

به نام خدا

شمر دنی‌ها را بشمار!

Count Countables!

تألیف مجید میرزاویری  
استاد گروه ریاضی محض دانشگاه فردوسی مشهد

**Madjid Mirzavaziri**  
**Professor of Pure Mathematics**  
**Ferdowsi University of Mashhad**

تقدیرم به کیمیا

- به فاطر محبت‌هایش که شمردنی نیست -

## مقدمه



اگر مسأله‌ای وجود دارد که  
نمی‌توانید حل کنید، آنگاه  
مسأله‌ای ساده‌تر وجود دارد  
که می‌توانید حل کنید: آن را  
بیابید!

**George Pólya**

13 Dec 1887 - 7 Sept 1985

ترکیبیات و مسائل مربوط به شمارش یکی از پرکاربردترین شاخه‌های ریاضیات است که نه تنها در خود رشته ریاضی بلکه در رشته‌های دیگری همچون احتمال، زیست‌شناسی و علوم کامپیوتر نیز مورد نیاز می‌باشد.

اصولی که در حل مسائل شمارشی به کار می‌روند عبارتند از *اصل استقرا*، *اصل جمع*، *اصل ضرب* و *اصل شمول و طرد*. گرچه این اصول به سادگی بیان می‌شوند با این حال تنها در صورتی می‌توانیم در به کار بردن آنها تبحر پیدا کنیم که نمونه‌های زیادی از مسائل را به وسیله آنها حل کنیم. بدون شک این مهم در یادگیری هر علمی ضروری است. آنچه در این کتاب آمده است را شاید بتوان مبانی شمارش دانست. مثال‌ها، احکام و مسائلی که در اینجا مطرح می‌گردند ساده‌ترین نوع پرسش‌های شمارشی را در بر می‌گیرد. فرض را بر این گذاشته‌ایم

که خواننده با مفاهیم مقدماتی نظریه مجموعه‌ها و اعداد صحیح آشناست اما از آنجایی که دانشجویان غیرریاضی را نیز مخاطب این کتاب دانسته‌ایم، سعی شده است تا احکام به ساده‌ترین شکل ممکن ارائه و اثبات گردند. به هر حال برای اثبات یک حکم برهان‌های متفاوتی وجود دارد و نمی‌توان به درستی نظر داد که راه حلی زیبا و کوتاه‌آموزنده‌تر است یا استدلالی طولانی که ترفندهای متفاوتی را در خود جای داده است. گاهی اوقات در یک راه حل طولانی می‌توان نمونه‌هایی از حل مسائل متنوعی را یافت که در برهان‌های کوتاه‌تر یافت نمی‌شوند.

از این رو گرچه اصل را بر ارائه شیوه‌های کوتاه و زیبا قرار داده‌ایم با این حال از ذکر راه‌های متفاوت حل مسئله اجتناب نکرده‌ایم. شاید مسائلی که در این کتاب مطرح می‌گردند مقدمه‌ای باشند برای آشنا شدن با پرسش‌های سخت‌تری که در ترکیبیات شمارشی مطرح می‌شوند.

برای نشان دادن انتهای تعاریف از ♣، مثال‌ها از ♠ و برهان‌ها از ■ استفاده می‌کنیم. لذا اگر در مطالعه اولیه کتاب چیزی به نظر مشکل آمد می‌توان از ابتدای بحث تا علامت مورد نظر را حذف کرد.

لازم می‌دانم از کسانی که پیش‌نوشته‌های این کتاب را خواندند تشکر کنم. به ویژه از خانم‌ها فاطمه طهوریان، حدیقه دلدار و اندیشه کیخا که با دقت فراوانی اشتباهات تایپی را یافتند بسیار سپاسگزارم. همچنین از آقای دکتر فریدون رهبرنیا که زحمت ویراستاری را عهده‌دار شدند متشکرم.

نظرات خوانندگان محترم بی شک می‌تواند در برطرف کردن ایرادهای باقیمانده مؤثر باشد. لذا منتظر شنیدن نظرات شما از طریق نامه‌ای که به [mirzavaziri@gmail.com](mailto:mirzavaziri@gmail.com) ارسال خواهید نمود هستم.

مجید میرزاویری

پاییز ۱۳۸۶

چرا اعداد زیبا هستند؟ این شبیه آن است که بپرسید چرا سمفونی نهم بتهوون زیباست. اگر نمی‌توانید ببینید که چرا، هیچ کسی نمی‌تواند به شما بگوید که چرا. من می‌دانم که اعداد زیبا هستند. اگر زیبا نباشند هیچ چیز دیگری نیز چنین نیست.

Paul Erdős

26 March 1913 - 20 Sept 1996



# مقدمه نسخه ویرایش شده الکترونیکی



مشکلات چاپ کتاب به صورت کاغذی و هزینه‌های زیادی که در بر دارد، باعث گردیده است که خوانندگان به کتاب‌های الکترونیکی روی آورند. از این رو تصمیم گرفتم نسخه الکترونیکی کتاب حاضر را آماده سازم. در این نسخه، ارجاعات درونی از طریق انتخاب کردن کلمه توسط نشانگر موشواره امکان‌پذیر شده است. به علاوه با فشردن کلید BackSpace می‌توانید به مکانی که قبلاً در آن نقطه بوده‌اید برگردید. مسأله مهمی که هرگز نباید فراموش شود این است که مطالعه یک کتاب ریاضی به کاغذ و قلم احتیاج دارد؛ حتی اگر کتابی الکترونیکی باشد. فراموش نکنید که تا مطالب خوانده شده را روی کاغذ ننویسید آنها را نخواهید آموخت. امیدوارم امکانات فارسی-ریاضی‌نویسی برای کتاب‌های eBook فارسی آن قدر قوی شود که بتوانم در کتاب‌های بعدی ارجاعات بیرون متن، پدیدار شدن پنجره‌های شامل تعریف برای یک واژه خاص و پنهان‌نگاری برای راهنمایی حل تمرین‌ها را نیز به قابلیت‌های کتاب اضافه کنم. کماکان منتظر شنیدن نظرات سازنده شما خواننده محترم هستم.

مجید میرزاویزی

تابستان ۱۳۹۱

# فهرست

۲      ۰ مقدمه

۱      ۱ گام اول

|    |                                       |
|----|---------------------------------------|
| ۱  | ۰.۱ آنچه در این فصل می‌خوانید         |
| ۳  | ۱.۱ طعمه‌فکنی                         |
| ۹  | ۲.۱ استقرای ریاضی                     |
| ۲۸ | ۳.۱ چند شاگرد اول صف امتحان نمی‌دهند! |
| ۳۴ | ۴.۱ اگر همه قبلی‌ها امتحان بدهند....  |
| ۴۱ | ۵.۱ نزول نامتناهی                     |
| ۴۵ | ۶.۱ تمرین‌ها                          |

۵۱      ۲ یا، و

|     |                                 |
|-----|---------------------------------|
| ۵۱  | ۰.۲ آنچه در این فصل می‌خوانید   |
| ۵۳  | ۱.۲ مربع‌های توخالی             |
| ۶۱  | ۲.۲ انتخاب                      |
| ۷۰  | ۳.۲ افراد را از جمع بیرون کنید  |
| ۸۷  | ۴.۲ هیچ کس در جای خود نمی‌نشیند |
| ۱۰۸ | ۵.۲ تمرین‌ها                    |

|               |                              |     |
|---------------|------------------------------|-----|
| ۱۱۷           | بودن یا نبودن؛ مسأله این است | ۳   |
| ۱۱۷ . . . . . | آنچه در این فصل می‌خوانید    | ۰.۳ |
| ۱۱۹ . . . . . | اصل شمول و طرد               | ۱.۳ |
| ۱۲۳ . . . . . | هیچ سری بی‌کلاه نمی‌ماند     | ۲.۳ |
| ۱۳۹ . . . . . | توابع حسابی ضربی             | ۳.۳ |
| ۱۴۹ . . . . . | توپ‌ها و جعبه‌ها             | ۴.۳ |
| ۱۵۹ . . . . . | مسأله نهم                    | ۵.۳ |
| ۱۷۰ . . . . . | تمرین‌ها                     | ۶.۳ |
| ۱۷۷           | بازگشت                       | ۴   |
| ۱۷۷ . . . . . | آنچه در این فصل می‌خوانید    | ۰.۴ |
| ۱۸۰ . . . . . | به دست آوردن روابط بازگشتی   | ۱.۴ |
| ۲۱۲ . . . . . | حل روابط بازگشتی             | ۲.۴ |
| ۲۲۸ . . . . . | تابع مولد                    | ۳.۴ |
| ۲۵۳ . . . . . | تمرین                        | ۴.۴ |
| ۲۵۹           | منابع                        |     |
| ۲۶۶           | نمایه                        |     |

# گام اول

اولین قاعده برای کشف  
کردن، داشتن مغز و اقبال نیک  
است. قاعده دوم کشف کردن،  
این است که محکم در سر جای  
خود بنشینید و منتظر باشید تا  
بارقه یک ایده را دریابید.

George Pólya

## ۱.۰ آنچه در این فصل می خوانید

پیشرفت در ریاضیات از طریق اثبات احکام جدید صورت می گیرد. این کار ممکن است به دو شکل انجام شود: برای پاسخ دادن به یک سؤال، مجبوریم چیزهایی را به عنوان احکام میانی اثبات کنیم تا سرانجام به آنچه می خواهیم برسیم. یا ممکن است خودمان تعاریف جدیدی بیاوریم که باعث به وجود آمدن سؤال های جدیدی بشوند؛ سؤال هایی که شاید در نظر اول، پاسخ دادن به آنها موجب یافتن جواب پرسش های قبلی نگردد.



در نوع اول انگار ما در جریان یک بازی از پیش تعریف شده قرار می‌گیریم و در حقیقت تلاش ما برای یافتن پاسخ، در ادامه گام‌هایی خواهد بود که افراد قبل از ما برداشته‌اند. اما در نوع دوم می‌توان گفت که ما مبدع یک بازی هستیم. قواعد را ما تعیین می‌کنیم و هدف نیز توسط خود ما تعیین می‌گردد.

در هر صورت، چه بخواهیم به سؤال‌های حل نشده قبلی پاسخ دهیم و چه قصد داشته باشیم سؤال‌هایی جدید را پایه‌ریزی کنیم، آنچه اهمیت دارد این است که شیوه‌هایی کلی و یکنواخت را برای استدلال کردن در هر دو مورد بپذیریم. باید بدانیم که منظور ما از پاسخ منطقی به سؤال دادن چیست و چگونه می‌توانیم این کار را انجام دهیم.

معمولاً یک مسأله ریاضی به صورت عبارت *اگر  $P$  آنگاه  $Q$*  بیان می‌شود که  $P$  را فرض<sup>۱</sup> و  $Q$  را حکم<sup>۲</sup> مسأله می‌نامند. فرض و حکم مسأله می‌تواند از یک جمله ساده و یا ترکیبی از جملات تشکیل شده باشد. چیزی که مهم است این است که چه روش یا روش‌هایی برای  $P$  به  $Q$  رسیدن معتبر است و در چه صورتی می‌توانیم ادعا کنیم که استدلالی منطقی برای اثبات  $Q$  توسط  $P$  ارائه داده‌ایم.

در بین روش‌هایی که منطقی تلقی می‌شوند یکی که از همه بیشتر مورد توجه ما است و در این کتاب با آن زیاد سر و کار داریم *برهان خلف*<sup>۳</sup> می‌باشد. در بخش کوتاهی از این فصل به معرفی این روش می‌پردازیم و با ذکر مثال‌هایی طرز استفاده از آن را روشن می‌سازیم.

به وسیله برهان خلف می‌توان بسیاری از مسائل زیبا و سخت را حل کرد اما نه همه آنها را. تقریباً همه مسائلی که با آنها در این کتاب برخورد می‌کنیم در مورد تعدادی متناهی از اشیا است و لذا اگر روشی کلی برای حل این گونه مسائل داشته باشیم می‌تواند در حل بخش مهمی از مسائل ما مؤثر باشد.

این چرخ فلک که ما در او  
حیرانیم،  
فانوس خیال از او مثالی  
دانیم،  
خورشید چراغ دان و عالم  
فانوس،  
ما چون صورییم کاندرو  
حیرانیم  
حکیم عمر خیام نیشابوری

18 May 1048 - 4 Dec 1131

یا ریاضیات بسیار بزرگ‌تر  
از ذهن آدمی است یا ذهن  
آدمی بیشتر از یک ماشین  
است.

Kurt Gödel

28 April 1906 - 14 Jan 1978



<sup>۱</sup> hypothesis

<sup>۲</sup> result

<sup>۳</sup> reductio ad absurdum

معمولاً در این گونه سؤال‌ها با یک یا چند متغیر طبیعی<sup>۴</sup> سر و کار داریم. مثلاً ممکن است با  $n$  نفر که در یک مهمانی حضور دارند،  $n$  توپ آبی و  $m$  توپ قرمز، تعداد مسیرهای  $k$  قدمی از یک گوشه مستطیلی  $n \times m$  به گوشه دیگری از آن، و مسائلی از این دست مواجه شویم.

در بخش‌های بعدی این فصل به معرفی روشی برای حل این گونه مسائل می‌پردازیم. روشن است که این روش نمی‌تواند همه مسائل از این نوع را حل کند و به ترفندهای دیگری نیز برای حل مسائل نیازمندیم.

## ۱.۱ طعمه فکنی

روش اثبات به وسیله برهان خلف را می‌توان خیلی ساده بیان کرد. اگر می‌خواهید با فرض  $P$  حکم  $Q$  را اثبات کنید، در ابتدا فرض کنید که  $Q$  درست نباشد (فرض خلف) و سپس سعی کنید نشان دهید که این فرض خلف به یک تناقض<sup>۵</sup> منجر می‌گردد. این تناقض می‌تواند یک مطلب همواره غلط یا چیزی در تناقض با فرض ما باشد. به هر حال تناقض به دست آمده نشان می‌دهد که فرض خلف ما درست نبوده و لذا باید حکم برقرار باشد.

گرچه این روش بسیار ساده به نظر می‌رسد، با این حال رسیدن به تناقض نیازمند ممارستی خاص است و تا مسائل زیادی را حل نکنید نمی‌توانید مطمئن شوید که این شیوه را به خوبی فرا گرفته‌اید. بسیاری از احکام پیچیده در ریاضیات با استفاده از برهان خلف اثبات می‌شوند و نباید آن را دست کم بگیرید. همان طور که خواهیم دید نکات ظریف زیبایی در استفاده از این روش وجود دارد. اجازه دهید چند مثال ساده را بررسی کنیم.

وقتی با مسأله‌ای درگیر می‌شوید، هدف این است که او را به زمین بنزید اما گاهی اوقات شاید لازم باشد برای غلبه یافتن بر این حریف، چیزی را فدا کنید؛ چیزی که به مانند یک طعمه، حریف را به دام اندازد. در اثبات به وسیله برهان خلف، طعمه‌ای که ما برای حریف می‌افکنیم کل حکم مسأله است!

<sup>۴</sup>مجموعه  $\{1, 2, 3, \dots\}$  را مجموعه اعداد طبیعی (natural numbers) می‌نامیم و آن را با  $\mathbb{N}$  نمایش می‌دهیم.

<sup>۵</sup>contradiction

**مثال ۱.۱.۱.** ثابت کنید اگر برای عددی طبیعی مانند  $n$  بدانیم که  $n^2$  زوج است آنگاه خود  $n$  نیز زوج است.

به برهان خلف فرض کنیم که  $n$  زوج نباشد. پس  $n$  عددی فرد است. اما می‌دانیم که حاصلضرب دو عدد فرد، عددی است فرد. لذا  $n^2$  نیز باید فرد باشد که در تناقض با فرض مسأله است. ♠

آیا روشی دیگر سراغ دارید که بتوان به وسیله آن حکم فوق را اثبات کرد؟

**مثال ۲.۱.۱.** شش کلاه داریم که پنج‌تای آنها سیاه و یکی سفید است. پنج نفر را وارد اتاقی کرده و به آنها می‌گوییم: «در اینجا شش کلاه وجود دارد و شما پنج نفر هستید. چشم‌های شما را می‌بندیم و یکی از کلاه‌ها را به دلخواه از پنجره بیرون می‌اندازیم. سپس روی سر هر یک از شما پنج نفر یک کلاه می‌گذاریم. وقتی چشم‌هایتان را باز کردیم هر کسی می‌تواند کلاه‌های افراد دیگر را ببیند و نمی‌تواند تشخیص دهد که کلاه او چه رنگی است. به اولین کسی که بتواند با ذکر دلیلی منطقی رنگ کلاه خود را اعلام کند جایزه‌ای می‌دهیم.» کلاه‌ها را روی سر افراد می‌گذاریم و چشم‌های آنها را باز می‌کنیم. پس از مکثی کوتاه فردی که از همه باهوش‌تر است رنگ کلاه خود را اعلام می‌کند. به نظر شما کلاه این شخص چه رنگی است؟ چرا؟

مسلماً کلاهی که از پنجره بیرون انداخته شده همان کلاه سفید است، چون اگر به برهان خلف فرض کنیم که یکی از کلاه‌های سیاه از پنجره بیرون انداخته شده است آنگاه باید کلاه سفید بر سر یکی از آن پنج نفر باشد و در نتیجه وقتی چشم افراد را باز کنیم چهار نفر آنها با دیدن کلاه سفید، فریاد می‌زنند و می‌گویند که کلاهشان سیاه است؛ چون آنها می‌دانند که حداکثر یک کلاه سفید در بین کلاه‌ها وجود دارد. اما چرا مکث ایجاد شد؟ زیرا کلاه سفید در بین کلاه‌ها نبود. این مطلب نشان می‌دهد که فرض خلف ما اشتباه است. یعنی کلاه همه سیاه بوده و فرد باهوش از سکوت بقیه متوجه این نکته شده است. ♠

تا وقتی مطمئن نشده‌اید که این نوع استدلال را فرا گرفته‌اید از آن نگذرید.

**مثال ۳.۱.۱.** سه نفر با نام‌های  $x$ ،  $y$  و  $z$  در کوبه‌ای از یک قطار نشسته‌اند.

فکر نکنید کسی که باهوش‌تر بوده عکس کلاه خود را در مردمک چشم دوستش دیده و رنگ کلاه خود را اعلام کرده



است!

بدون شک باید دلیلی منطقی در بین باشد!

پنجره باز است و قطار وارد تونل می شود. دودی که از لکوموتیو می آمده وارد کوپه می شود و صورت هر سه نفر سیاه می شود. وقتی قطار از تونل خارج می شود و همه جا روشن می گردد چشم این سه نفر به یکدیگر می افتد و صورت دوده ای یکدیگر را مسخره می کنند. اما پس از مدتی کوتاه، فردی که باهوش تر است متوجه می شود که صورت خودش هم سیاه شده است و دو نفر دیگر را مسخره نمی کند. چرا؟

مثلاً فرض کنید که این سه نفر



این شکلی هستند:

بنابراین هیچ کس نمی تواند تشخیص دهد که دیگری به چه کسی می خندد!

فرد باهوش را  $x$  می نامیم. بدیهی است که اگر  $x$  فکر کند به دلیل آن که صورت دو نفر دیگر دوده ای شده است باید صورت او نیز چنین باشد، هیچ منطقی در کار نیست. در حقیقت  $x$  این گونه با خود استدلال می کند: فرض کنیم صورت من دوده ای نشده باشد. در این صورت ممکن است  $y$  به  $z$  بخندد و  $z$  نیز به  $y$ . تا اینجا کار هیچ تناقضی در کار نیست. اما اگر صورت من تمیز باشد و  $y$  در حال خندیدن به  $z$  باشد، آیا نباید از خنده  $z$  تعجب کند؟ آیا در حالتی که صورت من تمیز باشد خندیدن  $z$  برای  $y$  عجیب جلوه نخواهد کرد؟ پس حتماً صورت من نیز دوده ای شده است و هر یک از  $y$  و  $z$  فکر می کنند که دیگری دارد به من می خندد. ♠

استفاده از برهان خلف هنگامی سخت می شود که ما ندانیم چه حکمی را باید اثبات کنیم. در مثال های بالا مشخص بود که حکم چیست و در نتیجه می شد تشخیص بدهیم که خلاف چه چیزی را باید فرض کنیم تا به تناقض برسیم. مثال بعدی از این نوع نیست. توجه کنید.

