فردگون است. به‌طور نمادین

زوج‌گون ⊕ زوج‌گون = فردگون ⊕ فردگون = زوج‌گون ،

زوج‌گون ⊕ فردگون = فردگون .

برهان. ابتدا ثابت می‌کنیم که مقادیر SG برای وضعیت‌های [۱]، [۲]، [۳] و ... برابر اعداد فردگون به ترتیب از کوچک به بزرگ هستند. این مطلب را با استقرا ثابت می‌کنیم. فرض می‌کنیم این مطلب برای همهٔ وضعیت‌های $[y]$، $y < x$، درست است و نشان می‌دهیم $g([x])$ اولین عدد فردگون بعد از $g([x-۱])$ است. توجه کنید که با پشت و رو کردن سکهٔ x ام، به وضعیت پایانی با مقدار SG صفر می‌رسیم. همچنین با پشت و رو کردن سکهٔ x ام و یک سکهٔ دیگر می‌توانیم به همهٔ اعداد فردگون قبلی برسیم. درنهایت با پشت و رو کردن سکهٔ x ام و دو سکهٔ دیگر می‌توانیم به همهٔ اعداد زوج‌گون قبلی برسیم، زیرا هر عدد زوج‌گون را می‌توان به‌صورت جمع نیم دو عدد فردگون کوچک‌تر نوشت. اما هرگز نمی‌توانیم به اولین عدد فردگون بزرگ‌تر از $g([x-۱])$ حرکت کنیم، زیرا جمع نیم دو عدد فردگون همواره یک عدد زوج‌گون است. بنابراین $g([x])$ برابر اولین عدد فردگون بعد از $g([x-۱])$ است و استقرا کامل می‌شود.

حال قضیه را با استقرا روی x ثابت می‌کنیم. فرض می‌کنیم قضیه برای همهٔ وضعیت‌های $[y]$، $y < x$، درست باشد. طبق آنچه گفته شد $g([x])$ برابر اولین عدد فردگون بعد از $g([x-۱])$ است، از طرفی طبق فرض استقرا، اگر $x - ۱$ فردگون باشد، آن‌گاه $g([x-۱]) = ۲x - ۲$، بنابراین $۲x - ۱$ زوج‌گون است و لذا $g([x]) \geq ۲x$. اگر $x - ۱$ زوج‌گون باشد، آن‌گاه طبق فرض استقرا $g([x-۱]) = ۲x - ۱$ و بنابراین $g([x]) \geq ۲x$. حال اگر x فردگون باشد، $۲x$ نیز فردگون است و لذا $g([x]) = ۲x$ و اگر x زوج‌گون باشد، $۲x$ نیز زوج‌گون است و لذا $۲x \oplus ۱ = ۲x + ۱$ فردگون است، در نتیجه $g([x]) = ۲x + ۱$.

به کمک قضیهٔ قبل می‌توانیم همهٔ وضعیت‌های N و P را در بازی لاک‌پشت‌نما مشخص کنیم.

گزاره ۱.۴ فرض کنید یک ردیف از سکه‌ها از چپ به راست با شروع از صفر شماره‌گذاری شده‌اند. یک وضعیت با n سکهٔ به رو در مکان‌های $x_۱$، $x_۲$، ... و x_n در بازی لاک‌پشت‌نما یک وضعیت P است اگر و تنها اگر n زوج باشد و جمع نیم دسته‌ها صفر باشد، $x_۱ \oplus \cdots \oplus x_n = ۰$.

برهان. ابتدا فرض کنید وضعیت $[x_۱, \dots, x_n]$، یک وضعیت P باشد. طبق قضیه‌های ۱.۳ و ۱.۴، داریم $g([x_۱]) \oplus \cdots \oplus g([x_n]) = g([x_۱, \dots, x_n]) = ۰$. بنابراین n زوج است زیرا جمع نیم تعداد فرد عدد فردگون، یک عدد فردگون است و هیچ‌گاه صفر نمی‌شود. از طرفی برای هر x، $g([x])$ برابر $۲x$ یا $۲x + ۱$ است. بنابراین اگر رقم یکان در بسط دودویی $g([x])$ را حذف کنیم، عدد x را به دست می‌آوریم. در نتیجه داریم $x_۱ \oplus \cdots \oplus x_n = ۰$.

حال برعکس وضعیت $[x_۱, \dots, x_n]$ که n زوج باشد و $x_۱ \oplus \cdots \oplus x_n = ۰$ را در نظر می‌گیریم. در این‌صورت $۲x_۱ \oplus \cdots \oplus ۲x_n = ۰$. همچنین تعداد اعداد فردگون در میان اعداد $x_۱, \dots, x_n$، زوج است لذا تعداد اعداد زوج‌گون نیز در میان این اعداد زوج است. در نتیجه $g([x_۱]) \oplus \cdots \oplus g([x_n]) = ۲x_۱ \oplus \cdots \oplus ۲x_n \oplus ۱ \oplus \cdots \oplus ۱$ که تعداد یک‌ها زوج است. بنابراین $g([x_۱, \dots, x_n]) = g([x_۱]) \oplus \cdots \oplus g([x_n]) = ۰$.

توجه کنید که وضعیت $[۱, ۲, ۳]$ در بازی لاک‌پشت‌نما یک وضعیت P نیست ولی $[۰, ۱, ۲, ۳]$ یک وضعیت P است. سکهٔ مکان صفر، "سکهٔ لاک‌پشت‌نما" گفته می‌شود. سکهٔ لاک‌پشت‌نما با اینکه نقشی در جمع نیم ندارد ولی در تعیین نوع وضعیت تأثیرگذار است.

مثال ۴.۴ خط‌کش

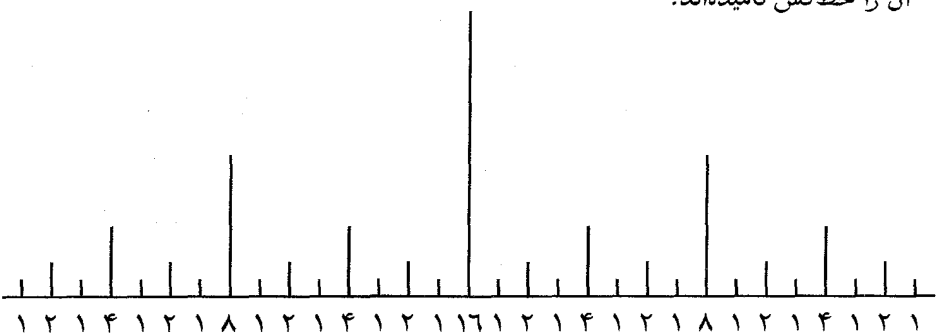
در این بازی می‌توانیم هر تعداد سکه که بخواهیم را پشت و رو کنیم، اما سکه‌های پشت و رو شده باید پشت سرهم باشند و سکهٔ سمت راست از رو به پشت برگردد. اگر سکه‌ها را از چپ به راست با شروع از ۱ شماره‌گذاری کنیم، تابع SG این بازی در رابطهٔ زیر صدق می‌کند.

$$g([x]) = \mathrm{mex}\{۰,\ g([x-۱]),\ g([x-۱]) \oplus g([x-۲]), \dots,\ g([x-۱]) \oplus \cdots \oplus g([۱])\}$$

از آنجا جدول زیر را به دست می‌آوریم.

x	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	...
$g([x])$	۱	۲	۱	۴	۱	۲	۱	۸	۱	۲	۱	۴	۱	۲	...

همان‌طور که مشاهده می‌شود، $g([x])$ برابر با بزرگ‌ترین توان ۲ است که x را می‌شمارد. کسانی که تمرین ۸ فصل ۳ را حل کرده‌اند، می‌دانند که این همان تابع SG بازی دیم$^+$ است. به دلیل پیروی مقادیر تابع SG این بازی از علامت‌های روی خط‌کش، آن را خط‌کش نامیده‌اند.



شکل ۱.۴ مقادیر SG بازی خط‌کش.

مثال ۵.۴ گرانت

در این بازی باید چهار سکهٔ متمایز را به‌صورت متقارن پشت و رو کنیم که یکی از آنها سکهٔ اول (سکهٔ سمت چپ) باشد و سکهٔ سمت راست از رو به پشت برگردد. در واقع اگر سکه‌ها را با شروع از صفر شماره‌گذاری کنیم و سکهٔ n ام به رو باشد، $n \geq ۳$، آن‌گاه هر حرکت پشت و رو کردن سکه‌های $\circ, x, n-x, n$ برای یک $x < \frac{n}{۲}$ است.

وضعیت‌های [۰]،[۱] یا [۲]، وضعیت‌های پایانی و دارای مقدار SG صفر هستند. از وضعیت $[n]$، $n \geq ۳$، می‌توان به وضعیتی با سه سکهٔ به رو در مکان‌های $\circ, x, n-x$ حرکت کرد که $x < \frac{n}{۲}$، بنابراین $g([n]) = \text{mex}\{g([n-x]) \oplus g([x]) : x < \frac{n}{۲}\}$. در نتیجه

این بازی معادل بازی است که با دسته‌ای از مهره‌ها بازی می‌شود و در هر مرحله می‌توانیم یک دسته را به دو دستهٔ غیرتهی غیرمساوی تقسیم کنیم که این دقیقاً همان بازی گراندی است. (تمرین ۲۰، فصل ۳ را ببینید.)

۲.۴ بازی‌های سکه‌گردان دوبعدی

بازی‌های سکه‌گردان را می‌توان به دو بعد تعمیم داد. سکه‌ها در یک آرایهٔ مستطیل شکل چیده شده‌اند و مکان هر سکه را با مختصات آن به‌صورت (x, y) که $x, y \geq 0$ نشان می‌دهیم که x شمارهٔ سطر از بالا به پایین و y شمارهٔ ستون از چپ به راست است. سکهٔ گوشه سمت چپ و بالا را به $(0, 0)$ نمایش می‌دهیم. شرط برگرداندن سکهٔ سمت راست از رو به پشت در حالت یک بعدی، در اینجا با شرط زیر جایگزین می‌شود.

یک سکه مثلاً سکهٔ (x, y) که آن را سکهٔ جنوب شرقی می‌گوییم از رو به پشت برمی‌گردد و هر سکهٔ دیگری که برگردانده می‌شود باید در مستطیل $\{(a, b) : 0 \leq a \leq x, 0 \leq b \leq y\}$ باشد.

مشابه حالت یک بعدی وضعیت‌هایی که دارای n سکهٔ به رو در مکان‌های $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ هستند را می‌توان به مجموع n بازی تجزیه کرد که بازی j ام دارای تنها یک سکهٔ به رو در مکان (x_j, y_j) است. بنابراین تنها کافی است وضعیت‌هایی با یک سکهٔ به رو را بررسی کنیم. برای راحتی یک وضعیت با تنها یک سکهٔ به رو در مکان (x, y) را با $[(x, y)]$ نشان می‌دهیم. به مثال‌هایی از این بازی‌ها توجه کنید.

مثال ۶.۴ دوقلوهای سیار

در این بازی یک حرکت عبارتست از پشت و رو کردن دو سکهٔ هم‌سطر یا هم‌ستون به‌طوری که سکهٔ جنوب شرقی از رو به پشت برگردد. تابع SG این بازی در رابطهٔ زیر صدق می‌کند.

$$g[(x,y)] = \text{mex}\{g[(x,b)], g[(a,y)] :\ \circ \le b < y,\ \circ \le a < x\}.$$

در واقع $g[(x,y)]$ برابر کوچک‌ترین عددی است که در جدول مقادیر تابع SG قبل از (x,y) در سطر و ستون آن ظاهر نشده است. برای $y = \circ$، این بازی همان بازی دوقلوها و به‌طور معادل بازی نیم است، بنابراین $g[(x,\circ)] = x$ و به‌طور مشابه $g[(\circ,y)] = y$. به وسیلهٔ معادلهٔ فوق به راحتی می‌توان جدول زیر را برای مقادیر $g[(x,y)]$ تنظیم کرد که به وضوح یک جدول متقارن است.

جدول ۱.۴ مقادیر $g[(x,y)]$ برای بازی دوقلوهای سیار.

	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۰	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۱	۱	۰	۳	۲	۵	۴	۷	۸	۹	۸
۲	۲	۳	۰	۱	۶	۷	۴	۵	۱۰	۱۱
۳	۳	۲	۱	۰	۷	۶	۵	۴	۱۱	۱۰
۴	۴	۵	۶	۷	۰	۱	۲	۳	۱۲	۱۳
۵	۵	۴	۷	۶	۱	۰	۳	۲	۱۳	۱۲
۶	۶	۷	۴	۵	۲	۳	۰	۱	۱۴	۱۵
۷	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	۰	۱۵	۱۴
۸	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۰	۱
۹	۹	۸	۱۱	۱۰	۱۳	۱۲	۱۵	۱۴	۱	۰

پس از تکمیل جدول ۱.۴ به یک نتیجهٔ جالب و شگفت‌انگیز می‌رسیم. برای هر $x, y \ge \circ$، $g[(x,y)] = x \oplus y$. اثبات این تساوی را می‌توانید در پیوست ب.۳ مشاهده کنید.

به عنوان مثال در این بازی وضعیت شکل ۲.۴ را در نظر بگیرید.

سه سکهٔ به رو در مکان‌های (۱,۳)، (۳,۲) و (۴,۴) قرار دارند. بنابراین مقدار SG این وضعیت برابر است با

$$g[(۱,۳)] \oplus g[(۳,۲)] \oplus g[(۴,۴)] = ۱ \oplus ۳ \oplus ۳ \oplus ۲ \oplus ۴ \oplus ۴ = ۳.$$

لذا این یک وضعیت N است که با تبدیل ۲ به ۱ در جمع فوق می‌توان آن را به یک وضعیت P تبدیل کرد. این کار با پشت و رو کردن سکه‌های (۳,۲) و (۳,۱) قابل انجام

T	T	T	T	T
T	T	T	H	T
T	T	T	T	T
T	T	H	T	T
T	T	T	T	H

شکل ۲.۴ یک وضعیت در بازی سکه‌گردان دوبعدی.

است. حرکت‌های منجر به برد دیگری نیز وجود دارد. می‌توانید آنها را پیدا کنید؟

مثال ۷.۴ گوشه‌گردان

در اینجا یک بازی دیگر روی یک آرایه از سکه‌ها معرفی می‌کنیم. در این بازی یک حرکت عبارتست از پشت و رو کردن چهار سکهٔ متمایز که در گوشه‌های یک مستطیل هستند، یعنی سکه‌های (x,y)، (x,b)، (a,y) و (a,b) که $0 \le a < x$ و $0 \le b < y$، به‌طوری که سکهٔ (x,y) از رو به پشت برگردد. تابع SG این بازی در رابطهٔ زیر صدق می‌کند.

$$g[(x,y)] = \operatorname{mex}\{g[(a,y)] \oplus g[(x,b)] \oplus g[(a,b)] :\ 0 \le a < x,\ 0 \le b < y\}. \qquad (۴.۴)$$

چون چهار سکه باید متمایز باشند، هیچ سکه‌ای در طول حاشیهٔ چپ یا بالای صفحه نمی‌تواند به عنوان سکهٔ جنوب شرقی در نظر گرفته شود، بنابراین برای هر $x, y \ge 0$، $g[(x,0)] = g[(0,y)] = 0$. علاوه‌براین، سکهٔ به رو در خانهٔ $(1,1)$ می‌تواند به وضعیتی با سکه‌های به رو در خانه‌های $(0,0)$، $(0,1)$ و $(1,0)$ تبدیل شود که همگی مقدار SG صفر دارند، لذا $g[(1,1)] = 1$. همچنین به کمک استقرا می‌توان دید $g[(x,1)] = \operatorname{mex}\{g[(a,1)] :\ 0 \le a < x\} = x$. با استفاده از رابطهٔ (۴.۴) می‌توانیم جدول ۲.۴ را تکمیل کنیم. اجازه دهید برای نمونه $g[(4,4)]$ را محاسبه کنیم. از وضعیت $[(4,4)]$، ۱۶ حرکت وجود دارد که به کمک تقارن مسأله می‌توانیم آن را به ۱۰ حرکت تقلیل دهیم که گوشهٔ شمال غربی آنها (x,y) است که $0 \le x \le y \le 3$. با محاسبهٔ

مقادیر SG هر وضعیت به‌طور جداگانه، داریم

$$\begin{aligned} g[(۴,۴)] &= \operatorname{mex}\{۰,۴,۸,۱۲,۱\oplus۴\oplus۴,۲\oplus۸\oplus۴,۳\oplus۱۲\oplus۴,\\ &\qquad ۳\oplus۸\oplus۸,۱\oplus۱۲\oplus۸,۲\oplus۱۲\oplus۱۲\}\\ &= \operatorname{mex}\{۰,۴,۸,۱۲,۱,۱۴,۱۱,۳,۵,۲\} = ۶. \end{aligned}$$

جدول ۲.۴ مقادیر $g[(x,y)]$ برای بازی گوشه‌گردان.

	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵
۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
۱	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵
۲	۰	۲	۳	۱	۸	۱۰	۱۱	۹	۱۲	۱۴	۱۵	۱۳	۴	۶	۷	۵
۳	۰	۳	۱	۲	۱۲	۱۵	۱۳	۱۴	۴	۷	۵	۶	۸	۱۱	۹	۱۰
۴	۰	۴	۸	۱۲	۶	۲	۱۴	۱۰	۱۱	۱۵	۳	۷	۱۳	۹	۵	۱
۵	۰	۵	۱۰	۱۵	۲	۷	۸	۱۳	۳	۶	۹	۱۲	۱	۴	۱۱	۱۴
۶	۰	۶	۱۱	۱۳	۱۴	۸	۵	۳	۷	۱	۱۲	۱۰	۹	۱۵	۲	۴
۷	۰	۷	۹	۱۴	۱۰	۱۳	۳	۴	۱۵	۸	۶	۱	۵	۲	۱۲	۱۱
۸	۰	۸	۱۲	۴	۱۱	۳	۷	۱۵	۱۳	۵	۱	۹	۶	۱۴	۱۰	۲
۹	۰	۹	۱۴	۷	۱۵	۶	۱	۸	۵	۱۲	۱۱	۲	۱۰	۳	۴	۱۳
۱۰	۰	۱۰	۱۵	۵	۳	۹	۱۲	۶	۱	۱۱	۱۴	۴	۲	۸	۱۳	۷
۱۱	۰	۱۱	۱۳	۶	۷	۱۲	۱۰	۱	۹	۲	۴	۱۵	۱۴	۵	۳	۸
۱۲	۰	۱۲	۴	۸	۱۳	۱	۹	۵	۶	۱۰	۲	۱۴	۱۱	۷	۱۵	۳
۱۳	۰	۱۳	۶	۱۱	۹	۴	۱۵	۲	۱۴	۳	۸	۵	۷	۱۰	۱	۱۲
۱۴	۰	۱۴	۷	۹	۵	۱۱	۲	۱۲	۱۰	۴	۱۳	۳	۱۵	۱	۸	۶
۱۵	۰	۱۵	۵	۱۰	۱	۱۴	۴	۱۱	۲	۱۳	۷	۸	۳	۱۲	۶	۹

اگر شکل ۲.۴ نشان‌دهندهٔ یک وضعیت در بازی گوشه‌گردان باشد، می‌توانیم مقدار SG این وضعیت را سریعاً از جدول ۲.۴ محاسبه کنیم.

$$g[(۱,۳)]\oplus g[(۳,۲)]\oplus g[(۴,۴)] = ۳\oplus۱\oplus۶ = ۴.$$

بنابراین این یک وضعیت N است. تنها راه تبدیل این وضعیت به یک وضعیت P، تبدیل مقدار SG از ۶ به مقدار ۲ است که برای این کار باید چهار سکهٔ مکان‌های (۴,۴)، (۴,۳)، (۳,۴) و (۳,۳) را برگردانیم.

$$\begin{array}{ccccc} T & T & T & T & T \\ T & T & T & H & T \\ T & T & T & T & T \\ T & T & H & T & T \\ T & T & T & T & H \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{ccccc} T & T & T & T & T \\ T & T & T & H & T \\ T & T & T & T & T \\ T & T & H & H & H \\ T & T & T & H & T \end{array}$$

۳.۴ ضرب نیم

اعداد جدول ۲.۴ به ظاهر بی‌معنی و پریشان به نظر می‌رسند، اما در این جدول برای هر $x, y \geq 0$ داریم، $g[(x,0)] = g[(0,y)] = 0$، همچنین $g[(x,1)] = g[(1,x)] = x$. مشاهدات اخیر این حدس را تقویت می‌کند که شاید رابطهٔ (۴.۴) دستور یک نوع ضرب روی اعداد صحیح باشد. در واقع این حدس درست است. این ضرب را ضرب نیم دو عدد گوییم و با $x \otimes y$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱.۴ برای دو عدد صحیح نامنفی x, y، ضرب نیم دو عدد x و y را با $x \otimes y$ نشان داده و به‌طور بازگشتی به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$x \otimes y = \operatorname{mex}\{\ (x' \otimes y) \oplus (x \otimes y') \oplus (x' \otimes y') :\ 0 \leq x' < x, 0 \leq y' < y\}.$$

این ضرب همراه با جمع نیم، مجموعهٔ اعداد صحیح نامنفی را به یک میدان تبدیل می‌کند. اثبات این مطلب در پیوست ب آمده است. توصیه می‌کنیم که قبل از مطالعهٔ ادامه این بخش به پیوست ب مراجعه و چگونگی تشکیل یک میدان از اعداد صحیح نامنفی را مرور کنید.

طبق آنچه در پیوست ب.۲ بیان شده است، ضرب نیم دارای خاصیت شرکت‌پذیری و توزیع‌پذیری نسبت به جمع نیم است. در واقع برای اعداد صحیح نامنفی x، y و z، داریم

$$x \otimes (y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z, \tag{۵.۴}$$

$$x \otimes (y \oplus z) = (x \otimes y) \oplus (x \otimes z). \tag{۶.۴}$$

یک خاصیت مهم دیگر ضرب نیم این است که هر عدد صحیح مثبت دارای وارون ضربی است. این مطلب را می‌توانید در جدول ۲.۴ مشاهده کنید، هر سطر غیر از سطر اول دارای یک ۱ است. به عنوان مثال وارون نیم ۲ برابر ۳ است، زیرا $۱ = ۳ \otimes ۲$. از علامت $\oslash$ برای نشان دادن تقسیم نیم استفاده می‌کنیم. به عنوان مثال $۳ = ۲ \oslash ۱$، $۱۱ = ۷ \oslash ۱$ و $۹ = ۵ \oslash ۶$.

شما مسلماً علاقه‌ای به حفظ کردن جدول ضرب نیم ندارید. بنابراین لاجرم باید به دنبال پیدا کردن روشی برای محاسبهٔ ضرب نیم دو عدد بدون پیدا کردن همهٔ ضرب‌های اعداد کوچک‌تر باشیم. برای اینکه زودتر از نگرانی در بیایید این روش را در اینجا بیان می‌کنیم.

یک عدد به فرم $۲^{۲^n}$، $n = ۰, ۱, ۲, \ldots$، را یک **توان ۲ فرما** می‌گوییم. اعداد $۲, ۴, ۲۵۶, ۶۵۵۳۶, \ldots$ از جمله توان‌های ۲ فرما هستند. می‌توانیم ضرب نیم دو عدد را به کمک دو قاعدهٔ زیر و قوانین شرکت‌پذیری و توزیع‌پذیری به دست آوریم. اثبات دو قاعدهٔ زیر در پیوست ب.۴ آمده است.

(۱) ضرب نیم یک عدد توان ۲ فرما مانند x در یک عدد کوچک‌تر y که $y < x$، برابر ضرب عادی xy است.

(۲) ضرب نیم یک عدد توان ۲ فرما مانند x در خودش برابر $\frac{۳}{۲}x$ است.

بنابراین $۳۲ = ۱۶ \otimes ۲$ و $۲۴ = \frac{۳}{۲}۱۶ = ۱۶ \otimes ۱۶$. در حالت کلی برای محاسبهٔ $x \otimes y$، ابتدا با استفاده از بسط x و y در مبنای ۲، x و y را به‌صورت جمع نیم چند عدد به فرم توان ۲ در می‌آوریم. اگر در بسط دودویی یک عدد هیچ توان ۲ فرما ظاهر نشود، آن‌گاه هر عامل را به فرم ضرب نیم یک توان ۲ فرما در توانی از ۲ می‌نویسیم. سپس از قوانین شرکت‌پذیری و توزیع‌پذیری استفاده کرده و $x \otimes y$ را به‌صورت مجموعی از حاصل‌ضرب‌های نیم چند عدد به فرم توان ۲ می‌نویسیم. در نهایت به کمک دو قاعدهٔ فوق ضرب نیم را محاسبه می‌کنیم. به عنوان مثال $۱۷ \otimes ۲۴$ و $۸ \otimes ۸$ را در زیر محاسبه

می‌کنیم.

$$\begin{aligned} ۲۴ \otimes ۱۷ = (۲^۴ \oplus ۲^۳) \otimes (۲^۴ \oplus ۱) &= (۲^۴ \otimes ۲^۴) \oplus (۲^۴ \otimes ۱) \\ \oplus (۲^۳ \otimes ۲^۴) \oplus (۲^۳ \otimes ۱) &= ۲۴ \oplus ۱۶ \oplus ۱۲۸ \oplus ۸ = ۱۲۸, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۸ \otimes ۸ &= ۲^۲ \otimes ۲^۱ \otimes ۲^۲ \otimes ۲^۱ = (۲^۲ \otimes ۲^۲) \otimes (۲^۱ \otimes ۲^۱) = ۶ \otimes ۳ \\ &= (۲^۲ \oplus ۲) \otimes (۲ \oplus ۱) \\ &= (۲^۲ \otimes ۲) \oplus (۲^۲ \otimes ۱) \oplus (۲ \otimes ۲) \oplus (۲ \otimes ۱) \\ &= ۸ \oplus ۴ \oplus ۳ \oplus ۲ = ۱۳. \end{aligned}$$

۴.۴ بازی‌های تارتان

بازی گوشه‌گردان یک مثال از رده‌ای از بازی‌هایی است که به کمک ضرب نیم حل می‌شوند. این بازی‌ها، بازی‌های تارتان نام دارند. فرض کنید دو بازی سکه‌گردان یک بعدی $G_۱$ و $G_۲$ داده شده است. **بازی تارتان** $G_۱ \times G_۲$، یک بازی سکه‌گردان دوبعدی است و حرکت‌های قانونی در این بازی به این‌صورت تعریف می‌شوند. اگر در بازی $G_۱$، برگرداندن سکه‌های $x_۱$، ... و x_m یک حرکت قانونی و در بازی $G_۲$ برگرداندن سکه‌های $y_۱$، ... و y_n یک حرکت قانونی باشد، آن‌گاه در بازی $G_۱ \times G_۲$، برگرداندن سکه‌های (x_i, y_j)، برای $i = ۱, \ldots, m$ و $j = ۱, \ldots, n$، یک حرکت قانونی است، البته به شرطی که سکهٔ جنوب شرقی از رو به پشت برگردد.

با این تعریف بازی گوشه‌گردان در واقع همان بازی (دوقلوها)×(دوقلوها) است. در واقع در بازی دوقلوها دو سکه را برمی‌گردانیم، بنابراین در بازی گوشه‌گردان باید چهار سکه در گوشه‌های یک مستطیل را برگردانیم. بازی‌های تارتان را می‌توان به وسیله قضیهٔ زیر تحلیل کرد. اثبات قضیهٔ تارتان را در تمرین ۹ به خواننده واگذار می‌کنیم.

قضیه ۳.۴ (تارتان) فرض کنید $G_۱$ و $G_۲$ دو بازی سکه‌گردان یک بعدی به ترتیب با تابع اسپراگ—گراندی $g_۱$ و $g_۲$ باشند. در این‌صورت تابع اسپراگ—گراندی بازی $G_۱ \times G_۲$ در وضعیت $[(x, y)]$ برابر حاصل‌ضرب نیم $g_۱([x])$ و $g_۲([y])$ است، یعنی

$$g[(x,y)] = g_۱([x]) \otimes g_۲([y]).$$

برای بازی دوقلوها، تابع SG، تابع همانی است. بنابراین قضیه تارتان نشان می‌دهد که تابع SG بازی گوشه‌گردان برابر $g(x, y) = x \otimes y$ است.

مثال ۸.۴ لاک‌پشت‌گردان به توان ۲

در بازی (لاک‌پشت‌گردان)×(لاک‌پشت‌گردان) می‌توانیم چهار سکه در گوشه‌های یک مستطیل یا دو سکه در یک سطر یا دو سکه در یک ستون یا تنها یک سکه را پشت و رو کنیم. بنابراین این بازی مثل بازی گوشه‌گردان است، با این تفاوت که مستطیل‌ها می‌توانند با طول و عرض صفر باشند. اگر سکه‌ها را با شروع از ۱ شماره‌گذاری کنیم، تابع SG بازی لاک‌پشت‌گردان به‌صورت $g([x]) = x$ است. دقت کنید که برای استفاده از قضیهٔ تارتان در بازی ۲(لاک‌پشت‌گردان) نیز باید شماره‌گذاری از (۱, ۱) شروع شود.

به عنوان مثال اگر وضعیت شکل ۲.۴ را در بازی ۲(لاک‌پشت‌گردان) در نظر بگیریم، مقدار SG این وضعیت برابر $(۵ \otimes ۵) \oplus (۳ \otimes ۴) \oplus (۴ \otimes ۲)$، یعنی $۳ = ۷ \oplus ۱۲ \oplus ۸$ است. یک حرکت منجر به برد، تبدیل مقدار SG از ۷ به ۴ است. برای این کار می‌توانیم سکه‌های (۵, ۵)، (۲, ۵)، (۵, ۳) و (۲, ۳) را برگردانیم و به مقدار SG، $۴ = ۱۵ \oplus ۱۰ \oplus ۱$ برسیم.

T	T	T	T	T		T	T	T	T	T
T	T	T	H	T		T	T	H	H	H
T	T	T	T	T	$\Longrightarrow$	T	T	T	T	T
T	T	H	T	T		T	T	H	T	T
T	T	T	T	H		T	T	H	T	T

مثال ۹.۴ قالیچه‌ها

یک نمونهٔ دیگر از بازی‌های تارتان، **بازی قالیچه‌ها** است که در واقع همان بازی (خط‌کش)×(خط‌کش) است. یک حرکت در این بازی پشت و رو کردن همهٔ سکه‌ها در یک بلوک مستطیلی است. اجازه دهید جدولی از مقادیر SG این بازی تهیه کنیم. به یاد داریم که اگر سکه‌ها را با شروع از یک شماره‌گذاری کنیم، دنبالهٔ مقادیر SG بازی خط‌کش به‌صورت ...,۱,۲,۱,۴,۲,۱,۸ است. بنابراین مقادیر SG برای بازی قالیچه‌ها برابر حاصل‌ضرب نیم این اعداد است. در جدول زیر مقادیر SG بازی خط‌کش را در حاشیه‌ها و ضرب نیم آنها را در خود جدول قرار داده‌ایم.

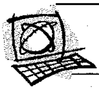
جدول ۳.۴ مقادیر SG برای بازی قالیچه‌ها.

	۱	۲	۱	۴	۱	۲	۱	۸
۱	۱	۲	۱	۴	۱	۲	۱	۸
۲	۲	۳	۲	۸	۲	۳	۲	۱۲
۱	۱	۲	۱	۴	۱	۲	۱	۸
۴	۴	۸	۴	۶	۴	۸	۴	۱۱
۱	۱	۲	۱	۴	۱	۲	۱	۸
۲	۲	۳	۲	۸	۲	۳	۲	۱۲
۱	۱	۲	۱	۴	۱	۲	۱	۸
۸	۸	۱۲	۸	۱۱	۸	۱۲	۸	۱۳

به عنوان مثال وضعیت شکل ۲.۴ را در بازی قالیچه‌ها در نظر بگیرید. مقادیر SG سکه‌های به رو ۸، ۴ و ۱ هستند که جمع نیم آنها برابر ۱۳ است. یک حرکت منجر به برد تبدیل مقدار SG از ۸ به ۵ است. حرکتی که این مطلوب را حاصل می‌کند برگرداندن همهٔ سکه‌ها در مستطیل ۴ × ۲ از (۱,۱) تا (۲,۴) است.

$$\begin{array}{ccccc} T & T & T & T & T \\ T & T & T & H & T \\ T & T & T & T & T \\ T & T & T & H & T \\ T & T & T & T & H \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{ccccc} H & H & H & H & T \\ H & H & H & T & T \\ T & T & T & T & T \\ T & T & H & T & T \\ T & T & T & T & H \end{array}$$

بازی قالیچه‌ها گاهی بازی **بلوک‌گردان** نیز گفته می‌شود. حال که چگونگی بازی کردن را در این بازی آموخته‌اید می‌توانید مهارت خود را در وب‌گاه زیر امتحان کنید.


http://thinks.com/java/turnablock/turnablock.htm

۵.۴ حل بازی‌های تارتان

یکی از سختی‌ها در مواجهه با بازی‌های تارتان این است که به دلیل پیچیدگی حرکت‌های ممکن، همیشه پیدا کردن حرکت‌های منجر به برد آسان نیست. به عنوان مثال وضعیت زیر با دو سکهٔ به رو را در بازی ^{۲}(لاک‌پشت‌نما) در نظر بگیرید.

T	H	T	T	T	T
T	T	T	T	T	T
T	T	T	T	T	T
T	T	T	T	T	T
T	T	T	T	T	H

شکل ۳.۴ یک وضعیت در بازی سکه‌گردان دوبعدی.

به یاد دارید که دنبالهٔ SG برای بازی لاک‌پشت‌نما به‌صورت ...,۱, ۲, ۴, ۷, ۸, ۱۱ است. بنابراین از روی جدول ضرب نیم می‌توانیم مقادیر SG برای بازی ^{۲}(لاک‌پشت‌نما) را به دست آوریم.

جدول ۴.۴ مقادیر SG برای بازی ^{۲}(لاک‌پشت‌نما).

	۱	۲	۴	۷	۸	۱۱
۱	۱	۲	۴	۷	۸	۱۱
۲	۲	۳	۸	۹	۱۲	۱۳
۴	۴	۸	۶	۱۰	۱۱	۷
۷	۷	۹	۱۰	۴	۱۵	۱
۸	۸	۱۲	۱۱	۱۵	۱۳	۹

می‌بینیم که دو سکهٔ به رو در وضعیت فوق دارای مقادیر SG برابر ۲ و ۹ با جمع نیم ۱۱ هستند. بنابراین در این وضعیت اگر نوبت با ما باشد، می‌توانیم بازی را ببریم. برای

برد باید مقدار SG را از ۹ (سکه $(۴,۵)$) به ۲ تبدیل کنیم، اما چطور می‌توانیم چنین حرکتی را پیدا کنیم؟ از این وضعیت ۱۷۶ حرکت مختلف با سکهٔ $(۴,۵)$ به عنوان سکهٔ جنوب شرقی وجود دارد که عمدتاً پیچیده هستند. در ادامه روشی بیان می‌کنیم که جستجو برای حرکت منجر به برد را ساده‌تر می‌کند.

فرض می‌کنیم در بازی $G_۱ \times G_۲$ در وضعیت $[(x,y)]$ هستیم و مقدار SG این وضعیت برابر $v = g_۱(x) \otimes g_۲(y)$ است. همچنین فرض کنید می‌خواهیم مقدار SG را از v به u تغییر دهیم. برای نمونه در مثال فوق داریم $(x,y) = (۴,۵)$، $g_۱([x]) = ۸$، $g_۲([y]) = ۱۱$، $v = ۹$ و $u = ۲$. این روش در سه مرحله اجرا می‌شود.

۱) قرار می‌دهیم $v_۱ := g_۱([x])$ و $v_۲ := g_۲([y])$. ابتدا یک حرکت در بازی گوشه‌گردان پیدا می‌کنیم که مقدار SG را از v به u تبدیل کند. سکهٔ شمال غربی این حرکت را با $(u_۱, u_۲)$ نشان می‌دهیم، بنابراین $u = (v_۱ \otimes u_۲) \oplus (u_۱ \otimes v_۲) \oplus (u_۱ \otimes u_۲)$.

۲) یک حرکت $M_۱$ در بازی یک بعدی $G_۱$ پیدا می‌کنیم که مقدار SG را از $v_۱$ به $u_۱$ تبدیل کند.

۳) یک حرکت $M_۲$ در بازی یک بعدی $G_۲$ پیدا می‌کنیم که مقدار SG را از $v_۲$ به $u_۲$ تبدیل کند.

در این‌صورت با استفاده از قضیهٔ ۱.۴ و قضیهٔ تارتان، می‌بینیم که حرکت $M_۱ \times M_۲$ در بازی $G_۱ \times G_۲$ همان‌طور که می‌خواستیم به مقدار SG برابر با u منجر می‌شود.

اجازه دهید این روش را در پیدا کردن حرکت منجر به برد در وضعیت شکل (۳.۴) در بازی ۲ (لاک‌پشت‌نما) اجرا کنیم. در مرحلهٔ اول داریم $(v_۱, v_۲) = (۸, ۱۱)$ و می‌خواهیم $(u_۱, u_۲)$ را به گونه‌ای به دست آوریم که

$$(u_۱ \otimes u_۲) \oplus (u_۱ \otimes ۱۱) \oplus (۸ \otimes u_۲) = ۲.$$

یک امکان $(u_۱, u_۲) = (۳, ۱۰)$ است، زیرا $۲ = (۸ \otimes ۱۰) \oplus (۳ \otimes ۱۱) \oplus (۳ \otimes ۱۰)$.[۱] حال در مرحلهٔ دوم به دنبال یک حرکت در بازی لاک‌پشت‌نما هستیم که مقدار SG را

[۱] یک امکان ساده‌تر $(u_۱, u_۲) = (۱, ۱)$ نیز وجود دارد، اما برای اینکه روش به خوبی روشن شود، امکان اول را انتخاب کرده‌ایم.

از ۸ به ۳ تبدیل کند. این کار با پشت و رو کردن سکه‌های ۰، ۱ و ۴ قابل انجام است، زیرا $g_۱([۰]) \oplus g_۱([۱]) = ۱ \oplus ۲ = ۳$. سپس در مرحلهٔ سوم به دنبال حرکتی در بازی لاک‌پشت‌نما هستیم که مقدار SG را از ۱۱ به ۱۰ تبدیل کند. این کار با پشت و رو کردن سکه‌های ۱، ۴ و ۵ قابل انجام است، زیرا $g_۲([۱]) \oplus g_۲([۴]) = ۲ \oplus ۸ = ۱۰$. در نتیجه حرکت برگرداندن ۹ سکه $\{۰, ۱, ۴\} \times \{۱, ۴, ۵\}$، یک حرکت منجر به برد است.

$$\begin{array}{cccccc} \mathrm{T} & \mathrm{H} & \mathrm{T} & \mathrm{T} & \mathrm{T} & \mathrm{T} \\ \mathrm{T} & \mathrm{T} & \mathrm{T} & \mathrm{T} & \mathrm{T} & \mathrm{T} \\ \mathrm{T} & \mathrm{T} & \mathrm{T} & \mathrm{T} & \mathrm{T} & \mathrm{T} \\ \mathrm{T} & \mathrm{T} & \mathrm{T} & \mathrm{T} & \mathrm{T} & \mathrm{T} \\ \mathrm{T} & \mathrm{T} & \mathrm{T} & \mathrm{T} & \mathrm{T} & \mathrm{H} \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{cccccc} \mathrm{T} & \mathrm{T} & \mathrm{T} & \mathrm{T} & \mathrm{H} & \mathrm{H} \\ \mathrm{T} & \mathrm{H} & \mathrm{T} & \mathrm{T} & \mathrm{H} & \mathrm{H} \\ \mathrm{T} & \mathrm{T} & \mathrm{T} & \mathrm{T} & \mathrm{T} & \mathrm{T} \\ \mathrm{T} & \mathrm{T} & \mathrm{T} & \mathrm{T} & \mathrm{T} & \mathrm{T} \\ \mathrm{T} & \mathrm{H} & \mathrm{T} & \mathrm{T} & \mathrm{H} & \mathrm{T} \end{array}$$

مقدار SG وضعیت حاصل صفر است. به عنوان یک تمرین می‌توانید مقدار SG در این وضعیت را مستقیماً محاسبه کنید.

مطالب بیشتری در رابطه با این نظریهٔ زیبا وجود دارد که می‌توانید آنها را همراه با مثال‌های بیشتر در فصل ۱۴ [۳] ببینید.

۶.۴ تمرین

۱) ثابت کنید بازی دوقلوها (مثال ۲.۴) با بازی نیم معادل است.

۲) وضعیت TTHTHHTTH را در یک بازی سکه‌گردان در نظر بگیرید. در صورت وجود، یک حرکت منجر به برد در هر یک از بازی‌های زیر پیدا کنید.

الف) لاک‌پشت‌گردان.

ب) دوقلوها.

ج) بازی تفاضلی با مجموعهٔ تفاضلی $S = \{۱, ۳, ۴\}$ وقتی که باید دقیقاً دو سکه برگردد.

د) لاک‌پشت‌نما.

۳) در بازی لاک‌پشت‌نما از وضعیت شروع HHHTHTH، همه حرکت‌های منجر به برد را بیابید. با کدام یک از این حرکت‌ها، در نهایت بازی را با کمترین تعداد حرکت می‌برید؟

۴) الف) فرض کنید یک وضعیت با n سکه و تنها یک سکهٔ به رو که همان سکهٔ سمت راست است داده شده است. در بازی لاک‌پشت‌گردان، با چند حرکت بازی تمام می‌شود.
ب) همین سؤال را برای بازی لاک‌پشت‌نما جواب دهید.
ج) همین سؤال را برای بازی خط‌کش جواب دهید.

۵) **سه‌قلوها.** فرض کنید در بازی لاک‌پشت‌نما، نمی‌توانید فقط یک یا دو سکه بردارید، بلکه مجبور هستید حتماً سه سکه را برگردانید. این بازی، بازی سه‌قلوها خوانده می‌شود. قانون این بازی چنین است. در هر حرکت می‌توانید دقیقاً سه سکه را پشت و رو کنید به شرطی که سکهٔ سمت راست از رو به پشت برگردد. تابع اسپراگ—گراندی این بازی را پیدا کرده و آن را با تابع اسپراگ—گراندی بازی لاک‌پشت‌نما مقایسه کنید.

٦) **خط‌کِشک.** فرض کنید در بازی خط‌کش مجاز نیستیم تنها یک سکه را پشت و رو کنیم. این بازی، بازی رولت نام دارد. قانون این بازی چنین است. در هر حرکت می‌توانید تعدادی سکهٔ متوالی را پشت و رو کنید به‌طوری که حداقل دو سکه پشت و رو شود و سکهٔ سمت راست از رو به پشت برگردد. تابع اسپراگ—گراندی این بازی را پیدا کرده و آن را با تابع اسپراگ—گراندی بازی خط‌کش مقایسه کنید.

۷) یک بازی سکه‌گردان از نوع بازی‌های تفاضلی را با قانون زیر در نظر بگیرید. در هر حرکت می‌توانید یک یا دو سکه را برگردانید به‌طوری که سکهٔ سمت راست از رو به پشت برگردد و در ضمن اگر دو سکه را برگردانده‌اید، باید فاصلهٔ بین آنها در مجموعهٔ تفاضلی S باشد. تابع اسپراگ—گراندی این بازی را با تابع اسپراگ—گراندی بازی تفاضلی با مجموعهٔ تفاضلی S مقایسه کنید.

۸) الف) ضرب‌های نیم $21 \otimes 6$، $40 \otimes 25$ و $14 \otimes 15$ را محاسبه کنید.
ب) مقدار ریشهٔ دوم نیم ۸ را حساب کنید.[1]
ج) معادلهٔ $x^2 \oplus x \oplus 6 = 0$ را حل کنید. این معادله دو ریشه دارد. (دقت کنید که در اینجا x^2 همان $x \otimes x$ است.)

۹) فرض کنید علائم همان‌هایی هستند که در قضیهٔ تارتان به کار رفته است.

الف) یک وضعیت $[(v_1, v_2)]$ در بازی گوشه‌گردان را در نظر بگیرید. این وضعیت دارای مقدار SG برابر با $v_1 \otimes v_2$ است. همچنین یک وضعیت $[(x, y)]$ در بازی $G_1 \times G_2$ را در نظر بگیرید که $g_1([x]) = v_1$ و $g_2([y]) = v_2$. فرض کنید قضیهٔ تارتان برای همهٔ وضعیت‌های $[(x', y')] \neq [(x, y)]$ با $x' \leq x$ و $y' \leq y$ درست باشد، نشان دهید در بازی گوشه‌گردان یک حرکت از وضعیت $[(v_1, v_2)]$ به وضعیتی با مقدار SG برابر با u وجود دارد، اگر و تنها اگر در بازی $G_1 \times G_2$ یک حرکت از وضعیت $[(x, y)]$ به وضعیتی با مقدار SG برابر با u وجود داشته باشد.

ب) نتیجه بگیرید که وضعیت $[(x, y)]$ در بازی $G_1 \times G_2$ نیز دارای مقدار SG $v_1 \otimes v_2$ است.

۱۰) وضعیت زیر را در بازی تارتان $G_1 \times G_2$ در نظر بگیرید که G_1 بازی لاک‌پشت‌نما و G_2 بازی خط‌کش است.

T	H	T	T	T	T	T	T
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	T	T	T	T	T	H

الف) جدول مقادیر SG برای این وضعیت را بسازید.
ب) توجه کنید که مقدار SG این وضعیت ۱۵ است. یک حرکت منجر به برد برای بازیکن اول پیدا کنید.

[1] توجه کنید که هر عدد صحیح نامنفی یک ریشه دوم نیم دارد.

۱۱) الف) یک وضعیت $n \times n$ در بازی قالیچه‌ها را در نظر بگیرید به‌طوری که سکه‌های به رو در مکان‌های (i,j) قرار دارند که $i+j$ فرد است. در این بازی چه کسی برنده است؟ آیا می‌توانید یک استراتژی برد ساده ارائه کنید؟
ب) اگر سکه‌ها در مکان‌های (i,j) برای $i+j$ زوج قرار داشته باشند، چه کسی برنده است؟ آیا می‌توانید یک استراتژی برد ساده ارائه کنید؟

۱۲) یک بازی تارتان $G_۱ \times G_۲$ را در نظر بگیرید که $G_۱$ بازی تفاضلی با مجموعهٔ $S = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$ است که در آن باید دقیقاً دو سکه را برگردانیم و $G_۲$ بازی خط‌کش است. فرض کنید که وضعیت شروع یک بلوک مربعی ۱۰۰ × ۱۰۰ است که همهٔ سکه‌ها به جز سکه‌های (۱۰۰, ۱۰۰) و (۴, ۱) به پشت هستند. اگر بازیکن اول باشید، چه حرکتی انجام می‌دهید؟

فصل ۵

بازی‌های جانبدارانه

در بازی‌های ترکیبیاتی که تاکنون دیده‌ایم تنها تفاوت بین دو بازیکن، انتخاب شروع کنندهٔ بازی است. پس از آن کلیهٔ حرکت‌های مجاز از یک وضعیت به وضعیت دیگر برای هر دو بازیکن یکسان است. به همین دلیل دو بازیکن را با بازیکن اول (شروع کننده) و بازیکن دوم نشان دادیم. اما در بسیاری از بازی‌های ترکیبیاتی، حرکت‌های مجاز از یک وضعیت بستگی به این دارد که نوبت کدام بازیکن است. در این بازی‌ها که بازی‌های جانبدارانه خوانده می‌شوند (تعریف ۲.۱)، برای نشان دادن تمایز آشکار نقش دو بازیکن، آنها را با بازیکن **چپ** و بازیکن **راست** مشخص می‌کنیم. در این فصل ضمن تعریف گراف بازی‌های ترکیبیاتی جانبدارانه، رهیافت وضعیت‌های N و P را که در فصل ۱ برای تحلیل بازی‌های بی‌طرفانه معرفی شد، برای تحلیل بازی‌های جانبدارانه به کار می‌گیریم. برای سهولت در این فصل همه جا بازی‌ها را با قانون عادی در نظر می‌گیریم. اگرچه می‌توان همهٔ مفاهیم مطرح شده در این فصل را به بازی‌های جانبدارانه با قانون وارون نیز تعمیم داد.

۱.۵ گراف بازی‌های جانبدارانه

می‌توانیم مشابه تعریف ۴.۱، گراف متناظر یک بازی جانبدارانه را نیز تعریف کنیم. در این تعریف باید حرکت‌های مجاز دو بازیکن تفکیک شوند.

تعریف ۱.۵ (گراف یک بازی ترکیبیاتی جانبدارانه). برای یک بازی ترکیبیاتی جانبدارانه، گراف این بازی به‌صورت سه‌تایی مرتب $G = (X, E_L, E_R)$ به همراه یک عضو مشخص $x_\circ \in X$ تعریف می‌شود که مجموعهٔ رأس‌ها X، مجموعهٔ همهٔ وضعیت‌های بازی و رأس $x_\circ$ وضعیت شروع را نشان می‌دهد. مجموعه‌های E_L و E_R دو مجموعه از زوج‌های مرتب از مجموعهٔ X است، به‌طوری که برای دو رأس $x, y \in X$، داریم $(x, y) \in E_L$ اگر و تنها اگر برای بازیکن چپ، حرکت از وضعیت x به وضعیت y مجاز باشد. همچنین $(x, y) \in E_R$ اگر و تنها اگر برای بازیکن راست، حرکت از وضعیت x به وضعیت y مجاز باشد. هر عضو E_L را یک یال بازیکن چپ و هر عضو E_R را یک یال بازیکن راست گوییم.

برای x داده شده در مجموعهٔ X، $L(x)$ را مجموعهٔ وضعیت‌هایی تعریف می‌کنیم که بازیکن چپ می‌تواند از x به آنها حرکت کند و $R(x)$ مجموعهٔ وضعیت‌هایی را نشان می‌دهد که بازیکن راست می‌تواند از x به آنها حرکت نماید. اعضای $L(x)$ را **گزینه‌های چپ** x و اعضای $R(x)$ را **گزینه‌های راست** x می‌گوییم. هر گزینه چپ یا راست x را یک **تالی** x می‌نامیم. اگر $L(x)$ تهی باشد، آن‌گاه x را **یک وضعیت پایانی برای بازیکن چپ** و اگر $R(x)$ تهی باشد، آن‌گاه x را **یک وضعیت پایانی برای بازیکن راست** می‌خوانیم.