**مثال ۴.۱.۱.** پدرِ پسرِ پروفیسوری با پسرِ پدرِ همان پروفیسور در حال گفت و گو هستند اما هیچ یک از این دو نفر خود پروفیسور نیست. چطور چنین چیزی امکان دارد؟ (رابطه ها همگی تنی هستند.)

مسئله این است که در اینجا حکم دقیقاً مشخص نیست تا نادرست بودن آن با توجه به برهان خلف فرض شود. اجازه دهید صورت این سؤال را کمی تغییر دهیم.

پدرِ پسرِ پروفیسوری با پسرِ پدرِ همان پروفیسور در حال گفت و گو هستند اما

هر کس بتواند سه بار پشت سر هم این جمله را بگوید برنده است!

هیچ یک از این دو نفر خود پروفیسور نیست. ثابت کنید پروفیسور زن است.

اکنون راحت‌تر می‌توانیم مسأله را حل کنیم. فرض کنیم پروفیسور زن نباشد. پسر پدر پروفیسور می‌تواند برادر او باشد اما پدر پسر پروفیسور مسلماً خود پروفیسور است، چون پروفیسور مرد است. بنابراین حتماً یکی از دو نفر خود پروفیسور می‌باشد که در تناقض با فرض مسأله است. لذا پروفیسور زن است و برادر و شوهر او در حال گفت و گو با یکدیگر هستند. ♠

اجازه دهید یک مثال دیگر را با هم ببینیم.

**مثال ۵.۱.۱.** با شش چوب کبریت یکسان به اندازه واحد، چهار مثلث متساوی‌الاضلاع بسازید که ضلع هر مثلث برابر واحد باشد.

این بار هم مشکلی که وجود دارد این است که نمی‌دانیم حکم مسأله چیست تا خلاف آن را در نظر بگیریم. شاید فکر کردن به سؤال زیر آسان‌تر باشد.

ثابت کنید با استفاده از شش پاره‌خط به اندازه واحد، نمی‌توان چهار مثلث متساوی‌الاضلاع در صفحه رسم کرد که ضلع هر مثلث برابر واحد باشد.

به برهان خلف فرض کنیم چنین کاری امکانپذیر باشد. چون ۶ پاره‌خط داریم و برای رسم کردن چهار مثلث به ۱۲ پاره‌خط احتیاج داریم پس ۶ پاره‌خط کم داریم. بنابراین هر پاره‌خط باید نقش دو ضلع از دو مثلث متفاوت را ایفا کند. اما اگر هر یک از سه ضلع یک مثلث، با مثلث‌های دیگری شریک باشند آنگاه باید سه مثلث متفاوت در اطراف مثلث اولیه داشته باشیم و به این ترتیب حداقل ۹ پاره‌خط لازم داریم که با فرض وجود ۶ پاره‌خط در تناقض است.

اکنون به سؤال اصلی باز می‌گردیم. فهمیدیم که در فضای دو بعدی نمی‌توان پاسخی برای این سؤال یافت. بی‌دلیل هم نبود که در مسأله اصلی صحبت از ساختن چهار مثلث به وسیله شش چوب کبریت بود، نه رسم کردن چهار مثلث به وسیله شش پاره‌خط.

اگر بخواهیم به دنبال پاسخی در فضای سه بعدی باشیم می‌توانیم یک هرم مثلث‌القاعده را در نظر بگیریم، یعنی سه تا از چوب کبریت‌ها را روی زمین

قبل از این که سطر بعدی را بخوانید کمی در مورد سؤال فکر کنید و ببینید آیا می‌توانید آن را حل کنید.

می گذاریم و با سه تای دیگر یک شکل فضایی درست می کنیم. ♠  
 درسی که از این مثال می گیریم این است که برای حل یک مسأله نباید حکمی  
 به مسأله اضافه کنیم! تا وقتی گمان کنیم که باید مسأله را در فضای دو بعدی  
 حل کنیم به جواب نخواهیم رسید.

اما می توان مسأله های سخت تری را نیز به کمک برهان خلف حل کرد. نمونه  
 زیر را ببینید.

**مثال ۶.۱.۱.** ۱۰ سکه یک شکل داریم که آنها را به شکل یک مثلث در کنار  
 یکدیگر گذاشته ایم. یکی بالا، دوتا زیر آن، سه تا در سطر بعد و چهار تا در سطر  
 پایین.

مثلاً اینها سکه هستند! اگر  
 خوششان نمی آید خودتان بعداً  
 دور حروف، دایره بکشید تا  
 مثل سکه به نظر برسند. اما  
 فعلاً به حل مسأله فکر کنید.

$$\begin{array}{ccccccc} & & A & & & & \\ & & B & C & & & \\ & D & E & F & & & \\ G & H & I & J & & & \end{array}$$

سکه ها پشت و روی متفاوت دارند. ثابت کنید به هر طریقی سکه ها را قرار  
 دهیم، همواره می توانیم سه سکه یک شکل (هر سه رو یا هر سه پشت) در بین  
 آنها پیدا کنیم که رئوس یک مثلث متساوی الاضلاع باشند.

سکه ای که به رو قرار گرفته باشد را با  $X$  و سکه ای که به پشت است را با  $O$   
 نشان می دهیم.

بدون آن که به کلیت مسأله خللی وارد شود می توانیم فرض کنیم که سکه  $E$  به  
 رو قرار گرفته است. پس می توانیم به جای  $E$  حرف  $X$  را قرار دهیم.

حال به برهان خلف فرض کنیم که مثلث متساوی الاضلاع با سه رأس یکسان  
 وجود نداشته باشد. لذا یا  $B$  و  $C$  برابر  $O$  هستند یا یکی از آنها  $O$  و دیگری  $X$   
 است.

فرض کنیم  $B$  و  $C$  هر دو  $O$  باشند. بنابراین  $A$  نمی تواند  $O$  باشد. در نتیجه شکل

زیر را داریم.

$$\begin{array}{ccccccc} & & X & & & & \\ & & O & O & & & \\ & D & X & F & & & \\ G & H & I & J & & & \end{array}$$

اکنون باید یکی از دو سکه  $G$  یا  $J$  برابر  $O$  باشد. چون شکل کنونی متقارن است فرقی نمی‌کند که کدام یک را  $O$  در نظر بگیریم. مثلاً فرض کنیم  $G$  برابر  $O$  باشد. اگر به مثلث  $BGI$  نگاه کنیم می‌بینیم که  $I$  باید  $X$  باشد و لذا  $H$  برابر  $O$  است. پس با توجه به مثلث  $CHJ$  نتیجه می‌گیریم که  $J$  باید  $X$  باشد. بالاخره مثلث  $FII$  نتیجه می‌دهد که  $F$  برابر  $O$  است و لذا مثلث متساوی‌الاضلاع  $BFH$  دارای سه رأس  $O$  می‌باشد که متناقض با فرض ما است.

$$\begin{array}{ccccccc} & & X & & & & \\ & & O & O & & & \\ & D & X & O & & & \\ O & O & X & X & & & \end{array}$$

حالت دوم این است که یکی از  $B$  و  $C$  برابر  $O$  و دیگری برابر  $X$  باشد. بدون از دست دادن کلیت، می‌توانیم فرض کنیم که  $B$  برابر  $O$  و سکه  $C$  برابر  $X$  است. با توجه به مثلث  $CEF$  باید  $F$  برابر  $O$  باشد و اکنون مثلث  $BFH$  نتیجه می‌دهد که  $H$  برابر  $X$  است. لذا نتیجه می‌گیریم که  $J$  نیز باید  $O$  باشد.

$$\begin{array}{ccccccc} & & A & & & & \\ & & O & X & & & \\ & D & X & O & & & \\ G & X & I & O & & & \end{array}$$

حال چه  $I$  برابر  $O$  و چه برابر  $X$  باشد به تناقض می‌رسیم.

پس در هر حالت، فرض خلف غیرممکن است و لذا حکم درست می‌باشد. ♠

همه اعداد طبیعی جالب هستند!

واقعاً شما با شنیدن این جمله این شکلی نمی‌شوید؟



اثبات در صفحه بعد آمده است.

فعلاً به همین چند مثال ساده بسنده می‌کنیم.

## ۲.۱ استقرای ریاضی

به برهان خلف فرض کنیم عددی طبیعی موجود باشد که جالب نیست. در بین همه اعداد طبیعی غیرجالب کوچک‌ترین آنها را در نظر می‌گیریم. در این صورت این عدد لزوماً عددی جالب خواهد بود زیرا کوچک‌ترین عدد غیرجالب بودن خاصیت جالبی است! این تناقض فرض خلف را باطل می‌کند و لذا هر عدد طبیعی جالب است. 

فرض کنید معلمی می‌خواهد از شاگردان خود امتحان بگیرد. تعداد شاگردان  $N$  نفر است. او به آنها می‌گوید که در یک صف قرار بگیرند و آنها را از ۱ تا  $N$  شماره‌گذاری می‌کند. وقتی در مورد مسأله امتحان دادن با هر کدام از آنها صحبت می‌کند این پاسخ را می‌شنود: ”اگر نفر قبل از من امتحان دهد من نیز امتحان خواهم داد.“ بنابراین نفر  $n+1$  ام در صورتی امتحان خواهد داد که نفر  $n$  ام بپذیرد امتحان دهد. چه کاری باید انجام دهیم تا همه مجبور به امتحان دادن شوند؟

روشن است اگر بتوانیم به شیوه‌ای نفر اول را متقاعد کنیم که امتحان بدهد آنگاه نفر دوم طبق قولی که داده است باید امتحان دهد. و وقتی نفر دوم امتحان دهد نفر سوم نیز باید به قول خود عمل کند و امتحان بدهد. بدین ترتیب همه  $N$  نفری که در صف قرار دارند مجبورند امتحان دهند و در حقیقت به این روش مسأله ما حل می‌شود.

این فرآیند ساده اساس شیوه‌ای برای اثبات است که مبتنی بر اصلی موسوم به *استقرای ریاضی*<sup>۶</sup> می‌باشد. قبل از آن که این اصل را به صورت دقیق بیان کنیم اجازه دهید یک مثال ساده را بررسی کنیم.

**مثال ۱.۲.۱.** ثابت کنید به ازای هر عدد طبیعی مانند  $n$  داریم

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad P(n)$$

عبارت  $P(n)$  که در سمت راست نوشته‌ایم بدین معنی است که ما مسأله‌های خود را (همانند شاگردانی که قرار بود امتحان بدهند) شماره‌گذاری کرده‌ایم.

<sup>۶</sup>mathematical induction

بنابراین مسأله فوق در حقیقت یک سؤال نیست بلکه بی‌نهایت سؤال است که به صورت زیر در پشت سر هم صف کشیده‌اند:

$$\begin{aligned}
 1 &= \frac{1(1+1)}{2} & P(1) \\
 1+2 &= \frac{2(2+1)}{2} & P(2) \\
 1+2+3 &= \frac{3(3+1)}{2} & P(3) \\
 &\vdots \\
 1+2+\dots+n &= \frac{n(n+1)}{2} & P(n) \\
 1+2+\dots+n+(n+1) &= \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} & P(n+1) \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

این دنباله  $P(1), P(2), P(3), \dots, P(n), P(n+1), \dots$  از مسائل، همانند شاگردان ما هستند که می‌خواهیم از آنها امتحان بگیریم. فقط یک تفاوت در این بین وجود دارد که چندان هم کوچک نیست! شاگردان ما متناهی بودند (تعداد آنها  $N$  تا بود) ولی مسائل ما نامتناهی هستند. در حقیقت ما اکنون با بی‌نهایت مسأله که در برابر ما صف‌آرایی کرده‌اند مواجه شده‌ایم. اما این مطلب زیاد مهم نیست. می‌توانیم فرض کنیم که  $N$  مسأله در برابر خود داریم و قصد داریم آنها را حل کنیم. اما توجه داریم که  $N$  هر عدد طبیعی دلخواهی می‌تواند باشد.

هرگاه هر یک از افرادی که در یک صف ایستاده‌اند قول دهند که اگر ضربه‌ای به سر آنها خورد، آن را به نفر بعدی انتقال دهند، کافیس به سر نفر اول ضربه‌ای بزنید تا جنجالی به پا شود. در این صورت هیچ کس از ضربه بی‌نصیب نخواهد ماند!

اگر بتوانیم از مسائل خود قول بگیریم که هرگاه مسأله‌ای مانند مسأله  $n$  ام حل شد (شاگردی امتحان داد) آنگاه مسأله  $n+1$  ام نیز حل شود (شاگرد بعدی نیز امتحان بدهد)، آن وقت یک کار کوچک باقی می‌ماند تا با انجام آن کلیه مسائل ما حل شود. آن کار چیست؟

بله! باید به شیوه‌ای مسأله اول را حل کنیم (شاگرد اول را مجبور کنیم که امتحان بدهد). در این صورت بدون شک مسأله دوم نیز حل خواهد شد (چون

مسئله دوم از قبل به ما قول داده بود که در صورت حل شدن مسئله اول، حل شود). و چون دومی حل شود، سومی نیز حل خواهد شد؛ و این کار به همین ترتیب ادامه پیدا می‌کند.

بنابراین برای حل همه مسائل خود دو مشکل پیش رو داریم: قول گرفتن از مسائل و حل اولین مسئله.

حل اولین مسئله چیزی نیست که نگرانیش باشیم. در حقیقت  $P(1)$  به طور بدیهی برقرار است. پس اجازه دهید به مشکل دیگر بپردازیم. یعنی باید بتوانیم به گونه‌ای اثبات کنیم که اگر  $P(n)$  حل شود آنگاه  $P(n+1)$  نیز حل خواهد شد. به عبارت دیگر با فرض

$$P(n) \quad 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

باید بتوانیم

$$P(n+1) \quad 1 + 2 + \dots + n + (n+1) = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$$

را اثبات کنیم. با توجه به فرض  $P(n)$  داریم

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + n + (n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

و لذا  $P(n+1)$  برقرار است. بدین ترتیب با توجه به استقرای ریاضی مسئله ما حل شده است.<sup>۷</sup> ♠

فکر نمی‌کنید کلکی در کار باشد؟ ما برای آن که مسئله  $P(n)$  را حل کنیم آن را فرض کردیم! این اتفاق ممکن است باعث شود فکر کنید پایه‌های استقرای

<sup>۷</sup> این توضیح طولانی برای بررسی مثال بدین دلیل بود که شاید این اولین برخورد شما با استقرای ریاضی باشد. از این رو بهتر دیدیم که این مراسم معارفه را با تمام جزئیات انجام دهیم. بنابراین به سادگی از آن نگذرید. شاید لازم باشد بارها و بارها آن را بخوانید تا اولین آشنایی شما با این ترفند زیبا برای حل مسئله در خاطرتان حک شود!

ابوبکر ابن محمد ابن  
الحسین الکرجی (تولد:  
13 April 953 وفات: حدود  
1029) صورتی از استقرا را در  
استدلال‌های خود آورده است،  
گرچه توصیف صریحی از این  
اصل را ارائه نداده است. او  
حکم را برای  $n = 1$  اثبات  
کرده، سپس بر مبنای اثبات  
حالت  $n = 1$ ، حالت  $n = 2$  را  
اثبات کرده و این کار را ادامه  
داده است. گرچه این واقعاً  
استقرا نیست اما گام مهمی  
در جهت درک برهان‌های  
استقرایی می‌باشد.

ریاضی سست و بی بنیاد است. اما هرگز چنین نیست. هیچ حقه‌ای در کار نیست. گرچه ما  $P(n)$  را فرض کردیم، با این حال مسئله جدید  $P(n+1)$  را در پیش رو داشتیم.

اکنون اجازه دهید استقرای ریاضی را به شکلی دقیق‌تر بیان کنیم.

**۲.۲.۱. (اصل استقرای ریاضی)** فرض کنیم  $P(n)$  حکمی در مورد عدد طبیعی  $n$  باشد. اگر بتوانیم اثبات کنیم که درستی  $P(n)$ ، درستی  $P(n+1)$  را نتیجه می‌دهد و به علاوه بتوانیم اثبات کنیم که  $P(1)$  درست است، آنگاه حکم  $P(n)$  برای هر عدد طبیعی  $n$  درست است. ■

استقرا ممکن است به سه شکل در این کتاب ظاهر شود. در نوع اول ما برای اثبات کردن یک حکم از آن استفاده می‌کنیم که نمونه آن را در مثال بالا دیدید. در نوع دوم از استقرا استفاده می‌کنیم تا چیزی را به طور استقرایی<sup>۸</sup> تعریف کنیم. تعریف توان، چیزی از این نوع است. مثلاً برای تعریف  $2^n$  می‌توان گفت که  $2^1 = 2$  و اگر تعریف  $2^n$  را بدانیم آنگاه می‌توانیم  $2^{n+1}$  را برابر  $2 \cdot 2^n$  تعریف کنیم. شکل سومی که استقرا در آن ظاهر می‌شود، انجام یک کار به وسیله استقرا است که معمولاً آن را الگوریتم<sup>۹</sup> می‌نامند.

مثال‌هایی که خواهند آمد این سه کاربرد استقرا را روشن می‌سازند.

**مثال ۳.۲.۱. (برج هانوی)<sup>۱۰</sup>** سه میله با نام‌های  $A$ ،  $B$  و  $C$  داریم و  $n$  حلقه با اندازه‌های  $1, 2, \dots, n$  که در میله  $A$  قرار گرفته‌اند. بزرگ‌ترین حلقه پایین است و به ترتیب کوچک می‌شوند تا بالاترین حلقه که با اندازه  $1$  است. (برای آن که تصویری از وضعیت میله‌ها و حلقه‌ها داشته باشید آنها را به صورت

$$A = (1, 2, \dots, n-1, n) \quad B = () \quad C = ()$$

نمایش می‌دهیم که در این علامت‌گذاری حلقه سمت چپ بالای حلقه سمت راست قرار گرفته است.) در ابتدا میله‌های  $B$  و  $C$  خالی هستند (میله خالی را

البته گاهی اوقات استفاده غلط از استقرا نتایج نادرستی را به دست می‌دهد. این اتفاق، تقصیر اصل استقرا ریاضی نیست. معمولاً نکته ظریفی در بین هست که ما به آن توجه نمی‌کنیم. نمونه‌هایی از اثبات‌های غلط استقرایی را در حاشیه کتاب خواهیم آورد.

<sup>۸</sup>inductively

<sup>۹</sup>algorithm

<sup>۱۰</sup>Hanoi tower

با () نمایش داده‌ایم). می‌خواهیم با این حلقه‌ها یک بازی انجام دهیم. قانون بازی این است که همواره می‌توان حلقه‌ی بالاتر در یک میله را برداشت و به میله‌ای دیگر انتقال داد مشروط بر آن که هیچ وقت حلقه‌ی بزرگ‌تر روی حلقه‌ی کوچک‌تر قرار نگیرد. الگوریتمی ارائه دهید که به وسیله‌ی آن بتوان حلقه‌ها را از میله‌ی A با همان ترتیب به میله‌ی C انتقال داد

حالت  $n = 1$  و  $n = 2$  خیلی ساده است. اجازه دهید حالت  $n = 3$  را بررسی کنیم. می‌توانیم به ترتیب زیر عمل کنیم:

$$A = (1, 2, 3) \quad B = () \quad C = ()$$

$$A = (2, 3) \quad B = () \quad C = (1)$$

$$A = (3) \quad B = (2) \quad C = (1)$$

$$A = (3) \quad B = (1, 2) \quad C = ()$$

$$A = () \quad B = (1, 2) \quad C = (3)$$

$$A = (1) \quad B = (2) \quad C = (3)$$

$$A = (1) \quad B = () \quad C = (2, 3)$$

$$A = () \quad B = () \quad C = (1, 2, 3)$$

همان طور که دیده می‌شود برای  $n = 3$  حلقه می‌توان انتقال از میله‌ی A به میله‌ی C را در ۷ مرحله انجام داد.

اکنون می‌خواهیم به وسیله‌ی استقرا، الگوریتمی برای انتقال حلقه‌ها را در حالت کلی به دست آوریم. فرض کنیم می‌توانیم این کار را برای  $n$  حلقه انجام دهیم<sup>۱۱</sup> (این فرض را  $P(n)$  می‌نامیم). اکنون باید اثبات کنیم که این کار

<sup>۱۱</sup> این فرض را معمولاً فرض استقرا می‌نامیم. استقرای ریاضی به ما اجازه می‌دهد که چنین فرضی را بپذیریم.