می‌توانیم با داشتن گراف یک بازی جانبدارانه $G = (X, E_L, E_R)$ و وضعیت شروع $x_\circ \in X$ و مشخص کردن یک بازیکن شروع کننده (چپ یا راست) بازی را به‌صورت زیر روی گراف G اجرا کنیم.

۱) بازیکن شروع کننده ابتدا از رأس $x_\circ$ حرکت می‌کند.

۲) بازیکنان پشت سرهم حرکت می‌کنند.

۳) در وضعیت x، بازیکنی که نوبت حرکت او است، اگر بازیکن چپ باشد، یک وضعیت $y \in L(x)$ و اگر بازیکن راست باشد، یک وضعیت $z \in R(x)$ را انتخاب کرده و به آن حرکت می‌کند.

۴) بازیکنی که در نوبت خود با یکی از وضعیت‌های پایانی خود روبه‌رو شود، بازنده است.

در نمایش گراف بازی‌های جانبدارانه، باید یال‌های متعلق به دو بازیکن از هم تفکیک شوند. به این منظور یال‌های متعلق به بازیکن چپ را به‌صورت $\longrightarrow$، یال‌های متعلق به بازیکن راست را به‌صورت $\dashrightarrow$ و یال‌های متعلق به دو بازیکن را به شکل $\dashrightarrow\!\!\!\longrightarrow$ نشان می‌دهیم. برای تأمین شرط پایان‌پذیری بازی‌های ترکیبیاتی (شرط (۷) تعریف ۱.۱)، باید شرطی روی گراف بازی‌های جانبدارانه قرار دهیم.

تعریف ۲.۵ در گراف یک بازی جانبدارانه $G = (X, E_L, E_R)$، یک دنبالهٔ نامتناهی $x_۰, x_۱, x_۲, \ldots$ از رأس‌ها را یک **گشت تناوبی نامتناهی** می‌گوییم، هرگاه برای هر $i \geq ۱$، $(x_{۲i-۱}, x_{۲i}) \in E_L$ و $(x_{۲i-۲}, x_{۲i-۱}) \in E_R$ یا اینکه برای هر $i \geq ۱$، $(x_{۲i-۱}, x_{۲i}) \in E_R$ و $(x_{۲i-۲}, x_{۲i-۱}) \in E_L$. گراف بازی جانبدارانه $G = (X, E_L, E_R)$ را **به‌طور تناوبی متناهی** گوییم هرگاه G گشت تناوبی نامتناهی نداشته باشد.

شرط به‌طور تناوبی متناهی بودن گراف بازی جانبدارانه با شرط پایان‌پذیری این بازی معادل است. در فصل ۳، مجموع دو بازی ترکیبیاتی G و H را به‌صورت بازی جدید $G + H$ تعریف کردیم که در آن، هر بازیکن در نوبت خود یکی از بازی‌ها را انتخاب و یک حرکت مجاز در آن بازی انجام می‌دهد. در اینجا باید توجه داشته باشیم که اگر G و H دو بازی جانبدارانه باشند که در شرط پایان‌پذیری صدق می‌کنند، ممکن است بازی مجموع $G + H$ در شرط پایان‌پذیری صدق نکند.

مثال ۱.۵ بازی G را بازی‌ای با یک دسته از تعداد متناهی مهره در نظر بگیرید، که هر کدام از بازیکنان در هر حرکت می‌توانند ۲ یا ۳ مهره از دسته بردارند. همچنین بازیکن

چپ می‌تواند به جای این حرکت، درصورتی که دسته خالی نباشد، یک مهره به دسته اضافه کند. بازی H را بازی‌ای مانند بازی G در نظر بگیرید با این تفاوت که اضافه کردن یک مهره به دسته، حرکت مجاز برای بازیکن راست است نه بازیکن چپ. بازی‌های G و H هر دو در شرط پایان‌پذیری صدق می‌کنند، زیرا پس از دو حرکت متوالی بازیکن چپ و راست، تعداد مهره‌ها حداقل یک واحد کم می‌شود. حال بازی $G + H$ را در نظر بگیرید. فرض کنید در این بازی بازیکن چپ در نوبت خود یک مهره به دستهٔ بازی G اضافه کند و بازیکن راست نیز در نوبت خود یک به مهره به دستهٔ بازی H بیفزاید. واضح است که به این ترتیب، بازی به‌طور نامتناهی ادامه می‌یابد و لذا بازی $G + H$ در شرط پایان‌پذیری صدق نمی‌کند.

برای رفع این مشکل باید شرط به‌طور تناوبی متناهی بودن گراف بازی جانبدارانه را با یک شرط قوی‌تر جایگزین کنیم.

تعریف ۳.۵ در گراف یک بازی جانبدارانه $G = (X, E_L, E_R)$، یک دنبالهٔ نامتناهی $x_۰, x_۱, x_۲, \ldots$ از رأس‌ها را یک **گشت نامتناهی** می‌گوییم، هرگاه برای هر $i \geq ۱$، $(x_{i-۱}, x_i) \in E_L \cup E_R$؛ یعنی حرکت از وضعیت $x_{i-۱}$ به وضعیت x_i، یک حرکت مجاز برای یکی از بازیکنان باشد. گراف بازی جانبدارانه $G = (X, E_L, E_R)$ را **متوالیاً متناهی** گوییم هرگاه G گشت نامتناهی نداشته باشد. یک بازی جانبدارانه را **متناهی** گوییم هرگاه گراف این بازی متوالیاً متناهی باشد.

در این کتاب، همه‌جا بازی‌های جانبدارانه را متناهی فرض می‌کنیم مگر آنکه خلاف آن ذکر شود. برای مشاهدهٔ روش بررسی بازی‌های جانبدارانهٔ نامتناهی، فصل‌های ۱۱ و ۱۲ کتاب [۳] را ببینید.

۲.۵ وضعیت‌های N و P

در بخش ۳.۱ دیدیم که در بازی‌های بی‌طرفانه، در هر وضعیت بازیکن بعدی یا بازیکن قبلی استراتژی برد دارند. این وضعیت‌ها را به ترتیب وضعیت N و وضعیت P نامیدیم.

در بازی‌های ترکیبیاتی جانبدارانه به دلیل تفاوت حرکت‌های مجاز برای دو بازیکن، ممکن است بازیکن چپ با شروع از یک وضعیت بتواند برد خود را تضمین کند اما این کار برای بازیکن راست با شروع از همان وضعیت ممکن نباشد. بنابراین باید در تعریف وضعیت‌های N و P، تمایز بازیکنان به گونه‌ای لحاظ شود. یک وضعیت را برای بازیکن چپ وضعیت N می‌گوییم و با N_L نشان می‌دهیم اگر بازیکن چپ بتواند با شروع از آن وضعیت برد خود را تضمین کند. به همین ترتیب یک وضعیت را برای بازیکن چپ وضعیت P گفته و با P_L نشان می‌دهیم هرگاه بازیکن چپ با شروع از آن وضعیت و حرکت بهینهٔ رقیبش ببازد. به‌طور مشابه وضعیت‌های N_R و P_R برای بازیکن راست تعریف می‌شوند.

تعریف ۴.۵ یک بازی ترکیبیاتی جانبدارانه با قانون عادی را در نظر گرفته و فرض کنید $\mathcal{P}_L$ و $\mathcal{P}_R$ دو زیرمجموعه از وضعیت‌ها در این بازی و $\mathcal{N}_L$ و $\mathcal{N}_R$ به ترتیب مکمل‌های این دو مجموعه باشند که در خواص زیر صدق می‌کنند.

۱) هر وضعیت پایانی بازیکن چپ متعلق به مجموعهٔ $\mathcal{P}_L$ و هر وضعیت پایانی بازیکن راست متعلق به مجموعهٔ $\mathcal{P}_R$ است.

۲) از هر وضعیت در مجموعهٔ $\mathcal{N}_L$، بازیکن چپ یک حرکت مجاز به یک وضعیت در مجموعهٔ $\mathcal{P}_R$ دارد و از هر وضعیت در مجموعهٔ $\mathcal{N}_R$، بازیکن راست یک حرکت مجاز به یک وضعیت در مجموعهٔ $\mathcal{P}_L$ دارد.

۳) از هر وضعیت در مجموعهٔ $\mathcal{P}_L$، همهٔ حرکت‌های مجاز بازیکن چپ به وضعیتی در مجموعهٔ $\mathcal{N}_R$ منجر می‌شود و از هر وضعیت در مجموعهٔ $\mathcal{P}_R$، همهٔ حرکت‌های مجاز بازیکن راست به وضعیتی در مجموعهٔ $\mathcal{N}_L$ منجر می‌شود.

در این‌صورت هر وضعیت در مجموعهٔ $\mathcal{P}_L$ و $\mathcal{N}_L$ را به ترتیب یک **وضعیت** P و N **برای بازیکن چپ** گفته و به ترتیب با P_L و N_L نشان می‌دهیم. همچنین هر وضعیت در مجموعهٔ $\mathcal{P}_R$ و $\mathcal{N}_R$ را به ترتیب یک **وضعیت** P و N **برای بازیکن راست** گفته و به ترتیب با P_R و N_R نشان می‌دهیم.

اگر در یک بازی جانبدارانه، مجموعه‌های $\mathcal{P}_L$ و $\mathcal{P}_R$ با خواص مشخص شده در تعریف فوق یافت شوند، آن‌گاه برای بازیکن چپ استراتژی رسیدن به یک وضعیت P_R و برای بازیکن راست استراتژی رسیدن به یک وضعیت P_L، استراتژی برد است. زیرا به عنوان مثال اگر شما بازیکن چپ باشید و در نوبت خود به یک وضعیت P_R حرکت کنید، بازیکن راست از این وضعیت تنها می‌تواند به یک وضعیت N_L حرکت کند (خاصیت ۳). سپس شما می‌توانید از این وضعیت با یک حرکت مناسب به یک وضعیت P_R برسید (خاصیت ۲). این حرکت‌ها ادامه می‌یابد تا اینکه بازی در یک وضعیت پایانی خاتمه می‌یابد (شرط پایان‌پذیری). با این استراتژی شما همواره حرکتی برای انجام دادن دارید و لذا آخرین حرکت را انجام داده و برنده می‌شوید. نتیجه این بحث این است که:

در وضعیت (N_L, P_R) بازیکن چپ، در وضعیت (P_L, N_R) بازیکن راست، در وضعیت (N_L, N_R) بازیکن بعدی (کسی که نوبت حرکت او است) و در وضعیت (P_L, P_R) بازیکن قبلی (کسی که به این وضعیت حرکت کرده است) استراتژی برد دارد.

در ادامه قصد داریم ثابت کنیم که در یک بازی جانبدارانه هر وضعیت، یکی از چهار حالت (P_L, P_R)، (P_L, N_R)، (N_L, P_R) یا (N_L, N_R) است. سپس الگوریتمی برای پیدا کردن وضعیت‌های N و P بازیکنان ارائه می‌دهیم.

تعریف ۵.۵ فرض کنید $G = (X, E_L, E_R)$، گراف یک بازی جانبدارانه باشد. زوج مرتب (K_L, K_R) که در آن $K_L, K_R \subseteq X$ را یک **هستهٔ دوگانه** برای G گوییم هرگاه،

۱) برای هر $x \in X - K_L$، یک $y \in K_R$ یافت شود که $y \in L(x)$؛ یعنی هر رأس خارج از K_L حداقل یک گزینهٔ چپ در K_R داشته باشد و

۲) برای هر $x \in X - K_R$، یک $y \in K_L$ یافت شود که $y \in R(x)$؛ یعنی هر رأس خارج از K_R حداقل یک گزینهٔ راست در K_L داشته باشد.

۳) برای هر $x \in K_L$ داشته باشیم $L(x) \subseteq X - K_R$؛ یعنی برای هر $x \in K_L$، همهٔ گزینه‌های چپ x، خارج از K_R باشند،

۴) برای هر $x \in K_R$ داشته باشیم $R(x) \subseteq X - K_L$؛ یعنی برای هر $x \in K_R$، همهٔ گزینه‌های راست x، خارج از K_L باشند.

قضیهٔ زیر نشان می‌دهد اگر گراف یک بازی جانبدارانه به‌طور تناوبی متناهی باشد، آن‌گاه یک هستهٔ دوگانهٔ یکتا برای آن وجود دارد. اثبات این قضیه مشابه اثبات قضیهٔ ۱.۱ است، تنها کافی است گزینه‌های چپ و راست را در میان تالی‌های x تفکیک کنیم. اثبات به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود (تمرین ۲).

قضیه ۱.۵ فرض کنید $G = (X, E_L, E_R)$ گراف یک بازی جانبدارانه باشد. اگر G به‌طور تناوبی متناهی باشد، آن‌گاه یک هستهٔ دوگانهٔ یکتا برای G وجود دارد.

نتیجه ۱.۵ در هر بازی ترکیبیاتی جانبدارانه، هر وضعیت یکی از چهار حالت (P_L, P_R)، (N_L, N_R)، (N_L, P_R) یا (P_L, N_R) است که در این وضعیت‌ها به ترتیب بازیکن قبلی، بازیکن بعدی، بازیکن چپ و بازیکن راست استراتژی برد دارند. استراتژی برد برای یک بازیکن، حرکت به وضعیت P حریف است.

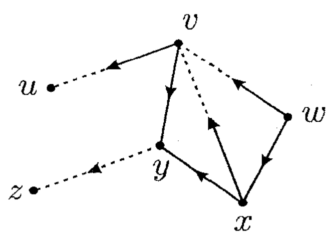
برهان. گراف $G = (X, E_L, E_R)$ را گراف این بازی جانبدارانه و (K_L, K_R) را هستهٔ دوگانهٔ یکتای G در نظر بگیرید. قرار دهید $\mathcal{P}_L := K_L$، $\mathcal{P}_R := K_R$، $\mathcal{N}_L := X - K_L$ و $\mathcal{N}_R := X - K_R$. خواص هسته، شرایط تعریف ۴.۵ را برآورده می‌کند.

در بازی‌های ترکیبیاتی جانبدارانه، می‌توانیم با به کار بردن الگوریتم زیر و شروع از وضعیت‌های پایانی بازیکنان، وضعیت‌های N و P را مشخص کنیم.

الگوریتم پیدا کردن وضعیت‌های N و P در بازی‌های جانبدارانه

- مرحلهٔ ۱. هر وضعیت پایانی برای بازیکن چپ را با P_L و هر وضعیت پایانی برای بازیکن راست را با P_R برچسب بزن.
- مرحلهٔ ۲. هر وضعیتی که بتواند با یک حرکت بازیکن راست به یک وضعیت با برچسب P_L تبدیل شود را با N_R و هر وضعیت که بتواند با یک حرکت بازیکن چپ به یک وضعیت با برچسب P_R تبدیل شود را با N_L برچسب بزن.
- مرحلهٔ ۳. هر وضعیتی را که همهٔ حرکت‌های مجاز بازیکن راست از آن به وضعیتی با برچسب N_L منجر می‌شود را با P_R و هر وضعیتی را که همهٔ حرکت‌های مجاز بازیکن چپ از آن به وضعیتی با برچسب N_R می‌انجامد را با P_L برچسب بزن.
- مرحلهٔ ۴. اگر هیچ وضعیت P جدیدی در مرحلهٔ ۳ یافت نشد، توقف کن؛ در غیر این‌صورت به مرحلهٔ ۲ برو.

مثال ۲.۵ به عنوان یک مثال، در گراف بازی جانبدارانه زیر وضعیت های N و P دو بازیکن را مشخص می‌کنیم.



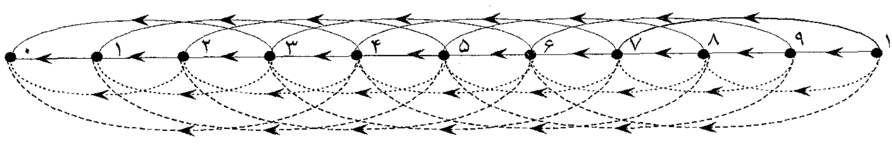
رأس‌های u و z برای هر دو بازیکن وضعیت پایانی هستند و در نتیجه هر دو، وضعیت (P_L, P_R) می‌باشند. رأس y برای بازیکن چپ وضعیت پایانی است و از طرفی برای بازیکن راست از آن یک حرکت به وضعیت P_L وجود دارد. پس y، وضعیت (P_L, N_R) است. از رأس v برای بازیکن راست و چپ یک حرکت به ترتیب به وضعیت P_L و وضعیت P_R وجود دارد، پس v وضعیت (N_L, N_R) است.

در رأس x تنها حرکت‌های بازیکن راست به وضعیت N_L و کلیهٔ حرکت‌های بازیکن چپ به وضعیت N_R منجر می‌شود، لذا x وضعیت (P_L, P_R) است. در نهایت از رأس w تنها حرکت بازیکن راست به وضعیت N_L می‌انجامد و برای بازیکن چپ یک حرکت به وضعیت P_R وجود دارد، بنابراین w وضعیت (N_L, P_R) است. این نتیجه می‌دهد که اگر w رأس شروع بازی فوق باشد، صرف‌نظر از اینکه کدام بازیکن بازی را شروع می‌کند، بازیکن چپ استراتژی برد دارد. اگر بازیکن چپ شروع کننده باشد، حرکت منجر به برد او چیست؟

۳.۵ بازی‌های تفاضلی جانبدارانه

بازی‌های تفاضلی در فصل ۱ معرفی و بررسی شدند. می‌توان یک نسخهٔ جانبدارانه از این بازی‌ها را به‌صورت زیر تعریف کرد.
فرض کنید S_L و S_R دو زیرمجموعهٔ غیرتهی از اعداد صحیح مثبت باشند. یک دسته با n مهره وجود دارد. دو بازیکن پشت سرهم حرکت می‌کنند و در هر نوبت بازیکن چپ می‌تواند s مهره از دسته را بردارد، که $s \in S_L$ و بازیکن راست مجاز است t مهره از دسته بردارد، که $t \in S_R$. بازیکنی که آخرین مهره را بردارد، برنده است.

مثال ۳.۵ یک بازی تفاضلی با $S_L = \{۱, ۳\}$ و $S_R = \{۲, ۴\}$ را در نظر بگیرید. گراف این بازی تفاضلی برای وضعیتی با ۱۰ مهره در شکل زیر نشان داده شده است.



در بازی با ۲۷ مهره کدام بازیکن برنده است؟ برای پاسخ به این سؤال وضعیت‌های N و P بازیکنان را مشخص می‌کنیم. وضعیتی با صفر مهره برای هر دو بازیکن وضعیت پایانی بوده و بنابراین (P_L, P_R) است. وضعیتی با ۱ مهره، برای بازیکن راست وضعیت

پایانی است و برای بازیکن چپ از آن یک حرکت به وضعیت P_R وجود دارد، لذا یک وضعیت (N_L, P_R) است. به همین ترتیب در وضعیتی با ۲ مهره، برای هر دو بازیکن استراتژی برد وجود دارد و در نتیجه وضعیت (N_L, N_R) است. با ادامهٔ این روند به جدول زیر می‌رسیم.

تعداد مهره‌ها	۰	۱	۲	۳	۴	
وضعیت	(P_L, P_R)	(N_L, P_R)	(N_L, N_R)	(N_L, P_R)	(N_L, N_R)	
تعداد مهره‌ها	۵	۶	۷	۸	۹	$\cdots$
وضعیت	(P_L, P_R)	(N_L, P_R)	(N_L, N_R)	(N_L, P_R)	(N_L, N_R)	$\cdots$

مشاهده می‌کنیم که الگوی $(P_L, P_R)(N_L, P_R)(N_L, N_R)(N_L, P_R)(N_L, N_R)$ با دورهٔ تناوب ۵ تکرار می‌شود. بنابراین یک وضعیت با x مهره:

۱) وضعیت (P_L, P_R) است، هرگاه $x = 5k$،

۲) وضعیت (N_L, P_R) است، هرگاه $x = 5k + 1$ یا $x = 5k + 3$ و

۳) وضعیت (N_L, N_R) است، هرگاه $x = 5k + 2$ یا $x = 5k + 4$.

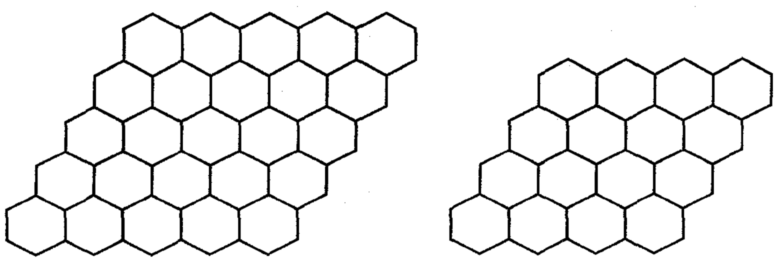
درستی این گزاره‌ها به راحتی با استقرا قابل اثبات است. مثلاً در وضعیت $x = 5k$، $k \geq 1$، حرکت‌های بازیکن چپ به وضعیت‌های $x = 5k - 1$ و $x = 5k - 3$ منجر می‌شود که طبق فرض استقرا هر دو وضعیت N_R هستند. همچنین حرکت‌های بازیکن راست به وضعیت‌های $x = 5k - 2$ و $x = 5k - 4$ می‌انجامد که وضعیت‌های N_L هستند. بنابراین $x = 5k$، طبق تعریف ۴.۵، یک وضعیت (P_L, P_R) است. به عنوان یک تمرین ساده بقیه حالت‌ها را ثابت کنید.

در نتیجه در بازی با یک دسته با ۲۷ مهره، چون باقیماندهٔ ۲۷ بر ۵ برابر ۲ است، یک وضعیت (N_L, N_R) بوده و بازیکن شروع کننده (چه چپ و چه راست) برنده خواهد شد. حرکت منجر به برد برای بازیکن چپ برداشتن ۱ مهره و رسیدن به وضعیت P_R و برای بازیکن راست برداشتن ۲ مهره و رسیدن به وضعیت P_L است.

همان‌طور که در تعریف ۴.۵ دیدیم در بازی‌های ترکیبیاتی جانبدارانه وضعیت‌های N و P یک بازیکن با وضعیت‌های N و P بازیکن دیگر مرتبط است. به همین دلیل برخلاف بازی‌های بی‌طرفانه، تابع SG در پیدا کردن وضعیت‌های N و P کمکی نمی‌کند. در دو فصل بعد پس از تعمیم روش‌های کانتور و ددکیند در ساختن اعداد، مفاهیم جدیدی به نام عددها و عددنماها را تعریف می‌کنیم و به کمک آنها به هر وضعیت در بازی یک ارزش نسبت می‌دهیم که ارزش هر وضعیت، N و P بودن آن وضعیت را برای دو بازیکن دقیقاً مشخص می‌کند.

۴.۵ بازی هِگْز (§)

بازی هگز در سال ۱۹۴۲ توسط هاین[۱] و مستقلاً در سال ۱۹۴۸ توسط جان نش[۲] اختراع شد. این بازی در دانمارک به نام بازی چندضلعی به‌صورت تجاری تولید و در سال ۱۹۵۲ توسط برادران پارکر[۳] با نام تجاری هگز به آمریکا برده شد. بازی هگز روی یک صفحهٔ $n \times n$ متشکل از n^2 شش‌ضلعی به هم چسبیده مثل کندوی زنبور بازی می‌شود. در شکل ۱.۵ دو صفحهٔ ۴ × ۴ و ۵ × ۵ این بازی نشان داده شده است.



شکل ۱.۵ دو صفحهٔ ۴ × ۴ و ۵ × ۵ بازی هگز.

دو بازیکن سیاه و سفید وجود دارند. بازیکن سیاه در هر نوبت یک خانهٔ خالی را انتخاب کرده و یک قطعهٔ سیاه را در آن قرار می‌دهد. بازیکن سفید نیز در نوبت خود یک

[۱] P. Hein
[۲] J. Nash
[۳] Parker

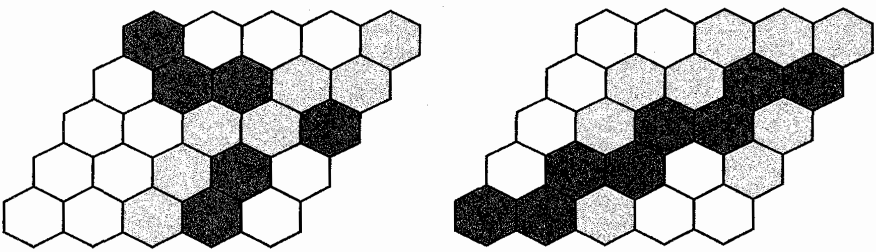
قطعهٔ سفید را در یک خانهٔ خالی قرار می‌دهد. حاشیه‌های سمت چپ و راست صفحه، حاشیه‌های سیاه و حاشیه‌های بالا و پایین صفحه، حاشیه‌های سفید گفته می‌شوند. بازی تا جایی ادامه می‌یابد که یکی از دو حالت زیر اتفاق بیفتد.

(۱) حاشیه‌های سفید با مسیری از قطعه‌های سفید به هم وصل شوند.

(۲) حاشیه‌های سیاه با مسیری از قطعه‌های سیاه به هم وصل شوند.

اگر یکی از دو حالت فوق اتفاق بیفتد، بازی پایان یافته و در حالت (۱) بازیکن سفید و در حالت (۲) بازیکن سیاه برنده است.

به عنوان مثال دو بازی روی یک صفحهٔ ۵ × ۵ در شکل ۲.۵ نشان داده شده است. در بازی سمت چپ، بازیکن سفید پس از ۷ حرکت برنده شده و در بازی سمت راست، بازیکن سیاه طی ۸ حرکت بازی را برده است.



شکل ۲.۵ دو بازی هگز روی یک صفحهٔ ۵ × ۵.

می‌توانید این بازی را در وب‌گاه زیر امتحان کنید.

http://mazeworks.com/hex7/index.htm

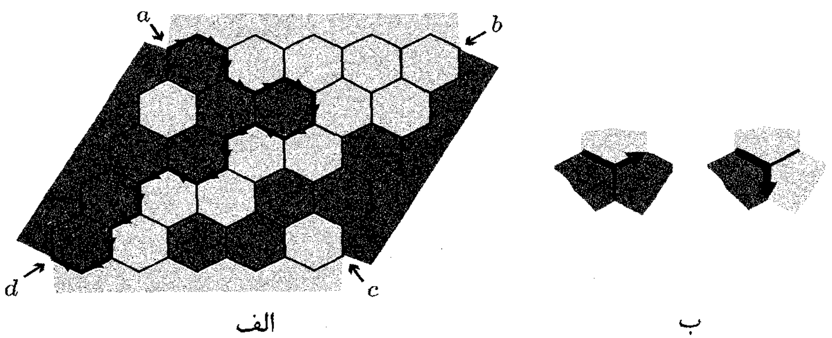
آیا بازی هگز یک بازی ترکیبیاتی است؟ برقراری همهٔ شرایط تعریف ۱.۱، به جز شرط ٦، به راحتی دیده می‌شود. شرط ٦ بیان می‌کند که هر بازی ترکیبیاتی، حتماً برنده دارد. تصور کنید در یک بازی هگز همهٔ خانه‌های صفحه با قطعه‌های سیاه و سفید پر شوند و هیچ‌کدام از دو حالت (۱) و (۲) اتفاق نیفتند. چنین شرایطی را **حالت تساوی**

می‌نامیم. قضیهٔ زیر نشان می‌دهد که در بازی هگز، هیچ‌گاه حالت تساوی اتفاق نمی‌افتد و لذا همیشه برنده دارد [۲۰].

قضیه ۲.۵ در بازی هگز هیچ‌گاه حالت تساوی اتفاق نمی‌افتد.

برهان. فرض می‌کنیم همهٔ خانه‌های صفحه در بازی هگز پر شده‌اند و ثابت می‌کنیم که یک مسیر از خانه‌های سفید، حاشیه‌های سفید را به هم وصل کرده یا یک مسیر از خانه‌های سیاه، واصل حاشیه‌های سیاه است. برای اثبات این مطلب ابتدا حاشیه‌های سیاه و سفید را با رنگ‌های سیاه و سفید رنگ می‌کنیم (شکل ۳.۵ (الف)). سپس مسیری روی یال‌های شش‌ضلعی‌ها به‌صورت زیر می‌سازیم.

از رأس گوشهٔ بالا و سمت چپ (رأس a در شکل ۳.۵(الف)) شروع می‌کنیم. هرگاه به یک رأس رسیدیم، از روی یالی مسیر را ادامه می‌دهیم که سمت چپ آن، سفید و سمت راست آن، سیاه است. به عنوان مثال، مسیری که با این روش در وضعیت شکل ۳.۵(الف) ایجاد می‌شود، در این شکل با پیکان‌های روی یال‌ها نشان داده شده است.



شکل ۳.۵ الف) مسیری از رأس a به d و برد بازیکن سفید. ب) چگونگی ساختن مسیر.

ثابت می‌کنیم انتهای این مسیر همواره یکی از دو رأس b یا d است. بنابراین با توجه به اینکه همهٔ خانه‌های سمت چپ این مسیر، سفید و همهٔ خانه‌های سمت راست این مسیر،

سیاه هستند، اگر مسیر به رأس b ختم شود، آن‌گاه دنباله‌ای از خانه‌های سیاه از حاشیهٔ چپ به حاشیهٔ راست وجود دارد و اگر مسیر به رأس d ختم شود، آن‌گاه دنباله‌ای از خانه‌های سفید از حاشیهٔ بالا به حاشیهٔ پایین یافت می‌شود.

ابتدا توجه کنید که این مسیر هیچ‌گاه یک رأس را دو بار تکرار نمی‌کند. زیرا مطابق شکل ۳.۵(ب)؛ در عبور از یک رأس، دو طرف یالی که این مسیر آن را انتخاب نکرده است، هم‌رنگ است، لذا مسیر هیچ‌گاه از این یال نمی‌گذرد. از این مطلب نتیجه می‌گیریم که این مسیر متناهی است. اگر در طول مسیر پس از عبور از یک یال به رأسی رسیدیم که درجهٔ آن ۳ است (۳ یال روی آن قرار دارد)، آن‌گاه یکی از دو حالت شکل ۳.۵(ب) اتفاق می‌افتد و لذا می‌توانیم، مسیر را از این رأس ادامه دهیم؛ پس این مسیر روی رأس‌های حاشیه‌ها پایان می‌یابد. ادامهٔ مسیر از رأس‌های درجه ۲ در حاشیه‌ها به جز رأس‌های b، c و d، نیز امکان‌پذیر است، زیرا رنگ سمت چپ (راست) هر دو یالِ روی این رأس‌ها یکسان است. درنهایت مسیر نمی‌تواند به رأس c وارد شود، زیرا هیچ‌یک از دو یالِ روی این رأس شرط پیموده شدن در این مسیر را ندارند. در نتیجه مسیر به یکی از دو رأس b یا d ختم می‌شود و حکم ثابت است.

نتیجه ۲.۵ بازی هگز یک بازی ترکیبیاتی جانبدارانه با قانون عادی است.

در بخش ۵.۱ بازی بی‌طرفانه‌ای به نام چُمپ را معرفی و ثابت کردیم که در این بازی، بازیکن شروع کننده استراتژی برد دارد، بدون اینکه بدانیم این استراتژی دقیقاً چگونه است. روش اثبات این مطلب یک روش وجودی بود که آن را سرقت استراتژی نامیدیم. به کمک همین روش می‌توان ثابت کرد که در بازی هگز نیز بازیکن شروع کننده استراتژی برد دارد. این اثبات منسوب به جان نش است.

قضیه ۳.۵ در بازی هگز، با شروع از یک صفحهٔ خالی $n \times n$، بازیکن شروع کننده استراتژی برد دارد.

برهان. بدون کم شدن از کلیت فرض کنید بازیکن سفید شروع کنندهٔ بازی است.

نشان می‌دهیم که بازیکن سفید استراتژی برد دارد. فرض کنید چنین نباشد، پس طبق نتیجه ۱.۵، بازیکن سیاه استراتژی برد دارد. بازیکن سفید بازی را با یک حرکت دلخواه آغاز می‌کند، مثلاً قطعهٔ سفید را در خانهٔ گوشهٔ بالا و راست قرار می‌دهد. سپس وانمود می‌کند که این حرکت را انجام نداده (صفحه خالی است) و به‌صورت زیر از استراتژی برد بازیکن سیاه تقلید می‌کند.

او رنگ سیاه و سفید را در این استراتژی عوض می‌کند و به صفحهٔ هگز از زاویه‌ای نگاه می‌کند که حاشیه‌های سفید در سمت چپ و راست صفحه باشند. در نتیجه می‌تواند نقش بازیکن دوم را در این استراتژی بگیرد و توصیه‌های آن را عیناً اجرا کند. تنها مشکل وقتی پیش می‌آید که این استراتژی توصیه کند که قطعه را در خانه‌ای قرار دهد که قبلاً یک مهره سفید در آنجا قرار داشته و نادیده گرفته شده است (مثلاً خانه‌ای که در اولین حرکت پر شده). در این حالت بازیکن سفید قطعهٔ خود را در یک خانهٔ خالی دلخواه دیگر قرار می‌دهد و باز وانمود می‌کند که این خانهٔ خالی است.

با ادامه این کار بازی در یک جا تمام می‌شود. چون استراتژی اولیه، برای بازیکن دوم استراتژی برد بوده و در حرکاتی که بازیکن سفید انجام داده، همهٔ توصیه‌های این استراتژی انجام شده است (هرچند ممکن است خانه‌های اضافی دیگری هم با قطعه‌های سفید پر شده باشد)، بنابراین یک مسیر از قطعه‌های سفید که واصل حاشیه‌های سفید هستند در این وضعیت وجود دارد و لذا بازیکن سفید برنده است.

اگرچه قضیهٔ فوق وجود استراتژی برد برای بازیکن شروع کننده را در بازی هگز تضمین می‌کند، اما تاکنون این سؤال که این استراتژی برد واقعاً چیست، حتی برای مقادیر نسبتاً کوچک n نیز بی‌پاسخ مانده است.

۵.۵ تمرین

۱) در هر یک از بازی‌های تفاضلی زیر، وضعیت‌های N و P بازیکنان را مشخص کنید.

الف) $S_L = \{۱, ۳, ٦\}$ و $S_R = \{۱, ۲, ۴\}$.

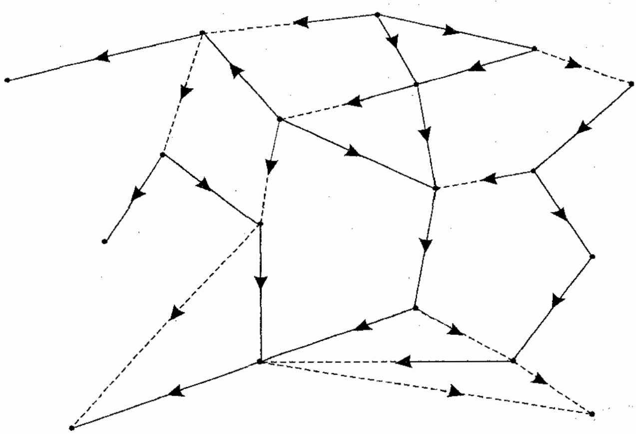
ب) $S_L = \{۱, ۳, ۵, \ldots\}$ و $S_R = \{۲, ۴, ٦, \ldots\}$.

ج) $S_L = \{۱, ۲, ۴, ۸, \ldots\}$ و $S_R = \mathbb{N} - S_L$.

د) اگر هر کدام از این بازی‌ها با ۱۰۰ مهره شروع شوند، کدام بازیکن استراتژی برد دارد؟

۲) با تغییر اثبات قضیه ۱.۱، اثباتی برای قضیه ۱.۵ ارائه دهید.

۳) در گراف زیر وضعیت های P و N بازیکنان را مشخص کنید.



۴) الف) با اصلاح تعریف ۴.۵، تعریفی از وضعیت‌های N و P ارائه دهید که برای بازی‌های ترکیبیاتی جانبدارانه با قانون وارون کار کند، سپس الگوریتمی برای پیدا کردن وضعیت‌های N و P در بازی‌های جانبدارانه با قانون وارون ارائه دهید.
ب) بازی تفاضلی مثال ۳.۵ با قانون وارون را تحلیل کنید. در بازی با ۲۷ مهره کدام بازیکن برنده است؟

۵) ثابت کنید در بازی هگز روی یک صفحهٔ ۴ × ۴، اگر بازیکن سفید در حرکت اول، قطعهٔ سفیدی را در خانه‌ای روی قطر اصلی قرار دهد، می‌تواند برنده شود.

همچنین ثابت کنید اگر بازیکن سفید در حرکت اول، قطعهٔ سفید را در جایی غیر از قطر اصلی قرار دهد، بازیکن سیاه می‌تواند بازی را ببرد. در هر دو حالت استراتژی برد را صریحاً بیان کنید.

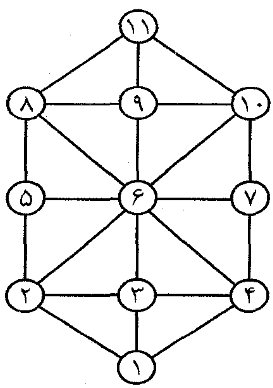
۶) بازی هگز را با قانون وارون در نظر بگیرید. در این بازی اولین بازیکنی که حاشیه‌های مربوط به خود را با یک مسیر از قطعه‌های مربوط به خود به هم وصل کند، بازنده است. در بازی هگز با قانون وارون روی یک صفحهٔ $n \times n$، کدام بازیکن استرتژی برد دارد؟ صریحاً استراتژی برد را ارائه دهید. (راهنمایی: حالت‌های n فرد و زوج را جداگانه بررسی کنید.)

۷) اسکوِگز. این بازی شبیه بازی هگز است، با این تفاوت که روی یک صفحهٔ مربعی $n \times n$ بازی می‌شود (هر خانه به جای شش‌ضلعی، مربع است). بازیکن سفید و سیاه در هر نوبت قطعه‌ای با رنگ مربوط به خودشان را در یک مربع خالی قرار می‌دهند. دو مربع مجاورند، هرگاه ضلع مشترک داشته باشند. بازیکن سفید می‌خواهد حاشیهٔ بالا را به وسیلهٔ مسیری از مربع‌های سفید مجاور به حاشیهٔ پایین وصل کند و هدف بازیکن سیاه، وصل کردن حاشیهٔ چپ به حاشیهٔ راست با مسیری از مربع‌های سیاه مجاور است. برخلاف بازی هگز، در این بازی ممکن است حالت تساوی اتفاق بیفتد.

الف) ثابت کنید همواره بازیکن شروع کننده استراتژی نباختن دارد؛ یعنی بازیکن شروع کننده، روشی برای بازی کردن دارد که برد او یا وقوع حالت تساوی را تضمین می‌کند.

ب) در بازی اسکوِگز روی یک صفحهٔ $n \times n$، برای چه مقادیری از n، بازیکن شروع کننده استراتژی برد دارد و چه موقع با بازی بهینه هر دو بازیکن، حالت تساوی اتفاق می‌افتد؟ در حالت اول، یک استراتژی برد صریح برای بازیکن شروع کننده بدهید و در حالت دوم یک استراتژی نباختن صریح برای بازیکن دوم (بازیکنی که حرکت دوم را انجام می‌دهد) ارائه کنید.

۸) **بازی سربازها** [۲۳].[۱] صفحه‌ای مطابق شکل ۴.۵ را در نظر بگیرید. بازیکن چپ سه سکه دارد که در شروع بازی در خانه‌های ۱، ۲ و ۴ قرار گرفته‌اند. بازیکن راست نیز یک مهره دارد که در شروع بازی در خانهٔ ٦ قرار دارد. بازیکن راست می‌تواند در هر نوبت مهرهٔ خود را از خانهٔ موجود، در طول یکی از خط‌ها به یکی از خانه‌های خالی مجاور حرکت دهد. بازیکن چپ نیز می‌تواند یکی از سکه‌های خود را به یک خانهٔ خالی مجاور ببرد، اما نمی‌تواند رو به پایین حرکت کند. (حرکت به‌صورت عمودی رو به پایین یا مورب رو به پایین برای بازیکن چپ غیرمجاز است.) بازیکن چپ می‌برد، اگر بازیکن راست در نوبت خود، قادر به حرکت نباشد. در غیر این‌صورت بازیکن راست می‌برد؛ یعنی بازیکن راست می‌برد هرگاه بتواند از سکه‌های حریف عبور کند، یا دو وضعیت به‌طور متوالی سه بار تکرار شود (حالت پات). برای یکی از بازیکنان یک استراتژی برد ارائه کنید.



شکل ۴.۵ صفحهٔ بازی سربازها.

[۱] این بازی در طول جنگ فرانسه—پروس اختراع شد و در فرانسه بسیار رایج بود.

فصل ٦

ساختار بازگشتی اعداد

در این فصل با ارائه یک ساختار بازگشتی، از یک مجموعهٔ اعداد ساخته شده، اعداد جدیدی می‌سازیم. این روش که تعمیمی از روش ددکیند[١] برای ساختن مجموعهٔ اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ از روی مجموعهٔ اعداد گویا $\mathbb{Q}$ است، توسط جان کانوی[٢] معرفی و بسط داده شد [٦]. به کمک این روشِ ساختاری می‌توانیم از مجموعهٔ تهی همهٔ اعداد حقیقی و حتی همهٔ اعداد اردینال را بسازیم و می‌بینیم که این ساختار به تولید یک میدان مرتب منجر می‌شود و یک نظریهٔ چشمگیر ظهور می‌کند. در این بین موجوداتی نیز به وجود می‌آیند که عدد نیستند یعنی ترتیب خطی اعداد را ندارند که به آنها عددنما می‌گوییم. در فصل‌های بعدی خواهیم دید که چگونه می‌توان به کمک این عددها و عددنماها، به هر وضعیت در یک بازی جانبدارانه، یک ارزش نسبت داد و با توجه به این ارزش، بازی‌ها را تحلیل کرد.

---

[١] Dedekind
[٢] John Conway

۱.۶ عددها و عددنماها

فن نویمن[۱] روشی برای ساختن اعداد حسابی به کمک مجموعه‌ها ارائه کرد. در این روش مجموعهٔ تهی را صفر نامیده، $\emptyset =: ۰$ و هر عدد طبیعی به‌طور بازگشتی به‌صورت $n := \{۰, ۱, \ldots, n - ۱\}$ تعریف می‌شود. بنابراین $\emptyset =: ۰$، $\{\emptyset\} =: ۱$، $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} =: ۲$ و ... (پیوست الف را ببینید). همین‌طور ددکیند برای ساختن اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ از روی اعداد گویا $\mathbb{Q}$، مجموعهٔ $\mathbb{Q}$ را به دو زیرمجموعهٔ غیرتهی و مجزای L و R تقسیم کرد به‌طوری که هیچ عضوی از L بزرگ‌تر از هیچ عضوی از R نباشد و L عضو ماکزیمم و R عضو می‌نیمم نداشته باشد. هر کدام از این تقسیم‌ها را یک برش نامید و ثابت کرد مجموعهٔ همهٔ برش‌ها همراه با دو عمل جمع و ضرب و یک ترتیب خطی، یک میدان مرتب تولید می‌کند که دارای خاصیت کوچک‌ترین کران بالا است. سپس ثابت کرد که همهٔ چنین میدان‌های مرتبی، یکریخت هستند [۲۱].

ساختار بازگشتی تولید اعداد که در این فصل معرفی می‌کنیم در واقع تعمیمی از روش‌های فن‌نویمن و ددکیند است. این روش، در واقع یک روش بازگشتی است؛ یعنی با کمک موجوداتی که از قبل ساخته شده‌اند، موجودات جدیدی می‌سازیم. لذا کلیهٔ تعاریف این فصل به‌صورت بازگشتی بیان می‌شوند، به این معنی که با فرض دانستن تعریف یک مفهوم برای موجودات قدیمی، این مفهوم را برای موجودات جدید تعریف می‌کنیم. به همین دلیل ممکن است در ابتدا تعاریف این فصل برای خواننده کمی نامأنوس جلوه کند. از این بابت نگران نباشید. پس از چند تعریف اولیه، با ارائه مثال‌های ساده از چگونگی ساخته شدن اعداد، به تدریج با این شیوهٔ تعریف انس خواهیم گرفت. در زیر مفهوم عدد و عددنما را تعریف می‌کنیم. برای تعریف مجموعهٔ جزئاً مرتب، پیوست الف.۲ را ببینید.

تعریف ۱.۶ فرض کنید $(M, \leq)$ و $(N, \leq)$ به ترتیب دو مجموعهٔ (جزئاً) مرتب از عددنماها و عددهای ساخته شده (قدیمی) باشند و L و R را دو زیرمجموعه از $M \cup N$ در نظر بگیرید. نماد $\{L \mid R\}$ را یک **عدد** جدید می‌گوییم هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد.

الف) همهٔ اعضای L و R عدد باشند؛ یعنی $L, R \subseteq N$.

[۱] von Neumann

ب) هیچ عضوی از R از هیچ عضوی از L کوچک‌تر یا مساوی نباشد؛ یعنی برای هر $l \in L$ و $r \in R$ داشته باشیم $r \not\leq l$.

درصورتی که L و R یکی از دو شرط فوق را نداشته باشند، نماد $\{L \mid R\}$ را یک **عددنمای جدید** می‌گوییم.

تعریف ۲.۶ برای عدد یا عددنمای $x = \{L \mid R\}$، هر عضو L را **گزینهٔ چپ** x می‌گوییم و هر عضو R را **گزینه راست** x می‌خوانیم. عدد یا عددنمای x را **ساده‌تر** از عدد یا عددنمای y گوییم، هرگاه یک دنبالهٔ $y = y_0, y_1, \ldots, y_n = x$ وجود داشته باشد که برای هر i، $0 \leq i < n$، y_{i+1} یک گزینهٔ y_i باشد.

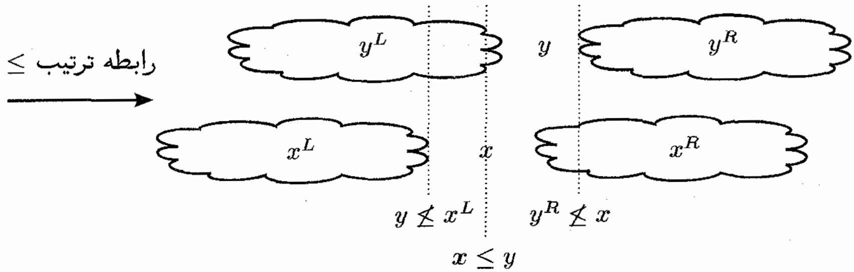
نماد ۱.۶ اگر $x = \{L \mid R\}$ یک عدد یا عددنما باشد، هر عضو L را با x^L و هر عضو R را با x^R نشان می‌دهیم. تقریباً همیشه x را با اعضای L و R نشان داده و می‌نویسیم $x = \{x^L \mid x^R\}$. مثلاً اگر $L = \{a, b, c\}$ و $R = \{d, e, f\}$، می‌نویسیم $x = \{a, b, c \mid d, e, f\}$.

برای اثبات اینکه x یک عدد است، ابتدا باید نشان دهیم که x یک نمایش به‌صورت $x = \{x^L \mid x^R\}$ دارد که گزینه‌های x، یعنی x^Lها و x^Rها همگی عدد هستند و سپس برای هر x^L و هر x^R، رابطهٔ $x^R \not\leq x^L$ را تحقیق کنیم.

حال نوبت آن است که ترتیب موجود روی M و N را به عددها و عددنماهای جدید تولید شده توسیع دهیم. عدد یا عددنمای تولید شده $x = \{L \mid R\}$ را در نظر بگیرید و به‌طور غیررسمی فرض کنید اعضای L در سمت چپ و اعضای R در سمت راست قرار گرفته‌اند و ما قصد داریم ترتیب جدید را طوری تعریف کنیم که x بین اعضای L و اعضای R قرار گرفته و فضای خالی میان L و R را پر کند (شکل ۱.۶). بعداً این موضوع را به‌طور دقیق اثبات می‌کنیم، امّا این دید می‌تواند علت تعریف زیر را روشن کند. دقت کنید که این تعریف، یک تعریف بازگشتی است.

تعریف ۳.۶ برای دو عدد یا عددنمای x و y، تعریف می‌کنیم $x \leq y$ اگر برای هر x^L، $x^L \not\geq y$ و برای هر y^R، $x \not\geq y^R$. می‌گوییم x و y **مساوی** هستند و می‌نویسیم $x = y$ اگر $x \leq y$ و $y \leq x$ و می‌گوییم $x < y$ اگر $x \leq y$ و $x \not\geq y$.

به‌طور غیررسمی فرض کرده بودیم که x بین x^Lها و x^Rها قرار دارد. بنابراین اگر برای یک x^L، $x^L \geq y$ یا برای یک y^R، $x \geq y^R$، آن‌گاه رابطهٔ $x \leq y$ نمی‌تواند درست باشد. این مطلب می‌تواند تعریف فوق را توجیه کند.



شکل ۱.۶ رابطهٔ ترتیب در عددها و عددنماها.

در این تعریف توجه به چند نکته حائز اهمیت است. یکی اینکه این یک تعریف بازگشتی است، به این معنی که رابطهٔ دو عدد جدید به کمک رابطهٔ اعداد ساده‌تر تعریف می‌شود. برای آشنایی با صورت‌بندی دقیق یک تعریف بازگشتی، پیوست الف.۳ را ببینید. نکتهٔ مهم دیگر این است که «تساوی» یک اصطلاح تعریف شده است و با یکی بودن فرق می‌کند. دو عدد یا عددنمای x, y را **یکسان** می‌گوییم و می‌نویسیم $x \equiv y$، هرگاه مجموعه‌های چپ و راست آنها یکی باشد. اما x و y را **مساوی** گوییم و می‌نویسیم $x = y$، هرگاه $x \leq y$ و $y \leq x$. بنابراین ممکن است دو عدد غیریکسان، مساوی باشند.[1] نکتهٔ آخر اینکه به زودی ثابت خواهیم کرد که ترتیب فوق روی مجموعهٔ اعداد، یک ترتیب خطی و روی مجموعهٔ عددنماها، یک ترتیب جزئی است. برای تعریف ترتیب جزئی و خطی، پیوست الف.۲ را ببینید.

[1] در واقع رابطهٔ تعریف شده " = " یک رابطهٔ هم‌ارزی است. بنابراین می‌توانیم هر کلاس هم‌ارزی را یک عدد یا عددنما بنامیم. در این‌صورت می‌توانیم از مفهوم یکی بودن به جای رابطهٔ " = " استفاده کنیم.

مرحلهٔ بعد در ساختن یک ساختار جبری تعریف جمع است. چون به‌طور غیررسمی می‌دانیم که x بین x^L و x^R و y بین y^L و y^R قرار دارد، انتظار داریم که $x + y$ در طرف راست $x + y^L$ و $x^L + y$ و در طرف چپ $x^R + y$ و $x + y^R$ باشد (با این فرض که جمع x و y^L، y و x^L و غیره قبلاً تعریف شده باشند).

تعریف ۴.۶ جمع دو عدد یا عددنمای جدید x و y به‌صورت بازگشتی به این‌صورت تعریف می‌شود:

$$x + y := \{x^L + y, x + y^L \mid x^R + y, x + y^R\}.$$

همچنین برای هر عدد x، **قرینهٔ جمعی** x را تعریف می‌کنیم $-x := \{-x^R \mid -x^L\}$.

اجازه دهید با تعاریف فوق کار ساختن اعداد را شروع کنیم. همان‌طور که دیدیم روش ارائه شده برای ساختن اعداد جدید یک ساختار بازگشتی است و باید یک مجموعه اعداد از قبل ساخته شده داشته باشیم. پس برای شروع باید چه کار کنیم؟ همیشه یک مجموعهٔ کوچک و مهم در دسترس است و آن مجموعهٔ تهی است. قرار می‌دهیم $N, M := \emptyset$، بنابراین اولین عدد ساخته شده، عدد $x = \{L \mid R\}$ با $L, R := \emptyset$ است. این عدد را صفر می‌نامیم. به عبارت دیگر $۰ := \{|\}$.

واضح است که ۰ یک عدد است، زیرا گزاره برای هر ۰^L و ۰^R، $۰^R \not\leq ۰^L$، یک گزارهٔ درست است. (در واقع هیچ ۰^L و ۰^Rای وجود ندارد و طبق انتفای مقدم هر گزاره با سور عمومی در مورد آنها درست است.) به همین دلیل می‌توانیم ثابت کنیم $-۰ \equiv \{|\} \equiv ۰$ و $۰ + ۰ \equiv \{|\} \equiv ۰$، زیرا هیچ عددی به فرم -۰^R، -۰^L، $۰ + ۰^L$، $۰^R + ۰$ و ... وجود ندارد. در ادامه فرض کنید که برای هر عدد x، $x + ۰ \equiv x$. این گزاره را به زودی ثابت خواهیم کرد.

حال یک عدد ساخته شده داریم و می‌توانیم قرار دهیم $N := \{۰\}$ و سه ترکیب جدید $\{۰ \mid \}$، $\{ \mid ۰\}$ و $\{۰ \mid ۰\}$ را به دست آوریم. $\{۰ \mid ۰\}$ عدد نیست زیرا به راحتی دیده می‌شود که $۰ \leq ۰$. عدد $\{۰ \mid \}$ را عدد ۱ می‌نامیم، $۱ := \{۰ \mid \}$ و طبق تعریف داریم، $-۱ \equiv \{ \mid -۰\} \equiv \{ \mid ۰\}$. می‌بینیم که $۰ \leq ۱$ زیرا داریم $۱^R \not\leq ۰$ و $۱ \not\leq ۰^L$ (چون هیچ ۱^R یا ۰^Lای نداریم).

حال می‌بینیم که $\{\,۱ \mid \,\} \equiv \{۱^L + ۱, ۱ + ۱^L \mid ۱^R + ۱, ۱ + ۱^R\} \equiv ۱ + ۱$، بنابراین بدیهی است تعریف کنیم $۲ =: \{\,۱ \mid \,\}$ و از آنجا داریم $\{\, \mid -۱\} \equiv -۲$. به همین ترتیب می‌توانیم به‌طور بازگشتی همهٔ اعداد صحیح را به‌صورت زیر تعریف کنیم.

$$n := \{n - ۱ \mid \,\}, \qquad -n := \{\, \mid -(n - ۱)\}, \qquad n = ۱, ۲, \ldots$$

گزاره ۱.۶ برای هر عدد طبیعی n، داریم $-(n + ۱) < -n < ۰ < n < n + ۱$.

برهان. گزاره را با استقرا روی n ثابت می‌کنیم. همواره داریم $n \not\leq ۰^L$ (ا.م.[1]) و $n^R \not\leq ۰$ (ا.م.)، پس طبق تعریف ۳.۶، $۰ \leq n$. از طرف دیگر $n^L \equiv (n - ۱) \geq ۰$ (فرض استقرا)، پس $n \not\leq ۰$؛ در نتیجه $۰ < n$.

برای اثبات نامساوی $n < n+۱$، داریم $(n+۱)^R \not\leq n$ (ا.م.) و $n^L \equiv (n-۱) \not\geq n+۱$ (زیرا طبق فرض استقرا $(n - ۱ \leq n \equiv (n + ۱)^L$)، بنابراین $n \leq n + ۱$. از طرف دیگر $(n + ۱)^L \equiv n \leq n$ (زیرا طبق فرض استقرا $n \not\leq n - ۱ \equiv n^L$)، در نتیجه $n + ۱ \not\leq n$ و لذا $n < n + ۱$. اثبات دو نامساوی دیگر را به شما واگذار می‌کنیم.

در این بین عددهایی مانند $\{۰, ۱ \mid \,\}$ و $\{-۱, ۰, ۱ \mid \,\}$ و غیره با عدد ۲ مساوی هستند. به عنوان نمونه تساوی $۲ \equiv \{\,۱ \mid \,\} = \{۰, ۱ \mid \,\}$ را ثابت می‌کنیم. قرار می‌دهیم $x := \{۰, ۱ \mid \,\}$ و $y := \{\,۱ \mid \,\}$. گزاره‌های درست $y^R \not\leq x$ و $۲ \equiv y \not\leq x^L$، برای هر y^R و x^L، نشان می‌دهد که $y \leq x$. از طرفی داریم $x^R \not\leq y$ (ا.م.) پس برای اثبات $x \leq y$، کافی است ثابت کنیم $x \not\leq y^L \equiv ۱$. این گزاره نیز درست است زیرا یک x^L وجود دارد که $۱ \leq x^L$؛ در نتیجه $x = y \equiv ۲$.

به همین ترتیب به سادگی ثابت می‌شود که

$$\{\, \mid -۱, ۰, ۱\} = \{\, \mid -۱, ۰\} = \{\, \mid -۱\} \equiv -۲.$$

از روند فوق می‌توان حدس زد که برای عددهایی که مجموعهٔ L و R آنها متناهی است فقط بزرگ‌ترین عضو L و کوچک‌ترین عضو R در مشخص کردن عدد نقش دارد. صورت کلی این واقعیت را در قضیهٔ مهمی به نام «قانون سادگی» اثبات خواهیم کرد.

[1] انتفای مقدم

تا اینجا در کلیهٔ اعداد ساخته شده یکی از مجموعه‌های L یا R تهی بود و دیدیم که $\{۰ \mid ۰\}$ عدد نیست. ساده‌ترین عدد بعدی $\{۰ \mid ۱\}$ است. اگر قرار دهیم $x := \{۰ \mid ۱\}$ می‌توانیم نشان دهیم که $۱ > x > ۰$. زیرا $۱ \not\leq x^L \equiv ۰$ (گزاره ۱.۶)، $۱^R \not\leq x$ (ا.م.)، $۱ \equiv x^R \not\leq ۰$ (گزاره ۱.۶) و $x \not\leq ۰^L$ (ا.م). (اثبات اکید بودن این نامساوی‌ها را به خواننده واگذار می‌کنیم.)

از طرفی طبق تعریف داریم $x + x \equiv \{x \mid x + ۱\}$. حال ثابت می‌کنیم $x + x = ۱$. $۱^R \not\leq x + x$ (ا.م.) و $۱ \not\leq x \equiv (x + x)^L$. پس $x + x \leq ۱$. از طرف دیگر $(x + x)^R \equiv x + ۱ \not\leq ۱$ زیرا یک $(x + ۱)^L$ به نام $x^L + ۱ \equiv ۱$ وجود دارد که $(x + ۱)^L \equiv ۱ \leq ۱$. همچنین $۱^L \equiv ۰ \not\leq x + x$، زیرا $(x + x)^L \equiv x \geq ۰$؛ بنابراین $۱ \leq x + x$ و در نتیجه $x + x = ۱$.

لذا طبیعی است که تعریف کنیم $\frac{۱}{۲} := \{۰ \mid ۱\}$. به‌طور مشابه و به‌صورت بازگشتی برای هر عدد طبیعی n، تعریف می‌کنیم:

$$\frac{۱}{۲^n} := \left\{ ۰ \middle| \frac{۱}{۲^{n-۱}} \right\}$$

به آسانی می‌توان ثابت کرد که $\frac{۱}{۲^{n-۱}} > \frac{۱}{۲^n} > ۰$. (این موضوع را ثابت کنید.) گزارهٔ زیر علت این تعریف را روشن می‌کند.

گزاره ۲.۶ برای هر عدد طبیعی n، داریم $\frac{۱}{۲^{n-۱}} = \frac{۱}{۲^n} + \frac{۱}{۲^n}$.

برهان. برای $n = ۱$ تساوی $۱ = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲}$ را ثابت کردیم. فرض کنید گزاره برای $n = k - ۱$ درست باشد. می‌خواهیم ثابت کنیم $\frac{۱}{۲^{k-۱}} = \frac{۱}{۲^k} + \frac{۱}{۲^k}$. داریم $\frac{۱}{۲^k} + \frac{۱}{۲^k} = \{\frac{۱}{۲^k} \mid \frac{۱}{۲^k} + \frac{۱}{۲^{k-۱}}\}$. از طرفی $(\frac{۱}{۲^k} + \frac{۱}{۲^k})^L = \frac{۱}{۲^k} \not\leq \frac{۱}{۲^{k-۱}}$ (قبلاً این را ثابت کرده‌اید) و $(\frac{۱}{۲^{k-۱}})^R = \frac{۱}{۲^{k-۲}} \not\leq \frac{۱}{۲^k} + \frac{۱}{۲^k}$ (زیرا طبق فرض استقرا داریم، $\frac{۱}{۲^{k-۲}} = \frac{۱}{۲^{k-۱}} + \frac{۱}{۲^{k-۱}} \not\leq \frac{۱}{۲^k} + \frac{۱}{۲^k}$). در نتیجه $\frac{۱}{۲^k} + \frac{۱}{۲^k} \leq \frac{۱}{۲^{k-۱}}$. استدلال مشابه نشان می‌دهد که $\frac{۱}{۲^k} + \frac{۱}{۲^k} \geq \frac{۱}{۲^{k-۱}}$.

به این ترتیب تاکنون توانسته‌ایم کلیهٔ اعداد گویا که مخرج آنها توانی از ۲ است را

بسازیم. به چنین اعدادی، **اعداد گویای دودویی** می‌گوییم و با $\mathbb{Q}^*$ نشان می‌دهیم. مثلاً

$$\frac{۳}{۴} := \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} \equiv \{\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۴} \mid \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۴} + ۱\} = \{\frac{۱}{۲} \mid ۱\},$$

یا

$$\frac{۳}{۲} := \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} = ۱ + \frac{۱}{۲} \equiv \{\frac{۱}{۲}, ۱ \mid ۱ + ۱\} = \{۱ \mid ۲\}.$$

مجموعهٔ همهٔ اعداد گویای دودویی $\mathbb{Q}^*$، بزرگ‌ترین مجموعهٔ اعدادی است که می‌توان با مجموعه‌های L و R متناهی تولید کرد. برای ساختن بقیهٔ اعداد گویا و همچنین اعداد گنگ باید از مجموعه‌های L و R نامتناهی استفاده کرد. مثلاً اگر x یک عدد گویای غیر دودویی یا یک عدد گنگ باشد، قرار می‌دهیم $L = \{y \in Q^* \ : \ y < x\}$ و $R = \{y \in Q^* \ : \ y > x\}$ و تعریف می‌کنیم $x = \{L \mid R\}$. این تعریف با تعریف اعداد گویای دودویی سازگار است (تمرین ۲ را ببینید). در ادامهٔ روند فوق اعداد دیگری هم تولید می‌شوند. به عنوان مثال اگر قرار دهید $x = \{۰, ۱, ۲, \ldots \mid \ \}$، این یک عدد است که از هر عدد طبیعی بزرگ‌تر است. این عدد، کوچک‌ترین عدد اردینال بزرگ‌تر از اعداد طبیعی است که آن را با ω نمایش می‌دهیم. به همین ترتیب می‌توانیم اعداد اردینال بعدی را تولید کنیم. در تمرین‌های ۷ و ۹ می‌توانید تعاریف دقیق اعداد حقیقی و اعداد اردینال را ببینید. در این بین حتی اعدادی تولید می‌شوند که نه عدد حقیقی و نه عدد اردینال هستند، مثلاً عدد $\epsilon = \{۰ \mid ۱, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۳}, \ldots\}$. ما توجه خود را به اعداد حقیقی محدود می‌کنیم و به جز در تمرین‌های ۸ و ۹ بیش از این به اردینال‌ها و عددهای دیگر نمی‌پردازیم. برای توضیحات بیشتر در این مورد مرجع [۶] را ببینید.

۲.۶ ویژگی‌های ترتیب و جمع

حال این نظریهٔ چشمگیر را که از مجموعهٔ تهی شروع شد و همهٔ اعداد حقیقی را تولید کرد با اثبات اینکه این ساختار جبری یک میدان مرتب است کامل می‌کنیم. تقریباً همهٔ اتحادها را به‌صورت استقرائی ثابت خواهیم کرد؛ به این معنی که به عنوان مثال برای اثبات اتحاد $P(x)$ فرض می‌کنیم برای هر x^R و x^L، $P(x^L)$ و $P(x^R)$ درست

است، سپس $P(x)$ را ثابت می‌کنیم. همچنین برای اثبات درستی $P(x,y)$، درستی اتحادهای $P(x^L,y)$، $P(x^R,y)$، $P(x,y^L)$ و $P(x,y^R)$ (و در صورت لزوم $P(x^L,y^L)$، $P(x^L,y^R)$، $P(x^R,y^L)$ و $P(x^R,y^R)$) را می‌پذیریم و $P(x,y)$ را ثابت می‌کنیم. برای مشاهدهٔ صورت‌بندی دقیق قضیهٔ استقرا پیوست الف.۳ و مثال الف.۳ را ببینید.

گزاره ۳.۶ (خاصیت بازتابی) برای هر عدد یا عددنمای x داریم

الف) برای هر x^R، $x^R \not\leq x$.　　ب) برای هر x^L، $x \not\leq x^L$.　　ج) $x \leq x$.

برهان. الف) برای هر x^R، طبق فرض استقرا در مورد (ج) داریم $x^R \leq x^R$. پس طبق تعریف $x^R \not\leq x$. قسمت (ب) نیز به‌طور مشابه ثابت می‌شود.
ج) با توجه به (الف) و (ب) داریم برای هر x^L و x^R، $x^R \not\leq x$ و $x \not\leq x^L$، پس طبق تعریف $x \leq x$.

گزاره ۴.۶ (خاصیت تراگذاری) برای هر سه عدد یا عددنمای x، y و z، اگر $x \leq y$ و $y \leq z$ آن‌گاه $x \leq z$.

برهان. برای هر z^R داریم $z^R \not\leq x$. زیرا اگر برای یک z^R، $z^R \leq x$ آن‌گاه از $x \leq y$ و فرض استقرا (یعنی درستی گزاره $P(x,y,z^R)$) داریم $z^R \leq y$ که با فرض $y \leq z$ متناقض است. به همین شکل برای هر x^L، $z \not\leq x^L$. زیرا اگر برای یک x^L، $z \leq x^L$ آن‌گاه از $y \leq z$ و فرض استقرا داریم $y \leq x^L$ که با $x \leq y$ متناقض است. در نتیجه $z^R \not\leq x$ و $z \not\leq x^L$ و طبق تعریف $x \leq z$.

تا اینجا ثابت کردیم که مجموعهٔ عددها و عددنماها همراه با ترتیب تعریف شده یک مجموعهٔ جزئاً مرتب است. اما ممکن است نتوانیم عددنماها را با هم مقایسه کنیم، مثلاً $\{0 \mid 0\} \not\leq 0$ و $0 \not\leq \{0 \mid 0\}$ (چرا؟). با این حال گزارهٔ زیر نشان می‌دهد که ترتیب مذکور روی اعداد، ترتیب خطی است. قبل از اینکه این گزاره را بیان کنیم، یک نمادگذاری انجام می‌دهیم.

نماد ۲.۶ در حالتی که دو عددنما یا یک عدد و یک عددنما با هم قابل مقایسه نباشند از نماد $\|$ برای نشان دادن این موضوع استفاده می‌کنیم. برای دو عدد یا عددنمای x و y که $y \not\leq x$ و $x \not\leq y$، می‌نویسیم $x \| y$.

گزاره ۵.۶ برای هر عدد x و هر x^L و x^R داریم، $x^L < x < x^R$ و برای هر دو عدد x و y داریم، $y \leq x$ یا $x \leq y$.

برهان. در گزاره ۳.۶ ثابت کردیم که $x^R \not\leq x$ و $x \not\leq x^L$، پس کافی است ثابت کنیم $x \leq x^R$ و $x^L \leq x$.
برای هر x^{RR} داریم $x^{RR} \not\leq x$، زیرا اگر برای یک x^{RR}، $x^{RR} \leq x$، آن‌گاه از فرض استقرا داریم $x^R \leq x^{RR}$ و طبق خاصیت تراگذری ترتیب $x^R \leq x$ که طبق گزاره ۳.۶ نتیجهٔ غلطی است. همچنین برای هر x^L داریم $x^R \not\leq x^L$، زیرا فرض کردیم که x عدد است، بنابراین $x \leq x^R$. به‌طور مشابه می‌توانیم ثابت کنیم $x^L \leq x$.
حال قسمت دوم گزاره را ثابت می‌کنیم؛ به این منظور، فرض می‌کنیم $y \not\leq x$ و ثابت می‌کنیم $x \leq y$. از $x \not\leq y$ نتیجه می‌گیریم که یک x^L وجود دارد که $y \leq x^L$ یا یک y^R وجود دارد که $y^R \leq x$. در این دو حالت به ترتیب داریم $y \leq x^L < x$ یا $y < y^R \leq x$ که هر دو نشان می‌دهد $y \leq x$.

در ادامه ویژگی‌های جمع را بررسی و رابطهٔ آن را با ترتیب بیان می‌کنیم.

گزاره ۶.۶ برای هر عدد یا عددنمای x، y و z، داریم

الف) $x + \circ \equiv \circ$. ب) $x + y \equiv y + x$.

ج) $(x + y) + z \equiv x + (y + z)$. د) $x + (-x) = \circ$.

برهان. الف) $x + \circ \equiv \{x^L + \circ \mid x^R + \circ\}$. از طرفی طبق فرض استقرا $x^R + \circ \equiv x^R$ و $x^L + \circ \equiv x^L$، لذا $x + \circ \equiv \{x^L \mid x^R\} \equiv x$.

ب) از تعریف داریم $x + y \equiv \{x^L + y, x + y^L \mid x^R + y, x + y^R\}$، اما طبق فرض استقرا $x^L + y \equiv y + x^L$، $x + y^L \equiv y^L + x$ و ...، پس $x + y \equiv \{y + x^L, y^L + x \mid$

$.y + x^R, y^R + x\} \equiv y + x$

ج) با توجه به تعریف جمع و فرض استقرا داریم

$$\begin{aligned}(x+y)+z &\equiv \{(x+y)^L+z,(x+y)+z^L \mid (x+y)^R+z,(x+y)+z^R\}\\ &\equiv \{(x^L+y)+z,(x+y^L)+z,(x+y)+z^L \mid\\ &\quad (x^R+y)+z,(x+y^R)+z,(x+y)+z^R\}\\ &\equiv \{x^L+(y+z),x+(y+z)^L \mid x^R+(y+z),x+(y+z)^R\}\\ &\equiv x+(y+z).\end{aligned}$$

د) برای اثبات $0 \leq (-x) + x$ کافی است ثابت کنیم $0 \not\leq (x+(-x))^L$؛ یعنی برای هر x^L و x^R، $0 \not\leq x^L + (-x)$ و $0 \not\leq x + (-x^R)$. این دو گزاره نیز درست هستند، زیرا از فرض استقرا داریم $0 \leq x^R + (-x^R)$ و $0 \leq x^L + (-x^L)$. استدلال مشابه نشان می‌دهد که $0 \geq x + (-x)$ و در نتیجه $.x + (-x) = 0$

نتیجه ۱.۶ مجموعهٔ عددها و عددنماها همراه با عمل جمع تعریف شده، یک گروه جابه‌جایی تشکیل می‌دهد.

گزاره ۷.۶ برای هر عدد یا عددنمای x، y و z، داریم $x \leq y$ اگر و تنها اگر $.x + z \leq y + z$

برهان. اگر $x + z \leq y + z$، آن‌گاه طبق تعریف ۳.۶، برای هر x^L و y^R، داریم $x^L + z \not\leq y + z$ و $x + z \not\leq y^R + z$. در نتیجه طبق فرض استقرا $x^L \not\leq y$ و $x \not\leq y^R$ و لذا $.x \leq y$

برعکس فرض کنید $x \leq y$ و $x + z \not\leq y + z$. بنابراین طبق تعریف حداقل یکی از گزاره‌های زیر اتفاق می‌افتد

$$y + z \leq x + z^L \quad \text{یا} \quad y + z \leq x^L + z \quad \text{یا} \quad y + z^R \leq x + z \quad \text{یا} \quad y^R + z \leq x + z.$$

با اِعمال رابطهٔ $x \leq y$ و استفاده از فرض استقرا روابط فوق به‌صورت زیر درمی‌آیند

$$y^R + z \leq x + z \quad \text{یا} \quad x + z^R \leq x + z \quad \text{یا} \quad y + z \leq x^L + z \quad \text{یا} \quad y + z \leq y + z^L.$$

و به کمک فرض استقرا داریم

$$y^R \leq x \quad \text{یا} \quad z^R \leq z \quad \text{یا} \quad y \leq x^L \quad \text{یا} \quad z \leq z^L.$$

که همگی گزاره‌های غلطی هستند.

۳.۶ تعریف ضرب و ویژگی‌های آن

آخرین مرحله در تشکیل یک میدان مرتب، تعریف عمل ضرب است.

تعریف ۵.۶ برای دو عدد یا عددنمای x و y، تعریف می‌کنیم

$$xy := \{x^L y + xy^L - x^L y^L, x^R y + xy^R - x^R y^R \mid x^L y + xy^R - x^L y^R, x^R y + xy^L - x^R y^L\}.$$

گزاره ۸.۶ برای هر عدد یا عددنمای x، y و z، داریم

الف) $x\circ \equiv \circ$.   ب) $x + y \equiv y + x$.

ج) $(x+y)z \equiv xz + yz$.   د) $(xy)z \equiv x(yz)$.

برهان. الف) با توجه به تعریف $x\circ$ می‌بینیم که در همهٔ گزینه‌های آن $\circ^L$ یا $\circ^R$ ظاهر می‌شود و چون هیچ $\circ^L$ یا $\circ^R$ای وجود ندارد، داریم $x\circ \equiv \{|\} \equiv \circ$.

ب) طبق تعریف داریم

$$x\,۱ \equiv \{x^L\,۱ + x\circ - x^L\circ \mid x^R\,۱ + x\circ - x^R\circ\}.$$

توجه کنید که عبارت‌هایی که ۱^R داشته‌اند حذف شده‌اند. به کمک فرض استقرا و قسمت (الف) داریم

$$x\,۱ \equiv \{x^L \mid x^R\} \equiv x.$$

ج)

$$\begin{aligned}(x+y)z \equiv \{&(x^L+y)z+(x+y)z^L-(x^L+y)z^L,\\ &(x+y^L)z+(x+y)z^L-(x+y^L)z^L,\\ &(x^R+y)z+(x+y)z^R-(x^R+y)z^R,\\ &(x+y^R)z+(x+y)z^R-(x+y^R)z^R \mid\\ &(x^L+y)z+(x+y)z^R-(x^L+y)z^R,\\ &(x+y^L)z+(x+y)z^R-(x+y^L)z^R,\\ &(x^R+y)z+(x+y)z^L-(x^R+y)z^L,\\ &(x+y^R)z+(x+y)z^L-(x+y^R)z^L\}.\end{aligned}$$

با استفاده از فرض استقرا و مرتب کردن جملات داریم

$$\begin{aligned}(x+y)z &\equiv \{(x^Lz+xz^L-x^Lz^L)+yz, xz+(y^Lz+yz^L-y^Lz^L),\ldots \mid\\ &\quad (x^Lz+xz^R-x^Lz^R)+yz, xz+(x^Rz+xz^L-x^Rz^L),\ldots\}\\ &\equiv xz+yz.\end{aligned}$$

توجه کنید که در این اثبات از خاصیت‌های شرکت‌پذیری و جابجایی جمع استفاده کرده‌ایم.

د)

$$\begin{aligned}(xy)z &\equiv \{(x^Ly+xy^L-x^Ly^L)z+(xy)z^L-(x^Ly+xy^L-x^Ly^L)z^L,\ldots \mid \ldots\}\\ &\equiv \{(x^Ly)z+(xy^L)z-(x^Ly^L)z+(xy)z^L-(x^Ly)z^L-(x^Ly)z^L-\\ &\quad (xy^L)z^L+(x^Ly^L)z^L,\ldots \mid \ldots\}\end{aligned}$$

حال می‌توانیم با استفاده از فرض استقرا، پرانتزها را تعویض کرده و سپس به کمک بند (ج) دوباره فاکتورگیری نماییم تا همهٔ گزینه‌های $x(yz)$ به دست آیند. در نتیجه $(xy)z \equiv x(yz)$.

تا اینجا کلیهٔ گزاره‌های گفته شده جز خطی بودن ترتیب، هم برای عددها و هم برای عددنماها درست بود. اما دو خاصیت دیگر میدان مرتب باقی مانده است. این دو خاصیت فقط در مورد اعداد درست هستند. در اینجا از اثبات این دو خاصیت صرف‌نظر می‌کنیم. برای دیدن اثبات به فصل ۱ کتاب [٦] مراجعه کنید.

گزاره ۹.٦ الف) برای هر دو عدد x و y که $x \geq ٠$ و $y \geq ٠$، داریم $xy \geq ٠$.

ب) برای هر عدد x که $x \neq ٠$، یک عدد y وجود دارد که $xy = ١$.

درست نبودن خواص فوق برای عددنماها مستلزم این است که در ضرب آنها دقت زیادی به خرج دهیم. مثلاً گزاره $(x = y \Rightarrow xz = yz)$ در مورد عددنماها درست نیست.

نتیجه ۲.٦ مجموعهٔ همهٔ اعداد تحت جمع و ضرب، یک میدان مرتب تشکیل می‌دهند. در ضمن کلیهٔ عملیاتی که در اعداد معمولی مجاز است جز عملیاتی که از گزاره ۹.٦ یا خطی بودن ترتیب استفاده می‌کنند روی عددنماها نیز مجاز خواهد بود.

۴.٦ سادگی

همان‌طور که گفتیم راه‌های مختلفی برای نوشتن یک عدد یا عددنما وجود دارد. مثلاً $٣ = \{٢ \mid ٤\} = \{٠, ١, ٢ \mid\} = \{٢ \mid\}$. ساده کردن یک ساختار برای پیدا کردن مقدار آن به خصوص در بازی‌ها اهمیت زیادی پیدا می‌کند. در این بخش دو روش برای ساده کردن عددها و عددنماها معرفی می‌کنیم که **قانون سادگی** و **قانون حذف گزینهٔ مغلوب** نام دارند. در فصل ۸ با روش‌های بیشتری برای ساده‌سازی عددنماها آشنا می‌شویم.

قضیه ۱.٦ (قانون سادگی) اگر برای یک عدد یا عددنمای $x = \{x^L \mid x^R\}$، یک عدد z داشته باشیم که برای هر x^L و x^R، $x^L \ngeq z \ngeq x^R$، اما هیچ گزینه‌ای از z در این شرط صدق نکند، آن‌گاه $x = z$.

برهان. برای اثبات $x \leq z$ باید ثابت کنیم برای هر x^L و z^R، $z \nleq x^L$ (که فرض قضیه است) و $z^R \nleq x$. فرض کنید برای یک z^R، $z^R \leq x$، آن‌گاه با توجه به عدد بودن z داریم

$$x^L \ngeq z < z^R \leq x \ngeq x^R$$

بنابراین $x^L \ngeq z^R \ngeq x^R$ که خلاف فرض قضیه است، لذا $z^R \nleq x$ و در نتیجه $x \leq z$.
با استدلال مشابه ثابت می‌شود که $z \leq x$. بنابراین داریم $x = z$.

در واقع این قضیه بیان می‌کند که x برابر با ساده‌ترین عددی است که بین x^Lها و x^Rها قرار می‌گیرد (تعریف ۲.۶). اگر عدد z بین x^L و x^R قرار گیرد و عددی ساده‌تر از z، یعنی z^L یا z^R وجود نداشته باشد که بین x^L و x^R قرار گیرد، آن‌گاه x برابر z است.
جدول ۱.۶ اعداد ساخته شده را به ترتیب سادگی از بالا به پایین نشان می‌دهد.

جدول ۱.۶ اعداد حقیقی به ترتیب سادگی از بالا به پایین.

0 $1, -1$ $2, -2$ $\vdots$	اعداد صحیح
$\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ $\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}$ $\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}$ $\vdots$	اعداد گویا با مخرج ۲
$\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}$ $\frac{3}{4}, -\frac{3}{4}$ $\frac{5}{4}, -\frac{5}{4}$ $\vdots$	اعداد گویا با مخرج 2^2
$\vdots$	$\vdots$
$\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, \ldots$ $\sqrt{2}, \pi, e$	اعداد گویای غیردودویی و اعداد گنگ

مثال ۱.۶ برای هر عدد $x = \{x^L | x^R\}$ که x^Lها منفی و x^Rها مثبت باشند، $x = ۰$. زیرا ۰ ساده‌ترین عدد است و در عین حال $x^L \ngeq ۰ \ngeq x^R$. همچنین $\frac{۱}{۲} \equiv \{۰ \mid ۱\} = \{-۳, -۲, ۰ \mid ۱, ۴, \frac{۱۳}{۸}\} =: y$، زیرا برای هر y^L و y^R، داریم $y^R \ngeq \frac{۱}{۲} \ngeq y^L$ ولی ۰ و ۱ (گزینه‌های $\frac{۱}{۲}$) در نامساوی $۱ \ngeq ۰, ۱ \ngeq ۰$ صدق نمی‌کنند.

اگر m و n دو عدد طبیعی باشند و داشته باشیم $m \geq n + ۲$، آن‌گاه $z := \{n \mid m\} = n + ۱ \equiv \{n \mid\}$، زیرا $m \ngeq n + ۱ \ngeq n$، اما n (گزینه $n + ۱$) در $m \ngeq n \ngeq n$ صدق نمی‌کند. اگر $m = n + ۱$، آن‌گاه $z := \{n \mid n+۱\} = n + \frac{۱}{۲} \equiv \{(n - ۱) + \frac{۱}{۲}, n \mid n + ۱\}$، زیرا $n + ۱ \ngeq n + \frac{۱}{۲} \ngeq n$ و گزینه‌های $n + \frac{۱}{۲}$ در این شرط صدق نمی‌کنند.

همان‌طور که دیدید در مقدار عدد x فقط بزرگ‌ترین x^L و کوچک‌ترین x^R تأثیرگذار است. این قانون که در مورد عددنماها نیز درست است، قانون حذف گزینهٔ مغلوب خوانده می‌شود.

قضیه ۲.۶ **(قانون حذف گزینهٔ مغلوب)** فرض کنید $x = \{L \mid R\}$ یک عدد یا عددنما باشد.

الف) اگر برای دو عضو $a, b \in L$ داشته باشیم، $b \leq a$، آن‌گاه $x = \{L - \{b\} \mid R\}$.

ب) اگر برای دو عضو $a, b \in R$ داشته باشیم، $a \leq b$، آن‌گاه $x = \{L \mid R - \{b\}\}$.

گزینه b را **گزینهٔ مغلوب** و گزینه a را **گزینهٔ غالب** می‌گوییم.

برهان. حالت (الف) را ثابت می‌کنیم. حالت (ب) به‌طور مشابه ثابت می‌شود. قرار دهید $y := \{L - \{b\} \mid R\}$. واضح است که $x \leq y$. زیرا هر y^L یک x^L و هر x^R یک y^R است و در نتیجه $x^R = y^R \nleq y$ و $y^L = x^L \ngeq x$، لذا طبق تعریف $x \leq y$. از طرف دیگر برای هر y^R داریم $y^R \nleq x$ و برای هر $x^L \neq b$، داریم $y \nleq x^L$. در ضمن $y \nleq a \geq b$ پس $y \nleq b$ و در نتیجه برای هر x^L، $y \nleq x^L$. این نشان می‌دهد که $x \leq y$.

۵.۶ عددنمای ستاره

اولین و ساده‌ترین عددنمای تولید شده در ساختار بازگشتی، عددنمای $\{0 \mid 0\}$ است. این عددنما را با نماد $*$ نشان می‌دهیم.

نماد ۳.۶ عددنمای $\{0 \mid 0\}$ را با $*$ نشان داده و **ستاره** می‌خوانیم.

عددنمای $*$ از این حیث که در تحلیل بسیاری از بازی‌ها ظاهر می‌شود، از اهمیت خاصی برخوردار است. برای همین در قضیهٔ زیر مهم‌ترین ویژگی‌های $*$ را بیان می‌کنیم.

قضیه ۳.۶ (ویژگی‌های عددنمای ستاره)

الف) $* = -*$.

ب) برای هر عدد مثبت x و هر عدد منفی y، داریم $y < * < x$. در ضمن $*$ با صفر مقایسه نمی‌شود؛ یعنی $* \parallel 0$.

ج) $0 = * + *$ و برای هر عدد x، $x + * = \{x \mid x\}$.

برهان. الف) بدیهی است.

ب) این موضوع را با استقرا روی سادگی x و y ثابت می‌کنیم. فرض کنید $x > 0$، پس $*^L = 0 \not\geq x$ (۱). از طرف دیگر $0 < x < x^R$، پس $x^R > 0$ و طبق فرض استقرا $* < x^R$، لذا $x^R \not\leq *$ (۲).

(۱) و (۲) نتیجه می‌دهد که $x \leq *$. از طرف دیگر $* \not\geq x$ (زیرا $*^R = 0 \leq x$)، بنابراین $* < x$. حال اگر $y < 0$ یک عدد باشد، آن‌گاه $-y > 0$ یک عدد است و در نتیجه $* < -y$. به طرفین این نامساوی $* - y$ را اضافه می‌کنیم و داریم $y < -* = *$. اما در مورد صفر داریم $0 = *^R \leq 0$، پس $* \not\leq 0$ و $0 = *^L \leq 0$، لذا $0 \not\leq *$.

ج) داریم $* + * = \{0 + * \mid 0 + *\} = \{* \mid *\}$. اما به کمک قانون سادگی درمی‌یابیم که $\{* \mid *\} = 0$، زیرا 0 ساده‌ترین عدد است و با توجه به (ب)، $* \not\geq 0 \not\geq *$. برای اثبات قسمت بعد داریم $x + * = \{x^L + *, x \mid x^R + *, x\}$، اما چون x عدد است پس $x^L < x$

$x - x^L > ۰$ و طبق بند (ب) $* < x - x^L$ و $* < x$. $x^L + * < x$. به‌طور مشابه ثابت می‌شود که $x < x^R + *$. بنابراین طبق قضیه ۲.۶ داریم

$$x + * = \{x^L + *, x \mid x, x^R + *\} = \{x \mid x\}.$$

در واقع قضیهٔ فوق نشان می‌دهد که $*$ از همهٔ اعداد مثبت کوچک‌تر و از همهٔ اعداد منفی بزرگ‌تر است ولی با صفر مقایسه نمی‌شود. به چنین عددنماهایی، عددنماهای بی‌نهایت کوچک می‌گوییم.

۶.۶ تمرین

۱) عددها و عددنماهای زیر را تا حد امکان ساده کنید.

$$\{\tfrac{۱}{۴} \mid ۱\}, \quad \{-۱ \mid \tfrac{۱}{۲}\}, \quad \{\tfrac{-۳}{۸} \mid ۰\}, \left\{\tfrac{۱}{۳} \mid ۰, \{۲ \mid ۱\}\right\}.$$

۲) ثابت کنید اگر x و y عدد باشند، آن‌گاه $-x$ و $x + y$ نیز عدد هستند.

۳) برای هر عدد یا عددنمای x و عدد طبیعی n ثابت کنید

$$nx = \{(n - ۱)x + x^L \mid (n - ۱)x + x^R\}.$$

۴) استدلال زیر به یک تناقض منجر می‌شود.

$$* + * = ۰ \;\Rightarrow\; ۱* + ۱* = ۰ \;\Rightarrow\; (۱ + ۱)* = ۰ \;\Rightarrow$$

$$۲* = ۰ \;\Rightarrow\; \tfrac{۱}{۲}۲* = \tfrac{۱}{۲}۰ \;\Rightarrow\; ۱* = ۰ \;\Rightarrow\; * = ۰ \;\Rightarrow\; * \leq ۰.$$

همهٔ استدلال‌ها جز یکی درست هستند. استدلال اشتباه را پیدا کنید.

۵) الف) ثابت کنید برای هر عدد صحیح p و عدد طبیعی n، داریم $\frac{2p+1}{2^n} = \{\frac{p}{2^{n-1}} \mid \frac{p+1}{2^{n-1}}\}$.
(راهنمایی: از استقرا روی n استفاده کنید و از تعریف $2z$ و قانون سادگی کمک بگیرید.)

ب) فرض کنید x یک عدد گویای دودویی باشد و L و R را دو زیرمجموعه از $\mathbb{Q}^*$ بگیرید که $L = \{y \in \mathbb{Q}^* \ : \ y < x\}$ و $R = \{y \in \mathbb{Q}^* \quad y > x\}$. ثابت کنید $x = \{L \mid R\}$.

۶) **خاصیت چگالی اعداد گویای دودویی.** فرض کنید $\frac{k}{2^n}$ و $\frac{k'}{2^m}$ دو عدد گویای دودویی باشند که $\frac{k}{2^n} < \frac{k'}{2^m}$. قرار دهید $x = \{\frac{k}{2^n} \mid \frac{k'}{2^m}\}$ و ثابت کنید x یک عدد گویای دودویی است. (راهنمایی: قرار دهید $y = \frac{2^{m+1}k+1}{2^{n+m+1}}$ و ثابت کنید $\frac{k}{2^n} < y < \frac{k'}{2^m}$، سپس ساده‌ترین عدد بین $\frac{k}{2^n}$ و $\frac{k'}{2^m}$ را z بنامید، در نتیجه $x = z$. حال از اینکه z ساده‌تر از y است نتیجه بگیرید z یک عدد گویای دودویی است.)

۷) **اعداد حقیقی.** یک عدد حقیقی به‌طور استقرائی به این‌صورت تعریف می‌شود. یک عدد x را عدد حقیقی گوییم هرگاه نمایشی به‌صورت $x = \{x^L \mid x^R\}$ داشته باشد که x^Lها و x^Rها عدد حقیقی باشند و اگر L غیرتهی و بدون عضو ماکسیمم باشد، R نیز غیرتهی و بدون عضو می‌نیمم باشد و برعکس.

الف) ثابت کنید برای هر دو عدد حقیقی x و y، اعداد $-x$، $x+y$ و xy نیز حقیقی هستند.

ب) ثابت کنید برای هر عدد حقیقی x، یک عدد طبیعی n وجود دارد که $-n < x < n$.

ج) ثابت کنید برای هر عدد حقیقی x، یک x^L و یک x^R وجود دارد که $x - x^L \leq 1$ و $x^R - x \leq 1$. (راهنمایی: از برهان خلف استفاده کنید و n را بزرگ‌ترین عدد طبیعی کوچک‌تر از x بگیرید و ثابت کنید $x^L < n < x$ و از قانون سادگی به تناقض برسید.)

۸) عدد $\omega = \{0, 1, 2, \ldots \mid \ \}$ را در نظر بگیرید.

الف) ثابت کنید $\omega - ۱ = \{۰, ۱, \ldots \mid \omega\}$ و برای هر عدد طبیعی n،

$$\omega - n = \{۰, ۱, \ldots \mid \omega - (n - ۱)\}.$$

ب) ثابت کنید $\frac{\omega}{۲} = \{۰, ۱, ۲, \ldots \mid \omega, \omega - ۱, \omega - ۲, \ldots\}$ و برای هر عدد طبیعی n،

$$\frac{\omega}{۲n} = \{۰, ۱, ۲, \ldots \mid \frac{\omega}{۲}, \frac{\omega}{۲n-۱} - ۱, \frac{\omega}{۲n-۱} - ۲, \ldots\}.$$

ج) برای $\epsilon = \{۰ \mid ۱, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۴}, \ldots\}$، ثابت کنید $\epsilon.\omega = ۱$.

د) ثابت کنید

$$\sqrt{w} = \{۰, ۱, ۲, ۳, \ldots \mid \omega, \frac{\omega}{۲}, \frac{\omega}{۴}, \frac{\omega}{۸}, \ldots\}.$$

۹) **اعداد اردینال.** α را یک عدد اردینال گوییم، هرگاه نمایشی به‌صورت $\alpha = \{L \mid \}$ داشته باشد که همهٔ اعضای L عدد باشند. توجه کنید که از این تعریف، عدد بودن α نتیجه می‌شود.

الف) برای هر عدد اردینال α، قرار دهید $L = \{\beta :$ اردینال است $\beta, \beta < \alpha\}$ و ثابت کنید $\alpha = \{L \mid \}$.[۱]

ب) ثابت کنید برای هر خانوادهٔ غیرتهی C داده شده از اردینال‌ها، C دارای یک عضو می‌نیمم است.

ج) ثابت کنید برای هر مجموعهٔ S داده شده از اردینال‌ها، یک اردینال وجود دارد که از همهٔ اعضای S بزرگ‌تر است.

[۱] می‌توان ثابت کرد که L در واقع یک مجموعه است.

فصل ۷

بازی‌ها و اعداد

در این فصل با استفاده از اطلاعات فصل قبل به هر وضعیت در یک بازی جانبدارانه، یک ارزش نسبت می‌دهیم. این ارزش ممکن است یک عدد یا عددنما باشد. ارزش هر وضعیت، N یا P بودن آن را برای هر بازیکن مشخص می‌کند. به کمک مفهوم ارزش می‌توانیم بازی‌های جانبدارانهٔ زیادی را به‌طور جزئی یا کامل تحلیل کرده و استراتژی‌های برد را به بازیکنان پیشنهاد کنیم. همچنین در بسیاری موارد می‌توانیم یک بازی پیچیده را به چند بازی ساده‌تر که حرکت در یکی از آنها تأثیری در بقیهٔ بازی‌ها ندارد، تجزیه کرده و با تحلیل بازی‌های ساده‌تر و استفاده از مفهوم مجموع بازی‌ها، بازی اصلی را تحلیل نماییم. در این فصل همه‌جا بازی‌های جانبدارانه را متناهی در نظر می‌گیریم (تعریف ۳.۵).

۱.۷ ارزش بازی‌ها

در یک بازی ترکیبیاتی جانبدارانه هر بازیکن در هر وضعیت، مجموعهٔ گزینه‌هایی دارد که طبق قوانین بازی مجاز است یکی از آنها را انتخاب کند. هر یک از این گزینه‌ها نیز خود یک وضعیت در بازی هستند. چون ما فقط به ساختار مجرد یک بازی توجه داریم می‌توانیم وضعیت‌هایی را که گزینه‌های یکسانی دارند، یکی بگیریم. بنابراین اگر L

مجموعهٔ گزینه‌های بازیکن چپ و R مجموعهٔ گزینه‌های بازیکن راست در یک وضعیت X باشد، آن‌گاه X را با نماد $\{L \mid R\}$ نشان می‌دهیم. اگر X^L عضو L و X^R عضو R باشد، معمولاً به جای L و R اعضای آنها را قرار داده و می‌نویسیم $X = \{X^L \mid X^R\}$. به عنوان مثال اگر در یک بازی در وضعیت X بازیکن چپ بتواند به وضعیت‌های A، B و C برود و بازیکن راست بتواند وضعیت‌های D و E را انتخاب کند، می‌نویسیم $X = \{A, B, C \mid D, E\}$.

در وضعیتی که برای هر دو بازیکن وضعیت پایانی است، هیچ گزینه‌ای وجود ندارد. بنابراین برای وضعیت پایانی X قرار می‌دهیم $X = \{\mid\}$ و ارزش X را صفر تعریف می‌کنیم. به همین صورت ارزش هر وضعیت را به کمک ارزش گزینه‌های آن وضعیت، به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱.۷ در یک بازی جانبدارانهٔ متناهی، ارزش هر وضعیت به‌طور بازگشتی به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

۱) ارزش هر وضعیت پایانی برای هر دو بازیکن را صفر قرار می‌دهیم.

۲) اگر برای وضعیت $X = \{X^L \mid X^R\}$، ارزش همهٔ گزینه‌های X معلوم باشد و x^L ارزش X^L و x^R ارزش X^R باشد، آن‌گاه ارزش X را عدد یا عددنمای $x = \{x^L \mid x^R\}$ تعریف می‌کنیم.

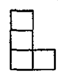
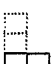
ارزش یک بازی را ارزش وضعیت شروع آن تعریف می‌کنیم. همچنین وضعیت X را **ساده‌تر** از وضعیت Y می‌گوییم، هرگاه بتوان با دنباله‌ای متناهی از حرکت‌ها از X به Y رسید.

توجه به دو نکته در تعریف فوق حائز اهمیت است. نکتهٔ اول اینکه با توجه به شرط متناهی بودن بازی جانبدارانه (تعریف ۳.۵)، همیشه می‌توانیم با روش فوق به هر وضعیت در بازی یک ارزش نسبت دهیم. (مثال الف.۱ و قضیه الف.۳ را در پیوست الف ببینید.) واضح است که این امکان وجود دارد که یک گزینه برای هر دو بازیکن مجاز باشد یا ارزش یک گزینهٔ چپ از ارزش یک گزینهٔ راست بیشتر باشد، پس ارزش یک وضعیت، لزوماً یک عدد نیست.

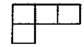
نکتهٔ دیگر اینکه عکس فرآیند فوق نیز قابل انجام است. یعنی به ازای هر عدد یا عددنمایی مانند x، می‌توانیم یک بازی جانبدارنه مانند X طراحی کنیم که مجموعهٔ وضعیت‌ها در آن، مجموعهٔ متشکل از x، همهٔ گزینه‌های x، همهٔ گزینه‌های گزینه‌های x و ... است. وضعیت x، وضعیت شروع بوده و در هر وضعیت y، بازیکن چپ مجاز به حرکت به یک y^L و بازیکن راست مجاز به حرکت به یک y^R است. واضح است که ارزش بازی X برابر x است. به دلیل وجود این تناظر، گاهی یک عدد یا عددنما را با بازی متناظر آن یکی می‌گیریم. بنابراین برای عدد یا عددنمای x، منظور از بازی x، همان بازی متناظر با x است که به روش فوق به دست می‌آید.

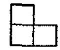
مثال ۱.۷ بازی دومینو توسط گوران اندرسون[۱] معرفی شد. این بازی روی یک صفحهٔ شطرنجی اجرا می‌شود و هر بازیکن در نوبت خود باید یک مهرهٔ دومینو را روی صفحه قرار دهد. هر مهره دو خانهٔ مجاور را اشغال می‌کند. بازیکن چپ مجاز است مهره‌ها را به‌طور عمودی قرار دهد و بازیکن راست باید مهره‌ها را افقی بگذارد. مهره‌ها نباید روی هم قرار گیرند.

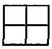
در وضعیت  هیچ‌کدام از بازیکنان حرکت قانونی ندارند، بنابراین ارزش این وضعیت صفر است. در وضعیت‌های  و  برای بازیکن چپ یک حرکت به وضعیتی با ارزش صفر موجود است و برای بازیکن راست هیچ حرکتی وجود ندارد، لذا ارزش این دو وضعیت $1 = \{0 \mid \ \}$ است. به‌طور مشابه ارزش وضعیت‌های  و برابر $-1 = \{\ \mid 0\}$ است.

در وضعیت  برای بازیکن چپ دو حرکت وجود دارد که به وضعیت‌های  و  منجر می‌شود که به ترتیب دارای ارزش -1 و 0 هستند. تنها حرکت بازیکن راست به وضعیت  با ارزش ۱ می‌انجامد، لذا ارزش وضعیت مذکور $\{-1, 0 \mid 1\}$ است که طبق قانون حذف گزینهٔ مغلوب (قضیه ۲.۶) برابر با $\frac{1}{2}$ می‌باشد. به‌طور مشابه

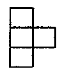
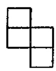
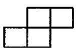
---
[۱] Göran Andersson

ارزش  برابر $-\frac{۱}{۲}$ است.

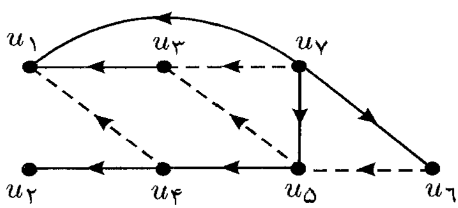
در یک بازی ممکن است ارزش همهٔ وضعیت‌ها عدد نباشند. مثلاً در وضعیت  هر بازیکن یک حرکت به وضعیتی با ارزش صفر دارد. لذا ارزش این وضعیت $* = \{۰ \mid ۰\}$ است.

ارزش وضعیت  برابر با $\{۱ \mid -۱\}$ است. این عددنما را با نماد ± ۱ نشان می‌دهیم. در فصل بعد در مورد خواص عددنماهایی به این فرم صحبت خواهیم کرد.

با مشخص کردن ارزش چند وضعیت زیر، ارزش همهٔ وضعیت‌های دومینو با کمتر از ۵ خانه به دست می‌آید.