همه اعداد طبیعی با هم



برابرند!

(از این پس قرارداد می‌کنیم که از این شکلک‌ها هنگامی استفاده کنیم که حکمی ناجور یا سخنی غیرجدی در بین باشد. بنابراین باید متوجه شده باشید که حکم فوق نمونه‌ای از یک حکم غلط است که با استدلالی نادرست -ظاهراً به شیوه‌ی استقرا- اثبات می‌شود. اثبات را در چند صفحه بعد آورده‌ایم.)

برای  $n + 1$  حلقه نیز امکانپذیر است<sup>۱۲</sup> (این حکم را نیز با  $P(n + 1)$  نشان می‌دهیم. در حقیقت ما باید از درست بودن  $P(n)$ ، درستی  $P(n + 1)$  را نتیجه بگیریم).

اکنون برای  $n + 1$  حلقه می‌توان به ترتیب زیر عمل کرد:

$$A = (1, 2, \dots, n, n + 1) \quad B = () \quad C = ()$$

...

$$A = (n + 1) \quad B = (1, 2, \dots, n) \quad C = ()$$

$$A = () \quad B = (1, 2, \dots, n) \quad C = (n + 1)$$

...

$$A = () \quad B = () \quad C = (1, 2, \dots, n, n + 1)$$

فرض کنیم  $P(n)$  این حکم باشد که اگر  $\max(a, b) = n$  آنگاه  $a = b$ . با فرض درستی  $P(n)$  فرض کنیم  $\max(a, b)$  برابر  $n + 1$  باشد. بنابراین ما کم‌ترین  $a - 1$  و  $b - 1$  برابر  $n$  است و لذا طبق فرض استقرا داریم  $a - 1 = b - 1$ . پس  $a = b$ . بدیهی است که  $P(1)$  نیز برقرار است. 

علامت ... در بین سطر اول و دوم نشان می‌دهد که باید چند مرحله در این بین انجام شود.

این که تعداد این مراحل چند تا است مشخص نیست و این که این مراحل چگونه باید انجام شوند هم مشخص نیست، زیرا بنابر فرض استقرا، ما در حقیقت پذیرفته‌ایم که این کار در چند مرحله امکان‌پذیر است. لذا با طی عملیاتی نامعلوم (که بنابر فرض استقرا ممکن است)  $n$  حلقه ۱ تا  $n$  را به میله  $B$  انتقال می‌دهیم. پس از آن حلقه ۱ تا  $n + 1$  ام را به میله  $C$  می‌بریم (این تمام کاری است که ما وظیفه داریم انجام دهیم تا گذر از مرحله  $n$  ام به مرحله  $n + 1$  ام شکل بگیرد). سپس، طی مراحل که مجدداً معلوم نیست چگونه صورت می‌گیرد حلقه‌های ۱ تا  $n$  را از میله  $B$  به میله  $C$  انتقال می‌دهیم.

بدین ترتیب اثبات کرده‌ایم که اگر انتقال  $n$  حلقه ممکن باشد آنگاه انتقال  $n + 1$  حلقه نیز ممکن است. تا اینجا کار هیچ اتفاق مهمی رخ نداده است چون ما صرفاً با فرض حل شدن مسئله قبلی، راه حل مسئله بعدی را می‌دانیم. اما اگر

<sup>۱۲</sup> این قسمت را معمولاً حکم استقرا می‌نامند.

اکنون راه حل مسئله اول را بدانیم (که به طور بدیهی می دانیم) آنگاه راه حل مسئله دوم را هم در می یابیم چون طبق روش ما با معلوم بودن عملیات مرحله قبلی می توانیم عملیات لازم را برای مرحله بعد بیابیم. بدین ترتیب می توان برای هر تعداد حلقه مسئله را حل کرد. ♠

همان گونه که مشاهده می شود، اثبات هایی استقرایی از دو قسمت تشکیل شده اند؛ اول اثبات درستی  $P(n+1)$  با فرض درست بودن  $P(n)$ ، و دوم اثبات  $P(1)$ . به بیان ریاضی می توان گفت

$$P(n) \Rightarrow P(n+1)$$

$$P(1)$$

اصطلاح استقرای ریاضی در سال ۱۸۳۸ توسط **دمرگان**، بدون آن که وضوحی بر پایه های مستحکم آن باشد، معرفی و تعریف شد.

**Augustus De Morgan**

27 June 1806 - 18 March 1871



درستی  $P(n)$  را برای هر  $n$  نتیجه می دهد.

در عبارت فوق فرض  $P(n)$  را فرض استقرا، نتیجه گیری  $\Rightarrow$  را گام استقرا، حکم  $P(n+1)$  را حکم استقرا و  $P(1)$  را شروع استقرا می نامیم. مشخص است که قسمت سخت اثبات استقرایی همان گام استقرا می باشد. هر چه نمونه های بیشتری را مشاهده کنید تبهرتان در این قسمت بیشتر خواهد شد. بدیهی است نباید توقع داشته باشید که به این زودی تمام ترفندهای اثبات به وسیله استقرا را فرا گیرید.

سؤالی که در مورد مثال **برج هانوی** پیش می آید این است که آیا الگوریتمی که ما پیدا کردیم، کمترین تعداد گام را به کار می برد؟ و اگر چنین است این عدد برابر چند است؟

**قضیه ۴.۲.۱.** کمترین تعداد مراحل برای انتقال  $n$  حلقه در برج هانوی برابر  $2^n - 1$  است و این کار به وسیله الگوریتمی که در بالا آمد امکانپذیر است.

**برهان.** حکم قضیه را  $P(n)$  می نامیم و فرض می کنیم که  $P(n)$  درست باشد (فرض استقرا). حال فرض کنیم  $n+1$  حلقه در میله  $A$  قرار گرفته است. هنگامی می توانیم با حلقه  $n+1$  بازی کنیم که هیچ حلقه ای بالای آن نباشد و

در صورتی می‌توانیم این حلقه را به میله‌ای دیگر انتقال دهیم که یک میله خالی داشته باشیم چون حلقه ۱ تا  $n+1$  نمی‌تواند روی حلقه‌ای دیگر قرار گیرد. اما طبق فرض استقرا برای آن که حلقه‌های ۱ تا  $n$  را به میله‌ای دیگر انتقال دهیم و یک میله خالی باشد حداقل  $2^n - 1$  حرکت لازم است. پس طبق فرض استقرا با  $2^n - 1$  حرکت حلقه‌های ۱ تا  $n$  را به میله  $B$  انتقال می‌دهیم. با یک حرکت دیگر حلقه ۱ تا  $n+1$  را به میله  $C$  انتقال می‌دهیم. اکنون باید حلقه‌های ۱ تا  $n$  را به میله  $C$  انتقال داد و مجدداً این کار به وسیله  $2^n - 1$  حرکت ممکن است.

پس تعداد حرکت‌های لازم برای انتقال  $n+1$  حلقه، برابر است با

$$(2^n - 1) + 1 + (2^n - 1)$$

و عدد اخیر برابر  $2^{n+1} - 1$  است. بنابراین حداقل با  $2^{n+1} - 1$  حرکت می‌توان  $n+1$  حلقه را انتقال داد (حکم استقرا). لذا بدین ترتیب گام استقرای می‌شود. اکنون باقی می‌ماند که حکم را برای  $n = 1$  اثبات کنیم (شروع استقرا). اما وقتی ۱ حلقه داشته باشیم بدیهی است که با  $2^1 - 1 = 1$  حرکت می‌توانیم این کار را انجام دهیم. ■

قضیه فوق در حقیقت هر سه نوع مختلف ظاهر شدن استقرا در احکام را نشان می‌دهد و از این لحاظ از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. اثباتی که برای آن ارائه شد یک اثبات استقرایی است، روشی که برای انتقال حلقه‌ها معرفی شد یک الگوریتم استقرایی است و تعداد مراحل لازم نمونه‌ای از یک تعریف استقرایی می‌باشد. اگر تعداد مراحل لازم برای انتقال  $n$  حلقه را با  $a_n$  نمایش دهیم، طبق آنچه اثبات شد داریم  $a_{n+1} = 2a_n + 1$ .

تعبیر دیگری که برای استدلال‌های استقرایی ارائه می‌شود به شرح زیر است.

فرض کنیم  $N$  دومینو<sup>۱۳</sup> را پشت سر هم چیده‌ایم به طوری که هر دومینو می‌تواند به دومینوی پس از خود ضربه بزند (گام استقرا). در این صورت اگر ضربه‌ای

<sup>۱۳</sup> domino. مهره‌هایی به شکل یک مستطیل  $1 \times 2$  که از دو مربع  $1 \times 1$  تشکیل شده‌اند و بازی‌های مختلفی را می‌توان توسط آنها انجام داد.

معمای برج هانوی اولین بار توسط لوکا، ریاضیدان فرانسوی، در سال ۱۸۸۳ ابداع شد. افسانه‌ای در این باب وجود دارد که می‌گوید در یک معبد هندی اتاقی هست که در آن ۶۴ حلقه طلایی قرار داده‌اند و یک فرد مقدس برهمایی وظیفه دارد که طبق قانون بازی، حلقه‌ها را انتقال دهد. بر اساس این افسانه، هنگامی که حلقه‌ها انتقال یابند کار دنیا به پایان خواهد رسید.

**François Edouard**

**Anatole Lucas**

4 April 1842 - 3 Oct 1891



روش‌های دیگری برای حل معمای برج هانوی وجود دارد که به ظاهر استقرایی نیستند. مثلاً می‌توان طبق دو دستور زیر عمل کرد:

۱. کوچک‌ترین حلقه را به میله‌ای که آخرین بار آنجا نبوده ببرید.

۲. طبق قانون بازی عمل کنید (در این حالت هیچ کار دیگری امکان‌پذیر نیست).

به اولین دومینو بزیم این ضربه به دومینوهای بعدی انتقال پیدا می‌کند و همه آنها فرو می‌ریزند. اگر هر یک از دومینوها را به عنوان یکی از  $P(n)$  ها در نظر بگیریم، با پشت سر هم گذاشتن آنها، در حقیقت گام‌های استقرایی برداشته می‌شود و با ضربه زدن به اولین دومینو (شروع استقرا) همه دومینوها می‌ریزند و در حقیقت همه مسأله‌های  $P(n)$  ما حل می‌شوند. نکته مهم این است که ما باید به قدری هنرمندانه این مهره‌ها را در پی یکدیگر بچینیم تا به زیبایی به آنچه می‌خواهیم برسیم. نگران نباشید. به زودی این تبحر را پیدا می‌کنید. مطمئن باشید!

**مثال ۵.۲.۱.**  $n$  نفر بیرون یک اتاق ایستاده‌اند. اتاق در ابتدا خالی است. نگهبانی در کنار در ایستاده است و هر بار که در را باز می‌کند یا یک نفر حق دارد وارد اتاق شود یا یک نفر (در صورت وجود) از اتاق خارج شود (اما نمی‌تواند یک نفر را وارد و همزمان یک نفر را خارج کند). ثابت کنید نگهبان می‌تواند طوری عمل کند که همه حالات ممکن حضور افراد در اتاق هر کدام دقیقاً یک بار ایجاد شود.

اگر در مسأله برج هانوی هر یک از حرکت‌ها تنها یک ثانیه زمان ببرد، آنگاه برای انتقال ۶۴ حلقه طلایی در افسانه برهمایی، چند ثانیه وقت لازم است؟ یعنی چند سال تا پایان دنیا باقی مانده است؟



اجازه دهید ابتدا مسأله را برای حالت  $n = 3$  بررسی کنیم. سه نفری را که بیرون اتاق ایستاده‌اند با ۱، ۲ و ۳ نمایش می‌دهیم. در ابتدا اتاق خالی است که با علامت  $\phi$  نمایش داده می‌شود. داریم

$$\phi \rightarrow 1 \rightarrow 12 \rightarrow 2 \rightarrow 23 \rightarrow 123 \rightarrow 13 \rightarrow 3.$$

اکنون می‌توان در مورد حالت  $n = 4$  به دو روش فکر کرد. روش اول این است که مسأله ۴ نفر را اساساً از ابتدا حل کنیم و به نتیجه‌ای که در مورد ۳ نفر به دست آورده‌ایم توجهی نکنیم. گرچه این کار باعث حل مسأله خواهد شد اما نمی‌تواند در ایجاد گام استقرایی کمکی بکند. روش دوم این است که از مسأله حل شده در حالت  $n = 3$  استفاده کنیم و مسأله  $n = 4$  را مورد بررسی قرار دهیم. ما روش دوم را بر می‌گزینیم تا دومینوهای ما در پی یکدیگر صف‌آرایی کنند.

اگر ۴ نفر بیرون اتاق ایستاده باشند می‌توانیم ابتدا ۳ نفر آنها را در نظر بگیریم و به فرد شماره ۴ کاری نداشته باشیم. سپس در مورد نفر چهارم تصمیم می‌گیریم. در این صورت می‌توان پاسخ زیر را پیدا کرد.

$$\begin{aligned} \phi \rightarrow 1 \rightarrow 12 \rightarrow 2 \rightarrow 23 \rightarrow 123 \rightarrow 13 \rightarrow 3 \\ \rightarrow 34 \rightarrow 134 \rightarrow 1234 \rightarrow 234 \rightarrow 24 \rightarrow 124 \rightarrow 14 \rightarrow 4. \end{aligned}$$

این پاسخ شیوه‌ای برای اثبات گام استقرا را به ذهن القا می‌کند. اگر فهرست همه حالات ممکن مرحله  $n$  ام را نوشته باشیم و فرد شماره  $n+1$  ام به جمع اضافه شود، می‌توانیم همان فهرست را در جهت معکوس بنویسیم و نفر  $n+1$  ام را به اتاق اضافه کنیم. توجه کنید که وضعیت‌های نوشته شده در سطر دوم عبارت بالا، همان وضعیت‌های سطر اول است که در جهت عکس نوشته شده و عدد ۴ هم به آنها اضافه شده است.

بنابراین می‌توانیم اثباتی استقرایی به شرح زیر ارائه دهیم:

فرض کنیم فهرست مراحل برای  $n$  نفر به صورت

$$\phi \rightarrow S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow \dots \rightarrow S_{2^n-2} \rightarrow S_{2^n-1}$$

باشد (فرض استقرا). ادعا می‌کنیم که در این صورت فهرست مراحل برای  $n+1$  نفر به صورت

$$\begin{aligned} \phi \rightarrow S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow \dots \rightarrow S_{2^n-2} \rightarrow S_{2^n-1} \rightarrow \\ S_{2^n-1, n+1} \rightarrow S_{2^n-2, n+1} \rightarrow \dots \rightarrow S_{1, n+1} \rightarrow n+1 \end{aligned}$$

است (حکم استقرا). برای آن که این ادعا را اثبات کنیم از فرض استقرا کمک می‌گیریم. با توجه به فرض استقرا، نگهبان در سطر اول به وظیفه فوق عمل کرده است و چون سطر دوم نیز همان سطر اول (در خلاف جهت، با یک  $n+1$  اضافی) است، پس در سطر دوم نیز نگهبان به وظیفه خود عمل کرده است. همچنین توجه داریم که از مرحله آخر سطر اول (یعنی  $S_{2^n-1}$ ) به مرحله

همیشه نکته مهم در اثبات‌های استقرایی توجه به الگوی موجود بین گام‌های اولیه است. اگر بتوانید این الگو را ببینید همه چیز را برای پیمودن گام استقرا دریافته‌اید.

در ورای اعداد طبیعی، عمل جمع، عمل ضرب و استقرای ریاضی به گونه‌ای شهودی واضح هستند.

**Luitzen Egbertus**

**Jan Brouwer**

27 Feb 1881 - 2 Dec 1966



اول سطر دوم (یعنی  $S_{n-1, n+1}$ ) نیز قانون نگهبان به درستی رعایت شده است. نکته دیگری که باید توجه کرد این است که در دو سطر ارائه شده بالا همه حالات ممکن دقیقاً یک بار ایجاد شده‌اند زیرا با توجه به فرض استقرا در سطر اول هر حالت برای  $n$  نفر دقیقاً یک بار ایجاد شده است و از آنجایی که حضور افراد در اتاق از دو نوع (بدون  $n+1$  و دارای  $n+1$ ) است پس در سطر دوم نیز همه حالات دارای  $n+1$  دقیقاً یک بار ایجاد می‌شود.

اکنون که گام استقرای طی شد کافی است شروع استقرا را انجام دهیم. روشن است که برای  $n=1$  پاسخ  $\phi \rightarrow 1$  را داریم.

نکته دیگری نیز در این بین اثبات شد! این که تعداد کل حالات برای  $n$  نفر برابر  $2^n$  می‌باشد<sup>۱۴</sup>. این مطلب نیز اثباتی استقرایی دارد.

برای  $n=1$  تعداد حالات برابر  $2^1 = 2$  است و طبق روش ما هر بار تعداد مراحل دو برابر می‌شود. ♠

مثال فوق نیز نمونه‌ای از اثبات استقرایی، الگوریتم استقرایی و تعریف استقرایی می‌باشد.

حکم جالب زیر از این مثال نتیجه می‌شود.

**قضیه ۶.۲.۱.** فرض کنیم  $V$  مجموعه همه کدهای  $n$  رقمی با ارقام ۰ و ۱ باشد. همواره می‌توان اعضای  $V$  را در یک فهرست مرتب کرد به طوری که هر دو کد متوالی در فهرست دقیقاً در یک مکان متفاوت باشند.

**برهان.** فرض کنیم  $a_1 a_2 \dots a_n$  کدی دلخواه باشد. مکان‌هایی مانند  $i$  که مقدار  $a_i$  برابر ۱ است را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم این مکان‌ها عبارت باشند از  $i_1, i_2, \dots, i_k$ . در این صورت کد  $a_1 a_2 \dots a_n$  را با وضعیتی که افراد  $i_1, i_2, \dots, i_k$  در اتاق حضور دارند متناظر می‌کنیم<sup>۱۵</sup>. بدین ترتیب اگر فهرست مراحل

<sup>۱۴</sup> این عدد همان تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه افراد یعنی  $\{1, 2, \dots, n\}$  می‌باشد. البته در حقیقت روش ما اثباتی برای این امر است که تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه  $n$  عضوی برابر  $2^n$  است. می‌توانید اثبات این مسأله را در حاشیه کنار ببینید.

<sup>۱۵</sup> مثلاً اگر  $n=7$  و کد ما به صورت ۰۰۱۰۱۱۱ باشد آنگاه مکان‌های ۳، ۵، ۶ و ۷ برابر ۱

فرض کنیم تعداد زیرمجموعه‌های هر مجموعه  $n$  عضوی برابر  $2^n$  باشد و مجموعه  $n+1$  عضوی  $X$  داده شده باشد. عضو ثابتی مانند  $a$  را از  $X$  در نظر می‌گیریم. زیرمجموعه‌های  $X$  بر دو نوع هستند؛ یا  $a$  را دارند یا ندارند. هر کدام از اینها بنابر فرض استقرا  $2^n$  عضو دارد و لذا تعداد کل زیرمجموعه‌ها برابر  $2^{n+1}$  است. به علاوه بدیهی است که هر مجموعه  $n=1$  عضوی، دو زیرمجموعه دارد.

حضور افراد در اتاق را به روش مثال فوق بنویسیم و کدهای نظیر آنها را فهرست کنیم. آنگاه هر دو کد متوالی دقیقاً در یک مکان تفاوت دارند چون یا یک نفر از اتاق خارج می‌شود (مکانی که ۱ است به ۰ تبدیل می‌گردد) یا یک نفر وارد می‌شود (مکانی که ۰ است به ۱ تبدیل می‌گردد). ■

مثلاً اگر فهرست سه نفری

$$\phi \rightarrow 1 \rightarrow 12 \rightarrow 2 \rightarrow 23 \rightarrow 123 \rightarrow 13 \rightarrow 3$$

را در نظر بگیریم و کدهای نظیر را بنویسیم، داریم

$$000 \rightarrow 100 \rightarrow 110 \rightarrow 010 \rightarrow 011 \rightarrow 111 \rightarrow 101 \rightarrow 001.$$

توجه کنید که طبق روش ما همواره آخرین وضعیت اتاق حالتی است که فقط شخص  $n$  در اتاق حضور دارد. بنابراین اولین کد به صورت  $00 \dots 00$  و آخرین کد به صورت  $00 \dots 01$  است. لذا می‌توان آخرین کد را نیز به اولین کد وصل کرد و در حقیقت می‌توانیم اعضای  $V$  را دور یک دایره بنویسیم و بین هر دو عضو متوالی یک علامت  $\rightarrow$  بگذاریم.