 $= *$  $= \{۱ \mid ۰\}$  $= \{۰ \mid -۱\}$

مثال ۲.۷ گراف بازی زیر را در نظر بگیرید. آیا می‌توانید ارزش همهٔ وضعیت‌ها در آن را به دست آورید؟



رأس‌های $u_۱$ و $u_۲$ وضعیت‌های پایانی هستند، پس $u_۱ = u_۲ = ۰$. در نتیجه $u_۳ = \{۰ \mid \} = ۱$ و $u_۴ = \{۰ \mid ۰\} = *$. با مشخص شدن ارزش $u_۳$ و $u_۴$، ارزش $u_۵$ معلوم می‌شود، $u_۵ = \{* \mid ۱\}$. اما طبق قانون سادگی $\{* \mid ۱\} = ۰$. زیرا صفر ساده‌ترین عدد است و داریم $* \not\geq ۰ \not\geq ۱$، پس $u_۵ = ۰$ و از آنجا $u_۶ = \{ \mid ۰\} = -۱$. در نهایت $u_۷ = \{-۱, ۰ \mid ۱\}$ و از قانون حذف گزینهٔ مغلوب داریم $u_۷ = \frac{۱}{۲}$.

۲.۷ ارزش و وضعیت‌های N و P

به خاطر دارید که در فصل ۳ مجموع دو بازی ترکیبیاتی G و H را بازی جدیدی تعریف کردیم که در آن در هر نوبت بازیکنان یکی از بازی‌های G و H را انتخاب کرده و یک حرکت در آن بازی انجام می‌دهند و بازی دیگر بدون تغییر می‌ماند. به کمک قضیهٔ زیر می‌توانیم ارزش مجموع دو بازی را به کمک ارزش بازی‌های مؤلفه‌های آن به دست آوریم. یادآوری می‌کنیم که ارزش بازی را ارزش وضعیت شروع آن بازی تعریف می‌کنیم و بازی G را ساده‌تر از بازی G' گوییم، هرگاه وضعیت شروع G ساده‌تر از وضعیت شروع G' باشد.

قضیه ۱.۷ اگر g ارزش بازی G و h ارزش بازی H باشد، ارزش بازی مجموع $G + H$ برابر $g + h$ است.

برهان. طبق معمول از استقرا استفاده کرده و فرض می‌کنیم قضیه برای همهٔ بازی‌های ساده‌تر، درست است. هر حرکت برای بازیکن چپ عبارت است از یک حرکت در G و ثابت ماندن H یا یک حرکت در H و ثابت ماندن G. بنابراین گزینه‌های بازیکن چپ $G^L + H$ و $G + H^L$ هستند. به‌طور مشابه گزینه‌های بازیکن راست $G^R + H$ و $G + H^R$ هستند. لذا داریم $G + H = \{G^L + H, G + H^L \mid G^R + H, G + H^R\}$. اما بازی‌های $G^L + H$، $G + H^L$ و ... ساده‌تر از $G + H$ هستند و طبق فرض استقرا، ارزش آنها به ترتیب $g^L + h$، $g + h^L$ و ... است. بنابراین طبق تعریف، ارزش $G + H$ برابر با $\{g^L + h, g + h^L \mid g^R + h, g + h^R\}$ است و از تعریف جمع، این مقدار برابر با $g + h$ است.

برای هر بازی جانبدارانهٔ G می‌توان بازی جدیدی تعریف کرد که در آن نقش دو بازیکن عوض می‌شود. این بازی را **قرینهٔ بازی** G گفته و با $-G$ نشان می‌دهیم. مثلاً در قرینهٔ بازی دومینو، بازیکن چپ باید مهره‌ها را افقی بگذارد و بازیکن راست مجاز است مهره‌ها را عمودی قرار دهد.

قضیه ۲.۷ اگر g ارزش بازی G باشد، آن‌گاه ارزش بازی قرینهٔ G، $-G$ برابر $-g$ است.

برهان. فرض کنید قضیه برای همهٔ بازی‌های ساده‌تر درست است. در بازی $-G$ بازیکن چپ می‌تواند به یکی از گزینه‌های راست G حرکت کند. بعد از حرکت او به یک وضعیت G^R می‌رسیم که در آن نقش دو بازیکن عوض شده است. بنابراین گزینه‌های چپ $-G$، $-G^R$–ها هستند. به‌طور مشابه گزینه‌های راست $-G$، $-G^L$–ها هستند. در نتیجه $-G = \{-G^R \mid -G^L\}$ و طبق فرض استقرا ارزش $-G$ برابر $-g = \{-g^R \mid -g^L\}$ است.

اکنون مهم‌ترین قضیهٔ سه فصل اخیر که نظریهٔ چشمگیر فصل ٦ را به نظریهٔ بازی‌های جانبدارانه مرتبط می‌کند، بیان می‌کنیم.

قضیه ۳.۷ فرض کنید X یک وضعیت با ارزش x باشد، در این‌صورت

X یک وضعیت P_L است اگر و تنها اگر $x \leq 0$.

X یک وضعیت P_R است اگر و تنها اگر $x \geq 0$.

X یک وضعیت N_L است اگر و تنها اگر $x \not\leq 0$.

X یک وضعیت N_R است اگر و تنها اگر $x \not\geq 0$.

در هر وضعیت، حرکت منجر به برد برای بازیکن چپ، حرکت به یک وضعیت X با ارزش x است که $x \geq 0$ و حرکت منجر به برد برای بازیکن راست، حرکت به یک وضعیت Y با ارزش y است که $y \leq 0$.

برهان. وضعیت‌های پایانی برای هر دو بازیکن وضعیت (P_L, P_R) هستند و ارزش آنها صفر است، لذا قضیه برای وضعیت‌های پایانی برای هر دو بازیکن درست است. فرض کنید قضیه برای همهٔ وضعیت‌های ساده‌تر از X، یعنی X^Lها و X^Rها با ارزش‌های x^L و x^R درست باشد. اگر X یک وضعیت P_L باشد، آن‌گاه همهٔ X_Lها وضعیت N_R هستند (تعریف ۴.۵). در نتیجه طبق فرض استقرا $x^L \not\geq 0$؛ همچنین از انتفای مقدم داریم $x \not\geq 0^R$. بنابراین طبق تعریف ۳.٦، داریم $x \leq 0$.

حال برعکس اگر $x \geq ۰$ آن‌گاه طبق تعریف برای هر x^L، $x^L \not\geq ۰$؛ در نتیجه طبق فرض استقرا هر x^L یک وضعیت N_R است، لذا طبق تعریف، X یک وضعیت P_L است. بنابراین X یک وضعیت P_L است اگر و تنها اگر $x \geq ۰$. در نتیجه X یک وضعیت N_L است اگر و تنها اگر $x \not\geq ۰$.

از طرفی داریم X یک وضعیت P_R است اگر و تنها اگر $-X$ یک وضعیت P_L باشد؛ زیرا در بازی $-X$ نسبت به بازی X نقش دو بازیکن عوض می‌شود. بنابراین طبق آنچه در بالا ثابت شد و با توجه به قضیهٔ ۲.۷، X یک وضعیت P_R است اگر و تنها اگر $-x \geq ۰$؛ یعنی $x \leq ۰$. در نتیجه X یک وضعیت N_R است اگر و تنها اگر $x \not\leq ۰$.

برای هر بازیکن حرکت به وضعیت P رقیب، حرکت منجر به برد است. بنابراین حرکت منجر به برد برای بازیکن چپ، حرکت به یک وضعیت X با ارزش $x \geq ۰$ و برای بازیکن راست حرکت به یک وضعیت Y با ارزش $y \leq ۰$ است.

بنابراین بازیکن چپ تلاش می‌کند تا با حرکت خود ارزش یک وضعیت را به بیشترین حد ممکن برساند و بازیکن راست می‌کوشد این مقدار را کم کند. وضعیت N یا P بودن یک وضعیت در مقایسهٔ ارزش آن وضعیت با صفر معین می‌شود.
نتیجهٔ زیر مستقیماً از قضیهٔ ۳.۷ به دست می‌آید.

نتیجه ۱.۷ اگر X یک وضعیت با ارزش x باشد، آن‌گاه

الف) $x > ۰$ (x مثبت است) اگر و تنها اگر X وضعیت (N_L, P_R) باشد. (بازیکن چپ استراتژی برد دارد.)

ب) $x < ۰$ (x منفی است) اگر و تنها اگر X وضعیت (P_L, N_R) باشد. (بازیکن راست استراتژی برد دارد.)

ج) $x = ۰$ (x صفر است) اگر و تنها اگر X وضعیت (P_L, P_R) باشد. (بازیکن قبلی استراتژی برد دارد.)

د) $x \parallel ۰$ (x خنثی است؛ یعنی $x \not\leq ۰$ و $x \not\geq ۰$) اگر و تنها اگر X وضعیت (N_L, N_R) باشد. (بازیکن بعدی استراتژی برد دارد.)

برای مقایسه دو عدد یا عددنما می‌توانیم به جای استفاده از تعریف ۳.۶، از نتیجه زیر که مستقیماً از قضایای ۱.۷، ۲.۷ و ۳.۷ به دست می آید، استفاده کنیم.

نتیجه ۲.۷ فرض کنید g و h دو عدد یا عددنما باشند. در این‌صورت

الف) $g > h$ اگر و تنها اگر در بازی $g + (-h)$ بازیکن چپ استراتژی برد داشته باشد.

ب) $g \geq h$ اگر و تنها اگر در بازی $g + (-h)$ درصورتی که بازیکن راست شروع کند، بازیکن چپ استراتژی برد داشته باشد.

ج) $g = h$ اگر و تنها اگر در بازی $g + (-h)$ بازیکن قبلی استراتژی برد داشته باشد.

د) $g \parallel h$ اگر و تنها اگر در بازی $g + (-h)$ بازیکن بعدی استراتژی برد داشته باشد.

۳.۷ بازی‌ها با ارزش عددی

در ادامهٔ این فصل به بررسی چند نمونه از بازی‌هایی می‌پردازیم که ارزش همهٔ وضعیت‌ها در آنها یک عدد یا عددنمای $*$ یا مجموعی از یک عدد و عددنمای $*$ است.

مثال ۳.۷ کیک ماندی
این بازی توسط پاتریک ماوین[1] معرفی و حل شد. بازی کیک ماندی روی یک قطعهٔ کیک $m \times n$ اجرا می‌شود و بازیکن چپ در نوبت خود باید کیک را با برش‌های عمودی به چند قطعهٔ مساوی تقسیم کند. بازیکن راست نیز مجاز است با برش‌های افقی کیک را به چند قسمت مساوی ببرد. هر بازیکن که در نوبت خود نتوانست کیک را تقسیم کند بازنده است.

مثلاً در یک وضعیت $p \times 1$ که p یک عدد اول است، بازیکن راست هیچ حرکتی ندارد و تنها حرکت بازیکن چپ تقسیم کیک به p قطعهٔ 1×1 است. بنابراین ارزش چنین

[1] Patrick Mauhin

وضعیتی برابر $۱ = \{ \circ \mid \}$ است. به عنوان نمونه ارزش یک وضعیت ۱×۱۲ به‌صورت زیر به دست می‌آید.

$$۱ \times ۱۲ = \left\{ \begin{matrix} \text{۱۲ قطعه} \\ ۱ \times ۱ \end{matrix}, \begin{matrix} \text{۶ قطعه} \\ ۱ \times ۲ \end{matrix}, \begin{matrix} \text{۴ قطعه} \\ ۱ \times ۳ \end{matrix}, \begin{matrix} \text{۳ قطعه} \\ ۱ \times ۴ \end{matrix}, \begin{matrix} \text{۲ قطعه} \\ ۱ \times ۶ \end{matrix} \;\middle|\; \right\}$$

بنابراین

$$\text{ارزش} \ (۱ \times ۱۲) = \{ ۱۲ \times \circ, ۶ \times ۱, ۴ \times ۱, ۳ \times ۳, ۲ \times ۴ \mid \} = ۱\circ$$

واضح است که در یک وضعیت $m \times n$ هر چه تعداد عوامل اول m بیشتر باشد به نفع بازیکن راست و هرچه تعداد عوامل اول n بیشتر باشد، به نفع بازیکن چپ است، زیرا آنها می‌توانند تعداد بار بیشتری برش انجام دهند. اگر ارزش یک وضعیت $m \times n$ در بازی کیک ماندی را با $M(m,n)$ نشان دهیم، این مقدار به‌صورت زیر به دست می‌آید.
فرض کنید $m = p_۱p_۲\ldots p_l$ و $n = q_۱q_۲\ldots q_r$ تجزیهٔ m و n به عوامل اول باشند به‌طوری که $p_i \leq p_{i+۱}$ $(۱ \leq i \leq l)$ و $q_i \leq q_{i+۱}$ $(۱ \leq i \leq r)$. در این‌صورت اگر $l = r$، آن‌گاه ارزش بازی برابر صفر، اگر $l < r$، آن‌گاه ارزش بازی مثبت و درصورتی که $l > r$، ارزش بازی منفی است و داریم

$$M(m,n) = \begin{cases} q_{l+۲} + q_{l+۳} + \cdots + q_r + ۱ & l < r, \\ -(p_{r+۲} + p_{r+۳} + \cdots + p_l + ۱) & l > r. \end{cases}$$

مثلاً برای وضعیت $۹۹۹ \times ۱\circ\circ\circ$ داریم

$$۱\circ\circ\circ = ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۵ \times ۵ \times ۵$$

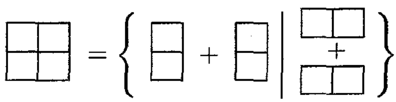
و

$$۹۹۹ = ۳ \times ۳ \times ۳ \times ۳۷$$

بنابراین $M(m,n) = ۵ + ۱ = ۶$.
این موضوع را به راحتی می‌توان با استقرای دوگانه اثبات کرد (تمرین ۲ را ببینید).

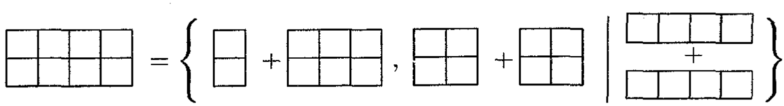
مثال ۴.۷ برش کیک

در این بازی یک کیک به‌صورت یک صفحهٔ شطرنجی $m \times n$ وجود دارد و یک بازیکن در هر نوبت باید یک قطعه کیک را با چاقو به دو قسمت تقسیم کند. بازیکن چپ تنها می‌تواند کیک را به‌صورت عمودی ببرد و بازیکن راست مجاز است به‌صورت افقی برش بزند. بازیکنی که در نوبت خود نتواند برشی بزند بازنده خواهد بود. به عنوان مثال در وضعیت ۲ × ۲ هر کدام از بازیکنان یک حرکت دارند و ارزش این وضعیت به‌صورت زیر به دست می‌آید.



$$= \{-۱ + (-۱) \mid ۱ + ۱\} = ۰.$$

به همین روش می‌توانیم ارزش وضعیت‌های دیگر را نیز به دست آوریم. مثلاً ارزش وضعیت ۳ × ۲ به وضوح برابر ۰ است و در مورد وضعیت ۴ × ۲ داریم



$$= \{-۱ + ۰, ۰ + ۰ \mid ۳ + ۳\} = ۱.$$

توجه داشته باشید که ارزش هر یک از گزینه‌های چپ و راست در بالا بنا به قضیهٔ ۱.۷ محاسبه می‌شود. در جدول ۱.۷ ارزش وضعیت‌های $m \times n$، $m, n \le ۱۴$، داده شده است. خانه‌های کنار هم که ارزش‌های برابر دارند دسته‌بندی شده‌اند. مثلاً ارزش بازی با کیک ۱۳ × ٦ برابر ۲ است.

با توجه به مقادیر داده شده در جدول ۱.۷ می‌توانید حدس بزنید که ارزش وضعیت‌های بازی برش کیک از یک الگو تبعیت می‌کنند.

اجازه دهید ارزش یک وضعیت $m \times n$ برش کیک را با $C(m,n)$ نشان دهیم. اگر $۲^{l-۱} \le m < ۲^{l}$ و $۲^{r-۱} \le n < ۲^{r}$، آن‌گاه برای $l = r$، ارزش بازی صفر است. برای

جدول ۱.۷ ارزش وضعیت‌ها در بازی برش کیک.

<table>
<tr><th></th><th>۱</th><th>۲</th><th>۳</th><th>۴</th><th>۵</th><th>۶</th><th>۷</th><th>۸</th><th>۹</th><th>۱۰</th><th>۱۱</th><th>۱۲</th><th>۱۳</th><th>۱۴</th></tr>
<tr><th>۱</th><td>۰</td><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td><td>۴</td><td>۵</td><td>۶</td><td>۷</td><td>۸</td><td>۹</td><td>۱۰</td><td>۱۱</td><td>۱۲</td><td>۱۳</td></tr>
<tr><th>۲</th><td>-۱</td><td colspan="2" rowspan="2">۰</td><td colspan="2" rowspan="2">۱</td><td colspan="2" rowspan="2">۲</td><td colspan="2" rowspan="2">۳</td><td colspan="2" rowspan="2">۴</td><td colspan="2" rowspan="2">۵</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><th>۳</th><td>-۲</td></tr>
<tr><th>۴</th><td>-۳</td><td colspan="2" rowspan="2">−۱</td><td colspan="4" rowspan="4">۰</td><td colspan="4" rowspan="4">۱</td><td colspan="3" rowspan="4">۲</td></tr>
<tr><th>۵</th><td>-۴</td></tr>
<tr><th>۶</th><td>-۵</td><td colspan="2" rowspan="2">−۲</td></tr>
<tr><th>۷</th><td>-۶</td></tr>
<tr><th>۸</th><td>-۷</td><td colspan="2" rowspan="2">−۳</td><td colspan="4" rowspan="4">−۱</td><td colspan="7" rowspan="7">۰</td></tr>
<tr><th>۹</th><td>-۸</td></tr>
<tr><th>۱۰</th><td>-۹</td><td colspan="2" rowspan="2">−۴</td></tr>
<tr><th>۱۱</th><td>-۱۰</td></tr>
<tr><th>۱۲</th><td>-۱۱</td><td colspan="2" rowspan="2">−۵</td><td colspan="4" rowspan="3">−۲</td></tr>
<tr><th>۱۳</th><td>-۱۲</td></tr>
<tr><th>۱۴</th><td>-۱۳</td><td colspan="2"></td></tr>
</table>

$l < r$، ارزش بازی، مثبت و برای $l > r$، ارزش بازی، منفی است. در ضمن داریم

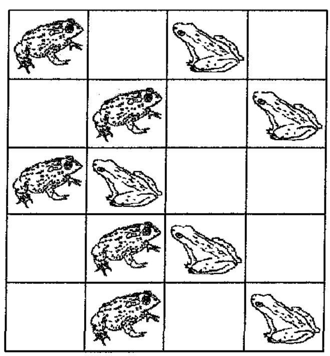
$$C(m,n) = \begin{cases} \left\lceil \dfrac{n+۱}{۲^{l-۱}} \right\rceil - ۲ & l < r, \\ -\left(\left\lceil \dfrac{m+۱}{۲^{r-۱}} \right\rceil - ۲ \right) & l > r. \end{cases}$$

مثلاً برای یک بازی ۳۶×۳۰، داریم $l = ۵$ و $r = ۶$؛ در نتیجه ارزش این بازی برابر $\lceil ۳۷/۱۶ \rceil - ۲ = ۱$ است. اکنون آماده هستید که بازی برش کیک را روی یک

کیک ۱۲۰ × ۱۰۰ انجام دهید. با توجه به اینکه در این کیک تعداد ستون‌ها بیشتر است و شما هم مبتدی هستید اجازه می‌دهیم که شما بازیکن چپ باشید (برش‌های عمودی بزنید) و برای اینکه نهایت ادب خود را نشان دهیم، پیشنهاد می‌کنیم که شما بازی را شروع کنید!

مثال ۵.۷ بازی وزغ و قورباغه

یک صفحهٔ شطرنجی از چند ردیف خانه وجود دارد. در بعضی از خانه‌ها تعدادی وزغ و قورباغه قرار دارد. (هر خانه حداکثر یک وزغ یا یک قورباغه را جای می‌دهد.) وزغ‌ها متعلق به بازیکن چپ و قورباغه‌ها متعلق به بازیکن راست است. بازیکن چپ (راست) در نوبت خود می‌تواند یکی از وزغ‌های (قورباغه‌های) خود را در همان ردیف یک خانه به جلو برد یا درصورتی که خانهٔ جلوی آن توسط یک قورباغه (یک وزغ) اشغال شده باشد از روی آن خانه پریده و به خانهٔ بعدی برود (درصورتی که خانهٔ بعدی خالی باشد). وزغ‌ها تنها از چپ به راست و قورباغه‌ها تنها از راست به چپ حرکت می‌کنند. شکل ۱.۷، یک وضعیت در بازی وزغ و قورباغه را نشان می‌دهد.



شکل ۱.۷ یک وضعیت در بازی وزغ و قورباغه.

با توجه به اینکه هر بازیکن در هر نوبت فقط می‌تواند یک وزغ یا قورباغه را حرکت دهد و حرکت آن در یک ردیف تأثیری بر بقیهٔ ردیف‌ها ندارد، کافی است هر ردیف را یک

بازی در نظر گرفته و ارزش ردیف‌ها را با هم جمع کنیم.

برای سهولت در نمایش وضعیت‌ها در این بازی، هر وزغ را با T، هر قورباغه را با F و هر خانه خالی را با □ نشان می‌دهیم و اگر n خانهٔ خالی متوالی داشته باشیم، آن را با $\square^n$ نمایش می‌دهیم. به عنوان مثال سطر اول و سوم در بازی شکل ۱.۷، به ترتیب با T□F□ و $\mathrm{TF}\square^{۲}$ نشان داده می‌شود.

تحلیل این بازی و پیدا کردن ارزش وضعیت‌ها در حالت کلی کار مشکلی است. (تمرین ۹ را ببینید.) اما وقتی در هر ردیف تنها یک وزغ و یک قورباغه وجود دارد، ارزش هر سطر بازی به صورت یک عدد یا عددنمای * است. در ادامه، بازی را در این حالت تحلیل می‌کنیم.

ابتدا حالتی را در نظر بگیرید که وزغ و قورباغه رو در رو قرار می‌گیرند و وزغ در سمت چپ قورباغه است؛ این وضعیت با $\square^m\mathrm{TF}\square^n$ نشان داده می‌شود که m و n دو عدد طبیعی هستند و تعداد خانه‌های خالی سمت چپ و راست را نشان می‌دهند. در این حالت تنها حرکت مجاز برای دو بازیکن، پریدن است. بنابراین داریم

$$X = \square^m\mathrm{TF}\square^n \quad = \quad \{\square^{m+۱}\mathrm{FT}\square^{n-۱} \mid \square^{m-۱}\mathrm{FT}\square^{n+۱}\}. \qquad (۱.۷)$$

اما پس از پریدن یکی از آنها از روی دیگری، هر دو در نوبت خود یک خانه به جلو می‌روند و حرکت آنها تأثیری بر یکدیگر ندارد. بنابراین می‌توانیم فرض کنیم این وضعیت، مجموع دو وضعیت است که در وضعیت اول فقط یک وزغ و در وضعیت دوم تنها یک قورباغه وجود دارد. در هرکدام از دو وضعیت اخیر یک بازیکن حرکتی ندارد و بازیکن دیگر می‌تواند متوالیاً چند حرکت انجام دهد. لذا ارزش وضعیت اول مثبت و برابر با تعداد خانه‌های سمت راست و ارزش وضعیت دوم منفی و برابر با تعداد خانه‌های سمت چپ است. در نتیجه ارزش این وضعیت برابر است با تعداد خانه‌های سمت راست منهای تعداد خانه‌های سمت چپ.

$$\square^m\mathrm{FT}\square^n = \square^m\mathrm{F} \ + \ \mathrm{T}\square^n = (-m) + n = n - m.$$

بنابراین می‌توانیم ارزش وضعیت X در (۱.۷) را به دست آوریم.

$$x = \{n - m - ۲ \mid n - m + ۲\}.$$

پس اگر در یک وضعیت رو در رو، d تعداد خانه‌های خالی سمت راست منهای خانه‌های خالی سمت چپ باشد، آن‌گاه ارزش آن وضعیت برابر با $\{d-۲ \mid d+۲\}$ است که به کمک قانون سادگی می‌توان مقدار آن را به دست آورد. اگر $d=۰$، آن‌گاه $۰=\{-۲ \mid ۲\}$. اگر $d \geq ۱$، آن‌گاه

$$\{d-۲ \mid d+۲\} = d-۱$$

زیرا $d+۲ \ngeq d-۱ \ngeq d-۲$، اما تنها گزینهٔ $d-۱$، یعنی $d-۲$، در این شرط صدق نمی‌کند. اگر $d<۰$، آن‌گاه

$$\{d-۲ \mid d+۲\} = d+۱$$

زیرا $d+۲ \ngeq d+۱ \ngeq d-۲$ و $\{\ \mid d+۲\} = d+۱$، که $d+۲$ در این شرط صدق نمی‌کند.

حال فرض کنید وزغ در سمت چپ قورباغه باشد و بین آنها c خانهٔ خالی قرار داشته باشد که $c>۰$. با حرکت بازیکن راست در این وضعیت، c یک واحد کم شده و d یک واحد افزایش می‌یابد. تنها حرکت بازیکن چپ نیز باعث کاهش یک واحد در c و یک واحد در d می‌گردد. بنابراین اگر این وضعیت را با $[c,d]$ نشان دهیم، ارزش آن به‌صورت زیر به دست می‌آید.

$$[c,d] = \Big\{[c-۱, d-۱] \ \Big|\ [c-۱, d+۱]\Big\}. \qquad (۲.۷)$$

مثلاً

$$[۱,۰] = \{[۰,-۱] \mid [۰,۱]\} = \{۰ \mid ۰\} = *,$$

یا

$$[۲,-۱] = \{[۱,-۲] \mid [۱,۰]\} = \{-۱ \mid *\} = ۰.$$

طبق آنچه گفته شد برای $c=۰$ و $c=۱$، داریم

$$[0,d] = \{d-2 \mid d+2\} = \begin{cases} d-1 & d \geq 1 \\ 0 & d = 0 \\ d+1 & d \leq -1 \end{cases}$$

$$[1,d] = \{[0,d-1] \mid [0,d+1]\} = \begin{cases} \{d-2 \mid d\} = d-1 & d \geq 2 \\ \{0 \mid 1\} = \frac{1}{2} & d = 1 \\ \{0 \mid 0\} = * & d = 0 \\ \{-1 \mid 0\} = -\frac{1}{2} & d = -1 \\ \{d \mid d+2\} = d+1 & d \leq -2 \end{cases}$$

جدول زیر ارزش وضعیت‌ها با $c = 0, 1, 2, 3$ را نشان می‌دهد.

جدول ۲.۷ ارزش وضعیت‌ها در بازی وزغ و قورباغه.

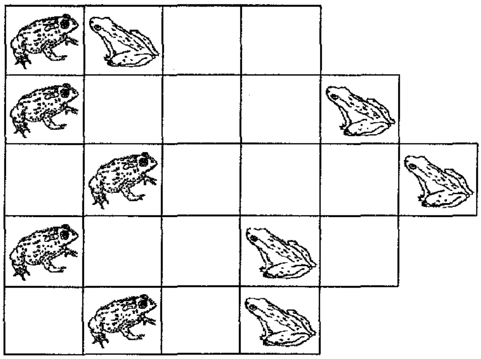
$c \backslash d$	$\cdots$	$-n$	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$	n	$\cdots$
0	$\cdots$	$-n+1$	$\cdots$	-2	-1	0	0	0	1	2	$\cdots$	$n-1$	$\cdots$
1	$\cdots$	$-n+1$	$\cdots$	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$*$	$\frac{1}{2}$	1	2	$\cdots$	$n-1$	$\cdots$
2	$\cdots$	$-n+1$	$\cdots$	-2	-1	0	0	0	1	2	$\cdots$	$n-1$	$\cdots$
3	$\cdots$	$-n+1$	$\cdots$	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$*$	$\frac{1}{2}$	1	2	$\cdots$	$n-1$	$\cdots$

همچنین برای هر c و d، داریم $[c+2,d] = [c,d]$. اثبات این مطلب به راحتی با استقرا روی c، از رابطهٔ (۲.۷) به دست می‌آید. بنابراین ارزش $[c,d]$ برای c زوج، برابر $[0,d]$ و برای c فرد، برابر $[1,d]$ است.

حال می‌توانیم بازی شکل ۱.۷ را تحلیل کنیم. وضعیت‌ها در سطرهای اول تا پنجم به ترتیب $[1,1]$، $[1,-1]$، $[0,2]$، $[0,0]$ و $[1,-1]$ هستند که به ترتیب دارای ارزش‌های $\frac{1}{2}$، $-\frac{1}{2}$، 1، 0 و $-\frac{1}{2}$ می‌باشند. بنابراین ارزش این بازی برابر با $\frac{1}{2} = (-\frac{1}{2}) + 1 + 0 + (-\frac{1}{2}) + \frac{1}{2}$ است که یک عدد مثبت است. بنابراین این یک

وضعیت (N_L, P_R) بوده و بازیکن چپ استراتژی برد دارد. یک استراتژی برد برای بازیکن چپ تبدیل وضعیت [۱, ۱] در سطر اول به وضعیت [۰, ۰] است که باعث می‌شود ارزش بازی صفر شده و بازیکن راست را با یک وضعیت P_R مواجه کند.

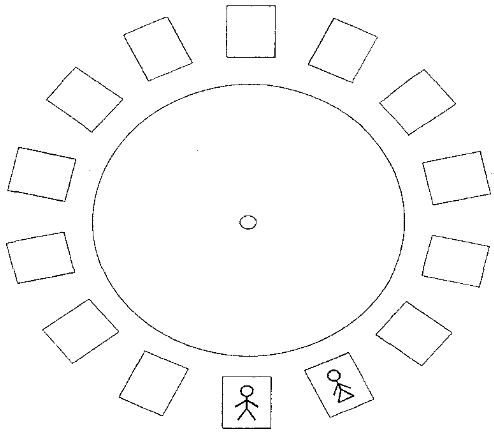
به بازی زیر توجه کنید.



در این بازی ارزش سطرها به ترتیب ۱، *، $-\frac{1}{2}$، ۰ و $-\frac{1}{2}$ است. بنابراین ارزش این بازی * است. از طرفی طبق قضیه ۳.۶، ۰ $\|$ *، پس این یک وضعیت (N_L, N_R) است و نوبت هر بازیکنی که باشد، برنده می‌شود. یک حرکت منجر به برد برای هر دو بازیکن، حرکت در سطر دوم است.

مثال ۶.۷ نشاندن زوج‌ها

یک میز دایره‌ای شکل و چند صندلی دور این میز وجود دارد. بازیکنان در هر نوبت باید یک زوج را روی دو صندلی کنار هم جای دهند. بازیکن چپ باید یک خانم را در سمت چپ همسرش بنشاند و بازیکن راست مجاز است یک خانم را در سمت راست همسرش جای دهد. هیچ مردی نباید کنار خانمی غیر از همسر خود بنشیند. بازیکنی که برای اولین بار نتواند یک زوج را جا دهد، بازنده است. در شکل ۲.۷، ۱۴ صندلی وجود دارد و بازیکن راست یک زوج را روی دو صندلی مجاور قرار داده و اکنون نوبت بازیکن چپ است.



شکل ۲.۷ یک وضعیت در بازی نشاندن زوج‌ها.

بعد از هر حرکت یک بازیکن، صندلی‌ها به چند بخش تقسیم می‌شوند و صندلی‌های بین دو زوج متوالی یک بخش را تشکیل می‌دهند. چون حرکت در یک بخش تأثیری بر بقیهٔ بخش‌ها ندارد و هر حرکت در یکی از بخش‌ها صورت می‌گیرد، می‌توانیم هر بخش را یک بازی گرفته و ارزش آن را جداگانه حساب کنیم. هر بخش یکی از سه نوع زیر است:

LnL نشان‌دهندهٔ یک ردیف از n صندلی خالی بین دو زوج بازیکن چپ،

RnR نشان‌دهندهٔ یک ردیف از n صندلی خالی بین دو زوج بازیکن راست،

LnR یا RnL نشان‌دهندهٔ یک ردیف از n صندلی خالی بین یک زوج از بازیکن چپ و یک زوج از بازیکن راست است.

بنابراین وضعیت شکل ۲.۷ از یک بخش $R۱۲R$ تشکیل شده است. در نمایش فوق، n هر عدد نامنفی می‌تواند باشد؛ فقط طبق قوانین بازی وضعیت‌های $L\circ L$ و $R\circ R$ مجاز نیستند. (چون در این دو حالت یک مرد در کنار زنی غیر از همسر خود قرار می‌گیرد.)

با حرکت یک بازیکن در یک بخش، این بخش به مجموع دو بخش جدید تبدیل می‌شود. اما دقت کنید که یک بازیکن نمی‌تواند دو زوج خود را کنار هم قرار دهد. بنابراین مثلاً در وضعیت $L۴L$ بازیکن چپ تنها یک حرکت به وضعیت $L۱L + L۱L$ دارد و

بازیکن راست سه حرکت به وضعیت‌های $L\circ R + R\text{۲}L$، $L\text{۱}R + R\text{۱}L$ و $L\text{۲}R + R\circ L$ دارد. با توجه به مشاهدات مذکور گزاره‌های زیر به دست می‌آیند. توجه کنید که تساوی $LnR = RnL$ را به راحتی می‌توانید با استقرا روی n ثابت کنید (زیرا $a, b < n$). رابطهٔ $RnR = -LnL$ نیز به راحتی به کمک تعریف قرینه و استقرا روی n قابل اثبات است

$$\begin{aligned} LnL &= \{LaL + LbL \mid LaR + RbL\} \\ RnR &= \{RaL + LbR \mid RaR + RbR\} = -LnL \\ LnR &= \{LaL + LbR \mid LaR + RbR\} = RnL \end{aligned}$$

که a و b اعداد نامنفی هستند که $a + b = n - \text{۲}$، به جز حالت $L\circ L$ و $R \circ R$ که غیرمجاز هستند. به این‌صورت می‌توانیم ارزش وضعیت‌ها را به دست آوریم. به عنوان مثال

$$R\text{۵}R = \left\{ \begin{array}{l|l} R\text{۳}L + L\circ R, & R\text{۲}R + R\text{۱}R, \\ R\text{۲}L + L\text{۱}R, & R\text{۱}R + R\text{۲}R \\ R\text{۱}L + L\text{۲}R, & \\ R\circ L + L\text{۳}R, & \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l|l} * + \circ & \text{۱} + \circ \\ \circ + \circ & \circ + \text{۱} \\ \circ + \circ & \\ \circ + * & \end{array} \right\}$$

بنابراین $R\text{۵}R = \{\circ, * \mid \text{۱}\}$، اما $\frac{\text{۱}}{\text{۲}} = \{\circ, * \mid \text{۱}\}$. زیرا داریم $\text{۱} \not\geq \frac{\text{۱}}{\text{۲}} \not\geq *, \circ$، ولی گزینه‌های $\frac{\text{۱}}{\text{۲}}$ یعنی $\circ$ و ۱ در این رابطه صدق نمی‌کنند.

در جدول ۳.۷ ارزش این وضعیت‌ها برای $\circ \leq n \leq \text{۱۱}$ محاسبه شده‌اند. به عنوان تمرین چند نمونه را اثبات کنید.

در جدول فوق می‌بینیم که برای RnR الگوی $\frac{\text{۱}}{\text{۲}^{\text{۲}k+\text{۱}}}, \frac{\text{۱}}{\text{۲}^{\text{۲}k+\text{۱}}}, *, \frac{\text{۱}}{\text{۲}^{\text{۲}k}}, \frac{\text{۱}}{\text{۲}^{\text{۲}k}}, \circ$ با دورهٔ تناوب ٦ تکرار می‌شود که k از صفر شروع شده و در هر نوبت یکی افزایش می‌یابد. برای LnR نیز الگوی $*, *, *, \circ, \circ, \circ$ با دورهٔ تناوب ٦ تکرار می‌شود. بنابراین

$$\begin{array}{ll} R(\text{٦}k + \text{۱})R = \circ, & R(\text{٦}k)L = R(\text{٦}k + \text{۱})L = R(\text{٦}k + \text{۲})L = \circ, \\ R(\text{٦}k + \text{۲})R = R(\text{٦}k + \text{۳})R = \frac{\text{۱}}{\text{۲}^{\text{۲}k}}, & R(\text{٦}k + \text{۳})L = R(\text{٦}k + \text{۴})L = * \\ R(\text{٦}k + \text{۴})R = *, & R(\text{٦}k + \text{۵})L = *. \\ R(\text{٦}k + \text{۵})R = R(\text{٦}k + \text{٦})R = \frac{\text{۱}}{\text{۲}^{\text{۲}k+\text{۱}}}, & \end{array}$$

جدول ۳.۷ ارزش وضعیت‌ها در بازی نشاندن زوج‌ها.

n\وضعیت	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱
LnL	_	۰	-۱	-۱	$*$	$-\frac{۱}{۲}$	$-\frac{۱}{۲}$	۰	$-\frac{۱}{۴}$	$-\frac{۱}{۴}$	$*$	$-\frac{۱}{۸}$
$LnR = RnL$	۰	۰	۰	$*$	$*$	$*$	۰	۰	۰	$*$	$*$	$*$
RnR	_	۰	۱	۱	$*$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۴}$	$*$	$\frac{۱}{۸}$

همهٔ گزاره‌های فوق به کمک استقرا روی k قابل اثبات هستند. برای مثال دو نمونه را ثابت می‌کنیم.

۱) $R(۶k+۱)R = ۰$

گزینه‌های چپ $R(۶k+۱)R$، به‌صورت $RaL + LbR$ و گزینه‌های راست آن، به‌صورت $RaR + RbR$ هستند که $a + b = ۶k - ۱$. (برای گزینه‌های راست، $a, b \neq ۰$.) بنابراین $\{a, b\}$ می‌توانند به‌صورت‌های زیر باشند:

$$\{۶t, ۶t' + ۵\}, \{۶t + ۱, ۶t' + ۴\}, \{۶t + ۲, ۶t' + ۳\}.$$

در نتیجه طبق فرض استقرا ارزش همهٔ گزینه‌های چپ برابر $* = * + ۰$ است. از طرف دیگر ارزش گزینه‌های راست طبق فرض استقرا به ترتیب به‌صورت‌های زیر هستند:

$$\frac{۱}{۲^{۲t-۱}} + \frac{۱}{۲^{۲t'+۱}}, ۰ + *, \frac{۱}{۲^{۲t}} + \frac{۱}{۲^{۲t'}}.$$

که $*$ کوچک‌ترین آنها است. بنابراین ارزش $R(۶k+۱)R$ با توجه به قانون حذف گزینهٔ مغلوب و قانون سادگی برابر $۰ = \{*|*\}$ است.

۲) $R(۶k+۲)R = \frac{۱}{۲^{۲k}}$

گزینه‌های چپ $R(۶k+۲)R$، به‌صورت $RaL + LbR$ و گزینه‌های راست آن، به‌صورت $RaR + RbR$ هستند که $a + b = ۶k$. (برای گزینه‌های راست، $a, b \neq ۰$.) بنابراین $\{a, b\}$ می‌توانند به‌صورت‌های زیر باشند:

$$\{۶t, ۶t'\}, \{۶t + ۱, ۶t' + ۵\}, \{۶t + ۲, ۶t' + ۴\}, \{۶t + ۳, ۶t' + ۳\}.$$

در نتیجه ارزش گزینه‌های چپ به ترتیب به‌صورت زیر است:

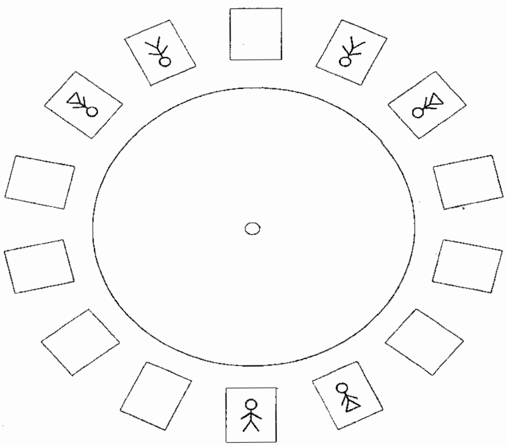
$$۰ + ۰, ۰ + *, ۰ + *, * + *.$$

و ارزش گزینه‌های راست به ترتیب به شکل زیر خواهد بود:

$$\frac{۱}{۲^{۲t-۱}} + \frac{۱}{۲^{۲t'-۱}}, ۰ + \frac{۱}{۲^{۲t'+۱}}, \frac{۱}{۲^{۲t}} + *, \frac{۱}{۲^{۲t}} + \frac{۱}{۲^{۲t'}}.$$

بنابراین در میان گزینه‌های راست، ارزش $R۱R + R(۶k - ۱)R$ از همه کمتر بوده و برابر با $\frac{۱}{۲^{۲k-۱}}$ است. لذا ارزش $R(۶k + ۲)R$ برابر با $\{۰, *|\frac{۱}{۲^{۲k-۱}}\}$ است که با توجه به قانون سادگی برابر با $\frac{۱}{۲^{۲k}}$ می‌باشد.

حال به بازی شکل ۳.۷ توجه کنید.



شکل ۳.۷ یک وضعیت در بازی نشاندن زوج‌ها.

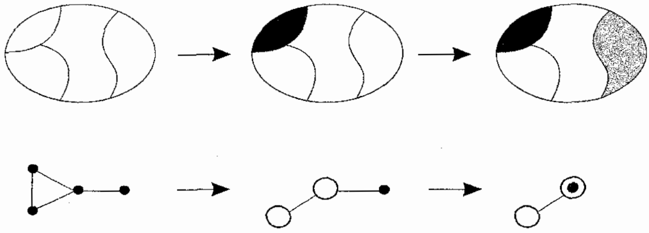
با توجه به مطالب گفته شده، این شکل یک وضعیت $R۳L + L۱R + R۴R$ بوده که ارزش آن برابر $* + ۰ + * = ۰$ است. در نتیجه بنا به نتیجهٔ ۱.۷ بازیکن قبلی برنده خواهد شد و چون در این وضعیت نوبت بازیکن چپ است، بازیکن راست استراتژی برد دارد.

۴.۷ بازی کال (§)

بازی کال توسط کالین واوت[۱] اختراع شد. این بازی روی یک نقشهٔ جغرافی اجرا می‌شود. دو بازیکن در هر نوبت یک کشور را از نقشه انتخاب کرده و رنگ می‌کنند. بازیکن چپ از رنگ سیاه و بازیکن راست از رنگ سفید استفاده می‌کند. طبق قانون بازی، دو کشور با مرز مشترک نباید هم‌رنگ باشند. بازیکنی که در نوبت خود نتواند کشوری را با رنگ مجاز رنگ کند، بازنده است. می‌توانیم یک شکل معادل برای این بازی به دست آوریم که تحلیل آن ساده‌تر است. به ازای هر کشور یک رأس قرار داده و رأس‌های متناظر با کشورهایی که مرز مشترک دارند را به هم وصل می‌کنیم. بدین ترتیب یک گراف ساده به دست می‌آید. سپس بازی را روی این گراف به‌صورت زیر دنبال می‌کنیم. هرگاه بازیکنی کشوری را انتخاب و رنگ کرد، ما رأس متناظر با آن کشور را در گراف حذف می‌کنیم و همه رأس‌های مجاور با آن را با رنگ مخالف نشان می‌کنیم. نشان کردن یک رأس با رنگ سفید (سیاه) به این معنی است که تنها بازیکن راست (چپ) می‌تواند این رأس را رنگ کند. بنابراین هر وضعیت در بازی کال، یک گراف ساده است که بعضی از رأس‌های آن متعلق به بازیکن راست، بعضی متعلق به بازیکن چپ و برخی متعلق به هر دو است، ممکن است رأسی نیز برای هر دو بازیکن غیرمجاز باشد. ما رأس‌های متعلق به بازیکن راست را با ○ ، رأس‌های متعلق به بازیکن چپ را با ● و رأس‌های متعلق به دو بازیکن را با • نشان می‌دهیم. رأس‌هایی که برای هر دو بازیکن غیرمجاز است با ⊙ مشخص می‌شوند. به چنین گرافی یک **گراف کال** می‌گوییم. بنابراین در بازی جدید، یک بازیکن در نوبت خود یک رأس از رأس‌های متعلق به خود را انتخاب و حذف کرده و رأس‌های مجاور آنها را با رنگ مخالف نشان می‌کند.

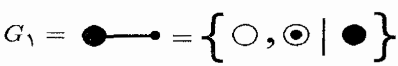
در شکل زیر یک وضعیت کال و یک حرکت بازیکن چپ و به دنبال آن یک حرکت بازیکن راست نشان داده شده است.

[۱] Colin Vout

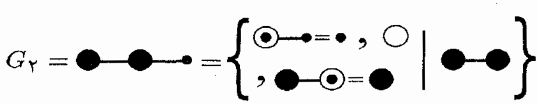


توجه به دو نکته می‌تواند گراف‌های کال را ساده‌تر کند. یکی اینکه می‌توانیم یالی که دو رأس با نشان‌های ○ و ● را به هم وصل می‌کند حذف کنیم، زیرا در این بازی تنها تأثیر یک یال این است که اجازه ندهد رأس‌های انتهایی‌اش هم‌رنگ شوند، اما وقتی دو رأس متعلق به دو بازیکن است این اتفاق هرگز رخ نمی‌دهد. نکتهٔ دوم اینکه می‌توانیم رأس‌های ⊙ را حذف کنیم، زیرا این رأس‌ها تا آخر بازی دست نخورده می‌مانند.

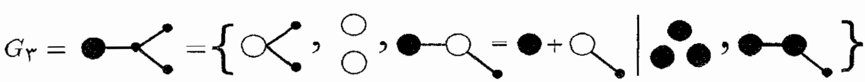
مثال ۷.۷ گراف‌های تک راسی ⊙ ، ○ ، ● و • به ترتیب دارای ارزش‌های ۰، ۱−، ۱ و $*$ هستند. همچنین داریم



بنابراین ارزش $G_۱$ برابر $\frac{۱}{۲} = \{۱ \mid ۰ ,۱-\}$ است. به‌طور مشابه



لذا ارزش $G_۲$ برابر $\{۱ \mid ۱\} = \{۱ \mid ۱ ,۱- ,*\}$ که همان $* + ۱$ است. حال می‌توانیم ارزش وضعیت زیر را به دست آوریم:



بنابراین ارزش $G_۳$ برابر $\{۰, -۲, \frac{۱}{۲} \mid ۳, ۱ + *\}$ است. اما ارزش این عدد طبق قانون سادگی برابر ۱ است. زیرا $-۲, ۰, \frac{۱}{۲} \ngeq ۱ \ngeq ۳, ۱ + *$، در حالی که $۳ \ngeq ۰ \ngeq ۰$ درست نیست.

ریچارد گای و جان کانوی[1] ثابت کرده‌اند که ارزش همهٔ وضعیت‌های بازی کال به‌صورت یک عدد یا جمع یک عدد و $*$ است.

قضیه ۴.۷ الف) فرض کنید $G = \{G^L \mid G^R\}$ یک وضعیت در بازی کال با ارزش $g = \{g^L \mid g^R\}$ باشد. در این‌صورت برای هر g^L و g^R داریم

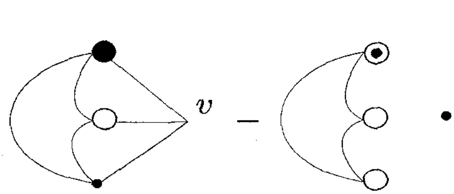
$$g^L + * \leq g \leq g^R + *$$

ب) ارزش هر وضعیت در بازی کال به‌صورت x یا $x + *$، برای یک عدد x است.

برهان. الف) برای اثبات $g^L + * \leq g$، کافی است ثابت کنیم $g - (g^L + *) \geq ۰$. اما چون ارزش وضعیت •، برابر $*$ است، با توجه به نتیجهٔ ۲.۷، کافی است ثابت کنیم $G - (G^L + \bullet)$ یک وضعیت P_R است؛ یعنی یک استراتژی برد برای بازیکن چپ به عنوان بازیکن قبلی وجود دارد.

فرض کنید حرکت G^L برای بازیکن چپ، حذف رأس v در G باشد، بنابراین

$G - (G^L + \bullet) =$



با توجه به اینکه در گراف $-(G^L + \bullet)$ نسبت به گراف $G^L + \bullet$، رأس‌های سفید، سیاه و رأس‌های سیاه، سفید می‌شوند، بازیکن چپ می‌تواند هر حرکت بازیکن راست در یک بازی را عیناً در بازی دیگر انجام دهد. (زیرا هر رأس ○ یا • در G، یک رأس ● یا • در $-(G^L + \bullet)$ است و برعکس.) بنابراین بازیکن چپ برای هر حرکت بازیکن راست یک

[1] R. Guy & J. Conway

جواب دارد و در نتیجه همیشه می‌تواند رأسی را رنگ کند و نهایتاً برنده می‌شود. به‌طور مشابه ثابت می‌شود که $g \leq g^R + *$.

ب) با جمع طرفین نامساوی (الف) با $*$، چون $* + * = 0$، داریم $g^L \leq g + * \leq g^R$. بنابراین برای هر g^L و g^R، $g^L \leq g^R$. حال از استقرا استفاده می‌کنیم. طبق فرض استقرا g^Lها و g^Rها همگی یک عدد یا جمع یک عدد و $*$ هستند. اکنون فرض کنید x بزرگ‌ترین عددی است که g^L برابر x یا $x + *$ است و y را کوچک‌ترین عددی بگیرید که g^R برابر y یا $y + *$ است. (با توجه به متناهی بودن g^Lها و g^Rها این کار امکان‌پذیر است.) اگر $x < y$ آن‌گاه عدد $z = \{x \mid y\}$ را در نظر بگیرید. داریم $x < z < y$، پس $g^L \not\geq z \not\geq g^R$. حال اگر z_0 را ساده‌ترین عددی قرار دهیم که در این خاصیت صدق می‌کند، آن‌گاه طبق قانون سادگی $g = z_0$ و لذا g یک عدد است.

حال فرض کنید $x = y$، در نتیجه g با توجه به قانون حذف گزینهٔ مغلوب، به‌صورت $\{x \mid x\}$ یا $\{x + * \mid x + *\}$ است. (حالت‌های $\{x \mid x + *\}$، $\{x + * \mid x\}$ و ... با توجه به شرط $g^L \leq g^R$ رد می‌شوند.) اما داریم

$$\{x \mid x\} = x + * \qquad \text{قضیه ۳.۶}$$

$$\{x + * \mid x + *\} = x \qquad \text{قانون سادگی}$$

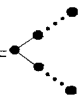
قضیه ۵.۷ اگر در یک وضعیت کال G، یک رأس را با سیاه (سفید) نشان کنیم، ارزش آن وضعیت کم (زیاد) نمی‌شود. (اگر رأسی را به G اضافه کرده و آن را با رنگی نشان کنیم نیز قضیه درست است.)

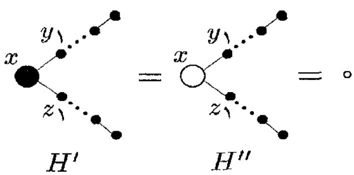
برهان. فرض کنید G یک وضعیت کال باشد و G' از نشان کردن رأس x با سیاه به دست آید. باید ثابت کنیم $g' \geq g$ یا $g' + (-g) \geq 0$. پس کافی است در بازی $G' + (-G)$ یک استراتژی برد برای بازیکن چپ به عنوان بازیکن قبلی ارائه کنیم. اما به ازای هر رأس ○ یا • در G' یا $-G$، یک رأس ● یا • در بازی دیگر وجود دارد. بنابراین همیشه بازیکن چپ می‌تواند عین حرکت بازیکن راست در یک بازی را در بازی دیگر

انجام دهد. حالت دیگر استدلالی مشابه دارد.

در گراف‌های کال ممکن است رأس‌هایی وجود داشته باشند که سیاه کردن یا سفید کردن آنها ارزش گراف را تغییر ندهد. این رأس‌ها را رأس‌های انفجاری می‌گوییم.

تعریف ۲.۷ فرض کنید H یک گراف کال و x یک رأس از H باشد. گراف H' را گرافی قرار دهید که از سفید کردن رأس x در H به دست آید و H'' را گرافی بگیرید که از سیاه کردن رأس x در H حاصل شود. اگر ارزش H' و H'' برابر باشند، آن‌گاه رأس x در H را **انفجاری** می‌گوییم.

مثال ۸.۷ در همهٔ گراف‌های دو شاخه‌ای  $= H$ که تعداد رأس‌های دو شاخه برابر است، داریم



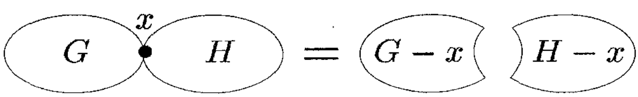
بنابراین رأس x در H انفجاری است.

برای اثبات این موضوع کافی است یک استراتژی برد برای بازیکن قبلی ارائه کنیم. حالتی را در نظر بگیرید که x با سفید نشان شده است و نوبت بازیکن راست است. یک استراتژی برد برای بازیکن چپ ارائه می‌دهیم. (حالات دیگر نیز مشابه است.)

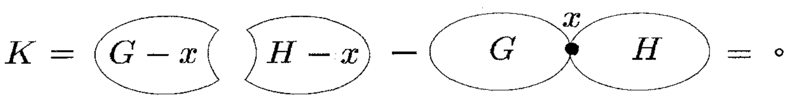
اگر بازیکن راست رأس‌های غیر از x را انتخاب کرد، بازیکن چپ همان حرکت را در شاخه دیگر انجام می‌دهد. اگر بازیکن راست در یک حرکت رأس x را انتخاب کرد، رأس x حذف شده و دو رأس مجاور آن، y_1 و z_1 سیاه می‌شوند. فرض کنید y_k آخرین رأس متصل به y_1 و z_k آخرین رأس متصل به z_1 باشد. هیچ‌کدام از دو رأس y_1 و z_1 سفید نیستند و با توجه به استراتژی بازیکن چپ، رنگ رأس‌های y_k و z_k متفاوت است. بنابراین

طبق تمرین ۴ ارزش وضعیت $z_k \ldots z_1 + y_k \ldots y_1$ مثبت است. همچنین بقیهٔ مسیرهای بالایی قرینهٔ مسیرهای پایینی هستند. در نتیجه ارزش این وضعیت مثبت بوده و طبق نتیجهٔ ۱.۷ بازیکن چپ برنده خواهد شد.

قضیه ۶.۷ اگر در یک وضعیت کال، دو گراف G و H توسط رأس x به هم وصل شده باشند و رأس x در H انفجاری باشد، آن‌گاه در این وضعیت بدون اینکه ارزش تغییر کند می‌توانیم رأس x را حذف کنیم؛ یعنی

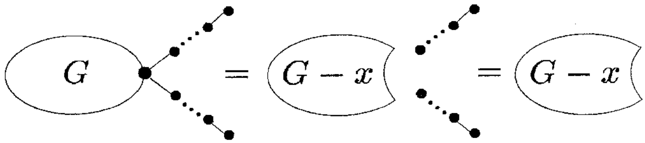


برهان. باید ثابت کنیم



طبق نتیجهٔ ۲.۷ کافی است یک استراتژی برد برای بازیکن قبلی ارائه کنیم. فرض می‌کنیم نوبت بازیکن چپ است و یک استراتژی برد برای بازیکن راست می‌دهیم. در بازی فوق رأس x را به $H - x$ برگردانده و آن را سیاه می‌کنیم. با توجه به قضیهٔ ۵.۷ ارزش بازی جدید کم نمی‌شود، بنابراین اگر بازیکن راست در بازی جدید استراتژی برد داشته باشد، در بازی اصلی نیز دارد. حال نشان سیاه x را حذف و به جای آن نشان سفید قرار می‌دهیم. چون x انفجاری است، ارزش بازی تغییر نمی‌کند. اما در این بازی، بازیکن راست می‌تواند هر حرکت بازیکن چپ در یک طرف را در طرف دیگر انجام دهد. در نتیجه برای هر حرکت او جواب دارد.
با استدلال مشابه می‌توانیم فرض کنیم نوبت بازیکن راست است و یک استراتژی برد برای بازیکن چپ بدهیم.

مثال ۹.۷ با توجه به مثالِ ۸.۷ و قضیهٔ ۶.۷، داریم



در نتیجه همیشه می‌توانیم دو شاخه مساوی را حذف کنیم.

۵.۷ تمرین

۱) جدول زیر نوع بازی مجموع $G+H$ را به فرض معلوم بودن نوع دو بازی G و H نشان می‌دهد. همهٔ حالت‌ها را ثابت کنید. در حالاتی که علامت سؤال قرار دارد با ذکر مثال نشان دهید که در مورد $G+H$ چیزی نمی‌توان گفت.

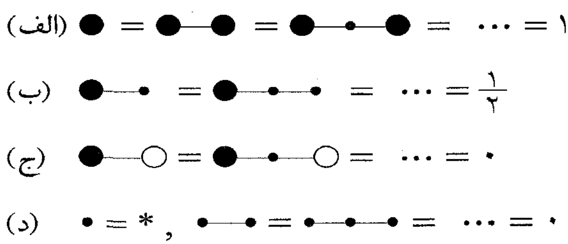
$G\backslash H$	(N_L,P_R)	(P_L,N_R)	(P_L,P_R)	(N_L,N_R)
(N_L,P_R)	(N_L,P_R)			
(P_L,N_R)	?	(P_L,N_R)		
(P_L,P_R)	(N_L,P_R)	(P_L,N_R)	(P_L,P_R)	
(N_L,N_R)	N_L	N_R	(N_L,N_R)	?

۲) در بازی کیک ماندی روی یک کیک $m\times n$، فرض کنید $m=p_1p_2\dots p_l$ و $n=q_1q_2\dots q_r$، تجزیهٔ m و n به عوامل اول باشند به‌طوری که $p_i\le p_{i+1}$ و $q_i\le q_{i+1}$. با استقرای دوگانه روی (l,r) ثابت کنید

$$M(m,n)=\begin{cases} q_{l+2}+q_{l+3}+\cdots+q_r+1 & l<r \\ 0 & l=r \\ -(p_{r+2}+p_{r+3}+\cdots+p_l+1) & l>r \end{cases}$$

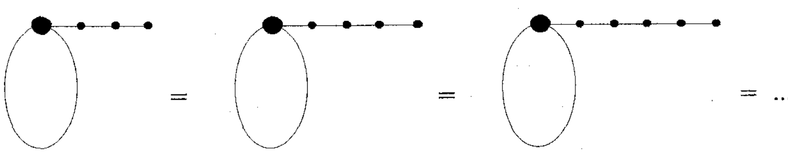
۳) **برش کیک هیکرسون.** این بازی که توسط دیین هیکرسون[۱] معرفی شد، مشابه بازی برش کیک است، با این تفاوت که بازیکن چپ در نوبت خود باید v برش عمودی بزند و بازیکن راست در نوبت خود باید h برش افقی بزند. ثابت کنید ارزش یک کیک $m \times n$ در بازی برش کیک هیکرسون، برابر ارزش یک کیک $\lceil \frac{n}{v} \rceil \times \lceil \frac{m}{h} \rceil$ در بازی برش کیک معمولی است.

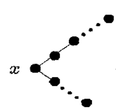
۴) در زیر ارزش همهٔ مسیرها در بازی کال که رأس‌های داخلی آنها نشان نشده، مشخص شده است. همه گزاره‌ها را با استقرا ثابت کنید.



۵) ثابت کنید در گراف کال H که هیچ رأسی از آن نشان نشده است، رأس x انفجاری است اگر و تنها اگر ارزش گراف H'، گرافی که با سیاه کردن x در H به دست می‌آید، برابر ۰ یا $*$ باشد.

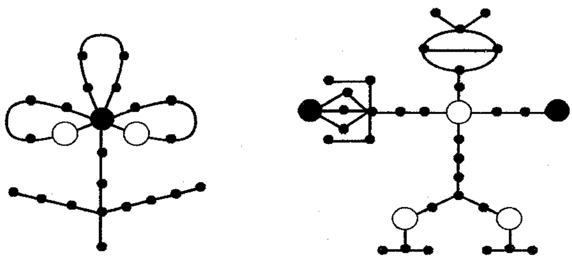
۶) الف) ثابت کنید ارزش همهٔ گراف‌های زیر برابر است.



ب) ثابت کنید در گراف دو شاخه‌ای  که هر شاخه حداقل سه رأس داشته باشد، رأس x انفجاری است.

---
[۱] Dean Hickerson

۷) الف) ثابت کنید در یک دور به طول n که هیچ رأسی از آن نشان نشده، همهٔ رأس‌ها انفجاری هستند.
ب) فرض کنید رأس x در گراف H انفجاری باشد و گراف‌های H' و H'' به ترتیب از سیاه کردن و سفید کردن H به دست آیند. ثابت کنید رأس x در H' و H'' نیز انفجاری است.
ج) ارزش وضعیت‌های کال زیر را به دست آورید و حرکت‌های منجر به برد را بیابید.



۸) **نیمبرها.** نوعی از عددنماها وجود دارند که گزینه‌های چپ و راست آنها یکی است. قرار می‌دهیم $\circ = \{|\} =: *\circ$ و $*n$ را به‌طور بازگشتی به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
۱ &:= \{\circ \mid *\circ\} = \{\circ \mid \circ\} = * \\
۲ &:= \{\circ, *۱ \mid *\circ, *۱\} = \{\circ, * \mid \circ, *\} \\
&\vdots \\
n &:= \{\circ, *۱, \ldots, *n-۱ \mid *\circ, *۱, \ldots, *n-۱\}
\end{aligned}$$

برای هر n نامنفی، عددنمای $*n$ را یک نیمبر می‌گوییم.[۱]

الف) ثابت کنید در یک بازی بی‌طرفانه مقدار SG وضعیت X برابر n است اگر و تنها اگر ارزش X برابر $*n$ باشد.

[۱] دقت کنید که $*n$ یک نماد است، آن را با حاصل‌ضرب $*$ و n اشتباه نگیرید.

ب) ثابت کنید برای دو نیمبر $*n$ و $*m$ داریم، $*n + *m = *l$، که $l = n \oplus m$.
نماد $\oplus$ نشان‌دهنده جمع نیم است (تعریف ۱.۲).

ج) برای هر $n \geq 1$، ثابت کنید $*n$ از هر عدد مثبت کوچک‌تر و از هر عدد منفی بزرگ‌تر است. همچنین $*n$ با صفر مقایسه نمی‌شود.

۹) **اصل پرش مرگ در بازی وزغ و قورباغه.**

الف) در بازی وزغ و قورباغه، یک خانهٔ خالی که دو طرف آن اشغال باشد را یک خانهٔ ایزوله می‌گوییم. همچنین اگر خانهٔ اول یا آخر یک سطر، خالی بوده و یک طرف آن اشغال باشد، آن را خانهٔ ایزوله می‌نامیم. ثابت کنید در بازی وزغ و قورباغه، اگر در یک سطر، همهٔ حرکت‌های مجاز، حرکت پریدن به یک خانهٔ ایزوله باشد، ارزش این سطر صفر است. این اصل، اصل پرش مرگ خوانده می‌شود. (راهنمایی: در این وضعیت یک استراتژی برد برای بازیکن قبلی ارائه دهید.)

ب) با توجه به (الف)، ثابت کنید اگر در یک سطر هیچ‌کدام از حالت‌های T□، □F، TF□□ و □□TF را نداشته باشیم، ارزش این سطر صفر است.

ج) ارزش وضعیت زیر در بازی وزغ و قورباغه را پیدا کنید. در این وضعیت کدام بازیکن برنده می‌شود؟

T	T	F	T	□	F
□	T	F	T	F	□
T	□	T	F	T	F
□	F	F	T	□	□

۱۰) **بازی اسکی پرش.** یک صفحهٔ شطرنجی $m \times n$ وجود دارد و هر بازیکن تعدادی اسکی‌باز دارد که روی برخی از خانه‌ها قرار دارند. هر خانه تنها یک اسکی‌باز را جای می‌دهد. بازیکن چپ در نوبت خود یکی از اسکی‌بازهای خود را انتخاب کرده و آن را به‌صورت افقی به سمت شرق به هر تعداد خانه، تا جایی که اسکی‌باز دیگری در مسیر آن قرار نداشته باشد، حرکت می‌دهد. بازیکن راست مجاز است

همین حرکت را با اسکی‌بازهای خود انجام دهد، ولی حرکت او باید به‌صورت افقی به سمت غرب باشد. حرکت افقی می‌تواند یک اسکی‌باز را از صفحه خارج کند و در این‌صورت این اسکی‌باز دیگر نقشی در ادامه بازی ندارد. اگر یکی از اسکی‌بازهای یک بازیکن، درست در خانهٔ بالای یکی از اسکی‌بازهای رقیب قرار داشته باشد، آن بازیکن به جای حرکت افقی می‌تواند از روی سر اسکی‌باز رقیب پریده و در خانهٔ زیر او بنشیند، به شرطی که این خانه خالی باشد. اسکی‌بازی که پرش از روی او صورت گرفته، در ادامهٔ بازی نمی‌تواند هیچ پرشی انجام دهد.
یک صفحهٔ $n \times ۳$ را در نظر گرفته و فرض کنید بازیکن چپ تنها یک اسکی‌باز در سطر اول و بازیکن راست تنها یک اسکی‌باز در سطر دوم دارد. اسکی‌باز بازیکن چپ را با L و اسکی‌باز بازیکن راست را با R نشان می‌دهیم.

الف) ارزش وضعیت بازی را وقتی اسکی‌باز L در سمت راست اسکی‌باز R قرار دارد، پیدا کنید. همچنین ارزش وضعیت بازی را وقتی اسکی‌باز L درست بالای اسکی‌باز R قرار دارد، بیابید.

ب) فرض کنید اسکی‌باز L در سمت چپ اسکی‌باز R قرار دارد و a خانهٔ خالی در سمت راست L و b خانهٔ خالی در سمت چپ R قرار دارد. یک خط عمودی فرضی در نظر بگیرید که صفحه را از وسط نصف می‌کند. ثابت کنید ارزش این وضعیت برابر $a - b + t$ است که t ارزش پرش نام دارد و به‌صورت زیر محاسبه می‌شود.

(۱) اگر فاصلهٔ L و R تا خط فرضی مساوی بود، آن‌گاه $t = \frac{۱}{۲}$.

(۲) اگر فاصلهٔ L تا خط فرضی کمتر از فاصلهٔ R تا خط فرضی بود، آن‌گاه $t = ۱$.

(۳) اگر فاصلهٔ L تا خط فرضی بیشتر از فاصلهٔ R تا خط فرضی بود، آن‌گاه $t = ۰$.

ج) تحلیل وضعیت‌هایی که بازیکنان بیش از یک اسکی‌باز دارند، مشکل‌تر است. به کمک قسمت‌های (الف) و (ب) ارزش وضعیت‌های زیر و حرکت منجر به

برد در هر کدام را به دست آورید.

	L			L
	R			R

L		L	L	
			R	

L		L		
		R		

L				
		R		
		R		
		L		
	R			

فصل ۸

بازی‌ها و عددنماها

در روشنایی قضیهٔ ۱.۷ و نتیجهٔ ۱.۷ دیدیم که برای تحلیل مجموع چند بازی جانبدارانه کافی است ارزش تک‌تک بازی‌ها را به دست آورده، جمع ارزش‌ها را حساب کرده و نهایتاً حاصل‌جمع را با صفر مقایسه کنیم. بنابراین آسان بودن تحلیل یک بازی، مستلزم وجود روش ساده‌ای برای محاسبهٔ جمع و مقایسهٔ ارزش‌ها در آن بازی است. در فصل قبل بازی‌هایی را دیدیم که ارزش همهٔ وضعیت‌ها در آنها به‌صورت یک عدد یا عددنمای * یا جمعی از این دو است. مقایسه و جمع اعداد را در دبستان فراگرفته‌ایم! و در قضیه ۳.۶ چگونگی مقایسه و جمع * با اعداد را دیدیم. اما در بسیاری از بازی‌های معمولی، عددنماهای پیچیده‌تری ظاهر می‌شوند که کار محاسبهٔ ارزش و تحلیل بازی را مشکل می‌کنند. این بازی‌ها را اصطلاحاً **بازی‌های داغ** می‌گوییم. در این فصل روش‌هایی ارائه می‌کنیم که شما را در غلبه بر مشکلات بازی‌های داغ یاری می‌کنند.

۱.۸ ساده‌سازی عددنماها

تا به حال برای ساده کردن عددها و عددنماها دو روش به نام‌های قانون سادگی و قانون حذف گزینهٔ مغلوب را دیدیم (قضیه‌های ۱.۶ و ۲.۶). در این بخش روش دیگری برای ساده کردن عددنماها ارائه می‌کنیم که قانون عبور از حرکت برگشت‌پذیر نامیده می‌شود. در

ادامه خواهیم دید که قانون حذف گزینهٔ مغلوب و قانون عبور از حرکت برگشت‌پذیر، روشی به دست خواهند داد که برای هر عدد یا عددنما، یک فرم نمایش یکتا پیدا کنیم. مانند گذشته ارزش وضعیت G را با g نشان می‌دهیم.

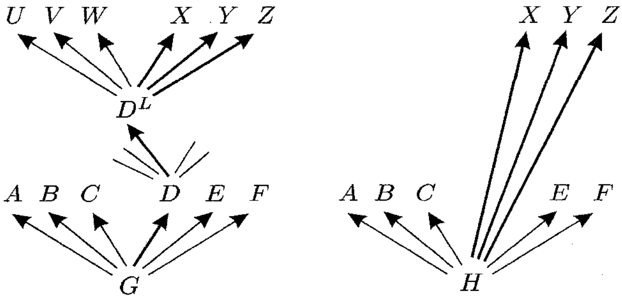
از نتیجهٔ ۱.۷ می‌دانیم که وضعیت‌هایی که ارزش مثبت دارند به نفع بازیکن چپ و وضعیت‌ها با ارزش منفی به نفع بازیکن راست هستند. بنابراین اگر برای دو وضعیت G و H داشته باشیم، $g \geq h$، می‌گوییم وضعیت G برای بازیکن چپ به خوبی وضعیت H است. به همین ترتیب اگر $g \leq h$، می‌گوییم وضعیت G برای بازیکن راست به خوبی وضعیت H است.

وضعیت $G = \{A, B, C, \ldots \mid D, E, F, \ldots\}$ را در نظر بگیرید. فرض کنید وضعیت D، یک گزینهٔ چپ به نام D^L داشته باشد که برای بازیکن چپ به خوبی G باشد؛ یعنی $d^L \geq g$. در این‌صورت اگر بازیکن راست از وضعیت G به وضعیت D برود، بازیکن چپ می‌تواند در نوبت بعد به وضعیت D^L حرکت کند و حرکت بازیکن راست را خنثی کند، زیرا وضعیت D^L برای بازیکن چپ به خوبی وضعیت اولیه G است. در چنین حالتی وضعیت D را یک گزینهٔ برگشت‌پذیر گفته و حرکت بازیکن راست از G به D را یک حرکت برگشت‌پذیر می‌خوانیم.

تعریف ۱.۸ یک گزینهٔ راست وضعیت X، مثل X^R را **گزینهٔ راست برگشت‌پذیر** X می‌گوییم، هرگاه یک گزینهٔ چپ برای X^R، مثل X^{RL} یافت شود که X^{RL} برای بازیکن چپ به خوبی وضعیت X باشد. همچنین یک گزینهٔ چپ وضعیت X، مثل X^L را **گزینهٔ چپ برگشت‌پذیر** X می‌خوانیم، هرگاه یک گزینهٔ راست برای X^L، مثل X^{LR} یافت شود که X^{LR} برای بازیکن راست به خوبی وضعیت X باشد.

وضعیت $G = \{A, B, C, \ldots \mid D, E, F, \ldots\}$ و گزینهٔ راست برگشت‌پذیر آن، D را در نظر بگیرید. فرض کنید D^L برای بازیکن چپ به خوبی وضعیت G است و داریم $D^L = \{U, V, W, \ldots \mid X, Y, Z, \ldots\}$. در این‌صورت اگر بازیکن راست از G به D برود، بازیکن چپ به D^L می‌رود و سپس بازیکن راست می‌تواند به هریک از وضعیت‌های X، Y، Z و ... حرکت کند. بنابراین می‌توانیم گزینهٔ برگشت‌پذیر D را از گزینه‌های راست G حذف کنیم و به جای آن وضعیت‌های X، Y، Z و ... را بگذاریم. در این‌صورت

به بازی $H = \{A, B, C, \ldots \mid X, Y, Z, \ldots, E, F, \ldots\}$ می‌رسیم که ارزشی برابر با G دارد (شکل ۱.۸). به کمک این حقیقت که در قضیهٔ زیر آن را ثابت می‌کنیم، می‌توان عددنماهای پیچیده را ساده‌تر کرد.



شکل ۱.۸ گزینهٔ راست برگشت‌پذیر.

قضیه ۱.۸ (قانون عبور از حرکت برگشت‌پذیر) فرض کنید g یک عدد یا عددنما باشد و g^R یک گزینهٔ راست برگشت‌پذیر g باشد؛ یعنی یک g^{RL} موجود باشد که $g^{RL} \geq g$. آن‌گاه می‌توانیم در گزینه‌های راست g، گزینهٔ g^R را با گزینه‌های راست g^{RL} جایگزین کنیم و مقدار تغییری نمی‌کند.
همچنین اگر g^L یک گزینهٔ چپ برگشت‌پذیر g باشد؛ یعنی یک g^{LR} موجود باشد که $g^{LR} \leq g$. آن‌گاه می‌توانیم در گزینه‌های چپ g، گزینهٔ g^L را با گزینه‌های چپ g^{LR} جایگزین کنیم و مقدار تغییری نمی‌کند.

برهان. فرض کنید $g = \{a, b, c, \ldots \mid d, e, f, \ldots\}$ و d گزینهٔ راست برگشت‌پذیر g باشد؛ یعنی یک d^L موجود باشد که $d^L \geq g$. همچنین فرض کنید

$$d^L = \{u, v, w, \ldots \mid x, y, z, \ldots\}.$$

قرار می‌دهیم $h := \{a, b, c, \ldots \mid x, y, z, \ldots, e, f, \ldots\}$ و ثابت می‌کنیم $g = h$. طبق تعریف ۳.۶، از رابطهٔ $d^L \geq g$، برای هر d^{LR}، داریم $d^{LR} \not\leq g$، و برای هر g^L، داریم $g^L \not\geq d^L$.

برای اثبات $g = h$، کافی است برای هر g^L، g^R، h^L و h^R، روابط زیر را ثابت کنیم.

$$(\text{الف})\ g^L \not\geq h, \quad (\text{ب})\ h^L \not\geq g, \quad (\text{ج})\ g^R \not\leq h, \quad (\text{د})\ h^R \not\leq g.$$

با توجه به اینکه گزینه‌های چپ g و h یکسان است، درستی روابط (الف) و (ب) واضح هستند. همچنین چون هر g^R، غیر از d، یک h^R است و هر h^R غیر از x و y و z و ...، یک g^R است، برای اثبات روابط (ج) و (د)، کافی است ثابت کنیم $d \not\leq h$ و $d^{LR} \not\leq g$. رابطهٔ دوم را که در بالا ثابت کردیم. برای اثبات رابطهٔ $d \not\leq h$ کافی است ثابت کنیم، $d^L \geq h$. این رابطه نیز درست است، زیرا $d^{LR} = h^R \not\leq h$ و $h^L = g^L \not\geq d^L$.

مثال ۱.۸ ساده‌ترین عددنما، $\{\circ \mid \circ\} = *$ است. ساده‌ترین عددنمای بعدی که می‌توان ساخت، عددنمای $\{\circ \mid *\}$ است که آن را با علامت $\uparrow$ نشان می‌دهیم. قرینهٔ $\uparrow$ طبق تعریف برابر $\{* \mid \circ\} = \{-* \mid -\circ\}$ است. این عددنما را با $\downarrow$ نشان می‌دهیم.

$$\uparrow := \{\circ \mid *\}, \ \downarrow := -\uparrow = \{* \mid \circ\}.$$

نماد ۱.۸ عددنماهای $\{\circ \mid *\}$ و $\{* \mid \circ\}$ را به ترتیب با $\uparrow$ و $\downarrow$ نشان می‌دهیم و **عددنماهای بالا و پایین** می‌خوانیم.

ارتباط $\uparrow$ و $\downarrow$ با صفر چیست؟ ادعا می‌کنیم $\uparrow > \circ > \downarrow$. برای اثبات $\uparrow > \circ$، طبق نتیجهٔ ۱.۷، کافی است ثابت کنیم در بازی $\uparrow$، بازیکن چپ استراتژی برد دارد. این موضوع نیز واضح است، زیرا درصورتی که نوبت بازیکن چپ باشد، به گزینهٔ صفر می‌رود و درصورتی که نوبت بازیکن راست باشد، بازیکن راست به گزینه $*$ می‌رود و بازیکن چپ در نوبت بعد به صفر می‌رود و در هر دو حالت برنده می‌شود. پس $\uparrow > \circ$. در نتیجه $\downarrow = -\uparrow < \circ$.

حال آماده‌ایم تا مجموع $\uparrow + *$ را محاسبه کنیم.

$$\uparrow + * = \{\circ + *, \uparrow + \circ \mid * + *, \uparrow + \circ\} = \{*, \uparrow \mid \circ, \uparrow\}.$$

آیا می‌توانیم عددنمای فوق را ساده‌تر کنیم؟ چون $\uparrow > \circ$، در میان گزینه‌های راست عددنمای فوق، $\uparrow$ گزینهٔ مغلوب است و براساس قانون حذف گزینهٔ مغلوب، می‌توانیم $\uparrow$

را از گزینه‌های راست حذف کنیم. پس

$$\uparrow + * = \{*, \uparrow \mid 0\}.$$

حال توجه کنید که در عددنمای فوق، $\uparrow$ یک گزینهٔ چپ برگشت‌پذیر است. زیرا $\uparrow^R = *$ و $* \le \uparrow + *$ (چون $0 \le \uparrow$). بنابراین طبق قضیهٔ عبور از حرکت برگشت‌پذیر، می‌توانیم $\uparrow$ را با $\uparrow^{RL} = *^L = 0$ جایگزین کنیم. در نتیجه

$$\uparrow + * = \{0, * \mid 0\}. \tag{۱.۸}$$

این ساده‌ترین فرم نمایش $\uparrow + *$ است، زیرا در آن هیچ گزینهٔ مغلوب یا برگشت‌پذیر وجود ندارد. به‌طور مشابه داریم

$$\downarrow + * = \{0 \mid 0, *\}.$$

قضیهٔ زیر نشان می‌دهد که برای عدد یا عددنمای x، پس از حذف گزینه‌های مغلوب و برگشت‌پذیر x، ساده‌ترین فرم نمایش آن به دست می‌آید.

قضیه ۲.۸ اگر برای دو عدد یا عددنمای x و y داشته باشیم، $x = y$ و x و y هیچ گزینهٔ مغلوب یا برگشت‌پذیری نداشته باشند، آن‌گاه برای هر گزینهٔ چپ x مثل x^L، یک گزینهٔ چپ y مثل y^L یافت می‌شود که $x^L = y^L$. همین‌طور هر گزینهٔ راست x برابر با یک گزینهٔ راست y است.

برهان. یک گزینهٔ چپ x مثل x^L را در نظر بگیرید. چون $x \le y$، طبق تعریف داریم $y \not\le x^L$. بنابراین طبق تعریف

$$\exists x^{LR} : x^{LR} \le y \le x \quad \text{یا} \quad \exists y^L : x^L \le y^L.$$

چون x^L گزینهٔ چپ برگشت‌پذیر x نیست، حالت اول اتفاق نمی‌افتد. لذا یک گزینهٔ چپ y، مثل y^L وجود دارد که $x^L \le y^L$. از طرف دیگر چون $y \le x$، همهٔ استدلال‌های بالا با تعویض جای y و x، برای y^L نیز برقرار هستند. پس یک گزینهٔ چپ x، مثل $(x^L)'$ وجود دارد که $y^L \le (x^L)'$. در نتیجه

$$x^L \le y^L \le (x^L)'.$$

اما x گزینهٔ چپ مغلوب ندارد، پس $(x^L)'$ همان x^L است؛ در نتیجه $x^L = y^L$. قسمت دوم قضیه نیز با استدلال مشابه ثابت می‌شود.

تعریف ۲.۸ یک عدد یا عددنمای x را **تحویل‌شده** می‌نامیم، هرگاه هیچ گزینهٔ مغلوب یا برگشت‌پذیری نداشته باشد. گوییم $x = \{x^L \mid x^R\}$ یک **فرم متعارفِ** x است، هرگاه x، همهٔ گزینه‌های x، همهٔ گزینه‌های گزینه‌های x و ...، همگی تحویل‌شده باشند.

اگر $x = y$ و x و y هر دو در فرم متعارف باشند، آن‌گاه طبق قضیهٔ ۲.۸، داریم $x \equiv y$؛ یعنی گزینه‌های چپ و راست x و y یکی است.

نتیجه ۱.۸ هر عدد یا عددنمای x یک نمایش یکتا به‌صورت $x = \{x^L \mid x^R\}$ دارد که همان فرم متعارف آن است.

واضح است که $\{0 \mid 0\}$ و $\{0 \mid *\}$ به ترتیب فرم متعارف $*$ و $\uparrow$ هستند. همان‌طور که دیدیم، $\{\uparrow, 0 \mid \uparrow, *\}$ و $\{*, \uparrow \mid 0\}$، هیچ‌کدام فرم متعارف $\uparrow + *$ نیستند و فرم متعارف آن، $\{0, * \mid 0\}$ است.

۲.۸ عددنماهای بالا و پایین

در بخش قبل با عددنماهای جدید $\uparrow$ و $\downarrow$ آشنا شدیم. در این بخش ویژگی‌های اصلی این عددنماها را بررسی می‌کنیم. این عددنماها در ارزش بعضی از بازی‌ها ظاهر می‌شوند. ابتدا مثالی از بازی‌ها با چنین ارزش‌هایی بیان می‌کنیم.

مثال ۲.۸ بازی وزغ و قورباغه که در مثال ۵.۷ بررسی شد را به یاد بیاورید. دیدیم که وقتی در هر سطر تنها یک وزغ و یک قورباغه قرار دارد، ارزش هر سطر برابر یک عدد یا $*$ بود. اما وقتی که تعداد بیشتری وزغ و قورباغه در یک سطر وجود دارد، وضعیت به مراتب پیچیده‌تر می‌شود. اجازه دهید وضعیت‌هایی را در نظر بگیریم که تنها یک خانهٔ

خالی در هر سطر وجود دارد. در چنین بازی‌هایی در هر سطر، هر بازیکن حداکثر یک حرکت دارد.

در تمرین ۹، فصل ۷ قانونی را ثابت کردید که اصل پرش مرگ نام داشت. این قانون وقتی که تنها یک خانهٔ خالی در یک سطر وجود داشته باشد، به‌صورت زیر بیان می‌شود.

اصل پرش مرگ. فرض کنید در هر سطر تنها یک خانهٔ خالی وجود دارد. اگر در یک وضعیت، برای هر دو بازیکن، تنها حرکت قانونی، حرکت پرش باشد، آن‌گاه ارزش این وضعیت صفر است.

با کمک این قانون می‌توانیم محاسبات تعیین ارزش وضعیت‌ها را ساده‌تر کنیم. به عنوان مثال وضعیت زیر در بازی وزغ و قورباغه را در نظر بگیرید.

با توجه به نمادی که در مثال ۵.۷ استفاده کردیم، می‌توانیم وضعیت فوق را با $T\square TFF$ نشان دهیم.

برای پیدا کردن ارزش این وضعیت، گزینهٔ چپ و راست هر وضعیت را به‌صورت یک نمودار درختی می‌کشیم. گزینهٔ چپ را در سمت چپ و گزینهٔ راست را در سمت راست می‌نویسیم. نمودار را تا جایی ادامه می‌دهیم که به یک وضعیت پایانی یا وضعیتی که تنها حرکت قانونی در آن پرش است، برسیم. سپس از پایین به بالا ارزش‌گذاری می‌کنیم.

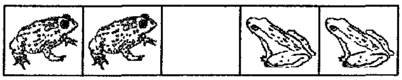
$$
\begin{tikzcd}
 & T\square TFF \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
\underset{\circ}{\square TTFF} & & \underset{*}{TFT\square F} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
 & \underset{\circ}{TF\square TF} & & \underset{\circ}{TFTF\square}
\end{tikzcd}
$$

ارزش دو وضعیت پایین در نمودار درختی به کمک اصل پرش مرگ به دست آمده است. (می‌توانید به عنوان تمرین با ادامه دادن این نمودار درختی، ارزش این وضعیت‌ها را

بدون استفاده از این اصل نیز به دست آورید.) بنابراین داریم $\uparrow = \{0 \mid *\} = \mathrm{T\Box TFF}$.
در قرینهٔ بازی وزغ و قورباغه، جای وزغ و قورباغه عوض شده و هر سطر قرینه می‌شود.
در نتیجه

$$\mathrm{TTF\Box F} = -\mathrm{T\Box TFF} = -\uparrow = \downarrow .$$

حال می‌توانیم ارزش وضعیت زیر را به دست آوریم.



داریم

$$\mathrm{TT\Box FF} = \{\, \mathrm{T\Box TFF} \mid \mathrm{TTF\Box F} \,\} = \{\, \uparrow \mid \downarrow \,\}.$$

آیا می‌توان عددنمای $x = \{\, \uparrow \mid \downarrow \,\}$ را ساده کرد؟ در این عددنما گزینهٔ مغلوبی وجود ندارد. بنابراین باید به دنبال گزینهٔ برگشت‌پذیر بگردیم. گزینهٔ چپ x، $\uparrow$ است و داریم $\uparrow^R = *$. بنابراین برای اثبات برگشت‌پذیر بودن $\uparrow$ باید ثابت کنیم $x \le *$. طبق نتیجهٔ ۲.۷، کافی است در بازی $x - * = x + * = \{\, \uparrow \mid \downarrow \,\} + *$ با شروع از بازیکن راست، یک استراتژی برد برای بازیکن چپ بدهیم. اگر در حرکت اول بازیکن راست، به $x + *^R = x + 0$ برود، بازیکن چپ به $x^L = \uparrow$ می‌رود و برنده می‌شود (چون $\uparrow \ge 0$) و اگر در حرکت اول بازیکن راست، به $x^R + * = \downarrow + *$ برود، بازیکن چپ به $\downarrow^L + * = * + * = 0$ رفته و برنده می‌شود. در نتیجه $x \le *$ و $\uparrow$ گزینهٔ چپ برگشت‌پذیر x است. پس طبق قانون عبور از حرکت برگشت‌پذیر، می‌توانیم $\uparrow$ را با گزینهٔ چپ $\uparrow^R$، یعنی $\uparrow^{RL} = 0$ جایگزین کنیم. به‌طور مشابه ثابت می‌شود که $\downarrow$ گزینهٔ راست برگشت‌پذیر x است. لذا

$$\{\, \uparrow \mid \downarrow \,\} = \{\, 0 \mid \downarrow \,\} = \{\, \uparrow \mid 0 \,\} = \{\, 0 \mid 0 \,\} = *.$$

در نتیجه $\mathrm{TT\Box FF} = *$.

برای تحلیل بازی‌هایی که در آنها عددها و عددنماهای $*$، $\uparrow$ و $\downarrow$ ظاهر می‌شوند، ناگزیر به مقایسه و جمع آنها هستیم. دو قضیهٔ زیر این امر را تسهیل می‌کنند.

قضیه ۳.۸ برای هر عدد مثبت x و هر عدد منفی y، داریم $y < \downarrow < 0 < \uparrow < x$.
درضمن $\uparrow$ و $\downarrow$ با $*$ مقایسه نمی‌شوند؛ یعنی $* \parallel \uparrow$ و $* \parallel \downarrow$.

برهان. رابطهٔ $\downarrow < 0 < \uparrow$ در مثال ۱.۸ ثابت شد. برای اثبات $\uparrow < x$، با توجه به نتیجهٔ ۲.۷، کافی است نشان دهیم بازیکن چپ در بازی $x + (-\uparrow) = x + \downarrow$ استراتژی برد دارد. این مطلب را با استقرا روی سادگی x ثابت می‌کنیم. اگر نوبت بازیکن چپ باشد، آن‌گاه او به گزینهٔ $x + *$ می‌رود و چون $x + * > 0$، برنده می‌شود. اگر نوبت بازیکن راست باشد، آن‌گاه گزینه‌های او $x + 0$ و $x^R + \downarrow$ هستند. داریم $x + 0 = x > 0$ و از طرفی چون x عدد است، داریم $x^R > x > 0$ و لذا طبق فرض استقرا، $x^R + \downarrow > 0$. پس بازهم بازیکن چپ برنده می‌شود. لذا $x + \downarrow > 0$ و $\uparrow < x$. درنتیجه برای هر عدد منفی $y < 0$ داریم، $-y > \uparrow$ و لذا $y < \downarrow$.

رابطهٔ $* \parallel \uparrow$ نیز با توجه به تعریف ۳.۶ واضح است. زیرا داریم $\uparrow \not\leq \uparrow^R = *$ و $\uparrow \leq 0 = *^R$. بنابراین $* = -* \parallel -\uparrow = \downarrow$.

برای سهولت در بیان قضیهٔ بعد، یک نمادگذاری انجام می‌دهیم.

نماد ۲.۸ برای عدد صحیح n، عددنمای $n.\uparrow$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$n.\uparrow := \begin{cases} \overbrace{\uparrow + \cdots + \uparrow}^{n \text{ مرتبه}} & \text{اگر } n > 0 \\ \overbrace{\downarrow + \cdots + \downarrow}^{-n \text{ مرتبه}} & \text{اگر } n < 0 \\ 0 & \text{اگر } n = 0 \end{cases}$$

همچنین $n.\downarrow$ به‌صورت $(-n).\uparrow$ تعریف می‌شود. به خصوص $\uparrow + \uparrow$ و $\downarrow + \downarrow$ را به ترتیب با $\Uparrow$ و $\Downarrow$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۴.۸ برای هر عدد x و عدد صحیح n،

الف) اگر $x > 0$، آن‌گاه $x + n.\uparrow > 0$ و $x + n.\uparrow + * > 0$ و
اگر $x < 0$، آن‌گاه $x + n.\uparrow < 0$ و $x + n.\uparrow + * < 0$.

ب) اگر $n \geq 2$، آن‌گاه $n.\uparrow + * > 0$،
اگر $n \leq -2$ ، آن‌گاه $n.\uparrow + * < 0$ و
اگر $n = -1, 0, 1$، آن‌گاه $n.\uparrow + * \parallel 0$.

برهان. الف) کافی است ثابت کنیم برای هر عدد $x > 0$ و عدد طبیعی n، $n.\uparrow < x$ و $n.\uparrow + * < x$. چون $\frac{1}{n}$ و x دو عدد مثبت هستند، $\frac{1}{n}x$ نیز یک عدد مثبت است و طبق قضیهٔ ۳.۸، $\uparrow < \frac{1}{n}x$. بنابراین

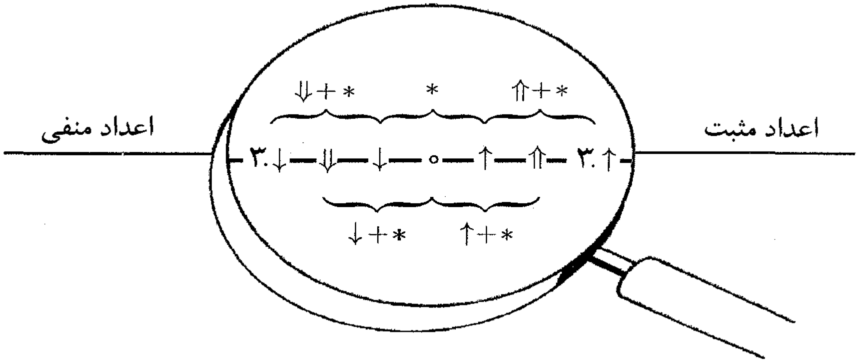
$$n.\uparrow = \overbrace{\uparrow + \cdots + \uparrow}^{n \text{ مرتبه}} < n\,\frac{1}{n}x = x.$$

همچنین چون $\frac{x}{2}$ یک عدد مثبت است، طبق آنچه ثابت کردیم $n.\uparrow < \frac{x}{2}$ و طبق قضیهٔ ۳.۶، $* < \frac{x}{2}$. در نتیجه $n.\uparrow + * < \frac{x}{2} + \frac{x}{2} = x$.

ب) با توجه به رابطهٔ (۱.۸) در مثال ۱.۸، واضح است که $\uparrow + * \parallel 0$. برای اتمام اثبات کافی است ثابت کنیم $\Uparrow + * > 0$. برای این کار ثابت می‌کنیم بازیکن چپ در این بازی استراتژی برد دارد. اگر نوبت بازیکن چپ باشد، آن‌گاه او به وضعیت $\Uparrow + *^L = \Uparrow$ می‌رود که مثبت است. اگر نوبت بازیکن راست باشد، آن‌گاه او تنها می‌تواند به وضعیت $\Uparrow + *^R = \Uparrow$ یا وضعیت $\uparrow + \uparrow^R + * = \uparrow$ برود که هر دو مثبت هستند. بنابراین بازیکن چپ استراتژی برد دارد.

با توجه به آنچه در دو قضیهٔ قبل ثابت شد، اگر با ذره‌بینی به اطراف صفر نگاه کنیم، شکلی شبیه شکل ۲.۸ خواهیم دید. مثلاً $*$ از $\Uparrow$ کمتر و از $\Downarrow$ بیشتر است، اما با 0، $\uparrow$ و $\downarrow$ قابل مقایسه نیست.

عددنماهای $n.\uparrow$ و $n.\uparrow + *$، می‌توانند به عنوان یک معیار میکروسکوپی برای سنجش بزرگی عددنماهای بی‌نهایت کوچک مورد استفاده قرار گیرند. به عنوان مثال فرض کنید می‌خواهیم بدانیم عددنمای $x = \{0 \mid \uparrow\}$ با این سنجش در کجا قرار گرفته است. به راحتی دیده می‌شود که بازیکن چپ در بازی $x = \{0 \mid \uparrow\}$ استراتژی برد دارد، پس $x > 0$. لذا باید x را با یک مقیاس بزرگ‌تر مثلاً $\uparrow + *$ مقایسه کنیم. می‌بینیم که بازیکن چپ، بازی $x - \uparrow - * = \{0 \mid \uparrow\} + \downarrow + *$ را می‌برد، بنابراین $x > \uparrow + *$.



شکل ۲.۸ موقعیت عددنماهای اطراف صفر.

اولین مقیاس بعدی، $\Uparrow + *$ است. اجازه دهید x را با $\Uparrow + *$ مقایسه کنیم. بازی $\Uparrow + * - x = \Uparrow + * + \{\downarrow \mid 0\}$ را در نظر بگیرید. ثابت می‌کنیم در این بازی، بازیکن قبلی استراتژی برد دارد.

اگر بازیکن راست شروع کند، حرکت او به $\uparrow + \{\downarrow \mid 0\}$ یا $\Uparrow + \{\downarrow \mid 0\}$ یا $\Uparrow + *$ می‌انجامد. بازیکن چپ با جواب مناسب به این حرکت به ترتیب به $\uparrow + \downarrow = 0$ یا $\Uparrow + \downarrow = \uparrow$ یا $\Uparrow$ می‌رسد. بنابراین بازیکن چپ می‌برد. حال فرض کنید بازیکن چپ شروع کند. حرکت او به $\uparrow + * - x$ یا $\Uparrow - x$ یا $\uparrow + *$ می‌انجامد و بازیکن راست با جواب مناسب به این حرکت به ترتیب به $-x$ یا $\uparrow + * - x$ یا $* + * = 0$ می‌رسد. اما دیدیم که $-x < 0$ و $\uparrow + * - x < 0$، لذا بازیکن راست می‌برد. در نتیجه بازیکن قبلی در این بازی استراتژی برد دارد و داریم $\Uparrow + * - x = 0$. بنابراین

$$\{0 \mid \uparrow\} = \Uparrow + *.$$

۳.۸ قانون اجتناب از عدد

یک بازی که از مجموع چند بازی تشکیل شده است را در نظر بگیرید. فرض کنید ارزش یکی از بازی‌های مؤلفه برابر عدد x با فرم متعارف $\{x^L \mid x^R\}$ باشد. در این‌صورت داریم

$x^L < x < x^R$. بنابراین با حرکت بازیکن چپ در این بازی مؤلفه، ارزش بازی مجموع کم می‌شود و با حرکت بازیکن راست در این بازی، ارزش بازی مجموع افزایش می‌یابد. در نتیجه هر بازیکن با حرکت در این بازی چیزی از دست می‌دهد. لذا طبیعی است که بازیکنان ترجیح دهند در بازی‌هایی که ارزش عددی دارند، حرکت انجام ندهند، مگر آنکه مجبور به این کار باشند. این حقیقت قانون اجتناب از عدد نام دارد که در قضیهٔ زیر آن را ثابت می‌کنیم.

قضیه ۵.۸ (قانون اجتناب از عدد) فرض کنید ارزش بازی متناهی G، در فرم متعارف، یک عددنما و ارزش بازی متناهی X، در فرم متعارف، یک عدد باشد. اگر بازیکنی از وضعیت $G + X$، یک حرکت منجر به برد داشته باشد، آن‌گاه می‌تواند با یک حرکت در بازی مؤلفهٔ G، بازی $G + X$ را ببرد. ♢

برهان. فرض کنید $g = \{g^L \mid g^R\}$ و $x = \{x^L \mid x^R\}$ به ترتیب فرم متعارف ارزش بازی G و X باشند که g یک عددنما و x یک عدد است. همچنین فرض کنید بازیکن چپ در بازی مجموع $G + X$ حرکت منجر به برد دارد؛ یعنی وضعیت شروع $G + X$، یک وضعیت N_L است. ثابت می‌کنیم یک وضعیت $G^L + X$ وجود دارد که وضعیت P_R است و لذا بازیکن چپ یک حرکت منجر به برد در G دارد. با توجه به قضیهٔ ۳.۷، کافی است فرض کنیم $g + x \not\leq ۰$ و ثابت کنیم یک g^L وجود دارد که $g^L + x \geq ۰$.

چون $g + x \not\leq ۰$، بازیکن چپ یک حرکت منجر به برد دارد و لذا $g^L + x \geq ۰$ یا $g + x^L \geq ۰$. اگر حالت اول اتفاق نیفتد، آن‌گاه برای یک x^L، $g + x^L \geq ۰$. حال دنبالهٔ متناهی زیر از گزینه‌های چپ متوالی x را در نظر بگیرید

$$x > x^L > x^{LL} > x^{LLL} > \cdots$$

و y را کوچک‌ترین عدد در دنبالهٔ فوق قرار دهید که $g + y \geq ۰$. چون g عدد نیست، داریم $g \neq -y$، پس $g + y > ۰$. لذا بازیکن چپ در بازی $g + y$، حرکت منجر به برد دارد. بنابراین $g + y^L \geq ۰$ یا $g^L + y \geq ۰$. با توجه به نحوهٔ انتخاب y، حالت اول اتفاق نمی‌افتد. بنابراین g^L وجود دارد که $g^L + y \geq ۰$. در نتیجه

$$g^L + x \geq g^L + y \geq ۰.$$

اثبات قضیه برای بازیکن راست نیز به‌طور مشابه انجام می‌شود.

قانون اجتناب از عدد، وقتی که مجموعی از چند بازی داریم که برخی از آنها ارزش عددی و برخی ارزش غیرعددی دارند، نیز درست است و یک حرکت بهینه در یکی از بازی‌ها با ارزش غیرعددی وجود دارد. به کمک این قانون می‌توانیم مجموع یک عدد و یک عددنما را محاسبه کنیم. قانون جمع یک عدد و یک عددنما را قانون انتقال می‌گوییم.

قضیه ۶.۸ (قانون انتقال) اگر x یک عدد و g یک عددنما باشد، آن‌گاه $g + x = \{g^L + x \mid g^R + x\}$.