کسانی که با نظریه گراف آشنایی دارند می‌دانند که مجموعه  $V$  در حقیقت همان مجموعه رئوس گراف ابرمکعب  $Q_n$  است و آنچه در اینجا آمد همیلتنی بودن آن را اثبات می‌کند.

هنوز هم بد نیست مثال‌های بیشتری را تجربه کنیم.

**مثال ۷.۲.۱.** یک مربع  $n \times n$  داریم که از  $n^2$  مربع  $1 \times 1$  تشکیل شده است. چند مربع می‌توان در این مربع پیدا کرد که از مربع‌های  $1 \times 1$  تشکیل شده باشد؟

ابتدا ببینیم برای حالت  $n = 3$  چه اتفاقی می‌افتد. در یک مربع  $3 \times 3$  تعداد مربع‌های  $1 \times 1$  برابر ۹، تعداد مربع‌های  $2 \times 2$  برابر ۴ و تعداد مربع‌های  $3 \times 3$  برابر ۱ است. بنابراین تعداد کل مربع‌ها برابر است با ۱۴.

اکنون اگر یک مربع  $4 \times 4$  را در نظر بگیریم چند مربع جدید اضافه می‌شود؟ تعداد مربع‌های  $1 \times 1$  جدید برابر است با ۷. در حقیقت یک ستون و یک سطر اضافی داریم که هرکدام ۴ مربع جدید دارند و چون یک مربع در این سطر و ستون مشترک است، ۷ مربع جدید داریم.

هستند. پس ما کد ۰۰۱۰۱۱۱ را با حالتی که افراد ۳، ۵، ۶ و ۷ در اتاق حضور دارند متناظر می‌کنیم.

هر عدد فرد بزرگ‌تر از ۱ اول  
  
 است!  
 زیرا ۳ اول است، ۵ اول است،  
 ۷ اول است، ...

اما چگونه می‌توان تعداد کل مربع‌های جدید را شمرد؟ اگر برای هر مربع جدید، تعداد مربع‌هایی که این مربع در آنها استفاده شده است را بشمریم و آنها را جمع بزنیم (البته اگر مواظب باشیم که هیچ مربعی تکراری شمرده نشود) آنگاه می‌توانیم تعداد کل مربع‌های جدید را به دست آوریم. اجازه دهید این کار را در حالت کلی انجام دهیم.

پس فرض کنیم تعداد مربع‌های یک مربع  $n \times n$  را می‌دانیم و می‌خواهیم تعداد کل مربع‌ها را در یک مربع  $(n+1) \times (n+1)$  به دست آوریم. تعداد مربع‌ها در مرحله  $n$  ام را با  $a_n$  و در مرحله  $n+1$  ام را با  $a_{n+1}$  نمایش می‌دهیم.

وقتی مربع  $n \times n$  را به یک مربع  $(n+1) \times (n+1)$  تبدیل می‌کنیم، یک ستون در سمت راست و یک سطر در پایین اضافه می‌شود. مربع‌های ستون سمت راست را از بالا به پایین ۱، ۲، ...،  $n+1$  و مربع‌های سطر پایین را از چپ به راست با  $1'$ ،  $2'$ ، ...،  $(n+1)'$  نمایش می‌دهیم. توجه داریم که مربع  $n+1$  همان مربع  $(n+1)'$  است.

برای آن که تعداد مربع‌های جدید را بشماریم توجه می‌کنیم که هر یک از مربع‌های شماره‌گذاری شده در چند مربع جدید ظاهر می‌شوند. اما برای آن که مطمئن باشیم مربع‌های جدید را تکراری نشمرده‌ایم، برای هر مربعی مانند  $i$  یا  $i'$  که در نظر می‌گیریم، فقط مربع‌هایی را می‌شماریم که مربع مورد نظر ما در گوشهٔ پایین سمت راست آنها ظاهر شده باشد.

آیا می‌توانید تعداد مستطیل‌های  
 موجود در یک مستطیل  $n \times m$   
 را بشمارید؟ فراموش نکنید که  
 شعار ما در کتاب حاضر این  
 است: شمردنی‌ها را بشمار!

بنابراین مربع ۱ فقط ۱ مربع جدید به وجود می‌آورد، مربع ۲ باعث به وجود آمدن ۲ مربع جدید خواهد شد و به همین ترتیب مربع  $n+1$  تعداد  $n+1$  مربع جدید را به وجود می‌آورد. به همین ترتیب مربع  $1'$  فقط ۱ مربع جدید به وجود می‌آورد، مربع  $2'$  باعث به وجود آمدن ۲ مربع جدید خواهد شد و  $n$  مربع جدید نیز به وسیلهٔ مربع  $n'$  حاصل می‌شود. توجه داریم که  $(n+1)'$  همان  $n+1$  است که تعداد مربع‌های جدید آن قبلاً شمرده شد.

بنابراین تعداد کل مربع‌های جدید برابر است با

$$(1 + 2 + \dots + n + (n+1)) + (1 + 2 + \dots + n).$$

اما با توجه به مثال ۱.۲.۱ این مقدار برابر است با

$$2(1 + 2 + \dots + n) + (n + 1) = n(n + 1) + (n + 1) = (n + 1)^2.$$

بنابراین  $a_{n+1} = a_n + (n + 1)^2$ . این رابطه، مقدار  $a_n$  را به طور استقرایی تعریف می‌کند و از آنجایی که می‌دانیم  $a_1 = 1$  می‌توانیم مقادیر بعدی  $a_n$  را بیابیم. در حقیقت داریم

$$a_n = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2.$$

می‌توان این مطلب را به استقرا اثبات کرد. اگر عبارت فوق برای  $a_n$  درست باشد آنگاه

$$a_{n+1} = a_n + (n + 1)^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n + 1)^2$$

و چون شروع استقرا درست است پس حکم برقرار می‌باشد. ♠

می‌توان مقدار  $a_n$  را که در مثال بالا پیدا شد به طور صریح مشخص کرد. مثال بعد را ببینید.

**مثال ۸.۲.۱.** ثابت کنید به ازای هر عدد طبیعی مانند  $n$  داریم

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

حکم فوق را  $P(n)$  می‌نامیم و فرض می‌کنیم که  $P(n)$  برقرار باشد (فرض استقرا). در این صورت داریم

روشی که مثلاً برای به دست آوردن  $\sum_{i=1}^n i^3$  انجام می‌دهند این است که  $\sum_{i=1}^{n+1} i^4$  را به صورت  $\sum_{i=0}^n (i+1)^4$  می‌نویسند. این ترفند می‌تواند برای محاسبه  $\sum_{i=1}^n i^k$  به شیوه‌ای استقرایی مفید باشد.

$$\begin{aligned} & 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n + 1)^2 \\ = & \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n + 1)^2 \\ = & \frac{(n+1)(n(2n+1) + 6(n+1))}{6} \\ = & \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} \\ = & \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \\ = & \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}. \end{aligned}$$

و این همان  $P(n+1)$  است. بنابراین گام استقرا طی شد. اکنون بدیهی است که  $P(1)$  نیز درست است (شروع استقرا) و لذا حکم برقرار است. ♠

مشکلی که در روش فوق وجود دارد این است که اگر حکم را بدانیم می‌توانیم آن را به استقرا اثبات کنیم. مثلاً اگر سؤال بعدی این باشد که مقدار  $1^3 + 2^3 + \dots + n^3$

برابر چند است، به روش فوق نمی‌توانیم پاسخی به آن بدهیم. اما اگر حکم را به صورت زیر بیان کنند به وسیله استقرا قابل اثبات است.

**مثال ۹.۲.۱.** ثابت کنید به ازای هر عدد طبیعی مانند  $n$  داریم

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left( \frac{n(n+1)}{2} \right)^2 = (1 + 2 + \dots + n)^2.$$

بد نیست به عنوان تمرین این کار را خودتان انجام دهید. اکنون دیگر باید توانایی انجام این کار را در خود یافته باشید. ♠

آن قدر مثال‌های جالب برای استقرا زیاد است که حیف است ناگفته بمانند.

**مثال ۱۰.۲.۱.** (مسئله ژوزفوس<sup>۱۶</sup>)  $n$  نفر دور یک میز دایره‌ای شکل نشسته‌اند. این افراد در یک گروه سری فعالیت می‌کنند و متوجه شده‌اند یک خائن در بین آنهاست که باعث شده گروه آنها لو برود. از این رو همگی به این نتیجه می‌رسند که باید خود را بکشند! اما از آنجایی که مشخص نیست چه کسی خائن است با یکدیگر قرار می‌گذارند که مراسم خودکشی طبق قاعده‌ای مشخص انجام شود. آنها افراد دور میز را به ترتیب در جهت حرکت عقربه‌های ساعت از ۱ تا  $n$  شماره‌گذاری می‌کنند. قرار بر این است که از فرد شماره ۲ شروع کنند. این فرد خودکشی می‌کند و نفر بعد از آن باقی می‌ماند. سپس نفر سوم خودکشی می‌کند و نفر چهارم باقی می‌ماند. این کار را ادامه می‌دهند و هر بار از بین افرادی که باقی مانده‌اند، یکی در میان افراد را از بین می‌برند. سؤال این است که در پایان شماره کسی که باقی می‌ماند چه ارتباطی با  $n$  دارد؟

<sup>۱۶</sup> Josephus problem

مراقب باشید! لازم نیست این مسئله را به طور عملی انجام دهید. همین که به صورت تئوری در مورد آن فکر کنید کافیست!



برای روشن شدن مسأله اجازه دهید که حالت  $n = ۱۳$  را با هم بررسی کنیم. در دور اول افراد ۲، ۴، ۶، ۸، ۱۰ و ۱۲ از بین می‌روند. اکنون نفر بعدی که باید از بین برود فرد شماره ۱ است. اما نفر بعدی که زنده مانده شماره ۳ و پس از آن شماره ۵ است و چون قرار بوده که *از بین افراد باقی مانده یکی* در میان افراد از بین بروند پس بعد از ۱ نوبت ۵ است. بدین ترتیب پس از ۵ نوبت ۹ و پس از آن نوبت ۱۳ است.

اکنون افراد ۳، ۷ و ۱۱ باقی مانده‌اند. لذا بعد از ۱۳ نوبت ۷ و پس از آن نوبت ۳ است. در نتیجه فردی که در پایان باقی می‌ماند شماره ۱۱ می‌باشد.

اگر شماره فردی را که در انتها باقی می‌ماند با  $J_n$  نمایش دهیم با یک محاسبه ساده می‌توان چند مقدار اولیه  $J_n$  را پیدا کرد. مثلاً ۱۵ مقدار اولیه  $J_n$  عبارتند از

$$\begin{aligned} J_1 &= 1, \\ J_2 &= 1, J_3 = 3 \\ J_4 &= 1, J_5 = 3, J_6 = 5, J_7 = 7, \\ J_8 &= 1, J_9 = 3, J_{10} = 5, J_{11} = 7, J_{12} = 9, J_{13} = 11, \\ J_{14} &= 13, J_{15} = 15. \end{aligned}$$

روشی سراغ دارید که به وسیله آن بتوانید حکم استقرایی مورد نظر خود را حدس بزنید؟ شاید پیمودن چند گام اولیه در مسأله، برای یافتن حکمی استقرایی بد نباشد.

چیزی که در ابتدا به چشم می‌خورد این است که  $J_{2^m} = 1$ . این حدس را به وسیله استقرا اثبات می‌کنیم.

فرض کنیم  $J_{2^m} = 1$  (فرض استقرا). حال اگر  $2^{m+1}$  نفر دور میز نشسته باشند، در دور اول شماره‌های زوج از بین می‌روند و لذا نیمی از آنها که با شماره فرد هستند باقی می‌مانند. بنابراین پس از دور اول  $2^m$  نفر دور میز داریم و مجدداً به جای اول خود بازگشته‌ایم. اما طبق فرض استقرا اگر  $2^m$  نفر دور میز باشند نفر اول میز باقی می‌ماند. بنابراین با ادامه کار باید نفر اول باقی بماند. بدین ترتیب گام استقرا طی شد. به علاوه بدیهی است که اگر ۱ نفر داشته باشیم آنگاه نفر

اول باقی می ماند (شروع استقرا). پس به استقرا اثبات کردیم که  $J_{2^m} = 1$ .

اکنون مسأله را در حالت کلی حل می کنیم. فرض کنیم  $n$  نفر دور میز نشسته باشند. می توانیم بنویسیم  $n = 2^m + k$  که در آن  $0 \leq k < 2^m$ ، یعنی  $m$  بزرگ ترین مقدار ممکن را دارد<sup>۱۷</sup>. حال  $k$  نفر را از بین می بریم. بدین ترتیب شماره های ۲، ۴، ...،  $2k$  خط می خورند و هنوز به دور بعدی میز نرسیده ایم چون  $2k < n$ . بدین ترتیب تعداد افرادی که دور میز باقی مانده اند برابر  $n - k = 2^m$  است و ما در جایی قرار گرفته ایم که نفر اول از نظر ما شخص شماره  $2k + 1$  می باشد. اما طبق آنچه در بالا اثبات کردیم هرگاه  $2^m$  نفر دور میز باشند نفر اول (که از نظر ما شخص شماره  $2k + 1$  است) در پایان باقی خواهد ماند. بنابراین می توان گفت که  $J_{2^m+k} = 2k + 1$ . ♠

**قضیه ۱۱.۲.۱.** فرض کنیم  $c_m c_{m-1} \dots c_0$  نمایش  $n$  در مبنای ۲ باشد و  $J_n$  شماره شخصی باشد که در مسأله ژوزفیوس در پایان باقی می ماند. در این صورت نمایش  $J_n$  در مبنای ۲ عبارتست از  $c_m c_{m-1} \dots c_0 c_m$ .<sup>۱۸</sup>

**برهان.** چون  $c_m c_{m-1} \dots c_0$  نمایش  $n$  در مبنای ۲ است پس  $c_m$  حتماً برابر ۱ است و در حقیقت  $n = 2^m + k$  که نمایش  $k$  در مبنای ۲ عبارتست از  $c_{m-1} \dots c_0$ . اکنون طبق آنچه در مثال بالا گفته شد داریم  $J_n = 2k + 1$ . اما اگر  $c_{m-1} \dots c_0$  نمایش  $k$  در مبنای ۲ باشد آنگاه نمایش  $2k$  برابر است با  $c_{m-1} \dots c_0$  و لذا نمایش  $2k + 1$  برابر  $c_{m-1} \dots c_0 1$  می باشد. اما طبق توضیحی که دادیم  $c_m = 1$  و لذا  $c_m c_{m-1} \dots c_0 1 = c_m c_{m-1} \dots c_0 c_m$ . ■

مسأله ژوزفیوس تعمیم های جالبی دارد. مثلاً می توانیم به جای این که افراد را یکی در میان از بین ببریم (یعنی نفر دوم، چهارم، ششم، ... از بین بروند) افراد را  $r$  تا در میان خط بزنیم (یعنی نفر  $r$  ام،  $2r$  ام،  $3r$  ام، ... از بین روند). همچنین می توانیم به جای آن که فقط نفر آخر را تعیین کنیم، نفر ماقبل آخر یا

<sup>۱۷</sup> مثلاً برای  $n = 13$  می توان نوشت  $13 = 2^3 + 5$ ، یعنی  $m = 3$  و  $k = 5$ .

<sup>۱۸</sup> مثلاً چون  $1101$  نمایش  $13$  در مبنای ۲ است، طبق حکم قضیه، برای محاسبه  $J_{13}$  باید رقم ۱ را از سمت چپ این عدد برداشته و به سمت راست آن ببریم. لذا  $1011$  نمایش  $J_{13}$  در مبنای ۲ است، یعنی  $J_{13} = 11$ .

اگر از مباحث چیز نمی دانید با خیال راحت از این قضیه بگذرید. قرار نیست در دور اول مطالعه کتاب، همه چیز را یاد بگیرید. اما فراموش نکنید بالاخره باید روزی به این قضیه بازگردید. پس چرا امروز آن روز نباشد؟

$\ell$  تا مانده به آخر را تعیین کنیم. اساس حل این مسائل نیز استفاده از استقرای ریاضی است که برای کوتاه شدن بحث از آنها صرفنظر می‌کنیم. به عنوان یک تمرین خوب می‌توانید در مورد این گونه سؤال‌ها فکر کنید.

**مثال ۱۲.۲.۱. (مسأله کاتالان<sup>۱۹</sup>)**  $n$  متغیر  $a_1, a_2, \dots, a_n$  داریم. می‌خواهیم این متغیرها را در یکدیگر ضرب کنیم. برای نشان دادن عملیات ضرب باید پرانتزگذاری کنیم زیرا در هر عمل ضرب فقط می‌توان دو عدد یا دو عبارت را در یکدیگر ضرب کرد. به چند طریق می‌توان پرانتزگذاری را انجام داد؟ (ترتیب در نوشتن متغیرها اهمیت دارد.)

برای روشن شدن مسأله، حالت  $n = 3$  را بررسی می‌کنیم.

اگر سه متغیر  $a_1, a_2, a_3$  را داشته باشیم می‌توانیم حالت‌های زیر را بنویسیم

$$\begin{array}{ll} (a_1 \cdot a_2) \cdot a_3, & a_1 \cdot (a_2 \cdot a_3), \\ (a_1 \cdot a_3) \cdot a_2, & a_1 \cdot (a_3 \cdot a_2), \\ (a_2 \cdot a_1) \cdot a_3, & a_2 \cdot (a_1 \cdot a_3), \\ (a_2 \cdot a_3) \cdot a_1, & a_2 \cdot (a_3 \cdot a_1), \\ (a_3 \cdot a_1) \cdot a_2, & a_3 \cdot (a_1 \cdot a_2), \\ (a_3 \cdot a_2) \cdot a_1, & a_3 \cdot (a_2 \cdot a_1). \end{array}$$

اکنون اگر متغیر جدید  $a_4$  اضافه شود، چند پرانتزگذاری جدید به وجود می‌آید؟ به طور کلی می‌توان این سؤال را پرسید که اگر فهرست همه پرانتزگذاری‌های ممکن برای  $n$  متغیر را داشته باشیم، آنگاه با افزودن متغیر  $a_{n+1}$  چند پرانتزگذاری جدید داریم. این سؤال را می‌توان به صورت زیر نیز مطرح کرد:

با هر یک از عبارت‌های ظاهر شده در فهرست  $n$  ام چند عبارت جدید را می‌توان در فهرست  $n + 1$  ام ساخت؟

**Eugène Charles  
Catalan**

30 May 1814 - 14 Feb 1894



<sup>۱۹</sup>Catalan's problem

یکی از عبارتهای ظاهر شده در فهرست  $n$  ام را در نظر می گیریم و آن را با  $R$  نمایش می دهیم. برای افزودن  $a_{n+1}$  کار ساده ای که می توان انجام داد این است که  $a_{n+1}$  را به اول یا آخر  $R$  بیفزاییم؛ یعنی دو عبارت  $a_{n+1} \cdot (R)$  و  $(R) \cdot a_{n+1}$  را بنویسیم. اما می توان توسط همین  $R$  عبارتهای جدید دیگری نیز ساخت چرا که می توانیم  $a_{n+1}$  را در میان اعمال ضرب ظاهر شده در  $R$  درج کنیم. برای این منظور یکی از اعمال ضرب ظاهر شده در  $R$  را در نظر می گیریم. مثلاً فرض کنیم این عمل ضرب بین دو عبارت  $S$  و  $T$  ظاهر شده باشد که  $S$  در سمت چپ  $T$  آمده است<sup>۲۰</sup>. اکنون می توانیم به چهار روش زیر  $a_{n+1}$  را درج کنیم

$$(a_{n+1} \cdot S) \cdot T, \quad (S \cdot a_{n+1}) \cdot T, \quad S \cdot (a_{n+1} \cdot T), \quad S \cdot (T \cdot a_{n+1}).$$

بنابراین با هر عمل ضرب ظاهر شده در  $R$  نیز می توان ۴ عبارت جدید ساخت. از آنجایی که  $n - 1$  عمل ضرب در  $R$  ظاهر شده است می توان گفت که در مجموع  $4(n - 1) + 2$  عبارت جدید به وسیله  $R$  ساخته می شود. این مطلب برای هر  $R$  از فهرست  $n$  ام درست است. بنابراین اگر تعداد عبارات فهرست  $n$  ام را با  $O_n$  نمایش دهیم داریم

$$O_{n+1} = (2 + 4(n - 1))O_n = 2(2n - 1)O_n.$$

بنابراین مقدار  $O_n$  به طور استقرایی تعیین می گردد و از آنجایی که  $O_1$  به طور بدیهی برابر ۱ است، می توان مقادیر بعدی را به دست آورد. ♠

می توانیم مقدار  $O_n$  را به طور صریح نیز مشخص کنیم. قبل از آن یک تعریف استقرایی را ببینید.