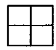
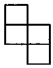
برهان. قرار دهید $h := \{g^L + x \mid g^R + x\}$. ثابت می‌کنیم $g + x \leq h$ و $h \leq g + x$. فرض کنید $g + x \not\leq h$. بنابراین $g - h + x \not\leq 0$ و طبق نتیجهٔ ۲.۷ بازیکن چپ از وضعیت $g - h + x$، حرکت منجر به برد دارد. لذا طبق قانون اجتناب از عدد، حرکت منجر به برد او در بازی g یا بازی $-h$ است. لذا $g^L - h + x \geq 0$ یا $g - h^R + x \geq 0$؛ یعنی $h \leq g^L + x$ یا $h^R = g^R + x \leq g + x$. حالت اول غیرممکن است، زیرا $g^L + x$ یک گزینهٔ چپ h است و حالت دوم نیز غیرممکن است، زیرا $g^R + x$ یک گزینهٔ راست $g + x$ است. تناقض حاصل نشان می‌دهد که $g + x \leq h$. به‌طور مشابه ثابت می‌شود که $h \leq g + x$ و در نتیجه $h = g + x$.

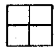
توجه کنید که قضیهٔ فوق تعمیمی از قضیهٔ ۳.۶(ج) است.

۴.۸ برگردان‌ها

دسته‌ای دیگر از عددنماها که در ارزش بسیاری از بازی‌ها ظاهر می‌شوند، عددنماهایی به‌صورت $\{x \mid y\}$ برای دو عدد x و y هستند که $x \geq y$. این عددنماها را برگردان می‌گوییم. این بخش به مطالعهٔ ویژگی‌های مهم برگردان‌ها اختصاص دارد.

تعریف ۳.۸ اگر x و y دو عدد باشند که $x \ge y$، عددنمای $\{x \mid y\}$ را یک برگردان می‌گوییم.

مثال ۳.۸ در مثال ۱.۷ دیدیم که وضعیت‌های  و  به ترتیب دارای ارزش‌های $\{۱ \mid -۱\}$ و $\{۱ \mid ۰\}$ هستند که هر دو برگردان می‌باشند. در مورد وضعیت  داریم

 $= \Big\{$  $+$  $,$  $\Big|$  $\Big\} = \Big\{۲, \{۱ \mid -۱\} \mid -\frac{۱}{۲}\Big\}$

برای ساده‌کردن عددنمای فوق باید بتوانیم ۲ و $\{۱ \mid -۱\}$ را با هم مقایسه کنیم. همان‌طور که در قضیهٔ بعد خواهیم دید $۲ > \{۱ \mid -۱\}$ و در نتیجه با قانون حذف گزینهٔ مغلوب، ارزش وضعیت فوق، $\{۲ \mid -\frac{۱}{۲}\}$ به دست می‌آید که یک برگردان است.

قضیه ۷.۸ فرض کنید $\{x \mid y\}$ یک برگردان و z یک عدد باشد.

الف) اگر $z > x$، آن‌گاه $z > \{x \mid y\}$،

ب) اگر $z < y$، آن‌گاه $z < \{x \mid y\}$،

ج) اگر $y \le z \le x$، آن‌گاه $z \parallel \{x \mid y\}$.

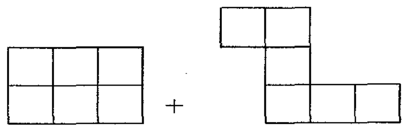
برهان. قرار دهید $w = \{x \mid y\}$.

الف)، داریم $z \not\le x = w^L$ (فرض). از طرف دیگر $y \le x < z < z^R$، پس $y = w^R \le z^R$. لذا $z^R \not\le w$؛ در نتیجه $w \le z$. از سوی دیگر داریم $w \not\ge z$، زیرا $w^R = y \le x < z$، در نتیجه $w < z$.

ب) اگر $z < y$، آن‌گاه $-z > -y$ و از (الف)، $-z > \{-y \mid -x\}$. پس $z < \{x \mid y\}$.

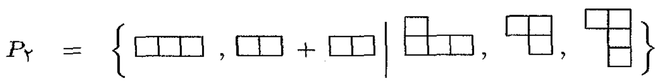
ج) از $w^R = y \le z$، داریم $w \not\ge z$ و از $z \le x = w^L$، داریم $w \not\le z$؛ بنابراین $w \parallel z$.

مثال ۴.۸ بازی دومینو در وضعیت زیر را در نظر بگیرید.



$P_۱$ $P_۲$

در مثال ۳.۸ دیدیم که $P_۱ = \{۲ \mid -\frac{۱}{۲}\}$. اما داریم



$$= \{-۱, -۲ \mid -\frac{۱}{۲}, *, \frac{۱}{۲}\} = \{-۱ \mid -\frac{۱}{۲}\} = -\frac{۳}{۴}.$$

بنابراین بر اساس قانون انتقال (قضیهٔ ۶.۸)، داریم

$$P_۱ + P_۲ = \{۲ \mid -\frac{۱}{۲}\} + (-\frac{۳}{۴}) = \{\frac{۵}{۴} \mid -\frac{۵}{۴}\}.$$

اما با توجه به اینکه $-\frac{۵}{۴} \le ۰ \le \frac{۵}{۴}$، از قضیهٔ ۷.۸، داریم $۰ \parallel \{\frac{۵}{۴} \mid -\frac{۵}{۴}\}$. این نشان می‌دهد که در وضعیت $P_۱ + P_۲$، بازیکن بعدی استراتژی برد دارد.

چگونه می‌توان بازی متشکل از مجموع چند برگردان را بررسی کرد؟ برای این کار ابتدا باید برگردان‌ها را به‌صورت استاندارد بنویسیم.

نماد ۳.۸ برگردان $\{v \mid -v\}$ برای عدد $v \ge ۰$ را یک **برگردان استاندارد** می‌گوییم و با $\pm v$ نشان می‌دهیم.

گزاره ۱.۸ برای هر برگردان $\{x \mid y\}$، داریم $\{x \mid y\} = u + \{v \mid -v\}$ که $u = \frac{۱}{۲}(x+y)$ و $v = \frac{۱}{۲}(x-y)$.

برهان. واضح است که u و v عدد هستند و $v \geq 0$. بنابراین طبق قانون انتقال، داریم $u + \{v \mid -v\} = \{u+v \mid u-v\}$. در نتیجه $u + \{v \mid -v\} = \{x \mid y\}$.

در نتیجه می‌توانیم مجموعی از چند برگردان و چند عدد را به‌صورت زیر بنویسیم.

$$z \pm a_1 \pm a_2 \pm \cdots \pm a_n \tag{۲.۸}$$

بازی فوق را در نظر بگیرید. با توجه به قانون اجتناب از عدد، بازیکنان تا وقتی که برگردانی وجود دارد، حرکت خود را در برگردان‌ها انجام می‌دهند. وقتی بازیکن چپ (یا راست) در یک برگردان $\pm v$، حرکت انجام می‌دهد، آن را به $+v$ (یا $-v$) تبدیل می‌کند. بنابراین در این بازی، بعد از n حرکت متوالی بازیکنان، ارزش همهٔ مؤلفه‌ها یک عدد می‌شود و بسته به اینکه جمع این عددها مثبت یا منفی باشد، بازیکن چپ یا راست برنده می‌شود. (همچنین اگر جمع عددها صفر باشد، آن‌گاه بازیکنی که آخرین برگردان را به عدد تبدیل کرده، برنده است.) در نتیجه می‌توانیم یک بازی معادل با بازی فوق به‌صورت زیر انجام دهیم.

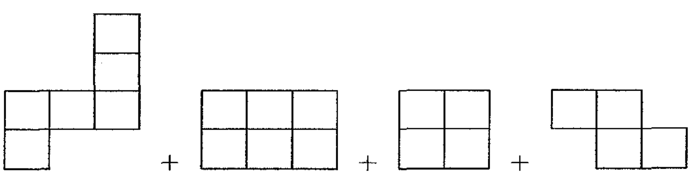
تعداد n برگهٔ چک حامل روی میز قرار گرفته که ارزش آنها به ترتیب a_1، a_2، ... و a_n تومان است. هر بازیکن در هر نوبت یکی از چک‌ها را انتخاب کرده، آن را نقد می‌کند و پول آن را در جیبش می‌گذارد. قبل از شروع بازی درصورتی که $z > 0$، بازیکن چپ مقدار z تومان در جیبش دارد و درصورتی که $z < 0$، بازیکن راست مقدار $-z$ تومان در جیبش دارد. پس از اینکه همهٔ چک‌ها نقد شد، هرکس پول بیشتری در جیبش داشته باشد، برنده است. در ضمن اگر در نهایت پول هر دو مساوی بود، بازیکنی که آخرین چک را نقد کرده، برنده است. طبق آنچه گفتیم این بازی با بازی (۲.۸) معادل است. این بازی را **بازی نقد کردن چک‌ها** می‌نامیم.

اما حرکت بهینه در بازی نقد کردن چک‌ها واضح است. چون بازیکنان به دنبال افزایش موجودی پولشان هستند، هر بازیکن در نوبت خود از بین چک‌های موجود، چکی که بیشترین ارزش را دارد، انتخاب و آن را نقد می‌کند. بنابراین در بازی (۲.۸)، برای بازیکنی که نوبت حرکت اوست، بهترین کار این است که از بین برگردان‌های موجود،

بزرگ‌ترین a_i را برای حرکت خود انتخاب کند. در نتیجه اگر وضعیت (۲.۸) را به گونه‌ای در نظر بگیریم که $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$ و نوبت بازیکن چپ باشد، آن‌گاه با حرکت بهینهٔ بازیکنان، پس از نقد کردن همهٔ چک‌ها، اختلاف موجودی پول دو بازیکن برابر $z + a_1 - a_2 + a_3 - \ldots + (-1)^{n+1}a_n$ خواهد بود و درصورتی که نوبت بازیکن راست باشد، این اختلاف برابر $z - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots + (-1)^n a_n$ است. بسته به اینکه این عدد مثبت یا منفی باشد، برندهٔ این بازی مشخص می‌شود. همچنین اگر این عدد برابر صفر باشد، آن‌گاه بسته به فرد بودن یا زوج بودن n، بازیکن شروع‌کننده یا بازیکن دوم برنده می‌شود.

بنابر آنچه در تحلیل فوق بیان کردیم و براساس گزارهٔ ۱.۸، در بازی مجموع چند برگردان، برای هر دو بازیکن، عامل ترجیح یک برگردان به برگردان دیگر، مقدار $\frac{1}{2}(x-y)$ است. این مقدار را **دمای** یک برگردان می‌گوییم. حرکت بهینه برای هر بازیکن انتخاب برگردانی با بزرگ‌ترین دما و حرکت در آن برگردان است. در نتیجه برای پیدا کردن برنده در مجموع چند برگردان، نیازی به تبدیل آنها به‌صورت استاندارد نیست، بلکه کافی است دمای همهٔ برگردان‌ها را حساب کنیم، سپس از برگردان با بزرگ‌ترین دما شروع کرده و حرکت‌های بهینه بازیکنان را پست سرهم انجام دهیم تا به یک ارزش عددی برسیم.

مثال ۵.۸ بازی دومینو در وضعیت زیر را در نظر بگیرید.



P_1 $\quad$ P_2 $\quad$ P_3 $\quad$ P_4

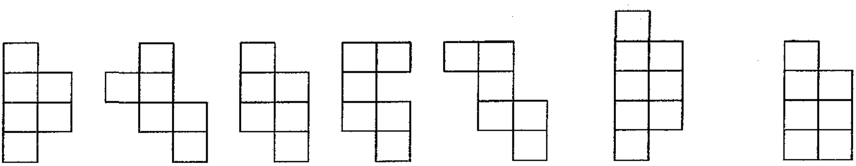
طبق بحث‌های قبلی داریم

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = \frac{3}{4} + \{2 \mid -\frac{1}{2}\} + \{1 \mid -1\} + \{0 \mid -1\}.$$

دمای برگردان‌های $P_۲$، $P_۳$ و $P_۴$ به ترتیب برابر $\frac{۵}{۴}$، ۱ و $\frac{۱}{۲}$ است. بنابراین اگر در وضعیت فوق، نوبت بازیکن چپ باشد، ابتدا در برگردان $P_۲$ که بزرگ‌ترین دما را دارد، حرکت می‌کند. سپس بازیکن راست در برگردان $P_۳$ حرکت کرده و نهایتاً بازیکن چپ برگردان آخر، یعنی $P_۴$ را انتخاب می‌کند. پس از این سه حرکت به عدد $۱\frac{۳}{۴} = ۰ + ۱ - ۲ + \frac{۳}{۴}$ می‌رسیم که عددی مثبت است و لذا بازیکن چپ برنده می‌شود. حال اگر در وضعیت فوق، نوبت بازیکن راست باشد، پس از سه حرکت به عدد $\frac{۱}{۴} = ۱ - ۱ + \frac{۱}{۲} - \frac{۳}{۴}$ می‌رسیم که باز هم عدد مثبتی است. لذا باز هم بازیکن چپ برنده است. درنتیجه وضعیت فوق یک وضعیت مثبت است و بازیکن چپ استراتژی برد دارد.

استراتژی برد حرکت در وضعیتی با بیشترین دماست.

بازی‌های دومینو در وضعیت‌های شکل ۳.۸ را در نظر بگیرید. این وضعیت‌ها برگردان نیستند، ولی همهٔ آنها به‌صورت $\{* + x \mid y\}$، $\{x \mid y + *\}$ و $\{x + * \mid y + *\}$ برای اعداد $x \geq y$ هستند.



$\{۲ \mid *\}$ $\{۱ \mid *\}$ $\{\frac{۱}{۲} \mid *\}$ $\{۱ + * \mid ۰\}$ $\{۱ + * \mid -۱ + *\}$

شکل ۳.۸ ارزش چند وضعیت در بازی دومینو.

فرض کنید یک بازی به‌صورت مجموعی از چند عددنما داریم که هر عددنما به فرم $\{a \mid b\}$ است که a بی‌نهایت نزدیک به یک عدد x باشد، یعنی $a = x + *$ یا $a = x + \uparrow$ یا $a = x + \uparrow + *$ و از این قبیل. همچنین b نیز بی‌نهایت نزدیک به عدد y باشد و $x \geq y$. با توجه به اینکه عددنماهای بی‌نهایت کوچک مثل $*$، $\uparrow$ و $\uparrow + *$، از هر عدد مثبت کوچک‌تر و از هر عدد منفی بزرگ‌تر هستند، روشی که برای تحلیل بازی مجموع برگردان‌ها گفتیم، در مورد این بازی‌ها نیز جواب می‌دهد. در واقع هر بازیکن برای هر عددنمای $\{a \mid b\}$ به‌صورت فوق، دمای آن، $\frac{x-y}{۲}$، را محاسبه کرده و حرکت خود را در

عددنمایی با بیشترین دما انجام می‌دهد. فقط وقتی که دو عددنما با بیشترین دمای مساوی وجود داشته باشد، باید در انتخاب یکی از این دو دقت کافی به عمل آید. مثال بعد این موضوع را روشن می‌کند.

مثال ۶.۸ بازی $\{*\mid-1\}+\{-\frac{1}{2}\mid-1\}+\{0\mid-\frac{1}{4}\}+\{\frac{1}{4}\Vert\downarrow\}+1+*+\uparrow$ را در نظر بگیرید. در جدول زیر دمای هر یک از عددنماها را مشخص کرده‌ایم.

دما	عددنما
$\frac{1}{2}$	$\{*\mid-1\}$
$\frac{1}{4}$	$\{-\frac{1}{2}\mid-1\}$
$\frac{1}{8}$	$\{0\mid-\frac{1}{4}\}$
$\frac{1}{8}$	$\{\frac{1}{4}\Vert\downarrow\}$
0	$1+*=\{1\mid1\}$
0	$\uparrow=\{0\mid*\}$

فرض کنید در این بازی نوبت بازیکن چپ است. بازیکن چپ در حرکت اول بدون هیچ شکی عددنمای $\{*\mid-1\}$ را به $*$ تبدیل می‌کند، زیرا این عددنما بیشترین دما را دارد. در حرکت بعدی نیز بازیکن راست عددنمای $\{-\frac{1}{2}\mid-1\}$ را به -1 تبدیل می‌کند. حال نوبت بازیکن چپ است و دو عددنما با بیشترین دمای مساوی $\frac{1}{8}$ وجود دارد. بازیکن چپ باید در انتخاب یکی از این دو دقت کافی را انجام دهد. اگر او عددنمای $\{0\mid-\frac{1}{4}\}$ را به 0 تبدیل کند، بازیکن راست عددنمای $\{\frac{1}{4}\Vert\downarrow\}$ را به $\downarrow$ تبدیل می‌کند و به وضعیت زیر می‌رسد.

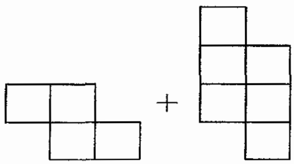
$$*-1+0+\downarrow+1+*+\uparrow=0.$$

چون بازیکن راست به وضعیت صفر رسیده، برنده می‌شود. حال فرض کنید بازیکن چپ در حرکت قبل، عددنمای $\{\frac{1}{4}\Vert\downarrow\}$ را به $\frac{1}{4}$ تبدیل کند، در این‌صورت بازیکن راست عددنمای $\{0\mid-\frac{1}{4}\}$ را به $-\frac{1}{4}$ تبدیل کرده و به وضعیت زیر می‌رسد.

$$*-1+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+*+\uparrow=\uparrow$$

که یک وضعیت مثبت است. لذا بازیکن چپ برنده می‌شود. در نتیجه حرکت بهینه برای بازیکن چپ در حرکت سوم بازی، حرکت در عددنمای $\{\frac{1}{4} \| \downarrow\}$ نه در عددنمای $\{0 \mid -\frac{1}{4}\}$ است. این مطلب را از قبل، بدون محاسبه جمع در دو حالت ممکن، نیز می‌توانستیم تشخیص دهیم زیرا تفاضل $\downarrow - \frac{1}{4}$ کمی بیشتر از $(\frac{-1}{4}) - 0$ است. اما برخی مواقع تنها راه پیدا کردن حرکت بهینه، نوشتن مجموع در همهٔ حالت‌هایی است که دما مساوی است.

به عنوان مثال بازی دومینو زیر را در نظر بگیرید.



ارزش این بازی $\{1 \mid *\} + \{0 \mid -1\}$ است که هر دو مؤلفه دارای دمای $\frac{1}{2}$ هستند. اگر نوبت بازیکن چپ باشد، آن‌گاه با حرکت او در $\{0 \mid -1\}$، در نهایت بازیکن راست به $* = * + 0$ رسیده و می‌بازد. بنابراین $\{0 \mid -1\}$ برای بازیکن چپ به $\{1 \mid *\}$ ترجیح دارد. اما اگر در بازی فوق نوبت بازیکن راست باشد، آن‌گاه با حرکت او در $\{1 \mid *\}$، در نهایت بازیکن چپ به $* = * + 0$ رسیده و می‌بازد. لذا $\{1 \mid *\}$ برای بازیکن راست به $\{0 \mid -1\}$ ترجیح دارد.

۵.۸ تمرین

۱) عددنماهای زیر را در فرم متعارف بنویسید. (اگر یک عددنما نماد مشخصی دارد، از آن نماد استفاده کنید. مثلاً به‌جای $\{0 \mid *\}$ بنویسید $\uparrow$.)

$$\{0, \uparrow \mid \uparrow, \tfrac{1}{2}\}, \quad \{* \mid 0, *\},$$

$$\left\{0, \{2 \mid 0\} \mid \{0 \mid -2\}, \{\tfrac{1}{2} \mid -2\}\right\},$$

$$\{\Uparrow \mid \Uparrow\}, \quad \{\Uparrow \mid \Downarrow\}, \quad \{\Downarrow \mid \Uparrow\}.$$

۲) مثبت، منفی، صفر یا خنثی بودن عددنماهای زیر را تعیین کنید. همچنین آنها را در فرم متعارف بنویسید.

$$\{۱ \mid -۲\} + \{* + \{۱ \mid ۰\} \mid -۱\},$$
$$\frac{۳}{۲} + \{\{۷ \mid -۱\}, ۱ \mid -۵\} + \uparrow.$$

۳) تساوی‌های زیر را به ازای هر دو عدد طبیعی $n, m \geq ۲$ ثابت کنید.

$$\begin{aligned} n.\uparrow &= \{۰ \mid (n-۱).\uparrow + *\}, \\ n.\uparrow + * &= \{۰ \mid (n-۱).\uparrow\}, \\ n.\uparrow + *m &= \{۰ \mid (n-۱).\uparrow + *(m \oplus ۱)\}. \end{aligned}$$

نماد $*m$ یک نیمبر را نشان می‌دهد که در تمرین ۸، فصل ۷ تعریف شده و $\oplus$ نشان دهنده جمع نیم است (تعریف ۲.۱).

۴) می‌گوییم عدد یا عددنمای $g = \{g^L \mid g^R\}$ در عدد یا عددنمای $h = \{h^L \mid h^R\}$ صدق می‌کند، هرگاه برای هر گزینهٔ چپ h، مثل h^L، داشته باشیم $g \not\leq h^L$ و برای هر گزینهٔ راست h، مثل h^R داشته باشیم $h^R \not\leq g$.

الف) فرض کنید g، h و h' سه عدد یا عددنما باشند به‌طوری که $h = h'$ و h و h' هیچ گزینهٔ برگشت‌پذیری ندارند. ثابت کنید g در h صدق می‌کند اگر و تنها اگر g در h' صدق کند.

ب) فرض کنید g و h دو عدد باشند و h گزینهٔ برگشت‌پذیر نداشته باشد. ثابت کنید g در h صدق می‌کند اگر و تنها اگر h ساده‌تر از g باشد.

۵) عددنمای $g := \{۰, ۱, ۲, \ldots \mid ۰, -۱, -۲, \ldots\}$ را در نظر بگیرید. ثابت کنید g عدد نیست، اما $g + ۱ \neq \{g^L + ۱ \mid g^R + ۱\}$. نتیجه بگیرید قضیهٔ اجتناب از عدد وقتی که g نامتناهی است، درست نیست.

۶) ثابت کنید مجموع چند برگردان یک برگردان است.

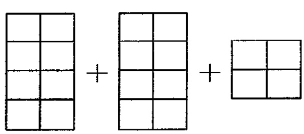
۷) **ریزه و میزه!** برای عدد نامنفی x، عددنمای $\{0 \mid \{0 \mid -x\}\}$ را با $+_x$ نشان داده و x-ریزه می‌خوانیم. همین‌طور قرینهٔ $+_x$ را با $-_x$ نشان داده و x-میزه می‌خوانیم! در واقع $-_x = \{\{x \mid 0\} \mid 0\}$. مثلاً $\uparrow = \{0 \mid \{0 \mid 0\}\} = +_0$.

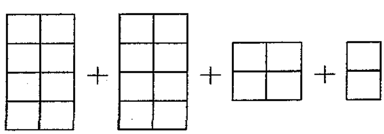
الف) ثابت کنید برای هر عدد نامنفی x، $+_x$ مثبت است. همچنین $+_x$ با افزایش مقدار x به سرعت کاهش می‌یابد؛ یعنی اگر $x > y \geq 0$، آن‌گاه جمع هر تعداد $+_x$ کمتر از $+_y$ است. مثلاً هر مضربی از $+_{\frac{1}{2}}$ از $\uparrow$ کمتر است.

ب) عددنماهای زیر را در فرم متعارف بنویسید.

$$3 + (+_2), \quad (+_2) + (-_2), \quad (+_2) + \uparrow, \quad (+_2) + (+_2)$$

ج) ارزش مجموع بازی‌های دومینوی زیر را در فرم متعارف بنویسید. در هر کدام، بازیکنی که استراتژی برد دارد را تعیین کنید (بازیکن چپ، راست، بعدی یا قبلی).





۸) در بازی وزغ و قورباغه زیر، بهترین حرکت شروع برای هر کدام از بازیکنان را مشخص کنید.

$$\begin{array}{cccccc} \mathrm{F} & \mathrm{T} & \square & \mathrm{F} & \mathrm{F} & \mathrm{F} \\ \mathrm{T} & \square & \mathrm{F} & \square & \mathrm{F} & \mathrm{T} \\ \mathrm{T} & \mathrm{T} & \mathrm{T} & \square & \mathrm{T} & \mathrm{F} \end{array}$$

۹) فرض کنید l و r دو عدد نامنفی باشند و وضعیت $\mathrm{T}^l \,\square\, \mathrm{F}^r$ در بازی وزغ و قورباغه را در نظر بگیرید (l وزغ در سمت چپ، r قورباغه در سمت راست و یک خانهٔ خالی در وسط).

الف) ثابت کنید اگر $r = ۰$ آن‌گاه ارزش این وضعیت برابر l و اگر $r = ۱$ و $l \geq ۱$ آن‌گاه ارزش این وضعیت برابر $\{l - ۲ \mid ۱\} \mid ۰\}\}$ است.

ب) ثابت کنید اگر $l \geq ۲$ و $r \geq ۲$ آن‌گاه ارزش این وضعیت برابر $*$ است. (راهنمایی: در بازی $\mathrm{T}^l \,\square\, \mathrm{F}^r + *$ یک استراتژی برد برای بازیکن قبلی ارائه کنید.)

۱۰) بازی زیر را که با چند دسته مهره انجام می‌شود، در نظر بگیرید. تعدادی از دسته‌ها متعلق به بازیکن چپ، تعدادی متعلق به بازیکن راست و تعدادی خنثی هستند. هر بازیکن در نوبت خود می‌تواند یکی از ۳ حرکت زیر را انجام دهد.

(۱) یکی از دسته‌های متعلق به حریف را خنثی کند.

(۲) یکی از دسته‌های متعلق به خودش را به دو دستهٔ غیرتهی تقسیم کند.

(۳) یکی از دسته‌های خنثی را دور بیاندازد.

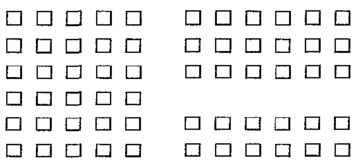
الف) ثابت کنید ارزش یک دستهٔ خنثی برابر $*$ و ارزش یک دستهٔ بازیکن چپ با n مهره برابر $\uparrow n^+$ است که به‌طور بازگشتی به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\begin{aligned} \uparrow ۱^+ &:= \uparrow = \{۰ \mid *\}, \\ \uparrow n^+ &:= \{\uparrow a^+ + \uparrow b^+ : (a+b=n) \mid *\}. \end{aligned}$$

مثلاً $\uparrow ۲^+ := \{\uparrow + \uparrow \mid *\} = \{\Uparrow \mid *\}$. همچنین ارزش یک دستهٔ بازیکن راست با n مهره برابر $\downarrow n^+ := -\uparrow n^+$ است.

ب) ثابت کنید اگر تعداد دسته‌های بازیکن چپ حداقل ۲ تا از تعداد دسته‌های بازیکن راست بیشتر باشد، بازیکن چپ استراتژی برد دارد. همچنین ثابت کنید اگر تعداد دسته‌های بازیکن چپ حداقل یکی بیشتر از تعداد دسته‌های بازیکن راست باشد و نوبت بازیکن چپ باشد، آن‌گاه او استراتژی برد دارد.

۱۱) **بازی باینام.** در این بازی که توسط جیم باینام[1] معرفی شد، چند قطعه کیک به شکل مستطیل روی میز قرار دارد که به قطعه‌های ۱ × ۱ بریده شده است. بازیکن چپ در نوبت خود یکی از قطعه کیک‌ها را انتخاب و یک ردیف عمودی از آن قطعه را می‌خورد. بازیکن راست مجاز است همین حرکت را به‌صورت افقی انجام دهد. شکل زیر وضعیت شروع از یک کیک ۱۲ × ۶ را پس از یک حرکت بازیکن چپ و متعاقب آن یک حرکت بازیکن راست، نشان می‌دهد.



الف) ثابت کنید در این بازی ارزش یک کیک زوج × فرد، مثبت، ارزش یک کیک فرد × زوج، منفی و ارزش یک کیک فرد × فرد برابر * است.

ب) ثابت کنید این بازی با بازی تمرین ۱۰ معادل است و نتیجه بگیرید که ارزش یک کیک $a \times b$ در بازی باینام از جدول زیر به دست می‌آید.

$a = 2m$, $b = 2n$	$a = 2m - 1$، b زوج	a زوج، $b = 2n - 1$	a فرد، b فرد
$\uparrow n^+ + \downarrow m^+ + *$	$\downarrow m^+$	$\uparrow n^+$	$*$

(راهنمایی: به کمک (الف) گزینه‌های مغلوب در یک وضعیت در بازی باینام را حذف کنید، سپس یک تناظر یک به یک بین حرکات بازی جدید و بازی تمرین ۱۰ با تعداد مناسبی دسته و مهره ارائه کنید.)

[1] Jim Bynum

فصل ۹

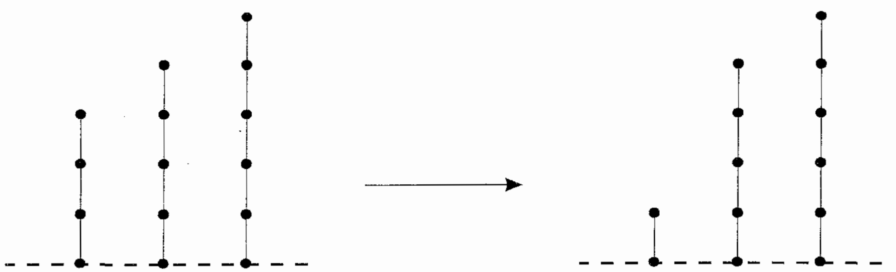
هرس بوته

یک گراف ریشه‌دار، یک گراف غیرجهت‌دار است که در آن، هر یال با یک مسیر به یک رأس ویژه که ریشه یا زمین نامیده می‌شود، متصل است. بازی هرس بوته با هرس‌کردن یال‌هایی از یک گراف ریشه‌دار و حذف قسمت‌هایی از آن گراف که بعد از هرس به زمین وصل نیستند، اجرا می‌شود. در شکل‌های این فصل، زمین به وسیلهٔ یک خط نقطه‌چین نشان داده می‌شود. در این فصل ابتدا نسخهٔ بی‌طرفانه این بازی را بررسی می‌کنیم که در آن هر بازیکن در نوبت خود می‌تواند هر یالی را قطع کند. این نسخه **هرس بوتهٔ سبز** نامیده می‌شود که در آن هر یال به رنگ سبز است. سپس یک نسخهٔ جانبدارانه از این بازی را تحلیل می‌کنیم که به **هرس بوتهٔ آبی—قرمز** معروف است و در آن بعضی از یال‌ها آبی و برخی، قرمز هستند. بازیکن چپ تنها می‌تواند یال‌های آبی را قطع کند و بازیکن راست تنها مجاز به حذف یال‌های قرمز است. در یک نسخهٔ جانبدارانه دیگر از این بازی، تعدادی از یال‌ها، آبی است که تنها در دسترس بازیکن چپ است، تعدادی از یال‌ها قرمز بوده که تنها در دسترس بازیکن راست است و برخی یال‌ها سبز هستند که هر دو بازیکن می‌توانند آنها را قطع کنند. این بازی، **هرس بوتهٔ هاچ—پاچ** خوانده می‌شود. هرس بوتهٔ هاچ—پاچ تنها در چند تمرین آخر فصل بررسی می‌شود. برای مطالعهٔ تفصیلی در مورد این بازی مرجع [۳]، فصل ۷ را ببینید.

۱.۹ هرس بوتهٔ سبز روی ساقه‌های نی

به عنوان یک مقدمه برای بازی هرس بوتهٔ سبز، حالتی را بررسی می‌کنیم که گراف، شامل تعدادی ساقهٔ نی است (مانند شکل ۱.۹). یک حرکت تشکیل شده از هرس‌کردن یکی از یال‌ها و حذف آن یال و همهٔ یال‌های بالای آن که دیگر به زمین وصل نیستند. بازیکنان به نوبت حرکت کرده و آخرین بازیکنی که حرکت می‌کند برنده است. یک ساقهٔ نی با n بند می‌تواند به یک ساقهٔ نی با هر تعداد کمتری بند، از $n-۱$ تا ۰ تبدیل شود. بنابراین یک ساقهٔ نی با n بند، معادل با یک دستهٔ نیم با n مهره است. در نتیجه اجرای بازی هرس بوته روی مجموعه‌ای از ساقه‌های نی معادل با بازی نیم است.

برای مثال گرافی متشکل از سه ساقه در طرف چپ شکل ۱.۹ معادل با بازی نیم با سه دستهٔ ۳، ۴ و ۵ مهره‌ای است. چون $۳ \oplus ۴ \oplus ۵ = ۲$، این یک وضعیت N است که می‌تواند با حذف بند دوم از ساقهٔ سمت چپ و گذاشتن یک بند روی آن، به یک وضعیت P تبدیل شود. وضعیت حاصل در سمت راست دارای مقدار SG صفر بوده و بنابراین یک وضعیت P است.



شکل ۱.۹ یک حرکت در بازی هرس بوتهٔ سبز روی ساقه‌های نی.

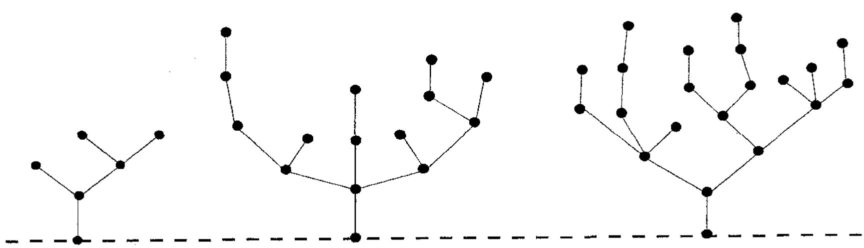
۲.۹ هرس بوتهٔ سبز روی درخت‌ها

در بازی با ساقه‌های نی، هرس بوتهٔ سبز با یک تغییر ظاهرِ تقریباً روشن، همان بازی نیم است. اما اگر ساختارهایی کلی‌تر از این ساقه‌های ساده نی داشته باشیم، چه اتفاقی

می‌افتد؟ فرض کنید گرافی متشکل از سه درخت ریشه‌دار داریم (شکل ۲.۹). یک درخت ریشه‌دار، یک گراف با یک رأس مشخص شده به نام ریشه است، با این ویژگی که از هر رأس یک مسیر یکتا به ریشه وجود دارد و این الزاماً به این معنا است که هیچ دوری وجود ندارد.

در اینجا هم یک حرکت، عبارت است از هرس یکی از یال‌ها و حذف آن یال و هر یالی که به زمین وصل نیست. با توجه به اینکه این بازی، بی‌طرفانه است، نظریهٔ اسپراگ—گراندی (نتیجه ۱.۳) می‌گوید که هر یک از چنین درخت‌هایی معادل با یک دستهٔ نیم یا معادل با یک ساقهٔ نی است. بنابراین کافی است مقادیر SG هریک از درخت‌ها را پیدا کنیم. این کار با استفاده از اصل زیر که اصل کولِن نامیده می‌شود، امکان‌پذیر است. در ادامه صورت کلی این اصل را بیان و اثبات می‌نماییم که عبارت زیر مستقیماً از آن نتیجه می‌شود.

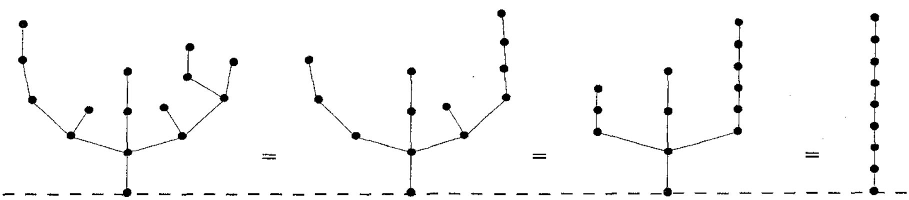
> اصل کولِن. هنگامی که شاخه‌ها در یک رأس به هم می‌رسند، می‌توان کل شاخه‌ها را با یک ساقهٔ بدون شاخه و به طولی برابر جمع نیم طول آن شاخه‌ها، جایگزین کرد.



شکل ۲.۹ هرس بوتهٔ سبز روی درخت‌ها.

اکنون ببینیم چگونه این اصل برای پیدا کردن ساقه‌های نی معادل با درخت سمت چپ در شکل ۲.۹ به کار می‌رود. رأس سمت راست دو شاخه دارد که هر کدام یک یال دارند. جمع نیم ۱ و ۱ برابر صفر است. بنابراین دو شاخه می‌توانند توسط یک ساقه به طول صفر جایگزین شوند. با این کار یک درخت Y—شکل به وجود می‌آید. همین استدلال به کار

می‌رود تا نشان دهیم که دو شاخه Y هم می‌توانند حذف شوند. بنابراین درخت سمت چپ در شکل ۲.۹ معادل با یک دستهٔ نیم تک مهره‌ای است.
این مثال شاید برای هدف روشن شدن موضوع، تا حدی ساده باشد، پس اجازه دهید به دومین درخت در شکل ۲.۹ توجه کنیم. رأس سمت چپ یک انشعاب به دو شاخه به طول‌های ۳ و ۱ دارد. جمع نیم ۳ و ۱ برابر ۲ است، بنابراین این دو شاخه می‌توانند توسط یک شاخه به طول ۲ جایگزین شوند. رأس سمت راست نیز یک انشعاب به دو شاخه به طول‌های ۱ و ۲ دارد که جمع نیم آنها برابر ۳ است. پس این دو شاخه می‌تواند به وسیلهٔ یک شاخه به طول ۳ جایگزین شود. نتیجهٔ این دو تقلیل را در شکل ۳.۹ ببینید. با ادامهٔ همین روش به این نتیجه می‌رسیم که دومین درخت شکل ۲.۹ معادل با یک دستهٔ نیم ۸ مهره‌ای است.



شکل ۳.۹ محاسبهٔ مقدار SG به کمک اصل کولن.

حال برای اینکه مطمئن شوید می‌توانید از اصل کولن برای محاسبهٔ مقدار SG درخت‌های ریشه‌دار استفاده کنید، خود را با درخت سوم در شکل ۲.۹ امتحان کنید. ببینید می‌توانید نشان دهید که این درخت معادل با یک دستهٔ نیم چهار مهره‌ای است.
اکنون می‌توانیم مقدار SG مجموع سه درخت شکل ۲.۹ را محاسبه کنیم، $۱۳ = ۴ \oplus ۸ \oplus ۱$. با توجه به اینکه این مجموع، صفر نیست، این یک وضعیت N بوده و نفر بعدی استراتژی برد دارد. حال مسأله، پیدا کردن حرکت منجر به برد است. واضح است که یک حرکت منجر به برد، استفاده از درخت دوم و قطع برخی یال‌ها برای رسیدن به یک درخت با مقدار SG برابر ۵ است، زیرا $۰ = ۴ \oplus ۵ \oplus ۱$. ولی برای رسیدن به این مقدار کدام یک از یال‌ها باید قطع شوند؟ آخرین درخت از شکل ۳.۹ طولی برابر ۸ دارد،

زیرا سه شاخهٔ درخت قبلی با طول‌های ۳، ۲ و ۶ هستند که جمع نیم آنها ۷ = ۶ ⊕ ۲ ⊕ ۳ است. برای رسیدن به طول ۵ در آخرین درخت، باید یکی از شاخه‌ها را به گونه‌ای تغییر دهیم که به جمع نیم ۴ برسیم. این کار به راحتی با حذف کل شاخهٔ سمت چپ (شاخه با طول ۳) امکان‌پذیر است، زیرا ۴ = ۶ ⊕ ۲. همچنین می‌توانیم یال بالایی شاخهٔ وسطی را هرس کنیم به‌طوری که تنها یک یال داشته باشد، زیرا ۴ = ۶ ⊕ ۱ ⊕ ۳. هر یک از این حرکت‌ها به راحتی به حرکت‌های متناظر روی درخت سمت چپ شکل ۳.۹ بازگردانده شود. یک راه دیگر هم برای تقلیل مقدار SG این درخت به مقدار ۵ وجود دارد. برای این کار از شاخهٔ سمت راست درخت استفاده می‌کنیم. ببینید می‌توانید آن را پیدا کنید.
در روش تقلیل درخت‌های داده شده به یک ساقه نی، ابتدا از بالاترین شاخه شروع می‌کنیم و با به کارگیری اصل کولن به‌طور استقرائی رو به پایین به ریشه می‌رسیم.

اکنون درستی این اصل را در حالت کلی نشان می‌دهیم.

قضیه ۱.۹ (فرم کلی اصل کولن) گراف ریشه‌دار دلخواه G و یک رأس دلخواه مثل x در G را در نظر بگیرید. اگر $H_۱$ و $H_۲$ دو گراف دلخواه با ارزش‌های مساوی و $G_i = G_x : H_i$ گرافی باشد که از اتصال H_i به رأس x از گراف G ساخته می‌شود. آن‌گاه $G_۱$ و $G_۲$ دارای ارزش برابر هستند.

برهان. به مجموع دو بازی $G_۱$ و $G_۲$ طبق شکل ۴.۹ توجه کنید. ادعای تساوی مقادیر SG دو گراف $G_۱$ و $G_۲$ معادل این ادعا است که مقدار SG مجموع دو گراف برابر صفر است. به بیان دیگر، بازی مجموع $G_۱ + G_۲$ یک وضعیت P است.
بنابراین کافی است نشان دهیم در بازی $G_۱ + G_۲$ برای بازیکن دوم استراتژی برد وجود دارد. در اینجا یک استراتژی بیان می‌کنیم که برد را در بازی $G_۱ + G_۲$ درصورتی که بازیکن دوم باشید تضمین می‌کند. اگر بازیکن اول در حرکت خود یکی از یال‌های گراف G در یکی از دو بازی را قطع کند، شما همان یال گراف G را در بازی دیگر قطع کنید. (چنین جفت حرکتی می‌تواند همهٔ $H_۱$ و $H_۲$ را از بازی حذف کند، در غیر این‌صورت $H_۱$ و $H_۲$ هیچ آسیبی نمی‌بینند.) اگر بازیکن اول در حرکت خود یک یال در $H_۱$ یا $H_۲$ را قطع کرد، مقادیر SG برای $H_۱$ و $H_۲$ در وضعیت جدید دیگر مساوی نیستند، بنابراین

یک حرکت در H_1 یا H_2 وجود دارد که مقادیر SG این دو را مساوی می‌کند. این همان حرکتی است که شما باید انجام دهید. با این روش شما همیشه برای هر حرکت رقیب، جوابی دارید. بنابراین شما آخرین حرکت را خواهید کرد و در نتیجه برنده خواهید بود.

شکل ۴.۹ اثبات اصل کولن.

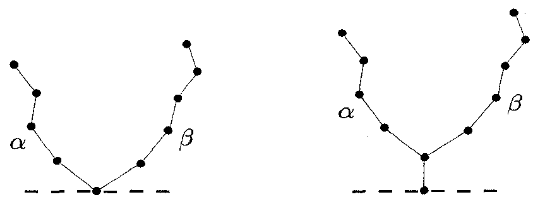
به کمک اصل کولن، بازی هرس بوته سبز روی هر درخت دلخواه به‌طور کامل قابل تحلیل است. قبل از بررسی بازی هرس بوته روی گراف‌های دلخواه، مثالی از یک بازی ارائه می‌کنیم که تعبیری به‌صورت بازی هرس بوته روی یک درخت دارد.

مثال ۱.۹ کیک ماندی بی‌طرفانه

در مثال ۳.۷ با بازی کیک ماندی آشنا شدید. بازی کیک ماندی بی‌طرفانه، نسخهٔ بی‌طرفانه این بازی است که مشابه بازی کیک ماندی اجرا می‌شود با این تفاوت که دو بازیکن مجازند در جهت عمودی یا افقی برش بزنند. بنابراین هر بازیکن در نوبت خود یک قطعه کیک را با برش‌های عمودی یا افقی به تعدادی قطعهٔ مساوی تقسیم می‌کند. با توجه به اینکه بازی بی‌طرفانه است، مقدار SG تعداد زوج قطعهٔ مساوی برابر صفر و مقدار SG تعداد فرد قطعهٔ مساوی برابر مقدار SG یک قطعه از همان اندازه است (زیرا جمع نیم دو عدد مساوی، صفر است). با توجه به این نکته، بازی کیک ماندی بی‌طرفانه روی یک قطعهٔ کیک $m \times n$ را در نظر بگیرید. اگر m و n هیچ‌کدام زوج نباشند (یعنی mn فرد باشد)، آن‌گاه تنها حرکت از این وضعیت رسیدن به یک قطعه کیک $m' \times n$ یا $m \times n'$ است که m' و n' به ترتیب شمارنده‌های m و n هستند که تعداد عوامل اول فرد آنها نسبت به m و n کم شده است. همچنین اگر mn زوج باشد، آن‌گاه علاوه بر حرکت

قبل، می‌توانیم با تقسیم کیک به زوج قسمت مساوی، به وضعیت پایانی برسیم. بنابراین اگر α و β به ترتیب تعداد عوامل اول فرد m و n باشند، یک حرکت در بازی کیک ماندی بی‌طرفانه عبارت است کم کردن α یا β و درصورتی که mn زوج باشد، حرکت به وضعیت پایانی نیز مجاز است.

در نتیجه وضعیت یک کیک $m \times n$، وقتی که mn فرد (یا زوج) است، به ترتیب معادل بازی هرس بوته روی درخت سمت چپ (یا راست) در شکل ۵.۹ است. لذا با توجه به اصل کولن، مقدار SG این وضعیت برای mn فرد برابر $\alpha \oplus \beta$ و برای mn زوج برابر $\alpha \oplus \beta + ۱$ است.

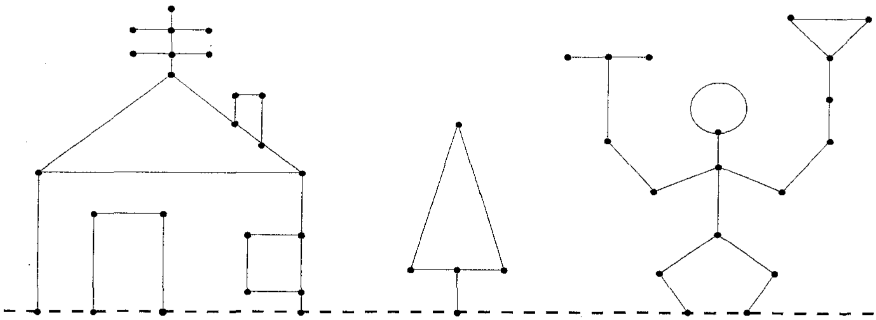


شکل ۵.۹ بازی کیک ماندی بی‌طرفانه.

۳.۹ هرس بوتهٔ سبز روی گراف‌های ریشه‌دار

اکنون بازی هرس بوته روی گراف‌های ریشه‌دار دلخواه را در حالت کلی بررسی می‌کنیم. این گراف‌ها ممکن است دور، طوقه یا چند یال متصل به زمین داشته باشند. به عنوان مثال به گراف‌های شکل ۶.۹ توجه کنید.

از نتیجهٔ ۱.۳ می‌دانیم که هریک از گراف‌ها به‌طور جداگانه، معادل با یک دستهٔ نیم است. برای پیدا کردن اندازهٔ دستهٔ نیم معادل، باید مقدار SG گراف را پیدا کنیم. برای این کار کافی است یک درخت پیدا کنیم که مقدار SG آن برابر با مقدار SG گراف G باشد. این کار با استفاده از اصل هم‌جوشی انجام می‌شود. دو رأس مجاور را با گردآوردن آنها به یک رأس و تبدیل یال واصل آنها به یک طوقه، به هم جوش می‌دهیم. یک طوقه نیز می‌تواند با یک برگ جایگزین شود.



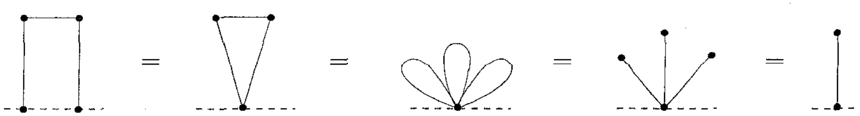
شکل ۶.۹ هرس بوتهٔ سبز روی گراف‌های ریشه‌دار.

قضیه ۲.۹ **(اصل هم‌جوشی.)** در هر گراف ریشه‌دار، رأس‌های روی یک دور می‌توانند بدون تغییر مقدار SG گراف به هم جوش بخورند. ◈

اثبات اصل هم‌جوشی طولانی‌تر از اثبات اصل کولن است. برای دیدن برهان می‌توانید به فصل ۷ از کتاب [۳] و برای یک اثبات دیگر به فصل ۱۵ از کتاب [۶] مراجعه کنید.

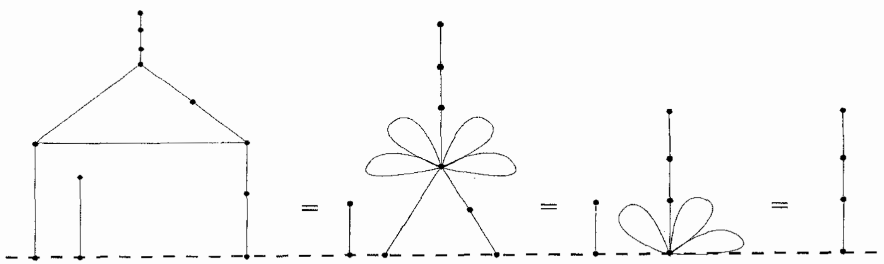
اصل هم‌جوشی به ما اجازه می‌دهد تا یک گراف ریشه‌دار دلخواه را به یک درخت معادل تقلیل دهیم که آن نیز می‌تواند به کمک اصل کولن به یک دستهٔ نیم تقلیل یابد. اجازه دهید ببینیم این اصل چگونه در مثال شکل ۶.۹ به کار برده می‌شود.

به درب خانه در سمت چپ شکل توجه کنید. دو رأس مربوط به زمین در اصل یک رأس هستند، (به یاد آورید که زمین در حقیقت یک رأس است) بنابراین درب خانه معادل مثلثی است که یکی از رأس‌های آن زمین است. اصل هم‌جوشی می‌گوید که این مثلث با یک رأسِ دارای سه طوقه معادل است. هر طوقه نیز با یک برگ یعنی یک دستهٔ نیم یک مهره‌ای معادل است که جمع نیم آنها برابر یک دستهٔ نیم یک مهره‌ای است.