**تعریف ۱۳.۲.۱.** فرض کنیم  $n$  عددی طبیعی باشد. فاکتوریل<sup>۲۱</sup> عدد  $n$  با نماد  $n!$  به صورت استقرایی

$$1! = 1, \quad (n + 1)! = (n + 1) \cdot n!$$

<sup>۲۰</sup>  $S$  و  $T$  می توانند دو متغیر یا عبارتی متشکل از متغیرها باشند. مثلاً اگر  $R$  به صورت  $S = a_1 \cdot a_3$  باشد و به دومین عمل ضرب توجه کنیم، این عمل بین عبارت  $(a_1 \cdot a_3) \cdot a_2$  و متغیر  $T = a_2$  می باشد.

<sup>۲۱</sup> factorial

کاتالان نه به دلیل مسأله زیبایش، بلکه به خاطر حدس مهمی که در سال ۱۸۴۴ عنوان داشته است معروف است. این حدس بیان می دارد که تنها اعداد طبیعی متوالی که قوای کامل یک عدد طبیعی هستند ۸ و ۹ می باشند. به عبارت دیگر معادله  $x^n - y^m = 1$  برای  $n$  و  $m$  طبیعی و بزرگتر از ۱ فقط یک جواب  $x$  و  $y$  دارد؛  $3^2 - 2^3 = 1$ .

این حدس سرانجام در سال ۲۰۰۳ به وسیله Preda و Mihăilescu به طور کامل اثبات شد.

♣ تعریف می شود. به علاوه قرارداد می کنیم که  $0! = 1$ .  
**قضیه ۱۴.۲.۱.** فرض کنیم  $O_n$  تعداد پیرانتزگذاری های مختلف برای ضرب کردن  $n$  متغیر  $a_1, a_2, \dots, a_n$  باشد. در این صورت

$$O_n = \frac{(2n-2)!}{(n-1)!}.$$

**برهان.** به استقرا عمل می کنیم. فرض کنیم حکم برای  $n$  برقرار باشد (فرض استقرا). برای  $n+1$  با توجه به آنچه در مثال بالا اثبات شد داریم

$$\begin{aligned} O_{n+1} &= 2(2n-1)O_n \\ &= 2(2n-1) \frac{(2n-2)!}{(n-1)!} \\ &= \frac{2n(2n-1)}{n} \cdot \frac{(2n-2)!}{(n-1)!} \\ &= \frac{(2n) \cdot (2n-1) \cdot (2n-2)!}{n \cdot (n-1)!} \\ &= \frac{(2n)!}{n!} \\ &= \frac{(2(n+1)-2)!}{((n+1)-1)!}. \end{aligned}$$

بنابراین حکم برای  $n+1$  نیز برقرار است و لذا گام استقرا را طی کرده ایم. بدیهی است که  $O_1 = 1 = \frac{(2-2)!}{(1-1)!}$  (شروع استقرا). در نتیجه حکم برقرار است. ■

باز هم به مسائلی که در این بخش بررسی کردیم خواهیم پرداخت اما فعلاً این بحث را در اینجا به پایان می بریم. بد نیست نمودهای دیگری از استقرا را هم مشاهده کنیم.

قطاری با واگن های ۱، ۲، ...،  $n$  در نظر می گیریم. یک تونل در سمت چپ ریل قرار دارد که بنیست است و قطار می تواند با سر وارد آن شود و از انتها خارج شود و مجدداً در مسیر اصلی قرار گیرد. می توانیم تعداد واگن هایی را که وارد تونل می شوند مشخص سازیم. چه ترتیب هایی از واگن ها را در خروجی می توانیم داشته باشیم؟ این سؤال به مسئله کاتالان مربوط است.

همه اسبها هم رنگ هستند!



اثبات در صفحه بعد آمده است.

### ۳.۱ چند شاگرد اول صف امتحان نمی دهند!

گاهی اوقات در اثبات های استقرایی پیش می آید که گام استقرا قابل طی شدن

$m-1$  دومینوی اول به قدری محکم در جای خود چسبیده اند که هیچ ضربه ای آنها را از جا تکان نمی دهد. چاره ای نیست. باید به دومینوی  $m$  ام ضربه بزنیم.

است اما شروع استقرا قابل اثبات نیست. این اتفاق شبیه آن است که هر شاگردی قول بدهد که اگر نفر قبل از او امتحان داد آنگاه خود او هم امتحان بدهد اما هر چه سعی کنیم نتوانیم نفر اول را متقاعد کنیم که امتحان بدهد.

در چنین وضعیتی می توانیم از نفر اول صرف نظر کنیم و نفر دوم را متقاعد کنیم که امتحان بدهد. ممکن است نفر دوم نیز سرپیچی کند و مجبور شویم که سراغ نفر سوم برویم. به هر حال اگر اشخاص شماره ۱، ۲، ...،  $m-1$  سرپیچی کنند و نفر  $m$  قبول کند که امتحان بدهد آنگاه از نفر  $m$  ام به بعد (طبق قولی که داده اند) مجبورند که امتحان بدهند.

بنابراین با شکل جدیدی از استقرا مواجه می شویم.

**۱.۳.۱. (اصل استقرای ریاضی ابتدا از  $m$ )** فرض کنیم  $P(n)$  حکمی در مورد عدد طبیعی  $n$  باشد. اگر بتوانیم اثبات کنیم که برای هر  $n \geq m$ ، درستی  $P(n)$ ، درستی  $P(n+1)$  را نتیجه می دهد و به علاوه بتوانیم اثبات کنیم که  $P(m)$  درست است، آنگاه حکم  $P(n)$  برای هر عدد طبیعی  $n$  که  $n \geq m$  درست است. ■

به بیان ریاضی می توان گفت

$$\forall n \geq m (P(n) \implies P(n+1))$$

$$P(m)$$

درستی  $P(n)$  را برای هر  $n$  که  $n \geq m$  نتیجه می دهد.

مثال بسیار ساده زیر را ببینید.

**مثال ۲.۳.۱.** ثابت کنید که به ازای هر  $n \geq 5$  داریم  $2^n > n^2$ .

فرض کنیم  $2^n > n^2$  (فرض استقرا). در این صورت اگر  $n \geq 5$  آنگاه (حکم استقرا)  $2^{(n+1)} = 2 \cdot 2^n > 2n^2 \geq (n+1)^2$

اما می بینیم که شروع استقرا برای  $n = 1, 2, 3, 4$  دچار مشکل می شود. با توجه به این که حکم برای  $n = 5$  درست است نتیجه می گیریم که حکم برای هر

فرض کنیم  $P(n)$  این حکم باشد که هر  $n$  اسب دلخواه هم رنگ هستند. اگر  $P(n)$  برقرار باشد و  $n+1$  اسب دلخواه در نظر بگیریم، آنگاه اسب های  $H_1, H_2, \dots, H_n$  و اسب های  $H_2, H_3, \dots, H_{n+1}$  بنابر فرض استقرا هم رنگند. اما این دو دسته اسب  $n$  تایی نمی توانند از دو رنگ مختلف باشند. پس همه  $n+1$  اسب در نظر گرفته شده از یک رنگ هستند. برای حالت  $n = 1$  حکم به طور بدیهی درست است.





$n \geq 5$  درست است.

اما اگر حکم مسأله مشخص نباشد، مسأله اندکی سخت تر می شود چون باید خودمان بررسی کنیم و  $m$  مطلوب را به دست آوریم. نمونه زیر را ببینید.

**مثال ۳.۳.۱.**  $n$  نفر با نام های ۱، ۲، ...،  $n$  در خانه های خود هستند. هر یک از این افراد از خبری مطلع است که افراد دیگر اطلاعی از آن ندارند. هر کسی در خانه خود تلفن دارد و می تواند خبر خود را به هر یک از دیگر افراد برساند. وقتی دو نفر  $i$  و  $j$  به طور تلفنی با هم صحبت می کنند،  $i$  هر خبری را که داشته باشد به  $j$  می گوید و  $j$  نیز همه خبرهایی را که می داند به اطلاع  $i$  می رساند. الگوریتمی ارائه دهید که به وسیله آن این افراد بتوانند همه خبرها را به یکدیگر بگویند.

اجازه دهید ابتدا حالت  $n = 3$  را بررسی کنیم (معلوم نیست که واقعاً  $m = 3$  شروع خوبی برای استقرا باشد). در این حالت ۱ و ۲ اخبار خود را با یکدیگر رد و بدل می کنند. سپس ۱ با ۳ تماس می گیرد و خبر خودش و ۲ را (که اکنون از آن مطلع است) به اطلاع ۳ می رساند و خبر ۳ را از او می گیرد. حال اگر ۱ و ۲ مجدداً تماس بگیرند، ۲ می تواند خبر ۳ را از ۱ بگیرد. بنابراین با سه تماس خبرها بین افراد پخش می شود.

برای ۴ نفر چه باید بکنیم؟ با کمی تأمل می توان دید که اگر ۱ با ۲، سپس ۳ با ۴، بعد از آن ۱ با ۳ و در نهایت ۲ با ۴ تماس بگیرند همه خبرها پخش می شود. اما آیا می توان گام استقرا را در این بین (از ۳ نفر به ۴ نفر) مشاهده کرد؟ به نظر نمی رسد که ارتباطی بین دو روش ارائه شده برای ۳ نفر و ۴ نفر وجود داشته باشد.

اکنون ببینیم در حالت کلی با اضافه شدن یک نفر به جمعی  $n$  نفری، چه تماس های جدیدی را باید در نظر بگیریم. فرض کنیم شیوه تماس گرفتن برای  $n$  نفر مشخص باشد (فرض استقرا) و یک نفر با شماره  $n + 1$  به این جمع اضافه شود.

به عنوان یک نمونه سخت تر سعی کنید اولین  $m$  ی را بیابید که  $m!$  بین  $(\frac{m}{3})^m$  و  $(\frac{m}{4})^m$  باشد. سپس سعی کنید استدلالی استقرایی اثبات کنید که برای هر  $n \geq m$  نیز  $n!$  بین  $(\frac{n}{3})^n$  و  $(\frac{n}{4})^n$  است.

در ابتدا شخص شماره  $n + 1$  با شخص شماره ۱ تماس می گیرد و خبر خود را به او می دهد. سپس افراد شماره ۱ تا  $n$  به شیوه ای که بنابر فرض استقرا می دانند با یکدیگر تماس می گیرند و خبرها پخش می شود. توجه داریم که خبر  $n + 1$  نیز به این روش در بین افراد ۱ تا  $n$  پخش خواهد شد. اکنون ۱ با  $n + 1$  تماس می گیرد و کل خبرهای  $n$  نفر دیگر را به او می دهد. به این ترتیب با دو تماس اضافی، همه افراد از همه خبرها مطلع می گردند (حکم استقرا).

اما چرا برای رسیدن از حالت  $n = 3$  به  $n = 4$  نیازی به دو تماس اضافی نبود؟

بنابراین می توان گفت به ازای هر  $n \geq 4$  برای رسیدن از مرحله  $n$  ام به مرحله  $n + 1$  ام با دو تماس اضافی این کار امکان پذیر است. اکنون ادعا می کنیم که به ازای هر  $n \geq 4$  تعداد تماس های لازم برابر است با  $2n - 4$ . این ادعا را به استقرا اثبات می کنیم.

فرض کنیم تعداد تماس های لازم در مرحله  $n$  ام برابر  $2n - 4$  باشد. طبق آنچه گفته شد، در مرحله  $n + 1$  ام دو تماس دیگر لازم داریم و لذا با

$$2n - 4 + 2 = 2(n + 1) - 4$$

تماس خبرها پخش می شود (حکم استقرا). در نتیجه گام استقرا انجام شد و چون برای  $n = 4$  تعداد تماس ها برابر  $2n - 4 = 4$  است (شروع استقرا) لذا حکم برقرار است. ♠

همان طور که دیدیم سختی مسأله در این بود که الگوی موجود در گام استقرا از ۴ نفر به بعد درست است و اگر خود را درگیر حل سه مسأله اول کنیم شاید نتوانیم این الگو را ببینیم. مسأله بعد، از دو لحاظ سخت است: اول این که حکم مشخص نیست و دوم این که دو متغیر طبیعی در مسأله ظاهر شده است و در نظر اول نمی توان تصمیم گرفت که استقرا روی کدام یک از متغیرها ممکن است مفید واقع شود.

**مثال ۴.۳.۱.** ظرف داریم که در هر کدام از آنها تعدادی شکلات قرار داده ایم. تعداد کل شکلات ها برابر  $n$  است. ممکن است بعضی ظرف ها خالی

آیا می توانید اثبات کنید که  $2n - 4$  کمترین تعداد تماس های لازم است؟ قبلاً نمونه ای از آن را در اثبات مینیم بودن  $2^n - 1$  در مسأله برج هانوی دیده اید.

باشند و تعداد شکلات‌های موجود در ظرف‌ها لزوماً برابر نیست. می‌خواهیم با این شکلات‌ها یک بازی انجام دهیم. بازی به این ترتیب است که ما در هر مرحله می‌توانیم از دو ظرف متفاوت یک شکلات برداریم و این دو شکلات را در ظرفی دیگر قرار دهیم. آیا می‌توان همه شکلات‌ها را در یک ظرف جمع کرد؟

اجازه دهید برای نمونه یک مثال ساده را بررسی کنیم. فرض کنیم  $m = 8$  ظرف داریم و  $n = 22$  شکلات را به ترتیب زیر داخل آنها قرار داده‌ایم.

۱   ۷   ۰   ۵   ۲   ۶   ۰   ۱

می‌توان مراحل زیر را انجام داد.

|   |    |   |   |   |   |   |   |
|---|----|---|---|---|---|---|---|
| ۰ | ۹  | ۰ | ۵ | ۲ | ۶ | ۰ | ۰ |
| ۰ | ۱۱ | ۰ | ۵ | ۱ | ۵ | ۰ | ۰ |
| ۰ | ۲۱ | ۰ | ۰ | ۱ | ۰ | ۰ | ۰ |
| ۰ | ۲۰ | ۲ | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ |
| ۰ | ۱۹ | ۱ | ۲ | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ |
| ۰ | ۱۸ | ۰ | ۲ | ۲ | ۰ | ۰ | ۰ |
| ۰ | ۲۰ | ۰ | ۱ | ۱ | ۰ | ۰ | ۰ |
| ۰ | ۲۲ | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ |

آیا ترفندی کلی در این بین وجود دارد؟ و آیا اصولاً این کار برای هر تعداد ظرف و هر تعداد شکلات برقرار است؟

اگر بخواهیم مسأله را به شیوه‌ای استقرایی حل کنیم ابتدا باید تصمیم بگیریم که استقرا را روی تعداد ظروف (یعنی  $m$ ) به کار ببریم یا تعداد شکلات‌ها (یعنی  $n$ ). به عبارت دیگر باید ببینیم اضافه کردن یک ظرف راحت‌تر است یا یک شکلات.

ممکن است با اضافه کردن یک ظرف تعداد شکلات‌ها خیلی تغییر کند. بنابراین به نظر می‌رسد اضافه کردن یک شکلات ساده‌تر باشد. از این رو حکم

مسئله بعد از انجام این بازی هیچ کس دلش نمی‌آید که به این شکلات‌ها نگاهی اندازد!



هر انسانی کچل است!



اثبات در صفحه بعد آمده است.

مسأله را  $P(n)$  می نامیم و تعداد ظروف را دلخواه در نظر می گیریم.

فرض کنیم جمع کردن همه شکلات ها در یک ظرف برای حالتی که  $n$  شکلات داریم امکان پذیر باشد (فرض استقرا). اکنون فرض کنیم یک شکلات اضافه در یکی از ظرف ها قرار داده اند<sup>۲۲</sup>. این شکلات جدید را با یک علامت \* مشخص می کنیم و بدون در نظر گرفتن آن، همه شکلات ها را طبق فرض استقرا در یک ظرف جمع می کنیم. اگر \* در همین ظرفی که همه شکلات ها را جمع کرده ایم باشد چیزی برای اثبات باقی نمی ماند، اما اگر  $n$  شکلات دیگر در یک ظرف و \* در ظرفی دیگر باشد به ترتیب زیر عمل می کنیم:

|         |   |   |   |
|---------|---|---|---|
| $n$     | ۱ | ۰ | ۰ |
| $n - ۱$ | ۰ | ۲ | ۰ |
| $n - ۲$ | ۰ | ۱ | ۲ |
| $n - ۳$ | ۲ | ۰ | ۲ |
| $n - ۱$ | ۱ | ۰ | ۱ |
| $n + ۱$ | ۰ | ۰ | ۰ |

فرض کنیم  $P(n)$  این حکم باشد که هر انسانی با  $n$  مو کچل است. اگر  $P(n)$  درست باشد و فردی را با  $n + ۱$  مو در نظر بگیریم آنگاه چون او در صورت داشتن  $n$  مو کچل است و از آنجایی که یک موی اضافی او را از کچل بودن نمی رها کند، پس می توانیم نتیجه بگیریم که با  $n + ۱$  مو نیز کچل است. همچنین بدیهی است که هر کسی با داشتن  $n = ۱$  مو کچل است.



توجه کنید که این روش در صورتی معتبر است که ما حداقل چهار ظرف داشته باشیم و از آنجایی که در مراحل فوق با  $n - ۳$  مواجه می شویم پس باید  $n - ۳$  بزرگ تر یا مساوی ۰ باشد و لذا  $n + ۱$  باید حداقل چهار باشد.

خلاصه مطلب این که اگر ما حداقل چهار ظرف و حداقل چهار شکلات داشته باشیم می توانیم  $n + ۱$  شکلات داده شده را در یک ظرف جمع کنیم (حکم استقرا). با بررسی حالات مختلف  $n = ۴$  شکلات و  $m \geq ۴$  ظرف می توان به سادگی نشان داد که حکم در این حالت برقرار است (شروع استقرا). بنابراین برای حداقل چهار ظرف و حداقل چهار شکلات می توان شکلات ها را در یک

<sup>۲۲</sup> دقت کنید که نمی گوییم یک شکلات دیگر در یکی از ظرف ها قرار داده ایم چون اگر طرز قرار گرفتن شکلات ها در اختیار ما می بود می توانستیم از ابتدا همه آنها را در یک ظرف قرار دهیم و خیال خود را راحت کنیم! بنابراین ما چیزی در مورد محل قرار گرفتن این شکلات جدید نمی دانیم.

ظرف جمع کرد.

اما هنوز نشان نداده‌ایم که برای کمتر از چهار ظرف یا کمتر از چهار شکلات حکم درست نیست. تنها چیزی که می‌توان گفت این است که فرآیند استقرایی ما نتیجه‌ای نمی‌دهد. در حقیقت ما به یک مثال نقض<sup>۲۳</sup> نیاز داریم؛ مثالی که نشان دهد اصولاً حکم در این حالت درست نیست.

اگر سه شکلات داشته باشیم و یکی از آنها را در یک ظرف و دو تای دیگر را در ظرفی دیگر بگذاریم آنگاه تعداد ظرف‌ها هر چه باشد نمی‌توانیم شکلات‌ها را در یک ظرف جمع کنیم (این مثال نقضی برای حالت  $n < 4$  است).

همچنین اگر مثلاً شش شکلات داشته باشیم، یکی در یک ظرف، دوتا در یک ظرف دیگر و سه‌تای دیگر را در ظرفی دیگر قرار دهیم آنگاه با داشتن سه ظرف نمی‌توانیم شکلات‌ها را در یک ظرف جمع کنیم (این مثال نقضی برای حالت  $m < 4$  است). ♠

این مثال‌ها نشان می‌دهد که اگر ترفند استقرا برای اثبات مسأله دچار مشکل شد نباید ناامید شویم. شاید در چند گام بعد، الگویی استقرایی را بیابیم و بتوانیم از آن گام به بعد اثبات را ارائه دهیم.

مجدداً با این ترفند در حل مسائل مواجه خواهیم شد. چیزی که اهمیت دارد این است که هر چه ابزار ما برای اثبات احکام متنوع‌تر باشد می‌توانیم احکام پیچیده‌تری را اثبات کنیم.

## ۴.۱ اگر همه قبلی‌ها امتحان بدهند...

فرض کنید این بار هر یک از شاگردان کلاس فقط در صورتی قول می‌دهد امتحان بدهد که همه افراد قبل از او امتحان بدهند. در این صورت چه باید کرد

اگر فقط یک میخ، یک تخته و یک چکش به شما بدهند و از شما بخواهند که میخ را روی تخته بکوبید راحت‌تر است یا این که یک کارگاه پیشرفته نجاری را در اختیار شما بگذارند تا میخ را بر تخته بکوبید؟

<sup>۲۳</sup> counterexample

تا همه مجبور به امتحان دادن بشوند؟

واضح است که این بار نیز کافی است نفر اول را مجبور کنیم تا امتحان بدهد. در این صورت چون همه کسانی که قبل از نفر دوم در صف ایستاده‌اند تنها نفر اول می‌باشد پس نفر دوم نیز باید امتحان بدهد. همچنین اکنون که نفر اول و دوم امتحان می‌دهند، نفر سوم نیز باید امتحان بدهد چون همه افرادی که قبل از او در صف ایستاده‌اند قبول کرده‌اند که امتحان بدهند. و به همین ترتیب همه افراد حاضر در صف، امتحان خواهند داد.

به عبارت دقیق‌تر

۱.۴.۱. (اصل استقرای ریاضی قوی<sup>۲۴</sup>) فرض کنیم  $P(n)$  حکمی در مورد عدد طبیعی  $n$  باشد. اگر بتوانیم اثبات کنیم که درستی  $P(1)$ ،  $P(2)$ ، ... و  $P(n)$ ، درستی  $P(n+1)$  را نتیجه می‌دهد و به علاوه بتوانیم اثبات کنیم که  $P(1)$  درست است، آنگاه حکم  $P(n)$  برای هر عدد طبیعی  $n$  درست است. ■

در ابتدا ممکن است به نظر برسد که مسأله تغییری نکرده است اما باید توجه داشت که در این نوع استقرا با فرض‌های قوی‌تری سعی داریم حکم استقرا را اثبات کنیم.

از سوی دیگر وقتی با مسأله‌ای که دارای چند فرض است مواجه می‌شویم این مطلب که در کدام قسمت از استدلال باید کدام یک از فرض‌ها را به کار برد شاید باعث سخت‌تر شدن راه حل گردد.

به هر حال چیزی که باعث شده است تا این نوع استقرا، قوی نامیده شود این است که ما فرض قوی‌تری برای رسیدن به حکم را در اختیار داریم. اجازه دهید با بررسی چند حکم این قدرت را تجربه کنیم. توجه داریم که در استقرای قوی نیز ممکن است شروع استقرا عدد ۱ نباشد و لذا می‌توان از استقرای قوی/ابتدا/  $m$  نیز در حل مسائل استفاده کرد.

<sup>۲۴</sup>strong mathematical induction. توجه داریم که این اصل صورت دیگری از اصل استقرای ریاضی است و به سادگی توسط آن اثبات می‌شود. می‌توانید به عنوان یک تمرین ساده این کار را انجام دهید.

سعی کنید با استفاده از استقرای قوی نشان دهید که تجزیه مذکور در قضیه بعد همواره منحصر به فرد است.

**قضیه ۲.۴.۱.** هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱ حاصلضربی از اعداد اول است.

**برهان.** فرض کنیم  $P(n)$  این حکم باشد که  $n$  را می‌توان به صورت حاصلضربی از اعداد اول نوشت.

این حکم را به ازای هر  $n \geq 2$  اثبات می‌کنیم. فرض کنیم  $P(2), \dots, P(n)$  درست باشد (فرض استقرای قوی). عدد  $n+1$  را در نظر می‌گیریم. اگر  $n+1$  اول باشد آنگاه  $P(n+1)$  به وضوح درست است، اما اگر  $n+1$  اول نباشد آنگاه می‌توان آن را به صورت  $ab$  نوشت که  $2 \leq a, b \leq n$ . اکنون با توجه به فرض استقرای قوی می‌دانیم که  $P(a)$  و  $P(b)$  درست است، یعنی  $a$  و  $b$  حاصلضربی از اعداد اول هستند و در نتیجه  $n+1 = ab$  نیز چنین است (حکم استقرا).

از سوی دیگر با توجه به آن که ۲ عددی اول است نتیجه می‌گیریم که  $P(2)$  به طور بدیهی درست است. لذا  $P(n)$  برای هر  $n \geq 2$  برقرار است. ■

استقرای قوی ممکن است در حل مسائل الگوریتمی نیز ظاهر شود. وقتی با یک الگوریتم استقرایی از نوع قوی مسئله‌ای را حل می‌کنیم، در حقیقت از حل شدن مسئله در برخی یا همه حالت‌های قبلی کمک می‌گیریم. مثال زیر را ببینید.

**مثال ۳.۴.۱. (بازی تتریس کوچک<sup>۲۵</sup>)** می‌خواهیم با استفاده از مستطیل‌های  $1 \times 2$ ،  $2 \times 1$  و  $2 \times 2$ ، یک مستطیل  $2 \times n$  بسازیم. این کار به چند روش ممکن است؟

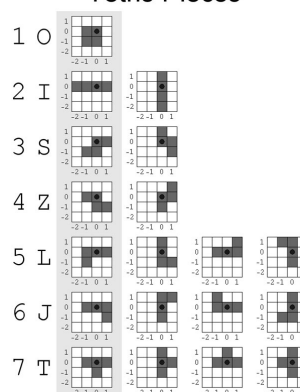
تعداد روش‌های ساخت مستطیل در مرحله  $n$  ام را با  $T_n$  نمایش می‌دهیم. به سادگی می‌توان تحقیق کرد که  $T_1 = 1$ ،  $T_2 = 3$  و  $T_3 = 5$ .

برای ساختن یک مستطیل  $2 \times n$  با استفاده از مستطیل‌های کوچک‌تر می‌توان به سه روش عمل کرد:

- به یک مستطیل  $2 \times (n-1)$  یک مستطیل  $2 \times 1$  می‌چسبانیم؛
- به یک مستطیل  $2 \times (n-2)$  یک مستطیل  $2 \times 2$  می‌چسبانیم؛

بازی تتریس اولین بار توسط Alexey Pajitnov روسی در سال ۱۹۸۴ طراحی شد. این بازی توسط بلوک‌های چهارتایی از مربع‌های  $1 \times 1$  انجام می‌شود. این بلوک‌ها از پنج نوع مختلف هستند و نام بازی از دو کلمه tetra و tennis گرفته شده است.

Tetris Pieces



<sup>۲۵</sup>Mini-Tetris game

• به یک مستطیل  $(n-2) \times 2$  دو مستطیل  $2 \times 1$  می چسبانیم.

بنابراین با استفاده از هر مستطیل  $(n-1) \times 2$  در مرحله  $(n-1)$  ام می توان یک مستطیل در مرحله  $n$  ام ساخت و با استفاده از هر مستطیل  $(n-2) \times 2$  در مرحله  $(n-2)$  ام می توان دو مستطیل در مرحله  $n$  ام ساخت. لذا

$$T_n = T_{n-1} + 2T_{n-2}.$$

بدین ترتیب می توان با استفاده از دو گام قبلی، تعداد مستطیل های مرحله  $n$  ام را به دست آورد. مثلاً

$$T_4 = T_3 + 2T_2 = 5 + 2 \times 3 = 11,$$

$$T_5 = T_4 + 2T_3 = 11 + 2 \times 5 = 21,$$

...

و بقیه مقادیر نیز به همین ترتیب محاسبه می شود. ♠

می توان مقدار  $T_n$  به دست آمده در مثال فوق را به طور صریح نیز تعیین کرد. این کار را نیز با استفاده از استقرای قوی انجام می دهیم.

**قضیه ۴.۴.۱.** تعداد مستطیل های قابل ساخت در بازی تتریس کوچک عبارت است از

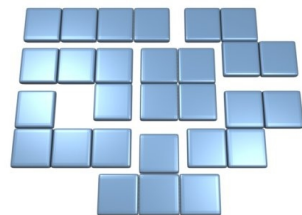
$$T_n = \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3}.$$

شکل هایی که از چهار مربع  $1 \times 1$  ساخته شده اند چهارمینو نامیده می شوند. پنج چهارمینوی مختلف داریم که عبارتند از چهارمینوی مربعی، چهارمینوی راست، چهارمینوی اریب، چهارمینوی  $T$  و چهارمینوی  $L$ .

**برهان.** فرض کنیم حکم برای همه اعداد کوچک تر از  $n$  درست باشد (فرض

استقرای قوی). برای  $n$  داریم

$$\begin{aligned} T_n &= T_{n-1} + 2T_{n-2} \\ &= \frac{2^n + (-1)^{n-1}}{3} + 2 \cdot \frac{2^{n-1} + (-1)^{n-2}}{3} \\ &= \frac{2^n - (-1)^n}{3} + \frac{2^n + 2(-1)^n}{3} \\ &= \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3}. \end{aligned}$$



از طرفی داریم  $T_1 = 1 = \frac{2^{1+1} + (-1)^1}{3}$ . لذا حکم برقرار است. ■

گاهی اوقات در مسائل استقرایی، چند متغیر در مسأله ظاهر می‌شوند. مثلاً ممکن است مسأله‌ای داشته باشیم که سه متغیر  $n$ ،  $m$  و  $k$  در آن ظاهر شده است. یک راه برای حل این گونه مسائل این است که همه متغیرها غیر از یکی را دلخواه فرض کرده و استقرا را روی آن یک متغیر به کار ببریم. مثلاً می‌توان  $m$  و  $n$  را دلخواه فرض کرد و استقرا را روی  $k$  انجام داد. این کاری است که ما در مثال ۴.۳.۱ انجام دادیم. این که استقرا را باید روی کدام متغیر به کار ببریم نکته‌ای مهم است که با ممارست می‌توان آن را دریافت.

اما همیشه این طور نیست و گاهی اوقات ممکن است مجبور باشیم متغیری جدید را وارد مسأله کنیم و استقرا را روی آن متغیر جدید به کار ببریم. مثلاً ممکن است هیچ یک از متغیرهای  $n$ ،  $m$  و  $k$  مناسب نباشند و ما مجبور شویم استقرا را روی  $\ell = n + m + k$  به کار ببریم. معمولاً در این گونه موارد، استقرای قوی می‌تواند خیلی مفید باشد. مثال زیر را ببینید.

**مثال ۵.۴.۱.** می‌خواهیم یک شکلات کائوچی  $n \times m$  را که به شکل مستطیلی  $n \times m$  است به قطعات  $1 \times 1$  بشکنیم. چند بار شکستن لازم است؟ شکستن‌ها فقط روی یک خط افقی یا عمودی انجام می‌شود و باید یک خط را به طور کامل بشکنیم.

یک شکلات کائوچی  $n \times m$  داریم. دو نفر با این شکلات یک بازی انجام می‌دهند. هر کس در نوبت خود می‌تواند یک قطعه شکلات را بردارد و روی یکی از خط‌های افقی یا عمودی آن را به دو قسمت تقسیم کند. کسی که آخرین شکستن را انجام دهد برنده است. چه کسی بازی را خواهد برد؟ اولی یا دومی؟

فرض کنیم  $P(k)$  این حکم باشد که برای شکستن مستطیلی با مساحت  $k$ ، تعداد

شکستن‌های لازم برابر  $k - 1$  است. در حقیقت به جای آن که استقرا را روی  $n$  یا  $m$  به کار ببریم، روی  $k = nm$  به کار می‌بریم.

فرض کنیم  $P(1)$ ،  $P(2)$ ، ... و  $P(k)$  درست باشد (فرض استقرای قوی). شکلاتی مستطیل شکل با مساحت  $k + 1 = nm$  را در نظر می‌گیریم. با یک بار شکستن، این شکلات به دو مستطیل با مساحت‌های  $a$  و  $b$  تقسیم می‌شود که  $k + 1 = a + b$ . با توجه به فرض استقرای قوی برای شکستن این مستطیل‌ها  $a - 1$  و  $b - 1$  شکستن لازم داریم. پس تعداد کل شکستن‌های لازم برابر است با  $1 + (a - 1) + (b - 1) = a + b - 1 = k$  (حکم استقرا). با توجه به آن که برای شکستن مستطیلی با مساحت  $k = 1$  تعداد شکستن‌ها برابر  $k - 1 = 0$  است، حکم برای هر  $k$  برقرار است. ♠

حکم بعدی در مورد دنباله فیبوناچی<sup>۲۶</sup> است که به صورت استقرایی

$$F_0 = 1, F_1 = 1,$$

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad n \geq 0$$

تعریف می‌شود.

**قضیه ۶.۴.۱.** هر عدد طبیعی را می‌توان به صورت مجموعی از جملات متمایز دنباله فیبوناچی نوشت.

**برهان.** فرض کنیم  $P(n)$  این حکم باشد که  $n$  را می‌توان به صورت مجموعی از جملات متمایز دنباله فیبوناچی نوشت.

فرض کنیم  $P(1)$ ،  $P(2)$ ، ...،  $P(n)$  درست باشد (فرض استقرای قوی). اگر خود  $n + 1$  جمله‌ای از دنباله فیبوناچی باشد چیزی برای اثبات باقی نمی‌ماند و اگر چنین نباشد آنگاه عددی مانند  $k$  موجود است که

$$F_k < n + 1 < F_{k+1}.$$

## Leonardo Pisano Fibonacci

1170 - 1250



<sup>۲۶</sup>Fibonacci sequence

بنابراین  $n + 1 - F_k$  عددی طبیعی است که کوچک‌تر یا مساوی  $n$  است و بنابر فرض استقرای قوی چون  $P(n + 1 - F_k)$  درست است لذا می‌توان نوشت

$$n + 1 - F_k = F_{j_1} + \dots + F_{j_\ell},$$

که در آن  $F_{j_i}$  ها اعدادی متمایز هستند و

$$F_{j_i} \leq n + 1 - F_k < F_{k+1} - F_k = F_{k-1} < F_k.$$

بنابراین  $F_{j_i}$  ها متمایز با  $F_k$  هستند. لذا توانستیم  $n + 1$  را به صورت

$$F_k + F_{j_1} + \dots + F_{j_\ell}$$

بنویسیم که این اعداد دو به دو متمایز هستند (حکم استقرا). بدیهی است که  $P(1)$  درست می‌باشد و لذا حکم برقرار است. ■

برای تکمیل بحث یک نمونه از استفاده استقرای ضربی در نظریه اعداد را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. یادآوری می‌کنیم که برای دو عدد صحیح مانند  $n$  و  $m$  نماد  $n|m$  به معنای آن است که  $m$  مضرب  $n$  است یا  $n$  عدد  $m$  را عاد می‌کند.<sup>۲۷</sup> مثال ۷.۴.۱. فرض کنیم  $d$  و  $n$  اعدادی طبیعی باشند و  $d|2n^2$ . ثابت کنید که  $n^2 + d$  نمی‌تواند مربع کامل باشد.

فرض کنیم  $P(n)$  این حکم باشد که با مفروضات فوق  $n^2 + d$  نمی‌تواند مربع کامل باشد. نیز فرض کنیم  $P(n)$  برای تمام اعداد کوچک‌تر از  $n$  درست باشد (فرض استقرای قوی).

اگر  $p$  مقسوم‌علیه اول فردی از  $d$  باشد آنگاه چون  $d|2n^2$  پس  $p|n^2$  و لذا  $p|n$ . بنابراین  $n^2 + d = a^2$  اگر  $n^2 + d = a^2$  حال اگر  $n^2 + d = a^2$  پس  $p|a^2$  و لذا  $p|a$ . بنابراین  $p^2|a^2$ .

لذا  $n^2 + d = a^2$  بنابرین می‌توان نوشت

$$\left(\frac{n}{p}\right)^2 + \frac{d}{p^2} = \left(\frac{a}{p}\right)^2,$$

که  $\left(\frac{d}{p^2}\right) + 2\left(\frac{n}{p}\right)^2$  لذا با فرض  $N = \frac{n}{p}$ ،  $D = \frac{d}{p^2}$  و  $A = \frac{a}{p}$  داریم  $D|2N^2$  و

<sup>۲۷</sup>  $n$  divides  $m$

و شاید آیندگان از من  
ممنون باشند که نشان  
داده‌ام پیشینیان همه چیز را  
نمی‌دانسته‌اند.

**Pierre de Fermat**

17 Aug 1601 - 12 Jan 1665



$N^2 + D = A^2$ . اما با توجه به آن که  $N < n$  می‌دانیم که  $P(N)$  درست است و لذا امکان ندارد که  $N^2 + D$  مربع کامل باشد. لذا نتیجه می‌گیریم که  $d$  نمی‌تواند عامل اول فرد داشته باشد. بنابراین  $d = 2^\alpha$  که  $\alpha = 0, 1, 2, \dots$ .

اگر  $\alpha \geq 2$  آنگاه به روشی مشابه آنچه در بالا آمد نتیجه می‌گیریم که با فرض  $A = \frac{a}{4}$  و  $D = \frac{d}{4}$ ،  $N = \frac{n}{4}$  داریم  $2N^2 + D = A^2$  و  $d|2N^2$  که مجدداً امکان ندارد. بنابراین  $\alpha = 0$  یا  $\alpha = 1$ ، یعنی  $d = 1$  یا  $d = 2$ .

در نتیجه  $a^2 - n^2$  برابر ۱ یا ۲ است. اما می‌دانیم که اختلاف دو مربع کامل متمایز حداقل برابر  $2^2 - 1^2 = 3$  است. لذا  $d$  برابر ۱ یا ۲ نیز نمی‌تواند باشد. ♣

## ۵.۱ نزول نامتناهی

فرما به عنوان سلطان ریاضیدانان آماتور، اولین کسی بود که روش نزول نامتناهی را ابداع کرد و آن را در معادلات سیاله به کار برد. او با این روش توانست نشان دهد که هر عدد اول به صورت  $4k+1$  را می‌توان به صورت مجموع دو مربع کامل نوشت.

اگر اصل استقرای قوی را با برهان خلف در هم بیامیزیم چیزی به وجود می‌آید که اصل نزول نامتناهی<sup>۲۸</sup> نامیده می‌شود. فرض کنیم  $P(n)$  حکمی در مورد عدد طبیعی  $n$  باشد. برای آن که نشان دهیم این حکم برای هر  $n$  درست است به برهان خلف فرض می‌کنیم  $n_1$  ی موجود باشد که حکم در مورد آن درست نباشد. سپس  $n_2$  بی را می‌یابیم که از  $n_1$  کوچک‌تر است و حکم برای آن برقرار نیست. حال برای این  $n_2$  نیز به همان طریق باید  $n_3$  بی یافت شود که کوچک‌تر از  $n_2$  باشد و حکم برای آن برقرار نباشد. بدین ترتیب دنباله‌ای اکیداً نزولی مانند  $n_1, n_2, n_3, \dots$  از اعداد طبیعی حاصل می‌شود. اما بنابر اصل نزول نامتناهی چنین دنباله‌ای هرگز وجود نخواهد داشت.

این کار دقیقاً معادل آن است که فرض کنیم حکم  $P(n)$  برای همه اعداد کوچک‌تر از  $n_1$  برقرار باشد و سپس اثبات کنیم که حکم برای  $n_1$  نیز برقرار است.

<sup>۲۸</sup>infinite descent

۱.۵.۱. (اصل نزول نامتناهی) هیچ دنبالهٔ اکیداً نزولی نامتناهی از اعداد طبیعی وجود ندارد. ■

این اصل و ترفند اثبات به وسیلهٔ آن، در حقیقت چیزی جدا از استقرای قوی نیست. با این حال از آنجایی که در برخی موارد استدلال را آسان‌تر می‌سازد به کار می‌رود. ما تنها به یک نمونهٔ استفاده از آن که جنبهٔ تاریخی دارد می‌پردازیم.