نتیجه ۱.۹ در بازی هرس بوتهٔ سبز، یک دور با تعداد فرد یال، با یک یال تنها و یک دور با تعداد زوج یال، با یک رأس تنها معادل است.

به عنوان مثال، دوری با چهار یال درگراف کاج شکل ۶.۹ با توجه به اصل هم‌جوشی به یک رأس با چهار یال تقلیل می‌یابد که خود با یک رأس تنها معادل است. پس مقدار SG گراف کاج برابر ۱ است. به‌طور مشابه دودکش خانه به یک رأس تنها تبدیل می‌شود. با ادامهٔ کار به این نتیجه می‌رسیم که مقدار SG خانه برابر ۳ است.
اکنون ببینید می‌توانید نشان دهید که مقدار SG آدمکِ شکل ۶.۹ برابر ۵ است؟ درنهایت در بازی هرس مجموع گراف‌های شکل ۶.۹، مقدار SG برابر ۷ = ۵ ⊕ ۱ ⊕ ۳ است که یک وضعیت N می‌باشد. یک حرکت منجر به برد تغییر مقدار SG آدمک به ۲ است، زیرا ۰ = ۲ ⊕ ۱ ⊕ ۳. این هدف با قطع دو دست و سر آدمک حاصل می‌شود! یک نمونهٔ دیگر از چگونگی استفاده از اصل هم‌جوشی برای محاسبهٔ مقدار SG گراف‌ها در شکل ۷.۹ نشان داده شده است.



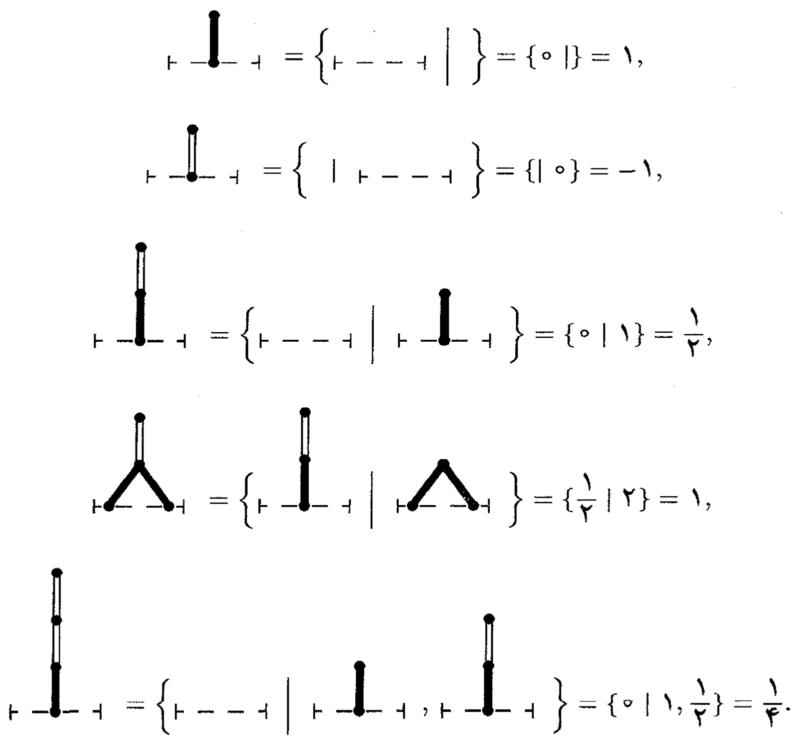
شکل ۷.۹ محاسبهٔ مقدار SG به کمک اصل هم‌جوشی.

۴.۹ هرس بوتهٔ آبی—قرمز

هرس بوتهٔ آبی—قرمز یک نسخهٔ جانبدارانه از بازی هرس بوته است که در آن هر یال با رنگ آبی یا قرمز رنگ شده است. بازیکن چپ تنها می‌تواند یال‌های آبی را هرس کند و بازیکن راست مجاز است یال‌های قرمز را قطع نماید. بقیهٔ قوانین مانند هرس بوتهٔ سبز

است و اولین نفری که یالی برای قطع کردن نداشته باشد، بازنده است. در یک نسخهٔ جانبدارانهٔ دیگر از بازی هرس بوته که هرس بوتهٔ هاچ—پاچ نام دارد، علاوه بر یال‌های آبی و قرمز، یال‌های سبز نیز وجود دارند که هرس آنها برای هر دو بازیکن مجاز است. برای دیدن چند نمونه از بازی هرس بوتهٔ هاچ—پاچ تمرین‌های ۹ و ۱۰ و برای مطالعهٔ تفصیلی این بازی فصل ۷ از [۳] را ببینید. در ادامهٔ این فصل به مطالعهٔ بازی هرس بوتهٔ آبی—قرمز می‌پردازیم. در شکل‌های این فصل، یال‌های آبی در یک گراف را با خط سیاه و یال‌های قرمز را با خط سفید نشان می‌دهیم.

مثال ۲.۹ در شکل زیر ارزش چند وضعیت ساده مشخص شده است.



همان‌طور که احتمالاً حدس زده‌اید هرس بوتهٔ آبی—قرمز یک ویژگی شاخص دارد. ارزش همهٔ وضعیت‌ها در این بازی یک عدد است. این موضوع را در قضیهٔ زیر ثابت می‌کنیم. منظور از ارزش گراف G، ارزش بازی هرس بوتهٔ آبی—قرمز روی گراف G است. طبق معمول ارزش گراف G را با g نشان می‌دهیم.

قضیه ۳.۹ الف) در گراف G، با حذف یک یال آبی (قرمز) ارزش G اکیداً کاهش (افزایش) می‌یابد؛ یعنی برای هر G^L، داریم $g^L < g$ و برای هر G^R، داریم $g < g^R$.
ب) ارزش هر گراف G با یال‌های آبی و قرمز، یک عدد گویای دودویی است.

برهان. الف) فرض کنید با هرس یال آبی e از گراف G، زیرگراف H از آن حذف شده و گراف G^L به دست بیاید. باید ثابت کنیم $g - g^L > ۰$ یا به‌طور معادل یک استراتژی برد برای بازیکن چپ در بازی $G + (-G^L)$ ارائه دهیم.
اگر بازیکن چپ شروع کنندهٔ بازی باشد، در حرکت اول یال e را هرس می‌کند. در نتیجه گراف $G^L + (-G^L)$ به دست می‌آید و در ادامه بازیکن چپ می‌تواند حرکات بازیکن راست در یک گراف را در گراف دیگر تقلید کرده و در نهایت برنده شود. حال فرض کنید بازیکن راست شروع کننده است. اگر او یک حرکت در $(-G^L)$ یا $G - H$ انجام دهد، بازیکن چپ می‌تواند همان حرکت را در گراف دیگر تقلید کند. (با این‌گونه حرکات یا H دست‌نخورده می‌ماند یا کل H حذف می‌شود.) اولین باری که بازیکن راست یک حرکت در H انجام داد، بازیکن چپ در جواب یال e را حذف می‌کند و در نتیجه کل H حذف خواهد شد. با این استراتژی، بازیکن چپ همیشه برای هر حرکت بازیکن راست یک جواب دارد و در نهایت برنده خواهد شد.
با استدلال مشابه می‌توانیم نامساوی $g - g^R < ۰$ را ثابت کنیم.
ب) از استقرا کمک می‌گیریم. با توجه به فرض استقرا، ارزش بازی‌های ساده‌تر، g^Lها و g^Rها عدد هستند. از طرف دیگر طبق (الف)، برای هر g^L و g^R، $g^L < g^R$. بنابراین g طبق تعریف یک عدد است. از طرف دیگر با توجه به اینکه G یک گراف متناهی است، مجموعهٔ گزینه‌های چپ و راست G، یعنی L و R متناهی هستند. اگر l بزرگ‌ترین عضو L و r کوچک‌ترین عضو R باشد، طبق قانون حذف گزینهٔ مغلوب، $g = \{l \mid r\}$. اما طبق فرض استقرا l و r اعداد گویای دودویی هستند، لذا با توجه به تمرین ۵ فصل ۶، p نیز

یک عدد گویای دودویی است.

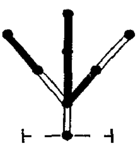
در قضیهٔ فوق دیدیم که ارزش هر وضعیت هرس بوتهٔ آبی—قرمز یک عدد گویای دودویی است. اما پیدا کردن مقدار این عدد در حالت کلی کار ساده‌ای نیست. در ادامه روش‌هایی برای محاسبهٔ ارزش برخی وضعیت‌های هرس آبی—قرمز ارائه می‌دهیم. آن‌گاه می‌توانیم به کمک این روش‌ها و اصل کولن یک نظریهٔ کامل دربارهٔ بازی هرس بوتهٔ آبی—قرمز روی درخت‌ها به دست آوریم و ارزش بسیاری از گراف‌های دیگر را نیز محاسبه کنیم.

قضیه ۴.۹ (اصل کولن در هرس بوتهٔ آبی—قرمز.) گراف ثابت و دلخواه G و یک رأس x در G را در نظر بگیرید. اگر $H_۱$ و $H_۲$ دو گراف دلخواه با ارزش‌های مساوی و $G_i = G_x : H_i$ گرافی باشد که از اتصال H_i به رأس x در G ساخته می‌شود. آن‌گاه $G_۱$ و $G_۲$ دارای ارزش برابر هستند.

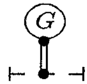
اثبات اصل کولن در هرس بوتهٔ آبی—قرمز کاملاً مشابه اثبات اصل کولن در هرس بوتهٔ سبز است (تمرین ۳).

۵.۹ هرس بوتهٔ آبی—قرمز روی درخت‌ها

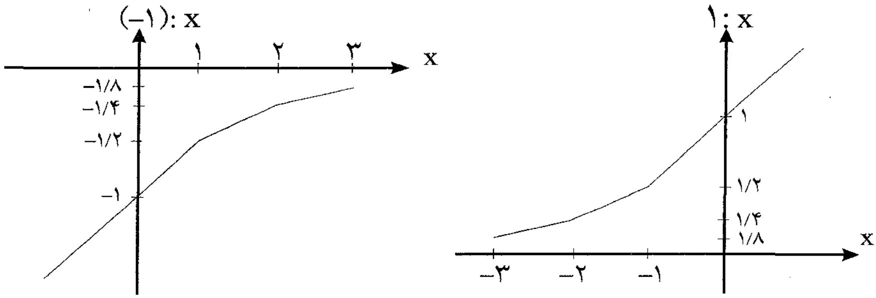
به درخت شکل زیر توجه کنید.



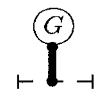
در چنین وضعیتی که چند شاخه در یک رأس به هم رسیده‌اند، با توجه به اینکه حرکت در یکی از شاخه‌ها تأثیری بر شاخهٔ دیگر ندارد، برای محاسبهٔ ارزش مجموع این شاخه‌ها، کافی است ارزش هر یک از شاخه‌ها را به دست آورده و جمع آنها را محاسبه کنیم. به کمک این نکته و قضیهٔ زیر می‌توانیم ارزش همهٔ درخت‌ها را به دست آوریم.

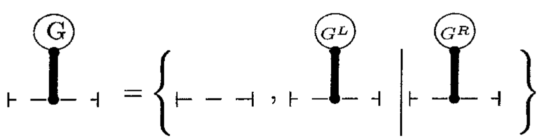
قضیه ۵.۹ اگر گراف  یک وضعیت هرس بوتهٔ آبی—قرمز با ارزش x باشد، ارزش گراف  را با $x : ۱$ نشان می‌دهیم و داریم $۱ : x = \frac{x+n}{۲^{n-۱}}$، که n کوچک‌ترین عدد طبیعی است که $x + n \geq ۱$. علاوه بر این ارزش گراف  را با $x : (-۱)$ نشان می‌دهیم و داریم $(-۱) : x = \frac{x-n}{۲^{n-۱}}$، که n کوچک‌ترین عدد طبیعی است که $x - n \leq -۱$. ♦

نمودار زیر مقادیر $x : ۱$ و $x : (-۱)$ را برحسب x نشان می‌دهد.



شکل ۸.۹ نمودار مقادیر $x : ۱$ و $x : (-۱)$ برحسب x.

برهان. در وضعیت  بازیکن چپ می‌تواند یال پایینی را هرس کرده و کل گراف را حذف کند و یا حرکتی در G انجام دهد. بازیکن راست نیز تنها می‌تواند یک حرکت در G انجام دهد. بنابراین



در نتیجه

$$(۱ : x) = \{۰, (۱ : x^L) \mid (۱ : x^R)\}$$

واضح است که اگر $x = ۰$، آن‌گاه $(x : ۱) = ۱$. همچنین در این حالت $n = ۱$ و لذا قضیه برای $x = ۰$ درست است. با توجه به قانون حذف گزینهٔ مغلوب، x^L را بزرگ‌ترین عضو L و x^R را کوچک‌ترین عضو R در نظر گرفته و بقیهٔ گزینه‌ها را حذف می‌کنیم. حال فرض می‌کنیم قضیه برای x^L و x^R درست است و قضیه را برای x در سه حالت زیر ثابت می‌کنیم.

الف) $x > ۰$. بنابراین $x \not\leq ۰$ و درنتیجه $x^L \geq ۰$. همچنین $x^R \geq x \geq ۰$، پس طبق فرض استقرا داریم

$$۱ : x^L = x^L + ۱,$$
$$۱ : x^R = x^R + ۱.$$

درنتیجه $(۱ : x) = \{۰, x^L + ۱ \mid x^R + ۱\}$. اما با توجه به تمرین ۷ (ج) فصل ٦، داریم $x - x^L \leq ۱$؛ یعنی $۰ \leq x \leq x^L + ۱$. لذا طبق قانون حذف گزینهٔ مغلوب،

$$(۱ : x) = \{x^L + ۱ \mid x^R + ۱\} = \{x, x^L + ۱ \mid x^R + ۱\} = x + ۱.$$

ب) $x = -k$، برای یک عدد طبیعی k. بنابراین $x = \{\ \mid -(k - ۱)\}$ و طبق فرض استقرا

$$(۱ : x) = \{۰ \mid ۱ : (-k + ۱)\} = \{۰ \mid \frac{۱}{۲^{k-۱}}\} = \frac{۱}{۲^k}.$$

ج) $-(k + ۱) < x < -k$، برای یک عدد صحیح نامنفی k. بنابراین داریم $-k \not\geq x \not\geq -(k + ۱)$. درنتیجه $-(k + ۱) \leq x^L < x < x^R \leq -k$ و طبق فرض استقرا

$$(۱ : x^L) = \frac{x^L + n}{۲^{n-۱}},$$
$$(۱ : x^R) = \frac{x^R + n}{۲^{n-۱}}.$$

که $n = k + ۲$.

از طرف دیگر $x+n=\{x+(n-۱), x^L+n \mid x^R+n\}=\{x^L+n \mid x^R+n\}$ (زیرا $x \leq x^L+۱$). در نتیجه طبق تعریف ضرب

$$\begin{aligned}\frac{x+n}{۲^{n-۱}} &= \{\frac{x^L+n}{۲^{n-۱}}+\circ-\circ, \frac{x^R+n}{۲^{n-۱}}+\frac{x+n}{۲^{n-۲}}-\frac{x^R+n}{۲^{n-۲}} \mid \\ &\quad \frac{x^L+n}{۲^{n-۱}}+\frac{x+n}{۲^{n-۲}}-\frac{x^L+n}{۲^{n-۲}}, \frac{x^R+n}{۲^{n-۱}}+\circ-\circ\} \\ &= \{\frac{x^L+n}{۲^{n-۱}}, \frac{۲x-x^R+n}{۲^{n-۱}} \mid \frac{x^R+n}{۲^{n-۱}}, \frac{۲x-x^L+n}{۲^{n-۱}}\}.\end{aligned}$$

اما چون x یک عدد گویای دودویی است، مثلاً $x=\frac{۲k+۱}{۲^m}$، با توجه به تمرین ۵ (الف) فصل ٦ $x=\{\frac{k}{۲^{m-۱}} \mid \frac{k+۱}{۲^{m-۱}}\}$؛ بنابراین $x=\frac{x^L+x^R}{۲}$. در نتیجه

$$\frac{x+n}{۲^{n-۱}} = \{\frac{x^L+n}{۲^{n-۱}} \mid \frac{x^R+n}{۲^{n-۱}}\}$$

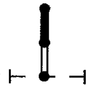
و لذا

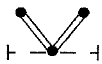
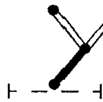
$$(۱:x)=\frac{x+n}{۲^{n-۱}}.$$

وضعیت دیگر نیز با توجه به آنچه در بالا ثابت شد و تعریف قرینه، ثابت می‌شود.

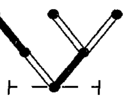
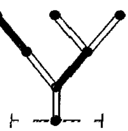
اجازه دهید ببینیم با این روش چگونه می‌توانیم ارزش درخت سمت راست شکل ۹.۹ را به دست آوریم.

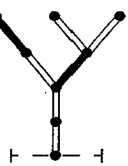
شکل ۹.۹ هرس بوتهٔ آبی—قرمز روی درخت‌ها.

از شاخهٔ سمت چپ شروع می‌کنیم. ارزش  برابر ۱ است، بنابراین ارزش شاخهٔ سمت چپ، ، طبق قضیهٔ ۵.۹ برابر $\frac{-۱}{۲} = \frac{۱-۲}{۲^۱}$ است. از طرف دیگر برای شاخهٔ سمت راست داریم

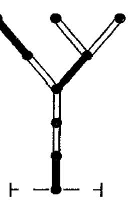
 $= -۲ \longrightarrow$  $= \frac{-۲+۳}{۲^۲} = \frac{۱}{۴}.$

بنابراین ارزش دو شاخه در مجموع برابر $\frac{-۱}{۴} = \frac{۱}{۴} + \frac{-۱}{۲}$ است. با ادامهٔ روند فوق داریم

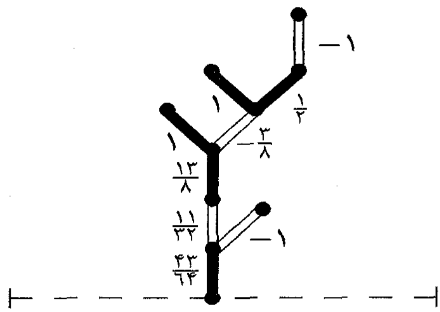
 $= \frac{-۱}{۴} \longrightarrow$  $= \frac{-۱}{۴} - ۱ = \frac{-۵}{۴}$

$\longrightarrow$  $= \frac{-۵}{۴} - ۱ = \frac{-۹}{۴}.$

و در نهایت

 $= \frac{\frac{-۹}{۴}+۴}{۲^۳} = \frac{۷}{۳۲}.$

به عنوان یک نمونهٔ دیگر ارزش درخت سمت چپ در شکل ۹.۹ برابر $\frac{۴۳}{۶۴}$ است.



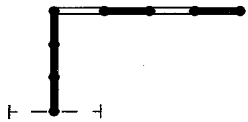
۶.۹ ساقه‌های نی و قانون برلَکمپ

به کمک روش بخش قبل می‌توانیم ارزش همهٔ درخت‌ها را در هرس بوتهٔ آبی—قرمز به دست آوریم. اما در مورد ارزش ساقه‌های نی که یک دنبالهٔ متوالی از یال‌های آبی و قرمز هستند، روش سادهٔ دیگری نیز وجود دارد که به **قانون برلکمپ**[۱] معروف است. در این روش از پایین به بالا حرکت کرده و به ازای هر یال آبی، علامت + و به ازای هر یال قرمز علامت − قرار می‌دهیم. در نتیجه یک رشتهٔ متوالی از علامت‌های مثبت و منفی به دست می‌آوریم. سپس اولین دو علامت متفاوت متوالی از چپ به راست را با پرانتز جدا می‌کنیم. اگر رشته با علامت + شروع شود، ارزش مثبت است و درصورتی که رشته با علامت − شروع شود، ارزش منفی است. تعداد + های (− های) قبل از پرانتز قسمت صحیح ارزش را به دست می‌دهد. برای پیدا کردن قسمت اعشاری ارزش، در قسمت بعد از پرانتز در حالتی که عدد مثبت است، به ازای هر +، ۱ و به ازای هر −، ۰ قرار می‌دهیم و در حالتی که عدد منفی است، به ازای هر −، ۱ و به ازای هر +، ۰ می‌گذاریم. در نهایت نیز یک ۱ به انتهای دنبالهٔ صفر و یک‌ها اضافه می‌کنیم. عدد به دست آمده قسمت اعشاری عدد را در مبنای ۲ به دست می‌دهد [۳].

---

[۱] Berlekamp

به عنوان مثال ساقهٔ زیر به رشته $+++-+-+$ تبدیل می‌شود.



بنابراین ارزش این ساقه برابر است با

$$\begin{array}{cccl} ++ & (+-) & +-+ & \\ ۲ & / & ۱۰۱۱ & = ۲+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۱۶} = ۲\frac{۱۱}{۱۶}. \end{array}$$

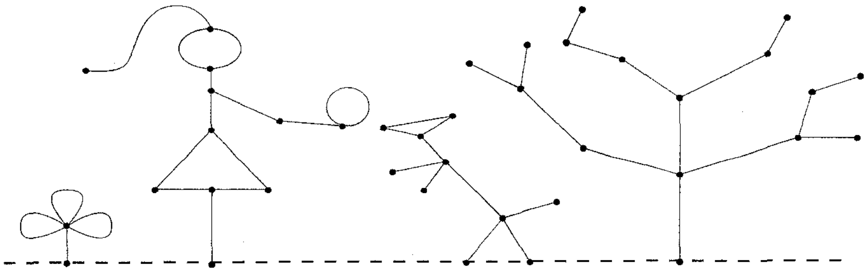
برای نمونه در زیر ارزش چند وضعیت ساقهٔ نی را به دست می‌آوریم.

$$++- \quad , \quad ++++-+-- \quad , \quad ---+-+ \quad , \quad -+-$$

$\begin{array}{cccl} + & (+-) & & \\ ۱ & / & ۱ & = ۱\frac{۱}{۲} \end{array}$
$\begin{array}{cccl} +++ & (+-) & +-- & \\ ۳ & / & ۱۰۰۱ & = ۳\frac{۹}{۱۶} \end{array}$
$\begin{array}{cccl} -- & (-+) & -+ & \\ -۲ & / & ۱۰۱ & = -۲\frac{۵}{۸} \end{array}$
$\begin{array}{cccl} & (-+) & - & \\ -۰ & / & ۱۱ & = -\frac{۳}{۴} \end{array}$

۷.۹ تمرین

۱) مقادیر SG گراف‌های شکل زیر را بیابید و در صورت وجود یک حرکت منجر به برد را معرفی کنید.



۲) **کیک ماندی چند بعدی.** بازی کیک ماندی چند بعدی، مشابه بازی کیک ماندی، اما روی یک قطعه کیک $x+y+z$ بعدی اجرا می‌شود که برش در بعدهای ۱ تا x تنها برای بازیکن چپ مجاز است و برش در بعدهای $x+1$ تا $x+y$ تنها برای بازیکن راست ممکن است. هر دو بازیکن مجاز هستند در بعدهای $x+y+1$ تا $x+y+z$ برش انجام دهند. این بازی را روی یک قطعه کیک از اندازه زیر در نظر بگیرید:

$$l_1 \times \ldots \times l_x \times r_1 \times \ldots \times r_y \times s_1 \times \ldots \times s_z.$$

فرض کنید α_i تعداد عوامل اول فرد s_i باشد و ثابت کنید ارزش این بازی برابر

$$s_1 \ldots s_z \, M(l_1 \ldots l_x, r_1 \ldots r_y) + *\mu$$

است که $M(m,n)$ تابع ارزش بازی کیک ماندی روی کیک $m \times n$ است که در مثال ۳.۷ معرفی شد و $\mu = \alpha_1 \oplus \cdots \oplus \alpha_z$، هرگاه $s_1 \ldots s_z$ فرد باشد و $\mu = \alpha_1 \oplus \cdots \oplus \alpha_z + 1$، هرگاه $s_1 \ldots s_z$ زوج باشد.[1]

۳) اصل کولن را برای بازی‌های هرس بوتهٔ آبی—قرمز و هرس بوتهٔ هاچ—پاچ ثابت کنید.

۴) فرض کنید G و H دو بازی ترکیبیاتی باشند. **جمع اردینال** G و H، بازی‌ای است که با $G : H$ نشان داده شده و به‌طور بازگشتی به‌صورت زیر تعریف می‌شود

[1] نماد $*\mu$ نشان‌دهنده یک نیمبر است که در تمرین ۸، فصل ۷ تعریف شد.

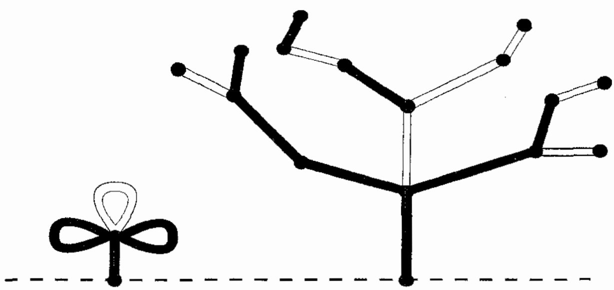
$$G : H := \{G^L, G : H^L \mid G^R, G : H^R\}.$$

در واقع در این بازی، هر حرکت در G، باعث حذف کل بازی H می‌شود و هر حرکت در H، بازی G را بدون تغییر می‌گذارد.

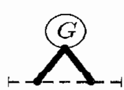
الف) ثابت کنید اگر ارزش دو بازی H و H' برابر باشد، آن‌گاه ارزش $G : H$ و $G : H'$ نیز برابر است. در نتیجه ارزش $G : H$ تنها به ارزش H بستگی دارد و نه فرم آن.

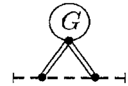
ب) مثالی از دو بازی هم ارزش G و G' ارائه کنید که ارزش $G : H$ و $G' : H$ مساوی نباشد.

۵) ارزش بازی هرس بوتهٔ آبی—قرمز در شکل زیر را به دست آورید.

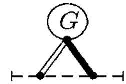


۶) ثابت کنید اگر گراف  یک وضعیت هرس بوتهٔ آبی—قرمز با ارزش x باشد، آن‌گاه

الف) ارزش گراف  برابر $\frac{x+n}{۲n-۱}$ است که n کوچک‌ترین عدد طبیعی است که $x + n \geq ۲$.

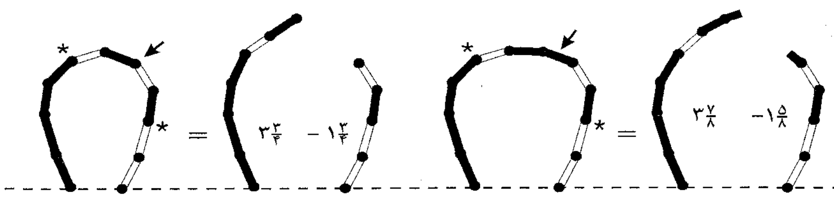
ب) ارزش گراف 

برابر $\frac{x-n}{۲n-۱}$ است که n کوچک‌ترین عدد طبیعی است که $x - n \leq -۲$.

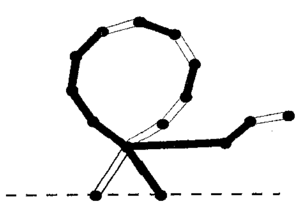
ج) ارزش گراف 

برابر $\frac{x-n}{۲n-۱}$ است که n کوچک‌ترین عدد طبیعی است که $x - n \leq -۲$.

۷) بازی هرس بوتهٔ آبی—قرمز را روی دوری که زمین را به خودش وصل می‌کند در نظر بگیرید. اولین رأسی که رنگ یال آن تغییر کرده را از سمت چپ و راست جهت علامت می‌گذاریم (این رأس‌ها در شکل زیر با $\star$ مشخص شده‌اند). سپس دور را از رأس وسط یا از نصف یال وسط در مسیر بین این دو نقطه می‌بریم. با احتساب هر یال نصفه به عنوان یک یال تمام، دو ساقهٔ نی به دست می‌آید. نشان دهید که ارزش بازی روی این دور برابر مجموع ارزش دو ساقهٔ نی حاصل است. به عنوان مثال در شکل زیر داریم



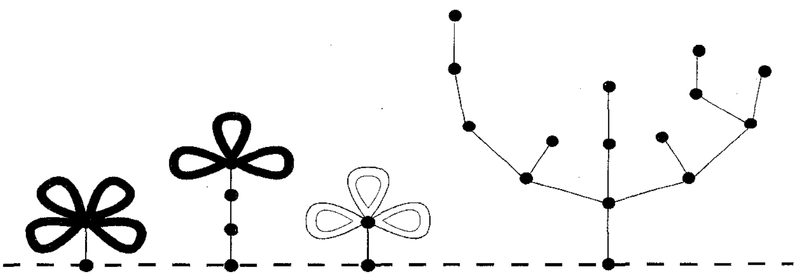
۸) ارزش بازی هرس بوتهٔ آبی—قرمز در شکل زیر را به دست آورید.



۹) بازی هرس بوتهٔ هاچ—پاچ روی گرافی که از تعدادی گل و چند درخت سبز تشکیل شده را در نظر بگیرید. ساقهٔ گل‌ها سبز و گلبرگ‌ها به رنگ قرمز و آبی هستند. این گراف را یک **باغ گل** می‌نامیم.

الف) به کمک اصل کولن ثابت کنید ارزش هر باغ گل برابر ارزش یک باغ گل است که گل‌های آن همگی آبی یا قرمز هستند. (گل‌برگ‌های هر گل هم‌رنگند.)

ب) ثابت کنید اگر در یک باغ گل که همهٔ گل‌ها آبی یا قرمز هستند، تعداد گل‌های آبی حداقل ۲ تا از تعداد گل‌های قرمز بیشتر باشند، ارزش این باغ گل مثبت است. همچنین اگر گل‌های آبی حداقل یکی از گل‌های قرمز بیشتر باشند، بازیکن چپ به عنوان شروع کننده، استراتژی برد دارد. در باغ گل شکل زیر، بازیکن راست شروع‌کننده است. کدام بازیکن استراتژی برد دارد؟



۱۰) در یک گراف در بازی هرس بوته هاچ—پاچ، کلیه یال‌های قرمز و آبی که توسط مسیری از یال‌های قرمز و آبی به زمین وصل هستند را **کوه ارغوانی** آن گراف می‌گوییم و بقیه یال‌ها را **جنگل سبز** آن گراف می‌خوانیم. ثابت کنید ارزش یک گراف دلخواه در بازی هرس بوته هاچ—پاچ برابر مقداری بی‌نهایت نزدیک به ارزش کوه ارغوانی آن است؛ یعنی ارزش گراف برابر ارزش کوه ارغوانی آن به علاوه یک مقدار بی‌نهایت کوچک مثل $*$ یا $\uparrow$ است. نتیجه بگیرید که ارزش یک گراف برابر مجموع ارزش کوه ارغوانی و جنگل سبز آن است. (راهنمایی: از استقرا کمک بگیرید و گزینه‌های مغلوب را حذف کنید.)

پیوست الف

مقدماتی از نظریهٔ مجموعه‌ها

تعمیم بسیاری از مطالب گفته شده در این کتاب به حالتی که مجموعهٔ وضعیت‌ها در یک بازی متناهی نیست، نیاز به مفاهیم و ابزارهای نظریهٔ مجموعه‌ها دارد. در این پیوست سعی کرده‌ایم مرور بسیار مختصری بر برخی مفاهیم نظریهٔ مجموعه‌ها داشته باشیم و به اجمال مطالب مهمی مثل اعداد کاردینال، اصل خوش‌ترتیبی، اعداد اردینال، استقرا و تعریف بازگشتی را معرفی کنیم. خوانندهٔ علاقه‌مند می‌تواند برای اثبات دقیق جزئیات و کسب اطلاعات بیشتر در این زمینه به هر کتاب کلاسیک نظریهٔ مجموعه‌ها از جمله مراجع [۱۴] و [۱۶] مراجعه کند.

الف.۱ اعداد کاردینال

اگر X و Y دو مجموعه باشند، آن‌گاه X و Y را **هم‌کاردینال** گوییم و می‌نویسیم $|X| = |Y|$، هرگاه یک تابع دوسویی بین X و Y وجود داشته باشد. اگر یک تابع یک به یک از X به Y وجود داشته باشد، می‌نویسیم $|X| \leq |Y|$. درصورتی که $|X| \leq |Y|$ و X و Y هم‌کاردینال نباشند، می‌نویسیم $|X| < |Y|$. می‌توان نشان داد که اگر $|X| \leq |Y|$ و $|Y| \leq |X|$، آن‌گاه X و Y هم‌کاردینال هستند؛ یعنی $|X| = |Y|$. این‌صورت قضیه‌ای به

نام قضیهٔ کانتور–برنشتاین[1] است که اثبات آن را می‌توانید در [۱۶] ببینید.

به عنوان یک تمرین ساده می‌توان نشان داد که رابطهٔ هم‌کاردینال بودن، یک رابطهٔ هم‌ارزی است. از هر کلاس هم‌ارزی یک مجموعه را به عنوان نمایندهٔ یکتای آن کلاس در نظر می‌گیریم. هر نماینده را یک **عدد کاردینال** می‌گوییم.[2] در نتیجه متناظر با هر مجموعهٔ X، یک عدد کاردینال یکتا وجود دارد که با $|X|$ نشان می‌دهیم و دو مجموعهٔ X و Y هم‌کاردینال هستند اگر و تنها اگر عدد کاردینال آنها یکسان باشد؛ یعنی $|X| = |Y|$.

برای تعریف مجموعه‌های متناهی و نامتناهی، ابتدا باید اعداد طبیعی را تعریف کنیم. اعداد طبیعی به‌صورت بازگشتی به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} ۰ &:= \emptyset, \\ ۱ &:= \{\emptyset\}, \\ &\vdots \\ n &:= \{۰, \ldots, n-۱\}. \end{aligned}$$

مجموعهٔ همهٔ اعداد طبیعی را با $\mathbb{N}$ نشان می‌دهیم.

$$\mathbb{N} := \{۰, ۱, ۲, ۳, \ldots\}.$$

مجموعهٔ X را **متناهی** گوییم هرگاه با یک عدد طبیعی $n \in \mathbb{N}$، هم‌کاردینال باشد. طبق قرارداد نمایندهٔ کلاس متناظر با مجموعهٔ n را خود n می‌گیریم. در نتیجه n یک عدد کاردینال است و داریم $|X| = n$. مجموعه‌ای که متناهی نباشد را **نامتناهی** می‌گوییم. مجموعهٔ X را **شمارا** می‌خوانیم، هرگاه $|X| \leq |\mathbb{N}|$ و آن را **شمارای نامتناهی** می‌نامیم، هرگاه $|X| = |\mathbb{N}|$. مجموعه‌ای که شمارا نباشد را **ناشمارا** می‌نامیم. اگر مجموعهٔ توانی X، مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های X را با $\mathcal{P}(X)$ نشان دهیم، آن‌گاه داریم $|X| < |\mathcal{P}(X)|$ (**قضیهٔ کانتور**). بنابراین مجموعه‌های ناشمارا نیز وجود دارند. می‌توان نشان داد که اگر X نامتناهی باشد، آن‌گاه $|\mathbb{N}| \leq |X|$ و بنابراین $|\mathbb{N}|$ کوچک‌ترین کاردینال نامتناهی است، که آن را با $\aleph_۰$ نشان می‌دهیم. کوچک‌ترین کاردینال ناشمارا را با $\aleph_۱$ نشان می‌دهیم.

---

[1] Cantor-Bernstein

[2] در واقع اثبات این مطلب که می‌توان از هر کلاس یک نمایندهٔ یکتا انتخاب کرد به اصل انتخاب برمی‌گردد. توضیح بیشتر را در [۱۴] ببینید.

الف.۲ خوش‌ترتیبی و خوش‌ساختی

یک رابطهٔ "$\le$" روی مجموعهٔ X را یک **رابطهٔ ترتیب جزئی** می‌گوییم، هرگاه در خواص زیر صدق کند

۱) (**خاصیت بازتابی**) برای هر $x \in X$، داریم $x \le x$.

۲) (**خاصیت پادتقارنی**) برای هر $x, y \in X$، اگر $x \le y$ و $y \le x$، آن‌گاه $x = y$.

۳) (**خاصیت تراگذری**) برای هر $x, y, z \in X$، اگر $x \le y$ و $y \le z$، آن‌گاه $x \le z$.

و در این‌صورت زوج مرتب $(X, \le)$ را یک **مجموعهٔ جزئاً مرتب** می‌خوانیم. برای دو عضو $x, y \in X$ تعریف می‌کنیم $x < y$، هرگاه x و y متمایز باشند و $x \le y$.

فرض کنید $(X, \le)$ یک مجموعهٔ جزئاً مرتب باشد. عضو $x \in X$ را عضو **می‌نیمم** مجموعهٔ X گوییم هرگاه برای هر $y \in X$ داشته باشیم $x \le y$ و آن را عضو **می‌نیمال** مجموعهٔ X گوییم هرگاه هیچ عضو $y \in X$ موجود نباشد که $y < x$. به‌طور مشابه می‌توانیم عضو ماکزیمم و ماکزیمال را تعریف کنیم.

به عنوان مثال اگر A یک مجموعه باشد، آن‌گاه مجموعهٔ $\mathcal{P}(A)$ همراه با رابطهٔ زیرمجموعه بودن، "$\subseteq$"، یک مجموعهٔ جزئاً مرتب با عضو می‌نیمم $\emptyset$ و عضو ماکزیمم A است.

مجموعهٔ جزئاً مرتب $(X, \le)$ را یک **مجموعهٔ مرتب خطی** یا یک **زنجیر** و رابطهٔ ترتیب $\le$ را **ترتیب خطی** گوییم هرگاه ترتیب $\le$ در شرط زیر نیز صدق کند:

۴) (**خاصیت خطی**) برای هر $x, y \in X$، داریم $x \le y$ یا $y \le x$.

در یک مجموعهٔ مرتب خطی $(X, \le)$، اگر برای $x, y \in X$ داشته باشیم $x \le y$، اما هیچ $z \in X$ وجود نداشته باشد که $x < z < y$. آن‌گاه عضو x را **ماقبل** y و عضو y را **مابعد** x می‌گوییم.

مجموعهٔ مرتب جزئی $(X, \le)$ را **خوش‌ساخت** می‌گوییم هرگاه هر زیرمجموعهٔ غیرتهی از X دارای عضو می‌نیمال باشد. همچنین مجموعهٔ مرتب خطی $(X, \le)$ را **خوش‌ترتیب** می‌گوییم هرگاه هر زیرمجموعهٔ غیرتهی از X دارای عضو می‌نیمم باشد. در

این حالت ترتیب $\leq$ را یک **خوش‌ترتیبی** می‌نامیم. به عنوان مثال مجموعهٔ اعداد طبیعی، $\mathbb{N}$، همراه با ترتیب معمول، یک مجموعهٔ خوش‌ترتیب و مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های یک مجموعه، همراه با ترتیب $\subseteq$، یک مجموعهٔ خوش‌ساخت است.

هر عضو غیرماکزیمال x در مجموعهٔ خوش‌ترتیب X، یک مابعد یکتا دارد که آن را با x^+ نشان می‌دهیم. در واقع x^+ عضو می‌نیمم زیرمجموعهٔ $\{y \in X \ : \ x < y\}$ از X است. اما در یک مجموعهٔ خوش‌ترتیب، هر عضو غیرمی‌نیمال لزوماً یک ماقبل ندارد. مثلاً مجموعهٔ زیر از اعداد گویا را در نظر بگیرید:

$$A = \left\{ ۱ - \frac{۱}{n+۱} \ : \ n \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ ۲ - \frac{۱}{n+۱} \ : \ n \in \mathbb{N} \right\}. \qquad \text{(الف.۱)}$$

این مجموعه همراه با ترتیب معمول اعداد یک مجموعهٔ خوش‌ترتیب است ولی $۱ \in A$، ماقبل ندارد. عضوی از مجموعهٔ خوش‌ترتیب X را که عضو ماقبل نداشته باشد، **عضو حدی** می‌گوییم.

مثال الف.۱ فرض کنید $G = (X, E)$ یک گراف متوالیاً متناهی باشد (تعریف ۱.۵). برای دو عضو $x, y \in X$، تعریف می‌کنیم $x \leq_w y$، اگر یک گشت متناهی با شروع از y و پایان در x وجود داشته باشد. مجموعهٔ X همراه با رابطهٔ $\leq_w$، یک مجموعهٔ جزئاً مرتب تشکیل می‌دهد. (خاصیت پادتقارنی به دلیل عدم وجود دور در گراف، برقرار است.) چون گراف، متوالیاً متناهی است، هر زیرمجموعهٔ غیرتهی $Y \subseteq X$، دارای حداقل یک عضو می‌نیمال است زیرا در غیر این‌صورت گشت نامتناهی ایجاد می‌شود. بنابر این $(X, \leq_w)$ یک مجموعه خوش‌ساخت تشکیل می‌دهد.

مثال الف.۲ فرض کنید M یک مجموعه از عددها و عددنماها باشد. برای دو عضو $x, y \in M$، تعریف می‌کنیم $x \leq_s y$، هرگاه x و y یکسان باشند یا x ساده‌تر از y باشد (تعریف ۲.۶). در این‌صورت $(M, \leq_s)$ یک مجموعهٔ جزئاً مرتب است. همچنین هر زیرمجموعهٔ غیرتهی M، یک عضو می‌نیمال دارد، زیرا در غیر این‌صورت یک دنبالهٔ نامتناهی از مجموعه‌های $A_۱, A_۲, \ldots$ یافت می‌شود که $A_۱ \ni A_۲ \ni A_۳ \ni \cdots$ که تناقض است.[1] بنابراین $(M, \leq_s)$ یک مجموعهٔ خوش‌ساخت تشکیل می‌دهد.

[1] عدم وجود این دنبالهٔ نامتناهی را در نظریهٔ مجموعه‌ها، اصل انتظام می‌گویند.

یکی از چندین گزاره‌ای که معادل با اصل انتخاب هستند، اصل خوش‌ترتیبی نام دارد. این اصل بیان می‌کند که برای هر مجموعهٔ X، یک ترتیب خطی وجود دارد که X با آن ترتیب، خوش‌ترتیب است. معادل بودن این اصل با اصل انتخاب به این معنی است که می‌توان یکی را به عنوان اصل موضوعه در نظر گرفت و دیگری را به عنوان قضیه ثابت کرد. برای اثبات معادل بودن این دو، [۱۴] را ببینید.

قضیه الف.۱ (قضیهٔ خوش‌ترتیبی) هر مجموعهٔ X را می‌توان با یک ترتیب خطی مناسب خوش‌ترتیب کرد. ♢

الف.۳ استقرا و تعریف بازگشتی

بسیاری از قضایا در این کتاب به کمک استقرا اثبات شده و برخی از تعاریف به‌صورت بازگشتی تعریف شده‌اند. اصل استقرا و تعریف بازگشتی در واقع ابزارهای اصلی برای اثبات گزاره‌هایی در مورد اعداد طبیعی و تعریف توابعی با دامنهٔ $\mathbb{N}$ هستند. استفاده از آنها برای مقاصد ما، نیازمند تعمیم این روش‌ها به گونه‌ای است که برای مجموعه‌های خوش‌ساخت کار کنند.

فرض کنید می‌خواهیم گزارهٔ $P(n)$ را برای هر عدد طبیعی n ثابت کنیم. روش استقرای معمولی به این‌صورت است که با فرض درستی $P(m)$ برای هر عدد طبیعی $m < n$، درستی $P(n)$ را ثابت می‌کنیم. درنتیجه درستی $P(n)$ برای هر عدد طبیعی n ثابت می‌شود. حال فرض کنید $(S, \leq)$ یک مجموعه خوش‌ساخت و $P(s)$ به ازای $s \in S$، یک گزاره باشد. اگر بتوانیم با فرض درستی $P(t)$ برای هر $t < s$، درستی $P(s)$ را ثابت کنیم، آن‌گاه $P(s)$ برای هر $s \in S$ درست است. این ادعا صورت قضیهٔ **استقرای خوش‌ساخت** است.

قضیه الف.۲ (استقرای خوش‌ساخت) فرض کنید $(S, \leq)$ یک مجموعه خوش‌ساخت و $P(s)$، برای هر $s \in S$، یک گزاره باشد. همچنین فرض کنید برای همهٔ $s \in S$ ها، با فرض درستی $P(t)$ برای هر $t < s$، درستی $P(s)$ را ثابت کرده‌ایم. در این‌صورت $P(s)$ برای هر $s \in S$ برقرار است. ♢

برهان. قرار دهید

$$T := \{s \in S : \text{ برقرار نیست } P(s)\}$$

و فرض کنید T غیرتهی باشد. چون S خوش‌ساخت است، زیرمجموعهٔ $T \subset S$، یک عضو می‌نیمال $t_\circ$ دارد. در نتیجه برای هر $t < t_\circ$، $P(t)$ برقراراست، اما $P(t_\circ)$ برقرار نیست. این موضوع با فرض قضیه در تناقض است. لذا فرض غیرتهی بودن T غلط بوده و برای هر $s \in S$، $P(s)$ برقرار است.

اثبات بسیاری از قضایا که در فصل ٦ برای عددها و عددنماها بیان گردید، به‌صورت استقرائی بود و از قضیهٔ فوق استفاده شد.

مثال الف.۳ فرض کنید M یک مجموعه از عددها و عددنماها و برای هر $x, y \in M$، $P(x,y)$ یک گزاره باشد. می‌خواهیم درستی گزارهٔ $P(x,y)$ را برای هر $x, y \in M$، تحقیق کنیم. برای استفاده از قضیهٔ استقرای خوش‌ساخت، ابتدا باید یک ترتیب جزئی روی $M \times M$، تعریف کنیم. برای دو زوج $(x_۱, y_۱), (x_۲, y_۲) \in M \times M$، تعریف می‌کنیم $(x_۱, y_۱) \leq (x_۲, y_۲)$، هرگاه $x_۱ \leq_s x_۲$ و $y_۱ \leq_s y_۲$ (که $\leq_s$ در مثال الف.۲ تعریف شده است). حال اگر بتوانیم با فرض درستی $P(z,w)$ برای هر $(z,w) < (x,y)$، درستی $P(x,y)$ را ثابت کنیم، آن‌گاه با توجه به قضیهٔ استقرای خوش‌ساخت، $P(x,y)$ برای هر $x, y \in M$ درست است. مثلاً می‌توانیم فرض کنیم $P(x^L, y)$، $P(x^R, y)$، $P(x, y^L)$ و $P(x, y^R)$ درستند و ثابت کنیم $P(x,y)$ درست است.

مشابه روش استقرای خوش‌ساخت، می‌توانیم اشیاء را به روش بازگشتی تعریف کنیم. فرض کنید $(S, \leq)$ یک مجموعه خوش‌ساخت باشد. قصد داریم برای هر $s \in S$، یک شی $F(s)$ تعریف کنیم. برای تعریف $F(s)$، $s \in S$، فرض می‌کنیم همه $F(t)$ها، $t < s$، تعریف شده‌اند و به کمک آنها، $F(s)$ را تعریف می‌کنیم. قضیهٔ بازگشت خوش‌ساخت نشان می‌دهد که اگر F را به روش بازگشتی به‌صورت فوق تعریف کنیم، در واقع $F(s)$، برای هر $s \in S$ تعریف شده است.

قضیه الف.۳ (بازگشت خوش‌ساخت) فرض کنید $(S, \leq)$ یک مجموعهٔ خوش‌ساخت و G یک تابع روی کلاس U (کلاس همه مجموعه‌ها) باشد. در این‌صورت یک تابع یکتای F وجود دارد که برای هر $s \in S$،

$$F(s) = G(\{\ (s, t, F(t)) :\ t \in S, t < s\}).$$

برهان. گزاره $P(s)$ را برای هر $s \in S$ به‌صورت زیر تعریف کنید:

$P(s)$: یک تابع یکتای F_s با دامنهٔ $\{t \in S :\ t \leq s\}$ وجود دارد که برای هر z در دامنهٔ F_s، داریم $F_s(z) = G(\{(z, t, F_s(t)) :\ t < z\})$.

به‌کمک قضیهٔ استقرای خوش‌ساخت می‌توان ثابت کرد که $P(s)$ برای هر $s \in S$، درست است. حال تعریف می‌کنیم $F(s) := F_s(s)$، برای‌هر $s \in S$. یکتایی F نیز براحتی از قضیهٔ استقرای خوش‌ساخت نتیجه می‌شود.

بسیاری از تعاریف در فصول مختلف این کتاب به‌صورت بازگشتی بیان شده است و در تعریف آنها از قضیهٔ فوق استفاده شده است. به عنوان مثال، تعریف تابع SG (تعریف ۲.۳) را با صورت‌بندی قضیهٔ فوق در زیر بیان می‌کنیم.

مثال الف.۴ فرض کنید (X, E) یک گراف متوالیاً کران‌دار باشد و $\leq_w$ ترتیب جزئی معرفی شده در مثال الف.۱ باشد. در این‌صورت $(X, \leq_w)$ یک مجموعهٔ خوش‌ساخت است. برای هر رأس $x \in X$ و تابع f روی مجموعهٔ $\{y :\ y <_w x\}$، تعریف می‌کنیم

$$G(\{(x, y, f(y)) :\ y <_w x\}) := \text{mex}\{f(z) :\ \text{است } x \text{ تالی } z\}.$$

طبق قضیهٔ بازگشت خوش‌ساخت، یک تابع یکتای g روی مجموعه X وجود دارد که برای هر $x \in X$، $g(x) = \text{mex}\{g(y) :\ \text{است } x \text{ تالی } y\}$. این تابع یکتا همان تابع SG گراف (X, E) است.

الف.۴ اعداد اردینال

در این بخش توجه خود را به مجموعه‌های خوش‌ترتیب معطوف و مفهوم اعداد اردینال را معرفی می‌کنیم. اعداد اردینال در واقع در ادامهٔ فرآیند تولید اعداد طبیعی که در

بخش الف.۱ معرفی شد، ظاهر می‌شوند و این فرآیند را به آن طرف فضای متناهی (فضای ترامتناهی) تعمیم می‌دهند.