یادآوری می‌کنیم که قضیهٔ آخر فرما<sup>۲۹</sup> بیان می‌دارد که معادلهٔ  $x^n + y^n = z^n$  برای  $n$  های بزرگ‌تر یا مساوی ۳ در اعداد صحیح ناصفر جواب ندارد. حکمی که در زیر می‌آید چیزی قوی‌تر از حالت  $n = 4$  این قضیه است و اثباتی که برای آن خواهد آمد منسوب به خود فرماست.

در اثبات این حکم از این حقیقت استفاده می‌کنیم که جواب‌های معادلهٔ  $X^2 + Y^2 = Z^2$  با شرط آن که بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک  $X$ ،  $Y$  و  $Z$  برابر ۱ باشد عبارتند از

$$X = 2ab, \quad Y = a^2 - b^2, \quad Z = a^2 + b^2$$

که  $a$  و  $b$  اعدادی صحیح و نسبت به هم اول هستند و یکی از  $a$  یا  $b$  زوج است (یا همین مقادیر که جای  $X$  و  $Y$  را عوض کرده باشیم).

قضیه ۲.۵.۱. معادلهٔ  $x^4 + y^4 = z^2$  در اعداد صحیح ناصفر جواب ندارد.

**برهان.** فرض کنیم  $(x, y, z)$  جوابی برای این معادله باشد که  $z \in \mathbb{N}$  کمترین مقدار ممکن را دارد (اگر  $z$  طبیعی نباشد، می‌توانیم  $(x, y, -z)$  را در نظر بگیریم). می‌توانیم فرض کنیم که بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک  $x$  و  $y$  برابر ۱ است چون اگر  $d$  مقسوم علیه مشترکی از  $x$  و  $y$  باشد آنگاه  $x^4 + y^4 = z^2$  و لذا  $d^4 | z^2$ . پس می‌توان نوشت

$$\left(\frac{x}{d}\right)^4 + \left(\frac{y}{d}\right)^4 = \left(\frac{z}{d^2}\right)^2.$$

بنابراین جواب  $(\frac{x}{d}, \frac{y}{d}, \frac{z}{d^2})$  را یافته‌ایم که  $\frac{z}{d^2}$  اکیداً کوچک‌تر از  $z$  است و این با فرض ما در مورد  $z$  در تناقض است.

سعی کنید با استفاده از روش نزول نامتناهی نشان دهید که معادلهٔ

$$x^2 + y^2 = 3(z^2 + w^2)$$

هیچ جوابی در اعداد صحیح ناصفر ندارد.

<sup>۲۹</sup>Fermat's last theorem

بنابراین  $x^2, y^2$  و  $z$  عامل مشترکی غیر از ۱ ندارند و جوابی برای معادله  $X^2 + Y^2 = Z^2$  می‌باشند. لذا

$$x^2 = 2ab, \quad y^2 = a^2 - b^2, \quad z = a^2 + b^2$$

که در آن  $a$  و  $b$  اعدادی طبیعی و نسبت به هم اول هستند که  $0 < b < a$  و یکی از اعداد  $a$  یا  $b$  زوج است (یا همین مقادیر که جای  $x^2$  و  $y^2$  را عوض کرده باشیم؛ اما از آنجایی که معادله اولیه ما نسبت به  $x$  و  $y$  متقارن است می‌توانیم فرض کنیم که مقادیر  $x^2, y^2$  و  $z$  به شکل فوق هستند).

ادعا می‌کنیم که  $a$  باید فرد باشد. زیرا اگر به برهان خلف فرض کنیم که  $a$  زوج است آنگاه چون  $x, y$  و  $z$  عامل مشترکی غیر از ۱ ندارند، پس  $b$  باید فرد باشد و لذا  $y^2 = a^2 - b^2$  باید در تقسیم بر ۴ دارای باقیمانده ۳ باشد که امکان ندارد.

بنابراین  $b$  زوج است و  $a^2 = b^2 + y^2$  که  $a, y, b$  عامل مشترکی غیر از ۱ ندارند. لذا مجدداً با توجه به جواب‌های معادله  $X^2 + Y^2 = Z^2$  نتیجه می‌گیریم که اعدادی صحیح و نسبت به هم اول مانند  $u$  و  $v$  موجودند که

$$b = 2uv, \quad y = u^2 - v^2, \quad a = u^2 + v^2.$$

حال داریم

$$x^2 = 2ab = 4uv(u^2 + v^2).$$

چون  $u$  و  $v$  نسبت به هم اول هستند پس  $u^2 + v^2$  و  $u$  و  $v$  نیز  $u^2 + v^2$  نسبت به هم اول هستند. بنابراین  $u, v$  و  $u^2 + v^2$  باید تک تک مربع کامل باشند. یعنی اعداد صحیحی مانند  $r, s, t$  و  $t$  موجودند که

$$u = r^2, \quad v = s^2, \quad u^2 + v^2 = t^2.$$

بدین ترتیب  $s^4 + r^4 = t^4$ . لذا  $(s, r, t)$  جوابی ناصفر برای معادله  $x^4 + y^4 = z^4$  است که در آن  $0 < t < z$ . این متناقض با انتخاب  $z$  می‌باشد. ■

فرآیندی که در اثبات قضیه فوق به کار رفت (یافتن  $t$  بی کوچک‌تر از  $z$ ) دنباله‌ای اکیداً نزولی از اعداد طبیعی را به دست می‌دهد و لذا می‌توانیم بدون آن

سعی کنید با استفاده از روش نزول نامتناهی نشان دهید  $\sqrt{2}$  عددی اصم است.

که فرض کنیم  $z$  کمترین مقدار را دارد یافتن این دنباله را متناقض با اصل نزول نامتناهی بدانیم. این که فرض وجود کوچک‌ترین  $z$  طبیعی در بین  $(x, y, z)$  هایی را که جواب معادله هستند بپذیریم یا اصل نزول نامتناهی را به کار ببریم و یا از اصل استقرای قوی استفاده کنیم، تفاوت چندانی در استدلال ایجاد نمی‌کند. آنچه مهم است این است که این سه حقیقت با هم معادلند: اصل استقرای ریاضی، اصل نزول نامتناهی و اصل خوشترتیبی<sup>۳۰</sup>.

۳.۵.۱. (اصل خوشترتیبی اعداد طبیعی) هر زیرمجموعهٔ ناتهی از اعداد طبیعی دارای کوچک‌ترین عضو است. ■

بد نیست نمونه‌ای از کاربرد اصل فوق را نیز با هم ببینیم. قضیه ۴.۵.۱. فرض کنیم  $a$  و  $b$  دو عدد طبیعی باشند. در این صورت اعدادی صحیح مانند  $r_0$  و  $s_0$  موجودند که  $r_0 a + s_0 b$  بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک  $a$  و  $b$  است<sup>۳۱</sup>.

برهان. فرض کنیم

$$A = \{ra + sb : r, s \in \mathbb{Z}, ra + sb \in \mathbb{N}\}.$$

در این صورت  $A$  زیرمجموعه‌ای ناتهی از اعداد طبیعی است و طبق اصل خوشترتیبی دارای کوچک‌ترین عضو مانند  $d$  می‌باشد. ادعا می‌کنیم که  $d$  بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک  $a$  و  $b$  است. توجه داریم که چون  $d$  عضو  $A$  است پس به شکل  $r_0 a + s_0 b$  برای  $r_0$  و  $s_0$  صحیح می‌باشد.

با تقسیم  $a$  بر  $d$  می‌توان نوشت  $a = dq + r$  که  $0 \leq r < d$ . بنابراین داریم

$$r = a - dq = a - q(r_0 a + s_0 b) = a - aqr_0 - bqs_0 = a(1 - qr_0) + b(-qs_0).$$

این نشان می‌دهد که اگر  $r > 0$  آنگاه عضوی کوچک‌تر از  $d$  در  $A$  یافته‌ایم و

دو ساعت شنی داریم که یکی زمان ۷ دقیقه را اندازه می‌گیرد و دیگری ۱۱ دقیقه را. آیا می‌توانید با این دو ساعت، زمان‌های ۱۵ دقیقه، ۱ دقیقه و ۱۳۸۶ دقیقه را اندازه بگیرید؟

<sup>۳۰</sup> well-ordering principle

<sup>۳۱</sup> به عبارت دیگر بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک  $a$  و  $b$  ترکیبی خطی از این دو عدد با ضرایب صحیح است.

لذا نتیجه می‌گیریم که  $r$  باید برابر ۰ باشد. بنابراین  $a = dq$  و لذا  $d$  مقسوم‌علیهی از  $a$  است.

به طریق مشابه می‌توان نشان داد که  $d$  مقسوم‌علیهی از  $b$  نیز می‌باشد.

حال فرض کنیم  $e$  مقسوم‌علیه مشترک دیگری از  $a$  و  $b$  باشد. بنابراین

$$e|r_0a + s_0b = d.$$

این نشان می‌دهد که  $d$  بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک  $a$  و  $b$  است. ■

## ۶.۱ تمرین‌ها

چيست تفاوت روش و ابزار؟  
روش، ابزاری است که آن را  
به کار برده‌اید دو بار!  
Georgé Pólya

برخی از مسائلی که در این بخش می‌آید لزوماً با استفاده از استقرا حل نمی‌شوند و شاید راه حل دیگری نیز برای آنها وجود داشته باشد، اما حل این مسائل به وسیله استقرا به شما کمک می‌کند تا مطالب گفته شده در این فصل را مرور کنید و توانایی خود را در حل مسائل استقرایی محک بزنید.

۱.۶.۱. ثابت کنید بی‌نهایت عدد اول وجود دارد<sup>۳۲</sup>.

۲.۶.۱. نشان دهید اگر عدد طبیعی  $m$  قوة  $n$  ام کامل نباشد آنگاه  $\sqrt[n]{m}$  اصم است.

۳.۶.۱. ثابت کنید حاصلجمع یک عدد اصم و یک عدد گویا، عددی اصم است.

۴.۶.۱. یک پیتزا را با استفاده از یک چاقو برش می‌زنیم طوری که هر دو برش مختلف یکدیگر را قطع می‌کنند و هیچ سه برشی از یک نقطه نمی‌گذرند. بعد از  $n$  برش چند قطعه پیتزا داریم؟

۵.۶.۱. با استفاده از اصل استقرای ریاضی، درستی استقرای ابتدا از  $m$  را اثبات کنید.

<sup>۳۲</sup>اقلیدس این مطلب را می‌دانست. استدلالی که وی برای این حکم ارائه می‌داد مبتنی بر برهان خلف بود.

۶.۶.۱. با استفاده از اصل استقرای ریاضی، درستی استقرای قوی را اثبات کنید.

۷.۶.۱. ثابت کنید اصل استقرای ریاضی و اصل نزول انامتناهی با یکدیگر معادلند.

۸.۶.۱. ثابت کنید اصل استقرای ریاضی و اصل خوشترتبی اعداد طبیعی با یکدیگر معادلند.

۹.۶.۱. صورت دیگری از استقرا، موسوم به *استقرای ضربی*<sup>۳۳</sup>، به این شکل بیان می‌شود که اگر  $P(n)$  حکمی در مورد عدد طبیعی  $n$  باشد و بتوانیم به ازای هر  $n \in \mathbb{N}$  از درستی  $P(n)$  درستی  $P(pn)$  را به ازای هر عدد اول مانند  $p$  اثبات کنیم و به علاوه بتوانیم نشان دهیم که  $P(p)$  برای  $p = 1$  و هر عدد اول  $p$  درست است آنگاه  $P(n)$  برای هر  $n \in \mathbb{N}$  درست است. ثابت کنید اصل استقرای ریاضی و اصل استقرای ضربی با هم معادلند.

۱۰.۶.۱. فرض کنیم در مثال ۳.۲.۱ (برج هانوی) انتقال حلقه از میله  $A$  به میله  $C$  مجاز نباشد. در این صورت کمترین تعداد حرکت برای آن که بازی انجام شود چند است؟

۱۱.۶.۱. فرض کنیم  $Q_n$  کمترین تعداد حرکت‌های لازم برای انتقال حلقه‌ها از میله  $A$  به  $C$  در مثال ۳.۲.۱ (برج هانوی) با این شرط اضافی باشد که انتقال فقط از میله  $A$  به  $C$ ، از میله  $C$  به  $B$  و از میله  $B$  به  $A$  مجاز باشد. همچنین فرض کنیم  $R_n$  کمترین تعداد حرکت‌های لازم برای برگرداندن حلقه‌ها از میله  $C$  به  $A$  با همین شرط باشد. ثابت کنید

$$Q_n = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ 2R_{n-1} + 1 & n > 0 \end{cases}$$

و

$$R_n = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ Q_n + Q_{n-1} + 1 & n > 0 \end{cases}$$

۱۲.۶.۱. یک برج هانوی دوگانه شامل  $2n$  حلقه از  $n$  اندازه مختلف است

گرچه به نظر غیرطبیعی می‌آید، با این حال در مسأله ۴.۶.۱ فرض کنید که پیتزای شما مسطح است و برش‌های چاقو به شکل خط می‌باشد! در صورتی که یک جسم سه بعدی را با  $n$  صفحه قطع کنیم بیشترین تعداد نواحی ایجاد شده چند است؟

<sup>۳۳</sup> multiplicative induction

آیا می‌توانید حکم مشابهی را در مورد برج هانوی سه‌گانه یا  $m$  گانه ارائه دهید؟

که از هر اندازه ۲ تا داریم. اگر قانون بازی همان باشد که در مثال ۳.۲.۱ گفته شد، و اگر فرض کنیم که دو حلقه هم اندازه با هم فرقی ندارند، آنگاه کمترین تعداد حرکت‌های لازم برای انتقال حلقه‌ها از میله  $A$  به میله  $C$  چند است؟ اگر دو حلقه هم اندازه از دو رنگ مختلف باشند کمترین تعداد حرکت لازم برای انتقال حلقه‌ها به طوری که ترتیب آنها حفظ شود چند است؟

۱۳.۶.۱. فرض کنیم  $J_n$  دنباله معرفی شده در مثال ۱۰.۲.۱ (مسئله ژوزفیوس) باشد. همه  $n$  هایی را بیابید که  $J_n = n$ .

۱۴.۶.۱. فرض کنیم  $J_n$  دنباله معرفی شده در مثال ۱۰.۲.۱ (مسئله ژوزفیوس) باشد و تابع  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  به صورت  $f(n) = J_n$  تعریف شود. ثابت کنید به ازای هر  $n$ ، عددی مانند  $m$  هست که  $f^{m+1}(n) = f^m(n)$ ، که در آن منظور از  $f^k$  ترکیب  $k$  بار تابع  $f$  است.

۱۵.۶.۱. فرض کنیم در مثال ۱۰.۲.۱ (مسئله ژوزفیوس) فرد ماقبل آخر با  $I_n$  نمایش داده شود. مقدار  $I_n$  را بر حسب  $n$  تعیین کنید.

۱۶.۶.۱. اگر در مثال ۱۰.۲.۱ (مسئله ژوزفیوس) به جای آن که افراد را یکی در میان از بین ببریم، آنها را  $q$  در میان حذف کنیم آیا به ازای هر  $n$  و هر  $m$  می‌توان عددی مناسب مانند  $q$  را یافت به قسمی که در جمع  $n$  نفری فردی که در نهایت باقی می‌ماند شماره  $m$  باشد؟

۱۷.۶.۱. فرض کنیم  $A$  و  $B$  دو زیرمجموعه متناهی و مجزا از اعداد حقیقی باشند به طوری که به ازای هر  $x \in A \cup B$  داشته باشیم  $x + 1 \in A$  یا  $x - 2 \in B$ . ثابت کنید  $|A| = 2|B|$ ، یعنی تعداد اعضای  $A$  دو برابر تعداد اعضای  $B$  است.

۱۸.۶.۱. فرض کنیم  $A$  و  $B$  دو زیرمجموعه متناهی و مجزا از اعداد حقیقی و  $a$  و  $b$  دو عدد طبیعی و نسبت به هم اول باشند به طوری که به ازای هر  $x \in A \cup B$  داشته باشیم  $x + a \in A$  یا  $x - b \in B$ . ثابت کنید  $a|A| = b|B|$ . الگوریتمی استقرایی برای ساختن چنین مجموعه‌هایی ارائه دهید.

۱۹.۶.۱. اعداد طبیعی را با دو رنگ سیاه و سفید رنگ‌آمیزی کرده‌ایم به طوری که حاصلجمع دو عدد با رنگ متفاوت به رنگ سیاه و حاصلضرب دو عدد با رنگ یکسان به رنگ سفید است. همه حالت‌های مختلف رنگ‌آمیزی

به عبارت دیگر اگر ژوزفیوس در یک جمع  $n$  نفری، نفر  $m$  ام باشد آیا می‌تواند عددی مانند  $q$  را تعیین کند تا با خودکشی کردن افراد به صورت  $q$  درمیان، خودش در نهایت زنده بماند؟

شاید گاهی اوقات بد نباشد که مسئله را سخت‌تر کنید تا حل شود! در اثبات‌های استقرایی بعضی وقت‌ها این کار صرف می‌کند.

را تعیین کنید.

۲۰.۶.۱.  $n$  نقطه با مختصات صحیح در صفحه در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم این نقاط را با دو رنگ آبی و سبز رنگ‌آمیزی کنیم به طوری که در هر سطر و هر ستون اختلاف تعداد نقاط رنگ شده با رنگ آبی و تعداد نقاط رنگ شده با رنگ سبز حداکثر برابر ۱ باشد. آیا این کار امکان‌پذیر است؟

۲۱.۶.۱. فرض کنیم  $n$  عددی طبیعی و  $p$  عددی اول و فرد باشد. ثابت کنید حداکثر یک  $d$  ی طبیعی وجود دارد که  $d|pn^2$  و  $d + n^2$  مربع کامل باشد. این  $d$  را برحسب  $n$  و  $p$  تعیین کنید.

۲۲.۶.۱. همه توابع  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  را بیابید که به ازای هر  $n, m \in \mathbb{N}$  داشته باشیم  $f(n) + f(m) | n + m$ .

۲۳.۶.۱. فرض کنیم  $n$  عدد طبیعی ثابتی باشد. همه اعداد طبیعی مانند  $m$  را بیابید که به ازای اعدادی طبیعی مانند  $a_1, \dots, a_n$  داشته باشیم

$$m = \frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_2} + \dots + \frac{n}{a_n}.$$

۲۴.۶.۱. فرض کنیم  $n$  عددی طبیعی باشد. چند مثلث با اضلاع  $a, b$  و  $c$  وجود دارند که  $a, b, c \in \mathbb{N}$  و محیط آنها برابر  $n$  باشد؟

۲۵.۶.۱. فرض کنیم  $n$  عددی طبیعی باشد. ثابت کنید

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}.$$

۲۶.۶.۱. ثابت کنید حاصلضرب هر  $n$  عدد متوالی مضرب  $n!$  است.

۲۷.۶.۱. فرض کنیم  $n$  و  $m$  اعدادی طبیعی و بزرگ‌تر از ۱ باشند. همه جواب‌های معادله

$$1!3!\dots(2n-1)! = m!$$

را بیابید.

۲۸.۶.۱. گاهی اوقات می‌توان استقرا را به صورت عقبگرد به کار برد، یعنی به جای آن که از مرحله  $n$  ام به مرحله  $n+1$  ام برسیم می‌توانیم از مرحله  $n+1$  ام

برای آن که الگوی مناسب را بیابید بد نیست برای چند عدد کوچک، مسأله را برای خودتان بازنویسی کنید. برای آن که راه رفتن را بیاموزیم باید برخیزیم و چند قدم برداریم.

به مرحله  $n$  ام برگردیم! مثلاً فرض کنید  $P(n)$  حکم زیر باشد:

$$x_1 \dots x_n \leq \left( \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \right)^n, \quad x_1, \dots, x_n \geq 0.$$

این حکم برای  $n = 2$  درست است و اگر  $P(n)$  درست باشد آنگاه  $P(n-1)$  نیز درست است (کافی است به جای  $x_n$  قرار دهیم  $\frac{x_1 + \dots + x_{n-1}}{n-1}$ ). همچنین درستی  $P(n)$  و  $P(2)$  درستی  $P(2n)$  را نتیجه می‌دهد (چرا؟). توضیح دهید که چرا به این روش حکم برای هر  $n$  اثبات خواهد شد.