دو مجموعهٔ مرتب خطی $(X, \leq)$ و $(Y, \preceq)$ را **یکریخت** می‌گوییم، هرگاه یک تابع دوسویی $f : X \to Y$ وجود داشته باشد که ترتیب را حفظ کند؛ یعنی برای هر $x_1, x_2 \in X$، اگر $x_1 \leq x_2$، آن‌گاه $f(x_1) \preceq f(x_2)$. حال فرض کنید X و Y دو مجموعهٔ خوش‌ترتیب باشند. می‌گوییم **نوع ترتیب** X و Y یکسان است، اگر X و Y یکریخت باشند. اگر دو مجموعهٔ X و Y دارای نوع ترتیب یکسان باشند، ویژگی‌های مربوط به ترتیب این دو مجموعه مشابه است. مثلاً اگر X عضو حدی نداشته باشد، Y نیز عضو حدی ندارد. به عنوان مثال نوع ترتیب مجموعهٔ اعداد طبیعی و مجموعهٔ اعداد زوج یکسان است و نوع ترتیب این دو، با نوع ترتیب مجموعهٔ A تعریف شده در (الف.۱) یکسان نیست، در حالی که هر سه هم‌کاردینال هستند. (چرا؟)

به راحتی می‌توان نشان داد که رابطهٔ یکریختی، یک رابطهٔ هم‌ارزی است. بنابراین از بین همهٔ مجموعه‌های خوش‌ترتیب با نوع ترتیب یکسان، می‌توان یک مجموعه را به عنوان نماینده در نظر گرفت (اصل انتخاب). این نماینده را یک **عدد اردینال** یا به‌طور ساده‌تر یک اردینال می‌گوییم. اعداد اردینال را با حروف یونانی α، β و ... نشان می‌دهیم. بنابراین برای هر مجموعهٔ خوش‌ترتیب X، یک عدد اردینال یکتای α وجود دارد که نوع ترتیب آن با نوع ترتیب X یکسان است. در این حالت می‌گوییم X از اردینال α است. به خصوص اردینال نمایندهٔ نوع ترتیب مجموعهٔ اعداد طبیعی، $\mathbb{N}$ را با ω نشان می‌دهیم. مجموعه‌های مرتب خطی متناهی که کاردینال برابر دارند، همگی نوع ترتیب یکسانی دارند. طبق قرارداد، اردینال متناظر با هر عدد طبیعی n را همان n قرار می‌دهیم. پس در واقع اعداد طبیعی، هم نشان دهندهٔ کاردینال و هم بیان‌گر نوع ترتیب مجموعه‌های مرتب خطی متناهی هستند.

ترتیب اردینال‌ها

می‌توانیم روی اعداد اردینال یک ترتیب خطی قرار دهیم. برای مجموعهٔ مرتب خطی X و عضو $z \in X$ داده شده، زیرمجموعهٔ $\{x \in X \; : \; x < z\}$ از X را یک **بخش اولیهٔ** سره از

X می‌گوییم. برای دو اردینال α و β، اگر نوع ترتیب β با نوع ترتیب یک بخش اولیه سره از α یکسان باشد، می‌نویسیم $\alpha > \beta$. همچنین تعریف می‌کنیم $\alpha \leq \beta$، هرگاه $\alpha < \beta$ یا $\alpha = \beta$. بنابراین برای هر عدد طبیعی n، داریم $\circ \leq n < \omega$. می‌توان ثابت کرد که هر مجموعه از اعداد اردینال همراه با ترتیب فوق یک مجموعهٔ خوش‌ترتیب است [۱۴]. در مجموعهٔ اعداد طبیعی، این ترتیب با ترتیب کاردینال اعداد طبیعی منطبق است، بنابراین ابهامی در نمادگذاری‌ها وجود ندارد. هر اردینال یا مابعد یک اردینال دیگر است، یا یک اردینال حدی است. مثلاً اردینال متناهی $n \neq \circ$، مابعد اردینال $n - ۱$ است و اردینال‌های $\circ$ و ω، حدی هستند.

هر مجموعه‌ای از اردینال‌ها، همراه با ترتیب تعریف شده در فوق، خود یک مجموعهٔ خوش‌ترتیب است و لذا یک نوعِ ترتیب دارد که با نوع ترتیب یک اردینال یکسان است. فرض کنید α یک اردینال و T مجموعهٔ همهٔ اردینال‌های کمتر از α باشد؛ یعنی $T := \{\beta \ : \ \beta < \alpha\}$. همچنین فرض‌کنید $\beta \in T$. بنابراین $\beta < \alpha$ و طبق تعریف یک $z_\beta \in \alpha$ وجود دارد که مجموعهٔ $\{x \in \alpha \ : \ x < z_\beta\}$ و مجموعهٔ β، نوع ترتیب یکسان دارند. به راحتی می‌توان نشان داد که نگاشت $\beta \mapsto z_\beta$، یک یکریختی از T به α است. بنابراین نوع ترتیب T و α یکسان است؛ یعنی اردینال مجموعهٔ T همان α است. با توجه به این حقیقت می‌توان اردینال‌ها را به گونه‌ای تعریف کرد که α و $\{\beta \ : \ \beta < \alpha\}$ یکی باشند:

$$\alpha = \{\beta \ : \ \beta < \alpha\}. \qquad \text{(الف.۲)}$$

در نتیجه با این فرض، ترتیب $>$ تعریف شده در بالا برای اردینال‌ها، با رابطهٔ عضویت $\in$ منطبق است. در واقع $\alpha > \beta$ اگر و تنها اگر $\beta \in \alpha$.[۱]

در ادامه این بخش برای مشاهده مثال‌هایی از استفاده از اعداد اردینال، استقرا و تعریف بازگشتی، تابع SG را که در تعریف ۲.۳ برای گراف‌های متوالیاً کران‌دار تعریف شد، برای گراف‌های متوالیاً متناهی تعریف می‌کنیم. سپس قضیه ۱.۱ را در حالت نامتناهی ثابت می‌کنیم.

فرض کنید $G = (X, E)$ یک گراف متوالیاً متناهی و $(X, \leq_w)$ مجموعهٔ خوش‌ساخت

[۱] تمرین ۹، فصل ٦ را نیز ببینید.

معرفی شده در مثال الف.۱ باشد. تابع SG برای گراف G به‌طور بازگشتی به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

تعریف الف.۱ فرض کنید $G=(X,E)$ یک گراف متوالیاً متناهی و $(X,\leq_w)$ مجموعهٔ خوش‌ساخت معرفی شده در مثال الف.۱ باشد. در این‌صورت برای هر $x\in X$، $g(x)$ را یک اردینال تعریف می‌کنیم به‌طوری که

$$g(x) := \min\{\alpha : \alpha \neq g(y),\ \text{است } x \text{ تالی } y\}.$$

با توجه به قضیهٔ بازگشت خوش‌ساخت، تابع g به‌طور یکتا روی X تعریف می‌شود. این تابع را تابع اسپراگ—گراندی گراف G گوییم.

حال به عنوان یک مثال دیگر، قضیه ۱.۱ را در حالت نامتناهی ثابت می‌کنیم. برای تعریف گراف متوالیاً متناهی و هستهٔ گراف، فصل ۱ را ببینید.

قضیه الف.۴ هر گراف جهت‌دار متوالیاً متناهی دارای یک هسته است.

برهان. فرض کنید $G=(X,E)$ یک گراف جهت‌دار متوالیاً متناهی و $(X,\leq_w)$ مجموعهٔ خوش‌ساخت معرفی شده در مثال الف.۱ باشد. هر زیرمجموعهٔ $Y\subseteq X$ حداقل یک عضو می‌نیمال (رأس بدون تالی) دارد. برای هر زیرمجموعهٔ $Y\subseteq X$، $N(Y)$ را مجموعهٔ همهٔ رأس‌هایی در X بگیرید که حداقل یک تالی در Y دارند و قرار دهید $N[Y] := Y\cup N(Y)$. حال K_α را برای اردینال α به‌طور بازگشتی به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

ابتدا K_0 را مجموعهٔ همهٔ اعضای می‌نیمال X (رأس‌های پایانی) قرار می‌دهیم. برای هر عدد اردینال α، اگر α اردینال حدی باشد، تعریف می‌کنیم $K_\alpha := \cup_{\beta<\alpha}K_\beta$. اگر α مابعد اردینال β باشد، درصورتی که $X=N[K_\beta]$، تعریف می‌کنیم $K:=K_\beta$ و متوقف می‌شویم. اما درصورتی که $X\neq N[K_\beta]$، به مجموعهٔ K_β، همهٔ اعضای می‌نیمال مجموعهٔ $X-N[K_\beta]$ را اضافه کرده و نام مجموعهٔ جدید را K_α می‌گذاریم.

چون در هر مرحله K_α بزرگتر می‌شود، در نهایت یک اردینال مثل α^* پیدا می‌شود که $X = N[K_{\alpha^*}]$ و $K = K_{\alpha^*}$. در نتیجه هر رأس بیرون K حداقل یک تالی در K دارد. پس کافی است شرط ۲ تعریف هسته (تعریف ۷.۱) را بررسی کنیم. باید برای $x, y \in K$ نشان دهیم x, y تالی یکدیگر نیستند. فرض کنید δ و λ به ترتیب عضو می‌نیمم مجموعه‌های $\{\beta \ : \ \beta \leq \alpha^*, x \in K_\beta\}$ و $\{\beta \ : \ \beta \leq \alpha^*, y \in K_\beta\}$ باشند. (با توجه به خوش‌ترتیب بودن مجموعهٔ اردینال‌ها، این مینیمم‌ها وجود دارند.) بدون کم شدن کلیت فرض کنید $\delta < \lambda$. طبق انتخاب K_δ و K_λ، δ و λ اردینال حدی نیستند و لذا به ترتیب مابعد اردینال‌های δ' و λ' هستند که $\delta \leq \lambda'$. چون $x \in K_\delta$ و $y \in K_\lambda$، داریم $x \in K_{\lambda'}$ و $y \in X - N[K_{\lambda'}] \subset X - N[K_{\delta'}]$. پس x تالی y نیست. همچنین چون x عضو می‌نیمال مجموعهٔ $X - N[K_{\delta'}]$ است و $y \in X - N[K_{\delta'}]$، پس y نیز تالی x نیست. لذا شرط ۲ هسته برقرار است. در نتیجه K یک هسته برای G است.

الف.۵ حساب اردینال‌ها

در این بخش با استفاده از تعریف بازگشتی، جمع، ضرب و توان اعداد اردینال را تعریف می‌کنیم. این تعاریف در واقع تعمیم‌های بلافاصله‌ای از تعریف‌های متناظر برای اعداد طبیعی هستند.

همان‌طور که گفتیم هر مجموعه‌ای از اردینال‌ها همراه با ترتیب $<$ که همان رابطهٔ عضویت $\in$ است، یک مجموعهٔ خوش‌ترتیب تشکیل می‌دهد. بنابراین هر اردینال α یک مابعد یکتای α^+ دارد. قرار دهید $\beta =: \alpha \cup \{\alpha\}$. واضح است که $\alpha \in \beta$ و لذا $\alpha < \beta$. همچنین اگر $\gamma < \beta$، آن‌گاه یا $\alpha = \gamma$ یا $\gamma < \alpha$. لذا β اردینال مابعد α است. حال تعریف می‌کنیم

$$\alpha + ۱ := \alpha^+ = \alpha \cup \{\alpha\}.$$

این تعریف منطبق بر تعریف $n + ۱$ برای عدد طبیعی n است. برای مجموعهٔ X از اردینال‌ها، مجموعهٔ $\cup_{\alpha \in X} \alpha$ همراه با ترتیب اردینال‌ها خود یک عدد اردینال دارد که آن را

سوپریمم X می‌گوییم و با $\sup X$ نشان می‌دهیم. حال جمع دو عدد اردینال را به‌طور بازگشتی به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف الف.۲ (جمع اردینال‌ها) برای هر اردینال β تعریف می‌کنیم

۱) $\beta + 0 := \beta$،

۲) برای هر اردینال α، $\beta + (\alpha + 1) := (\beta + \alpha) + 1 = (\beta + \alpha)^{+}$ و

۳) برای اردینال حدی $\alpha \neq 0$، $\beta + \alpha := \sup\{\beta + \gamma \ : \ \gamma < \alpha\}$.

بنابراین طبق تعریف فوق داریم

$$\begin{aligned}
\beta + 1 &= \beta^{+},\\
\beta + 2 &= (\beta + 1) + 1 = (\beta^{+})^{+},\\
\beta + 3 &= (\beta + 2) + 1 = ((\beta^{+})^{+})^{+},\\
&\vdots
\end{aligned}$$

مثلاً

$$\begin{aligned}
\omega + 1 &= \omega \cup \{\omega\} = \{0, 1, 2, \ldots, \omega\},\\
\omega + 2 &= \{0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega + 1\},\\
\omega + 3 &= \{0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega + 1, \omega + 2\},\\
&\vdots
\end{aligned}$$

که ترتیب اعضاء از چپ به راست است. همچنین داریم

$$\omega + \omega = \sup\{w + n \ : \ n < \omega\} = \{0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \ldots\}.$$

توجه کنید که در جمع اردینال‌ها ترتیب جمع بسیار مهم است. مثلاً اجازه دهید $n + \omega$ را محاسبه کنیم.

$$n + \omega = \sup\{n + m \ : \ m < \omega\} = \{0, 1, 2, \ldots\} = \omega.$$

بنابراین $n+\omega \neq \omega+n$. یک نتیجهٔ دیگر از رابطهٔ فوق این است که $\omega+۲=\omega+۱$، در حالی که $۲\neq ۱$. بنابراین حذف از راست در معادلات و نامعادلات مجاز نیست. با این وجود می‌توان نشان داد که جمع اردینال‌ها شرکت‌پذیر است و حذف از چپ برای آن مجاز می‌باشد [۱۴].

ضرب دو اردینال به‌طور بازگشتی به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

تعریف الف.۳ (**ضرب اردینال‌ها**) برای هر اردینال β تعریف می‌کنیم

۱) $\beta.\circ := \circ$،

۲) برای هر اردینال α، $\beta.(\alpha+۱) := (\beta.\alpha)+\beta$ و

۳) برای اردینال حدی $\alpha\neq\circ$، $\beta.\alpha := \sup\{\beta.\gamma \;:\; \gamma<\alpha\}$.

بنابراین طبق تعریف فوق داریم

$$\begin{aligned}
\beta.۱ &= (\beta.\circ)+\beta=\beta,\\
\beta.۲ &= (\beta.۱)+\beta=\beta+\beta,\\
\beta.۳ &= (\beta.۲)+\beta=\beta+\beta+\beta,\\
&\vdots\\
\beta.\omega &= \sup\{\beta.n \;:\; n<\omega\}=\sup\{\circ,\beta,\beta+\beta,\ldots\}.
\end{aligned}$$

مثلاً

$$\begin{aligned}
\omega.۲ &= \omega+\omega=\{\circ,۱,۲,\ldots,\omega,\omega+۱,\omega+۲,\ldots\},\\
۲.\omega &= \sup\{۲.n \;:\; n<\omega\}=\{\circ,۲,۴,\ldots\}=\omega,\\
\omega.\omega &= \sup\{\omega.n \;:\; n<\omega\}=\sup\{\overbrace{\omega+\cdots+\omega}^{n\ \text{مرتبه}} \;:\; n<\omega\}.
\end{aligned}$$

درنهایت توان اردینال‌ها به‌طور بازگشتی به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

تعریف الف.۴ **(توان اردینال‌ها)** برای هر اردینال β تعریف می‌کنیم

۱) $\beta^{0} := 1$،

۲) برای هر اردینال α، $\beta^{(\alpha+1)} := (\beta^{\alpha}).\beta$ و

۳) برای اردینال حدی $\alpha \neq 0$، $\beta^{\alpha} := \sup\{\beta^{\gamma} \;:\; \gamma < \alpha\}$.

الف.۶ تمرین

۱) ثابت کنید رابطهٔ هم‌کاردینال بودن و رابطهٔ نوع ترتیب یکسان داشتن، رابطه‌های هم‌ارزی هستند.

۲) ثابت کنید مجموعهٔ جزئاً مرتب $(X, \leq)$ خوش‌ساخت است اگر و تنها اگر هیچ دنبالهٔ نامتناهی نزولی در آن وجود نداشته باشد.

۳) ثابت کنید هر گراف ساده همبند G، یک زیردرخت فراگیر دارد. (G لزوماً متناهی نیست.)

۴) تساوی‌های زیر را برای اردینال‌های α، β و γ، ثابت یا رد کنید.

الف) $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^{\beta}\alpha^{\gamma}$.

ب) $(\alpha\beta)^{\gamma} = \alpha^{\gamma}\beta^{\gamma}$.

پیوست ب

اعداد صحیح نامنفی، یک میدان

در فصل ۶ ساختاری برای تولید اعداد ارائه کرده و اعمال جمع، ضرب و ترتیب را روی مجموعهٔ اعداد تعریف کردیم. سپس نشان دادیم که مجموعهٔ اعداد همراه با این اعمال، یک میدان مرتب تشکیل می‌دهند. در اینجا قصد داریم از تمایز بین مجموعهٔ L و R و در نتیجه اعداد مثبت و منفی صرف‌نظر کرده و توجه خود را روی اعداد صحیح نامنفی متمرکز کنیم. مجموعهٔ $\mathbb{Z}^+ \cup \{\circ\}$ را در نظر بگیرید. هدف ما در این بخش معرفی یک جمع و ضرب روی این مجموعه است که آن را به یک میدان بسته جبری تبدیل می‌کند. قبلاً در فصل‌های ۲ و ۴ با مفهوم جمع و ضرب نیم آشنا شدیم. در ادامه خواهیم دید که به طرز شگفت‌انگیزی جمع و ضرب تعریف شده ما همان جمع و ضرب نیم هستند. توجه شما را به این نکته جلب می‌کنیم که در این بحث می‌توانیم به جای مجموعهٔ اعداد صحیح نامنفی، مجموعهٔ اعداد اردینال را قرار دهیم و کلیهٔ مطالبی که گفته خواهد شد در مورد اعداد اردینال نیز درست هستند، اما چون ممکن است خواننده با این اعداد آشنا نباشد بحث خود را به اعداد صحیح نامنفی محدود می‌کنیم. برای معرفی مختصر اعداد اردینال، پیوست الف را ببینید. ابتدا با تعریف جمع و ضرب شروع می‌کنیم. یادآوری می‌کنیم که برای زیرمجموعهٔ S از اعداد صحیح نامنفی، $\mathrm{mex}(S)$ کوچک‌ترین عدد صحیح نامنفی تعریف می‌شود که در مجموعهٔ S نیست.

تعریف ب.۱ برای دو عدد صحیح نامنفی x و y، جمع نیم x و y را با $x \oplus y$ نشان داده و به‌طور بازگشتی به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$x \oplus y = \operatorname{mex}\{x' \oplus y, x \oplus y' \ : \ \circ \le x' < x, \circ \le y' < y\}.$$

و ضرب نیم x و y را با $x \otimes y$ نشان داده و به‌طور بازگشتی به‌صورت زیر تعریف می کنیم

$$x \otimes y = \operatorname{mex}\{(x' \otimes y) \oplus (x \otimes y') \oplus (x' \otimes y') \ : \ \circ \le x' < x, \circ \le y' < y\}.$$

در بخش ۱.۲ تعریف دیگری از جمع نیم بیان کردیم. در بخش بعد ثابت خواهیم کرد که این دو تعریف معادل هستند.

ب.۱ ویژگی‌های جمع نیم

در کلیه اثبات‌ها برای هر عدد صحیح نامنفی x، x' می‌تواند هر عدد صحیح نامنفی کمتر از x باشد.

قضیه ب.۱ برای هر سه عدد صحیح نامنفی x، y و z داریم، $x \oplus z = y \oplus z$ اگر و تنها اگر $x = y$. همچنین

$$x \oplus y = \operatorname{mex}\{x'' \oplus y, x \oplus y'' \ : \ x'' \ne x, y'' \ne y\}.$$

برهان. فرض کنید $x \oplus z = y \oplus z$ و قرار دهید

$$S = \{x' \oplus z, x \oplus z' \ : \ \circ \le x' < x, \circ \le z' < z\}.$$

حال اگر $y < x$، آن‌گاه $y \oplus z \in S$ و لذا $x \oplus z = \operatorname{mex}(S) \ne y \oplus z$، پس $x \le y$. به‌طور مشابه ثابت می‌شود که $y \le x$. در نتیجه $x = y$.
برای اثبات قسمت دوم قرار دهید $T = \{x'' \oplus y, x \oplus y'' \ : \ x'' \ne x, y'' \ne y\}$. برای هر $\circ \le x' < x$ و $\circ \le y' < y$، داریم $x' \oplus y, x \oplus y' \in T$ و همچنین طبق قسمت اول $x \oplus y \notin T$، در نتیجه $x \oplus y = \operatorname{mex}(T)$.

قضیه ب.۲ برای اعداد صحیح نامنفی x، y و z داریم

الف) $x \oplus \circ = x$،

ب) $x \oplus y = y \oplus x$،

ج) $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$،

د) $x \oplus x = \circ$ و در نتیجه قرینهٔ نیم x خودش است.

برهان. الف) با استقرا روی x داریم

$$x \oplus \circ = \operatorname{mex}\{x' \oplus \circ \;:\; \circ \le x' < x\} = \operatorname{mex}\{x' \;:\; \circ \le x' < x\} = x.$$

ب) با استقرا روی $x \oplus y$ داریم

$$\begin{aligned} x \oplus y &= \operatorname{mex}\{x' \oplus y, x \oplus y' \;:\; \circ \le x' < x, \circ \le y' < y\} \\ &= \operatorname{mex}\{y \oplus x', y' \oplus x \;:\; \circ \le x' < x, \circ \le y' < y\} \\ &= y \oplus x. \end{aligned}$$

ج) با استقرا روی $x \oplus y \oplus z$ و به کمک قضیهٔ ب.۱، داریم

$$\begin{aligned} (x \oplus y) \oplus z &= \operatorname{mex}\{t \oplus z, (x \oplus y) \oplus z' \;:\; t \ne (x \oplus y), z' \ne z\} \\ &= \operatorname{mex}\{(x' \oplus y) \oplus z, (x \oplus y') \oplus z, (x \oplus y) \oplus z'\} \\ &= \operatorname{mex}\{x' \oplus (y \oplus z), x \oplus (y' \oplus z), x \oplus (y \oplus z')\} \\ &= \operatorname{mex}\{x' \oplus (y \oplus z), x \oplus t \;:\; t \ne (y \oplus z), x' \ne x\} \\ &= x \oplus (y \oplus z). \end{aligned}$$

د) با استقرا روی x، اگر $\circ \le x' < x$، آن‌گاه $x' \oplus x' = \circ$ و در نتیجه $x \oplus x' \ne \circ$. لذا

$$x \oplus x = \operatorname{mex}\{x' \oplus x, x \oplus x' \;:\; \circ \le x' < x\} = \circ.$$

توجه داریم که درستی پایه استقرا ($x = \circ$) در همهٔ موارد فوق بدیهی است.

نتیجه ب.۱ مجموعهٔ اعداد صحیح نامنفی همراه با جمع نیم یک گروه آبلی تشکیل می‌دهد.

ب.۲ ویژگی‌های ضرب نیم

قضیه ب.۳ برای هر دو عدد صحیح نامنفی x و y، داریم

$$x \otimes y = \operatorname{mex}\{(x'' \otimes y) \oplus (x \otimes y'') \oplus (x'' \otimes y'') \ : \ x'' \neq x, y'' \neq y\}.$$

برهان. برای اثبات این قضیه کافی است نشان دهیم که برای هر $x'' \neq x$ و $y'' \neq y$، $(x'' \otimes y'') \oplus (x \otimes y'') \oplus (x'' \otimes y) \neq x \otimes y$. اگر $x'' < x$ و $y'' < y$ آن‌گاه این نامساوی با توجه به تعریف $x \otimes y$ برقرار است. حال اگر $x'' > x$ و $y'' > y$، آن‌گاه با توجه به تعریف $x'' \otimes y''$ داریم $(x \otimes y) \oplus (x'' \otimes y) \oplus (x \otimes y'') \neq x'' \otimes y''$ و در نتیجه با توجه به قضیهٔ ب.۲ قسمت (د) نامساوی مطلوب برقرار است. حالات دیگر نیز به‌طور مشابه ثابت می‌شود.

قضیه ب.۴ برای اعداد صحیح نامنفی x، y و z، داریم

الف) $x \otimes ۰ = ۰$ و $x \otimes ۱ = x$،

ب) $x \otimes y = y \otimes x$،

ج) $x \otimes (y \oplus z) = (x \otimes y) \oplus (x \otimes z)$ و

د) $(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z)$.

برهان. الف) چون هیچ عدد صحیح نامنفی کمتر از صفر وجود ندارد، $x \otimes ۰ = \operatorname{mex} \emptyset = ۰$. برای اثبات قسمت دوم با استقرا روی x داریم

$$x \otimes ۱ = \operatorname{mex}\{(x' \otimes ۱) \oplus (x \otimes ۰) \oplus (x' \otimes ۰)\} = \operatorname{mex}\{x'\} = x.$$

ب) با استقرا روی $x \otimes y$ داریم

$$\begin{aligned} x \otimes y &= \operatorname{mex}\{(x' \otimes y) \oplus (x \otimes y') \oplus (x' \otimes y')\} \\ &= \operatorname{mex}\{(y \otimes x') \oplus (y' \otimes x) \oplus (y' \otimes x')\} \\ &= y \otimes x. \end{aligned}$$

ج) با استقرا روی $x \oplus y \otimes z$ و به کمک قضیه‌های ب.۲ و ب.۳، داریم

$$\begin{aligned} (x \oplus y) \otimes z &= \operatorname{mex}\{(t \otimes z) \oplus ((x \oplus y) \otimes z') \oplus (t \otimes z') \ : \ t \neq (x \oplus y), z' \neq z\} \\ &= \operatorname{mex}\{((x' \oplus y) \otimes z) \oplus ((x \oplus y) \otimes z') \oplus ((x' \oplus y) \otimes z'), \\ &\qquad ((x \oplus y') \otimes z) \oplus ((x \oplus y) \otimes z') \oplus ((x \oplus y') \otimes z')\} \\ &= \operatorname{mex}\{(x' \otimes z) \oplus (x \otimes z') \oplus (x' \otimes z') \oplus (y \otimes z), \\ &\qquad (x \otimes z) \oplus (y' \otimes z) \oplus (y \otimes z') \oplus (y' \otimes z')\} \\ &= \operatorname{mex}\{t \oplus (y \otimes z), (x \otimes z) \oplus s \ : \ t \neq (x \otimes z), s \neq (y \otimes z)\} \\ &= (x \otimes z) \oplus (y \otimes z). \end{aligned}$$

د) با استقرا روی $x \otimes y \otimes z$ و به کمک قضیه‌های ب.۲ و ب.۳، داریم

$$\begin{aligned} (x \otimes y) \otimes z &= \operatorname{mex}\{(t \otimes z) \oplus [(x \otimes y) \otimes z'] \oplus (t \otimes z') \ : \ t \neq (x \otimes y)\} \\ &= \operatorname{mex}\{[(x' \otimes y \oplus x \otimes y' \oplus x' \otimes y') \otimes z] \oplus [(x \otimes y) \otimes z'] \\ &\qquad \oplus [(x' \otimes y \oplus x \otimes y' \oplus x' \otimes y') \otimes z']\} \\ &= \operatorname{mex}\{(x' \otimes y \otimes z) \oplus (x \otimes y' \otimes z) \oplus (x' \otimes y' \otimes z) \oplus (x \otimes y \otimes z') \\ &\qquad \oplus (x' \otimes y \otimes z') \oplus (x \otimes y' \otimes z') \oplus (x' \otimes y' \otimes z')\} \\ &= \cdots = x \otimes (y \otimes z). \end{aligned}$$

توجه داریم که درستی پایه استقرا ($x = 0$) در همهٔ موارد فوق بدیهی است.

نتیجه ب.۲ مجموعهٔ اعداد صحیح نامنفی همراه با جمع و ضرب نیم یک حلقهٔ تعویض‌پذیر یک‌دار است.

مجموعهٔ $\mathbb{Z}^+ \cup \{۰\}$ مجهز به جمع و ضرب نیم چیزی فراتر از یک حلقهٔ تعویض‌پذیر یک‌دار است. در واقع این مجموعه یک میدان بسته جبری است؛ یعنی علاوه بر خواص فوق هر عدد صحیح مثبت وارون جبری دارد و هر معادله با ضرائب صحیح نامنفی، در $\mathbb{Z}^+ \cup \{۰\}$ جواب دارد. این مطلب را در بخش آخر ثابت خواهیم کرد.

ب.۳ دستور جمع نیم

در بخش آخر از این فصل قصد داریم دستوراتی برای محاسبه جمع و ضرب نیم به دست آوریم. خواهیم دید که این دستورات همان تعریف ۱.۲ و دو قاعده بخش ۳.۴ هستند. برای عدد صحیح نامنفی n، تعریف می‌کنیم

$$[n] = \{۰, ۱ \ldots, n - ۱\}$$

لم ب.۱ اگر مجموعهٔ $[n]$ همراه با جمع نیم یک گروه باشد، در این‌صورت برای هر $m \in [n]$، داریم $n \oplus m = n + m$.

برهان. این مطلب را با استقرا روی m نشان می‌دهیم. طبق فرض استقرا داریم

$$n \oplus m = \mathrm{mex}\{n' \oplus m, n \oplus m'\} = \mathrm{mex}\{n' \oplus m, n + m'\}.$$

اما چون $[n]$ گروه است، برای هر $k \in [n]$، معادله $x \oplus m = k$، در $[n]$، $n + ۱$ جواب متمایز دارد. بنابراین

$$n \oplus m = \mathrm{mex}\{۰, ۱, \ldots, n - ۱, n, n + ۱, \ldots, n + m - ۱\} = n + m.$$

قضیه ب.۵ تنها زیرمجموعه‌های $\mathbb{Z}^+ \cup \{۰\}$ که همراه با جمع نیم یک گروه تشکیل می‌دهند، مجموعه‌های $[۱]$، $[۲]$، $[۴]$، $[۸]$، ...، $[۲^k]$، ... و مجموعهٔ $\mathbb{Z}^+ \cup \{۰\}$ هستند.

برهان. واضح است که $[۱]$ یک گروه است. کافی است ثابت کنیم اگر برای یک $n \geq ۱$، مجموعهٔ $[n]$ گروه باشد، آن‌گاه کوچک‌ترین گروه بعدی $[۲n]$ است. ابتدا ادعا می‌کنیم برای هر $۱ \leq i < n$، $[n+i]$ گروه نیست، زیرا طبق لم ب.۱، $n \oplus i = n + i$ که در مجموعهٔ $[n+i]$ قرار ندارد. حال ثابت می‌کنیم $[۲n]$ گروه است، زیرا برای $i, j \in [n]$، $i \oplus j = k \in [n]$ و داریم

$$(n+i) \oplus j = n \oplus i \oplus j = n \oplus k = n + k \in [۲n],$$

$$(n+i) \oplus (n+j) = n \oplus i \oplus n \oplus j = i \oplus j = k \in [n].$$

با استفاده از لم و قضیهٔ فوق بلافاصله نتیجهٔ زیر حاصل می‌شود که یک دستور برای محاسبه جمع نیم ارائه می‌کند.

نتیجه ب.۳

الف) جمع نیم هر عدد به فرم ۲^n با یک عدد $x < ۲^n$ برابر جمع معمولی آن دو است.

ب) جمع نیم هر عدد به فرم ۲^n با خودش برابر صفر است.

بنابراین با استفاده از نتیجه فوق اگر $x = x_k ۲^k + \cdots + x_۱ ۲ + x_۰$ و $y = y_k ۲^k + \cdots + y_۱ ۲ + y_۰$ نمایش‌های x و y در مبنای ۲ باشند، آن‌گاه $x \oplus y = z_k ۲^k + \cdots + z_۱ ۲ + z_۰$ که $z_i = ۰$، هرگاه $x_i = y_i = ۱$ و در غیر این‌صورت $z_i = ۱$.

نتیجه ب.۴ تعریف جمع نیم در تعریف ب.۱ دقیقاً همان چیزی است که در تعریف ۱.۲ داشتیم.

ب.۴ دستور ضرب نیم

حال به عنوان آخرین مطلب این فصل دستوری برای محاسبه ضرب نیم به دست می‌آوریم.

لم ب.۲ اگر مجموعهٔ $[n]$، همراه با جمع و ضرب نیم یک میدان باشد، آن‌گاه برای هر $m < n$، داریم $n \otimes m = nm$.

برهان. از استقرای روی m استفاده می‌کنیم. طبق فرض استقرا و تمرین ۱ داریم

$$n \otimes m = \text{mex}\{(n \otimes m') \oplus n' \otimes (m \oplus m')\} = \text{mex}\{(nm') + (n' \otimes (m \oplus m'))\}.$$

اما هر عدد کمتر از nm را می‌توان به‌صورت $nk + l$، برای یک $k < m$ و $l < n$ نوشت. از طرفی چون $[n]$ میدان است، معادله $x \otimes (m \oplus k) = l$، در $[n]$ یک جواب دارد. این نشان می‌دهد

$$n \otimes m = \text{mex}\{nk + l \ : \ \circ \leq k < m, \circ \leq l < n\} = nm.$$

قبل از بیان لم بعدی به چند تعریف نیاز داریم. برای نشان دادن توان نیم از یک علامت بار بر روی توان استفاده می‌کنیم. به عنوان مثال، $n^{\overline{2}} = n \otimes n$ و $n^{\overline{3}} = n \otimes n \otimes n$.

فرض کنید k یک عدد طبیعی باشد، یک چندجمله‌ای $a_k \otimes x^{\overline{k}} \oplus a_{k-1} \otimes x^{\overline{k-1}} \oplus \cdots \oplus a_\circ$ با ضرایب صحیح نامنفی را کوچک‌تر از چندجمله‌ای $b_k \otimes x^{\overline{k}} \oplus b_{k-1} \otimes x^{\overline{k-1}} \oplus \cdots \oplus b_\circ$ با ضرائب صحیح نامنفی گوییم هرگاه $(a_k, a_{k-1}, \ldots, a_\circ)$ با ترتیب قاموسی کوچک‌تر از $(b_k, b_{k-1}, \ldots, b_\circ)$ باشد؛ یعنی $a_k < b_k$ یا $(a_k = b_k$ و $a_{k-1} < b_{k-1})$ یا ...

لم زیر را بدون اثبات بیان می‌کنیم. برای اثبات آن به فصل ۶ کتاب [۶] مراجعه کنید.

لم ب.۳ فرض کنید $[n]$ همراه جمع و ضرب نیم یک میدان باشد که بستهٔ جبری نیست و $p(x)$ را کوچک‌ترین چندجمله‌ای با ضرایب در $[n]$ بگیرید که هیچ ریشه‌ای در $[n]$ ندارد، در این صورت n ریشه $p(x)$ است.

نتیجه ب.۵ مجموعهٔ اعداد صحیح نامنفی همراه با جمع و ضرب نیم یک میدان بستهٔ جبری است.

برهان. ابتدا فرض کنید $\mathbb{Z}^+ \cup \{\circ\}$ میدان نباشد و a را کوچک‌ترین عدد مثبتی بگیرید که وارون ندارد. بنابراین چندجمله‌ای $a \otimes x \oplus 1$ کوچک‌ترین چندجمله‌ای است که هیچ

ریشه‌ای در $\mathbb{Z}^+ \cup \{\circ\}$ ندارد. در نتیجه اگر n را ماکسیمم a و وارون a' برای همهٔ a'های کمتر از a قرار داهیم، طبق لم فوق $n+1$ ریشه $a \otimes x \oplus 1$ است. این تناقض نشان می‌دهد که $\mathbb{Z}^+ \cup \{\circ\}$ میدان است. حال فرض کنید $\mathbb{Z}^+ \cup \{\circ\}$ بستهٔ جبری نباشد و چندجمله‌ای $p(x)$ را کوچک‌ترین چندجمله‌ای بگیرید که هیچ ریشه‌ای در $\mathbb{Z}^+ \cup \{\circ\}$ ندارد. بنابراین اگر n را ماکسیمم همهٔ ضرائب $p(x)$ و همهٔ ریشه‌های همهٔ چندجمله‌ای‌های کمتر از $p(x)$ قرار دهیم، طبق لم فوق $n+1$ ریشه $p(x)$ است. این تناقض نیز نشان می‌دهد که $\mathbb{Z}^+ \cup \{\circ\}$ بستهٔ جبری است.

قضیه ب.۶ تنها زیرمجموعه‌های $\mathbb{Z}^+ \cup \{\circ\}$ که همراه جمع و ضرب نیم میدان تشکیل می‌دهند، مجموعه‌های $[۲]$، $[۴]$، $[۱۶]$، ...، $[۲^{۲^k}]$ و ... و $\mathbb{Z}^+ \cup \{\circ\}$ هستند.

برهان. ما گزارهٔ زیر را با استقرا روی n ثابت می‌کنیم.

$(*)$ اگر $m = ۲^{۲^n}$، آن‌گاه $[m]$ یک میدان است و وقتی که x از صفر تا m را اختیار می کند، $x^۲ \oplus x$ از صفر تا $\frac{m}{۲} - ۱$ را اختیار می کند.

فرض می‌کنیم گزاره $(*)$ برای m درست باشد و آن را برای $m^۲$ ثابت می‌کنیم. گروه بودن $[m^۲]$ از قضیهٔ ب.۵ نتیجه می‌شود. طبق فرض استقرا کوچک‌ترین چندجمله‌ای تحویل‌ناپذیر روی $[m]$ برابر $x^۲ \oplus x = \frac{m}{۲}$ است. بنابراین طبق لم ب.۳، $m^۲ \oplus m = \frac{m}{۲}$. حال هر عدد در $[m^۲]$ را می‌توان به‌صورت $mx + y = m \otimes x \oplus y$ نوشت که $\circ \leq x, y < m$. بنابراین حاصل‌ضرب دو عدد در $[m^۲]$ به‌صورت زیر است

$$\begin{aligned}(m \otimes x_۱ \oplus y_۱) \otimes (m \otimes x_۲ \oplus y_۲) &= m^۲ \otimes x_۱ \otimes x_۲ \oplus m \otimes (x_۱ \otimes y_۲ \oplus x_۲ \otimes y_۱) \\ &\quad \oplus y_۱ \otimes y_۲ \\ &= m \otimes x_۳ \oplus y_۳,\end{aligned}$$

برای $\circ \leq x_۳, y_۳ < m$. این نشان می‌دهد که $[m^۲]$ میدان است. حال برای عضو دلخواه $X = mx + y$ در $[m^۲]$ داریم

$$X^۲ \oplus X = m^۲ \otimes x^۲ \oplus y^۲ \oplus m \otimes x \oplus y = m \otimes (x^۲ \oplus x) \oplus (\frac{m}{۲} \otimes x^۲ \oplus y^۲ \oplus y).$$

طبق فرض استقرا $x \oplus x^{\overline{۲}}$ هر مقداری از صفر تا $\frac{m}{۲} - ۱$ را اختیار می‌کند. در ضمن وقتی x را به $x \oplus ۱$ تبدیل کنیم $x \oplus x^{\overline{۲}}$ بی‌تغییر می‌ماند و $y \oplus y^{\overline{۲}} \oplus x^{\overline{۲}} \otimes \frac{m}{۲}$، $\frac{m}{۲}$ اضافه می‌شود (چون $[\frac{m}{۲}]$ گروه است). بنابراین می‌توان گفت که $X \oplus X^{\overline{۲}}$ دقیقاً همهٔ اعداد $mx + y$ را که $\frac{m}{۲} \le y < m$ و $۰ \le x < \frac{m}{۲}$ اختیار می‌کند؛ یعنی $X \oplus X^{\overline{۲}}$ همهٔ اعداد صفر تا $\frac{m^{۲}}{۲} - ۱$ را اختیار می‌کند و استقرا کامل می‌شود.

با توجه به آنچه گفته شد می‌توان دستوری را برای محاسبه ضرب نیم به دست آورد.

نتیجه ب.۶

الف) ضرب نیم یک توان ۲ فرما به‌صورت $x = ۲^{۲^n}$ در یک عدد کوچک‌تر $y < x$ برابر ضرب عادی xy است.

ب) ضرب نیم یک توان ۲ فرما به‌صورت $x = ۲^{۲^n}$ در خودش برابر $\frac{۳}{۲}x$ است.

برهان. قسمت (الف) از اینکه $[x]$ میدان است و لم ب.۲ نتیجه می‌شود. برای قسمت دوم طبق اثبات قضیهٔ ب.۶، $(x \otimes x) \oplus x = \frac{x}{۲}$. بنابراین چون $[x]$ گروه است، $x \otimes x = x \oplus \frac{x}{۲} = x + \frac{x}{۲}$.

ب.۵ تمرین

۱) فرض کنید n, k دو عدد صحیح نامنفی باشند که $[n]$ یک گروه است. ثابت کنید برای هر $m < n$، $nk \oplus m = nk + m$.

۲) با استقرا روی k برای هر عدد صحیح نامنفی n و عدد طبیعی k نشان دهید

$$n^{\overline{k}} = \mathrm{mex}\{(n \oplus n_۱) \otimes (n \oplus n_۲) \otimes \cdots \otimes (n \oplus n_k) \oplus n^{\overline{k}} \ : \ ۰ \le n_i < n\}.$$

مراجع

[۱] ر.ک. گای. بازی منصفانه؛ ترجمه عبادالله محمودیان و آناهیتا آریاچهر. موسسه انتشارات علمی دانشگاه صنعتی شریف، ۱۳۸۰.

[2] *http://en.wikipedia.org/wiki/board_game*, (2009).

[3] E. Berlekamp, J. Conway, and R. Guy, *Winning Ways for Your Mathematical Plays*, Academic Press, New York, 1982. Vols. 1-4.

[4] E. Berlekamp and D. Wolfe, *Mathematical Go*, A K Peters Ltd., 1994. Chilling gets the last point, With a foreword by James Davies.

[5] C. Bouton, *Nim a game with a complete mathematical theory*, An. Math., 3 (1902), pp. 35–39.

[6] J. Conway, *On Numbers and Games*, Academic Press, New York, 1976.

[7] T. Dawson, *Ciassa's Wild Roses*, republished in five classics of fairy chess by Dover (1973), 1935.

[8] N. ELKIES, *On numbers and endgames: combinatorial game theory in chess endgames*, in Games of no chance (Berkeley, CA, 1994), vol. 29 of Math. Sci. Res. Inst. Publ., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1996, pp. 135–150.

[9] T. FERGUSON, *Lecture Notes on Game Theory*, 2005. http://www.math.ucla.edu/~tom/Game_Theory/Contents.html.

[10] D. GALE, *A curious Nim-type game*, Amer. Math. Mo., 81 (1974), pp. 876–879.

[11] M. GARDNER, *Mathematical games*, Scientific American, (Jan. 1973), pp. 110–111.

[12] P. GRUNDY, *Mathematics and games*, Eureka, 2 (1939), pp. 6–8.

[13] R. GUY, *Fair Games*, COMAP Math. Exploration Series, Arlington, M.A., 1989.

[14] T. JECH, *Set theory*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2003. The third millennium edition, revised and expanded.

[15] E. LASKER, *Brettspiel der völker*, Berlin, (1931), pp. 183–196.

[16] S. LIN AND Y. LIN, *Set theory: an intuitive approach*, Houghton Mifflin Co., Boston, Mass., 1974.

[17] E. MOORE, *A generalization of a game called Nim*, Ann. Math., 11 (1910), pp. 93–84.

[18] J. NEWTON, *The Jiroft game boards*, (2005, revised in 2007). http://www.goddesschess.com/chessquest/jiroft.html.

[19] R. Nowakowski, D. Wolfe, and M. Albert, *Lessons in Play*, A K Peters, 2007.

[20] J. Pierce, *An Introduction to Information Theory*, Dover Publications Inc., New York, 1980. Symbols, Signals & Noise.

[21] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1976.

[22] F. Schuh, *The game of divisions*, Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde, 39 (1952), pp. 299–304.

[23] ———, *The Master Book of Mathematical Recreations*, Dover Publ. Inc., 1968. translated from the 1934 edition.

[24] D. Silverman, *Your Move*, McGraw-Hill, New York, 1971.

[25] R. Sprague, *Über mathematische kampfspiele*, Tohoku Math. J., 41 (1936), pp. 438–444.

[26] ———, *Über zwei abarten von Nim*, Tohoku Math. J., 43 (1937), pp. 351–354.

[27] ———, *Bemerkungen über eine spezielle abelsche gruppe*, Math. Z., 51 (1947), pp. 82–84.

[28] X. Sun, *Improvements on Chomp*, Integers, 2 (2002), pp. G1, 8 pp. (electronic).

[29] C. Welter, *The theory of a class of games on a sequence of squares, in terms of advancing operation in a special group*, ibid., 16 (1954), pp. 194–200.

[30] M. WHINIHAN, *Fibonacci Nim*, Fibonacci Quart., 1 (1963), pp. 9–13.

[31] W. WYTHOFF, *A modification of the game of Nim*, Nieuw Archief voor Wiskunde, (1907), pp. 199–202.

[32] D. ZEILBERGER, *Three-rowed Chomp*, Adv. in Appl. Math., 26 (2001), pp. 168–179.

واژه‌نامه

فارسی به انگلیسی

آ. ا

آلیکیوت	Aliquot
ارزش	value
اسب سفید	White Knight
استراتژی برد	winning strategy
استقرای پسرو	backward induction
استقرای خوش‌ساخت	well-founded induction
اسکوِگز	Squex
اسکی پرش	Ski-Jumps
اصل انتخاب	Axiom of Choice
اصل انتظام	Axiom of Regularity
اصل پرش مرگ	Death Leap Principle
اصل خوش‌ترتیبی	Axiom of Well-Ordering
اصل کولن	Colon Principle
اصل هم‌جوشی	Fusion Principle
اطلاعات کامل	complete information

ب

بازگشت خوش‌ساخت	well-founded recursion
بازی	game
برداشتن و شکستن	take-and-break –
بی‌طرفانه	impartial –
ترکیبیاتی	combinatorial –
جانبدارانه	partizan –
بازی تفاضلی	subtraction game
بی‌صبرانه	impatient –
پویا	dynamic –
بازیکن	player
بعدی	Next –
چپ	Left –
راست	Right –
قبلی	Previous –
باغ گل	flower garden
برش کیک	Cutcake

برش کیک هیکرسون	Hickerson's Cutcake
برگردان	switch
بلوک‌گردان	Turnablock
به طور تناوبی متناهی	alternately finite
بی‌نهایت کوچک	infinitesimal

پ

پریم	Prim

ت

تابع اسپراگ—گراندی	Sprague-Grundy function
تارتان، بازی—	Tartan game
تالی	follower
تحویل‌شده	reduced
ترتیب خطی	linear order
تعریف بازگشتی	recursive definition

ج

جمع اردینال	ordinal sum
جمع نیم	Nim sum
جنگل	forest

چ

چُمپ	Chomp

ح

حرکت	move
برگشت‌پذیر	reversible –

خ

خط‌کش	Ruler
خط کِشَک	Rulerette
خنثی	fuzzy
خوش‌ترتیب	well-ordered
خوش‌ساخت	well-founded

د

دلار نقره‌ای	silver dollar
دما	temprature
دوقلوها	Twins
دوقلوهای سیار	Acrostic Twins
دومینو	Domino
دیم	Dim

ر

رأس انفجاری	explosive vertex
ریزه و میزه	tiny and miny
ریلز	Rayles
ریمز	Rims

ز

زوج‌گون	evil

س

سادگی	simplicity
ستاره	star
سرقت استراتژی	strategy stealing
سکه‌گردان	coin turning
سه‌قلوها	Triplets

ش

شرط پایان‌پذیری	Ending Condition
شطرنج داوسون	Dawson's chess
شطرنج وایتهوف	Wythoff's chess

ع

عدد اردینال	ordinal number
عدد طلایی	golden number
عدد کاردینال	cardinal number
عدد گویای دودویی	dyadic rational number

ف

فردگون	odious
فرم متعارف	canonical form

ق

قالیچه‌ها	Rugs
قانون	rule
اجتناب از عدد	Number Avoidance Rule
انتقال	Translation Rule
حذف گزینهٔ مغلوب	deleting dominated option
سادگی	Simplicity Rule
برلکمپ	Berlekamp Rule
عادی	Normal Play Rule
وارون	Misère Play Rule
قضیه	theorem
بوتون	Bouton theorem
زکندورف	Zeckendorf theorem
کانتور—برنشتاین	Cantor-Bernstein theorem
مور	Moore theorem

ک

کال، بازی—	the game of Col
کمترین ناموجود	minimal excludant
کوه ارغوانی	Purple Mountain
کیک ماندی	Maundy Cake
کیک ماندی چند بعدی	Many-way Maundy Cake
کیلز	Kayles
کیلز داوسون	Dawson's Kayles

گ

گراف	graph
جهت‌دار	directed –
ریشه‌دار	rooted –
ساده	simple –

گرانت	Grunt
گراندی، بازی —	Grundy's game
گزینه	Option
برگشت‌پذیر	reversible –
مغلوب	dominated –
گشت	walk
گشت تناوبی	alternating walk
گوشه‌گردان	Turning Corners

ل

لاک‌پشت‌گردان	Turning Turtles
لاک‌پشت‌نما	Mock Turtles

م

مابعد	successor
ماقبل	predecessor
متوالیاً کران‌دار	progressively bounded
متوالیاً متناهی	progressively finite
مجموع بازی‌ها	sum of games
جمع نیم	Nim sum
مساوی	equal

ن

نشاندن زوج‌ها	Seating Couples
نقد کردن چک‌ها	Cashing Cheques
نورتکات	Northcott
نوع ترتیب	order type
نیم	Nim
پلکانی	Staircase –
پوکر	Poker –
چینی	chinese –
دوبعدی	two dimensional –
فرد	odd –
لاسکر	Lasker's –
k—نیم مور	Moore's Nim_k
نیمبر	nimber
نیمبل	Nimble

و

وایتهوف، بازی —	Wythoff's game
وزغ و قورباغه	Toads-and-Frogs
وضعیت	position
ولتر	Welter

ه

هرس بوته	Hackenbush
سبز	Green –
آبی—قرمز	Blue-Red –
هاچ—پاچ	Hotch-Potch –
هسته	kernel
هگز	Hex

ی

یکسان	identical

نمایه