۲۹.۶.۱. ثابت کنید که معادله  $x^2 + y^2 = z^n$  برای هر عدد طبیعی مانند  $n$  دارای جوابی در  $\mathbb{N}$  است.

۳۰.۶.۱. قضیه برتراند<sup>۳۴</sup> بیان می‌دارد که به ازای هر  $n > 1$  بین  $n$  و  $2n$  عددی اول وجود دارد. با استفاده از این قضیه ثابت کنید که هر عدد طبیعی بزرگتر از ۶ را می‌توان به صورت مجموعی از اعداد اول متمایز نوشت.

۳۱.۶.۱. ثابت کنید معادله  $x^2 - y^2 = 10$  در اعداد طبیعی جواب ندارد.

۳۲.۶.۱. یال‌های گراف کامل  $K_n$  را با دو رنگ آبی و قرمز رنگ‌آمیزی کرده‌ایم<sup>۳۵</sup>. ثابت کنید که می‌توانیم رئوس  $K_n$  را به صورت  $u_1, u_2, \dots, u_n$  نامگذاری کنیم به طوری که یال‌های موجود بین  $u_1, u_2$  و  $u_2, u_3$  و  $u_3, \dots, u_n$  و  $u_1$  همگی آبی یا همگی قرمز باشند و یا چند یال آبی و پس از آن چند یال قرمز داشته باشیم.

۳۳.۶.۱. می‌خواهیم یال‌های  $K_n$  را رنگ‌آمیزی کنیم به طوری که هیچ مثلی که سه ضلع آن رنگ‌های متفاوت داشته باشند در آن یافت نشود. حداکثر چند رنگ می‌توان به کار برد؟

۳۴.۶.۱. برای یک گراف مانند  $G = (V, E)$ ، مکمل<sup>۳۶</sup> آن با نماد  $\bar{G}$  گرافی است که مجموعه رئوس آن همان  $V$  است و بین دو رأس از  $V$  در  $\bar{G}$  یال وجود

<sup>۳۴</sup>Bertrand's theorem

<sup>۳۵</sup>یادآوری می‌کنیم که یک گراف مانند  $G = (V, E)$ ، متشکل از مجموعه رئوس  $V$  و مجموعه یال‌های  $E$  است که هر یال  $e$  از  $E$  بین دو رأس از  $V$  واقع شده است. همچنین گراف کامل  $K_n$  متشکل از  $n$  رأس  $v_1, v_2, \dots, v_n$  است که بین هر دو رأس از  $V$  یک یال وجود دارد.

<sup>۳۶</sup>complement

برخی این نوع استقرا را  
استقرای قهقراپی می‌نامند.

دارد فقط و فقط وقتی که بین آن دو رأس در  $G$  یالی موجود نباشد. گراف  $G$  را خودمکمل<sup>۳۷</sup> نامیم هرگاه بتوانیم رئوس  $\bar{G}$  را طوری شماره‌گذاری مجدد کنیم که  $G$  و  $\bar{G}$  یکی شوند<sup>۳۸</sup>. ثابت کنید اگر  $G$  گرافی خودمکمل با  $n$  رأس باشد آنگاه  $n$  یا  $n - 1$  مضرب ۴ هستند. الگوریتمی ارائه دهید که گراف‌های خودمکملی با ۴، ۵، ۸، ۹، ۱۲، ۱۳، ... رأس بسازد.

اگر هنوز ترفند حل مسأله به وسیله استقرا را به خوبی فرا نگرفته‌اید هرگز به فصل بعدی نروید! سعی کنید مجموعه‌ای دیگر از مسائل استقرایی را در کتاب‌های دیگر پیدا کنید و آنها را حل کنید.

<sup>۳۷</sup>self-complemented

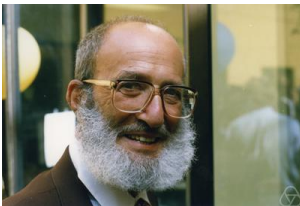
<sup>۳۸</sup>مثلاً یک پنج ضلعی با رئوس ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ که بین رئوس ۱ و ۲، رئوس ۲ و ۳، رئوس ۳ و ۴ و ۵ و بالاخره بین رئوس ۵ و ۱ آن یال وجود دارد خود مکمل است. چرا؟

## یا، و

انبوه مناسی از مثال‌ها که  
تا حد امکان بزرگ باشد،  
برای درک عمیق هر مفهومی  
ضروری است و هرگاه که من  
می‌خواهم چیز جدیدی را یاد  
بگیرم، اولین کار من این است  
که نمونه‌ای از آن را بسازم.

**Paul Richard Halmos**

3 March 1916 - 2 Oct 2006



## ۰.۲ آنچه در این فصل می‌خوانید

در این فصل با دو اصل ساده دیگر مواجه می‌شویم و از آنها برای حل مسائل استفاده می‌کنیم. این دو اصل به سادگی بیان می‌شوند و درک خود اصول اصلاً سخت نیست، گرچه برای آن که بتوانید حل کردن مسائل به وسیله آنها را به خوبی فرا گیرید بدون تردید لازم است به کار بردن آنها را در احکام مختلف

مشاهده کنید و در نمونه‌های متفاوت به کار بندید.

می‌توان گفت که هر اصلی چنین خاصیتی را دارد؛ به سادگی بیان می‌شود و فهمیدن آن آسان است، چرا که معمولاً اصول اولیه گزاره‌هایی هستند که نمی‌توان دلیلی برای آنها آورد. مطمئناً سادگی بیان این گزاره‌ها باعث می‌گردد که دلیل آوردن برای آنها دچار مشکل شود چون اگر بتوانیم برهانی برای درستی گزاره‌ای مانند  $P$  ارائه دهیم منطقی نیست که آن را به عنوان اصل بپذیریم.

از سوی دیگر گرچه اصول اولیه به سادگی بیان می‌شوند، با این حال استفاده از آنها برای حل مسائل، معمولاً مبتنی بر ترفند و ابتکاری ویژه است. این گونه مسائل بیشتر شبیه معماهایی هستند که چون حل شوند آسان خواهند شد. در نقطه مقابل آن، مسائلی وجود دارند که درک آنها و حتی فهمیدن خود سؤال نیازمند آشنایی با تعاریف پیچیده و قضایای معروف است. بنابراین تا از آن تعاریف و قضایا اطلاع نداشته باشید بعید است بتوانید این گونه مسائل را حل کنید. اما همین که دامنه اطلاعات شما وسیع گردید حل این نوع از مسائل معمولاً احتیاجی به ترفند و ابتکار ندارد.

دو اصلی که در این فصل به آنها خواهیم پرداخت از اصولی هستند که در حل مسائل شمارشی به کار می‌آیند. در ابتدا با این دو اصل و نمونه‌های مختلفی از کاربرد آنها آشنا خواهیم شد و سپس سعی می‌کنیم با در هم آمیختن این دو اصل با ترفند برهان خلف و اثبات به وسیله استقرا، مسائلی را حل کنیم که از پیچیدگی مضاعفی برخوردار هستند. بی‌شک هر چه ابزار ما برای حل مسائل، پیشرفته‌تر باشد می‌توانیم احکام قوی‌تری را اثبات کنیم اما چیزی که کار را سخت می‌کند این است که پس از فرا گرفتن این ابزارهای مختلف، نمی‌دانیم کدام یک را برای مواجه شدن با کدام مسأله باید به کار ببریم.

مثلاً وقتی مسأله‌ای، دقیقاً پس از آشنا شدن با اصل استقرای ریاضی مطرح می‌شود می‌توانیم حدس بزنیم که استقرا می‌تواند در حل آن مفید باشد و اگر در بحث برهان خلف باشیم و سؤالی را مطرح کنیم بدون تردید این روش می‌تواند در حل آن مؤثر واقع شود. اما تصور کنید که همه مطالب این کتاب را آموخته‌اید

برای آن که گزاره‌ای را به عنوان اصل بپذیریم باید اثبات کنیم که نمی‌توان آن را اثبات کرد و اثبات کنیم که نمی‌توان آن را رد کرد. واقعاً چگونه می‌توان اثبات کرد که جمله‌ای قابل اثبات و قابل ابطال نیست؟

و در پایان مسأله ساده‌ای را ببینید که به کمک برهان خلف حل می‌شود. مطمئناً انتخاب برهان خلف در چنان وضعیتی احتیاج به تجربه و ممارست بالایی دارد. بنابراین بدیهی است که هرچه پیشتر رویم معلوماتمان بیشتر، مسائلمان سخت‌تر و حتی راه حل‌های آسان دشوارتر جلوه خواهند کرد!

## ۱.۲ مربع‌های توخالی

سؤالات بسیاری وجود دارد که بی‌خردان می‌توانند آنها را مطرح کنند اما خردمندان نمی‌توانند آنها را پاسخ دهند.

George Pólya

دو کار مختلف را در نظر بگیرید که انجام آنها ربطی به یکدیگر نداشته باشد. مثلاً می‌توانید درس خواندن و بازی کردن را در نظر بگیرید. این دو کار را  $A$  و  $B$  می‌نامیم. فرض کنید انجام کار  $A$  به  $n$  روش و انجام کار  $B$  به  $m$  روش امکان پذیر باشد. مثلاً می‌توانید برای درس خواندن به دو روش عمل کنید. یا خودتان بخوانید یا معلمی به شما درس بدهد. همچنین فرض کنید که مثلاً بازی کردن به سه روش ممکن باشد: توپ بازی، حل یک مسأله ریاضی (!) و ارسال پیام کوتاه به یکی از دوستان.

اگر بخواهید کار  $A$  یا کار  $B$  را انجام دهید می‌توانید به  $n+m$  روش عمل کنید. مثلاً می‌توانید خودتان درس بخوانید یا معلمی به شما درس بدهد یا توپ بازی کنید یا یک مسأله ریاضی حل کنید یا برای یکی از دوستان خود پیام کوتاه بفرستید.

اما اگر بخواهید کار  $A$  و کار  $B$  را انجام دهید می‌توانید به  $nm$  روش عمل کنید. مثلاً می‌توانید خودتان درس بخوانید و توپ بازی کنید، خودتان درس بخوانید و یک مسأله ریاضی حل کنید، خودتان درس بخوانید و برای یکی از دوستان خود پیام کوتاه بفرستید، معلمی به شما درس بدهد و توپ بازی کنید، معلمی به شما درس بدهد و یک مسأله ریاضی حل کنید، معلمی به شما درس بدهد و برای یکی از دوستان خود پیام کوتاه بفرستید.

چیزی که گفتیم دو اصل جدیدی است که در این فصل قصد داریم به آنها

بپردازیم. اجازه دهید دقیق‌تر بگوییم.

۱.۱.۱.۲. (اصل جمع<sup>۱</sup>) اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه مجزا باشند آنگاه تعداد اعضای  $A \cup B$  برابر است با تعداد اعضای  $A$  به اضافه تعداد اعضای  $B$ . به عبارت دیگر با فرض  $A \cap B = \emptyset$  داریم  $|A \cup B| = |A| + |B|$ . ■

۲.۱.۱.۲. (اصل ضرب<sup>۲</sup>) اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه دلخواه باشند آنگاه تعداد اعضای  $A \times B$  برابر است با تعداد اعضای  $A$  ضربدر تعداد اعضای  $B$ . به عبارت دیگر  $|A \times B| = |A| \cdot |B|$ . ■

برای آن که تعداد حالات انجام یک کار که ترکیبی از چند کار دیگر است را بشماریم کافی است یک جمله ساده در مورد انجام آن کار بگوییم، تعداد حالات انجام کارهای گفته شده را در چند مربع توخالی بنویسیم، به حروف ربط و و یا در جمله‌ای که گفته‌ایم توجه کنیم، هر جا و آمده بود علامت ضرب بگذاریم و هر جا یا آمده بود علامت جمع. اجازه دهید با ذکر چند مثال بحث را روشن کنیم.

مثال ۳.۱.۱.۲. تعداد کدهای  $n$  رقمی با ارقام ۰ و ۱ برابر چند است؟

برای نوشتن یک کد  $n$  رقمی به این طریق عمل می‌کنیم. برای نوشتن اولین رقم کد (مثلاً از سمت چپ) به ۲ طریق می‌توانیم عمل کنیم و برای نوشتن دومین رقم نیز به ۲ طریق و ... و برای نوشتن رقم  $n$  ام نیز به ۲ طریق. پس داریم

$$\boxed{2} \times \boxed{2} \times \dots \times \boxed{2}$$

که تعداد این ۲ ها برابر  $n$  است. عمل ضرب در بین مربع‌ها به دلیل آن است که ما می‌خواهیم رقم اول و رقم دوم و ... و رقم  $n$  ام را بنویسیم. بنابراین پاسخ برابر  $2^n$  است. ♠

مثال ۴.۱.۱.۲. یک مجموعه  $n$  عضوی مانند  $X = \{1, 2, \dots, n\}$  چند زیرمجموعه دارد؟

نیمی از آب یک لیوان پر آب را در لیوانی دیگر خالی می‌کنیم. اگر این لیوان را به یک فرد منفی‌نگر نشان دهیم می‌گوید نیمی از آن خالی است و اگر به فردی مثبت‌نگر نشان دهیم می‌گوید نیمی از آن پر است اما اگر آن را به یک ریاضیدان که در ترکیبیات تخصص دارد نشان دهیم سری تکان می‌دهد و می‌گوید: اکنون اگر بخواهیم یک ملکول آب انتخاب کنیم دو حالت وجود دارد؛ یا از این لیوان انتخاب می‌کنیم یا از دیگری.



چند روش برای جواب دادن به این سؤال می‌دانید؟

<sup>۱</sup>rule of sum

<sup>۲</sup>rule of product

برای آن که یک زیرمجموعه مانند  $A$  از  $X$  را مشخص کنیم آن را به صورت

$$A = \{\square, \square, \dots, \square\}$$

می‌نویسیم که تعداد مربع‌های توخالی برابر  $n$  است. مربع اول مخصوص نوشتن ۱، دومی مخصوص نوشتن ۲، ... و  $n$  امی مخصوص نوشتن  $n$  می‌باشد.

اکنون برای آن که زیرمجموعه‌ای دلخواه مانند  $A$  را مشخص کنیم در مربع اول ۱ را می‌گذاریم یا نمی‌گذاریم (۲ حالت) و در مربع دوم ۲ را می‌گذاریم یا نمی‌گذاریم (۲ حالت) و ... و در مربع  $n$  ام  $n$  را می‌گذاریم یا نمی‌گذاریم. پس تعداد زیرمجموعه‌ها برابر است با

$$\boxed{1+1} \times \boxed{1+1} \times \dots \times \boxed{1+1}$$

که تعداد مربع‌ها برابر  $n$  است و لذا تعداد زیرمجموعه‌های  $X$  برابر  $2^n$  می‌باشد. ♠

**مثال ۵.۱.۲.** به چند طریق می‌توان  $n$  نفر را در یک صف در کنار یکدیگر قرار داد؟

برای انتخاب نفر اول صف  $n$  حالت وجود دارد اما همین که نفر اول انتخاب شد برای نفر دوم  $n-1$  انتخاب وجود خواهد داشت؛ و برای نفر بعدی  $n-2$  انتخاب. به همین ترتیب برای نفر آخر ۱ انتخاب داریم.

بنابراین تعداد صف‌های مختلف برابر است با

$$n \times (n-1) \times \dots \times 1.$$

عمل ضرب در بین اعداد به این دلیل است که ما نفر اول را انتخاب می‌کنیم و سپس نفر دوم را و ... و بالاخره نفر آخر را. می‌دانیم که عدد فوق با علامت  $n!$  نمایش داده می‌شود. پس تعداد حالات مختلف قرار گرفتن  $n$  نفر در کنار یکدیگر برابر است با  $n!$ . ♠

مثال فوق از این جهت حائز اهمیت است که انجام کارها بر یکدیگر تأثیر می‌گذارد؛ هنگامی که نفر اول انتخاب شد تعداد حالات انتخاب نفر دوم برابر

اگر ۰ نفر بخواهند در یک صف قرار بگیرند یک حالت وجود دارد! آن حالت این است که هیچ کسی در صف نباشد. بدین ترتیب، تعریف  $0! = 1$  توجیه می‌گردد.

۱- $n$  است چون یک نفر از افراد کم شده است. با این حال حق داشتیم در مثال فوق از اصل ضرب استفاده کنیم. اما گاهی اوقات با مسائلی مواجه می‌شویم که استفاده از اصل ضرب به این سادگی امکان پذیر نیست. کم کم این گونه مثال‌ها را نیز خواهیم دید.

**مثال ۶.۱.۲.**  $n$  دستکش چرمی با  $n$  رنگ مختلف داریم. می‌خواهیم از بین این دستکش‌ها یک جفت دستکش انتخاب کنیم طوری که رنگ دو دستکش انتخاب شده یکی نباشد. این کار به چند طریق امکان پذیر است؟

برای دست راست یکی از  $n$  دستکش را انتخاب می‌کنیم و برای دست چپ  $n-1$  انتخاب داریم چون نمی‌خواهیم دستکشی که انتخاب می‌کنیم هم‌رنگ با دستکش دست راست باشد. پس تعداد حالات ممکن برابر  $n(n-1)$  است. ♠

**مثال ۷.۱.۲.**  $n$  جفت جوراب با  $n$  رنگ مختلف داریم که روی آنها شماره‌های ۱ تا  $2n$  نوشته شده است<sup>۳</sup>. به چند طریق می‌توانیم یک جفت جوراب از بین این جوراب‌ها انتخاب کنیم که هم‌رنگ نباشند؟

توجه داریم که فرق جوراب با دستکش چرمی این است که دستکش چرمی دست راست را نمی‌توان به دست چپ کرد در صورتی که در مورد جوراب این گونه نیست.

از بین  $2n$  لنگه جوراب یکی برای پای راست انتخاب می‌کنیم و برای پای چپ  $2n-2$  انتخاب داریم چون از بین  $2n-1$  لنگه جوراب باقی مانده می‌خواهیم جورابی انتخاب کنیم که با جوراب انتخاب شده برای پای راست هم‌رنگ نباشد. پس  $2n(2n-2)$  حالت ممکن وجود دارد. ♠

اما همیشه مربع‌های توخالی مفید نیستند. گاهی اوقات مجبوریم که از مستطیل‌های توخالی استفاده کنیم! مثال بعد را ببینید.

**مثال ۸.۱.۲.** فرض کنیم  $X = \{1, 2, \dots, n\}$ . تعداد  $(A, B)$  هایی را بیابید که  $A$  و  $B$  زیرمجموعه  $X$  باشند. چند  $(A, B)$  وجود دارد که  $A \subseteq B \subseteq X$ ؟

۱۰ کتاب داریم که آنها را با شماره‌های ۱ تا ۱۰ شماره‌گذاری کرده‌ایم. به چند طریق می‌توان این کتاب‌ها را در کنار یکدیگر قرار داد به گونه‌ای که کتاب ۱ دقیقاً بعد از کتاب ۳ و کتاب ۲ دقیقاً بعد از کتاب ۶ و کتاب ۶ دقیقاً بعد از کتاب ۷ بیاید؟

<sup>۳</sup> بنابراین  $2n$  لنگه جوراب متفاوت داریم.

پاسخ قسمت اول این سؤال اصلاً سخت نیست. کافی است دو مربع توخالی به صورت  $(\square, \square)$  در نظر بگیریم. هر یک از این دو مربع به  $2^n$  روش پر می‌شود چون تعداد زیرمجموعه‌های  $X$  برابر  $2^n$  است. بنابراین پاسخ قسمت اول برابر  $2^n \times 2^n = 4^n$  می‌باشد.

اما قسمت دوم به این سادگی حل نمی‌شود چون وقتی مربع مربوط به  $A$  را پر کردیم، تعداد حالات مربع مربوط به  $B$  بر اساس آن تعیین می‌گردد. در اینجا مجبوریم به طریقی دیگر عمل کنیم.

اعداد ۱ تا  $n$  را می‌نویسیم و مجموعه‌های  $A$  و  $B$  را به صورت زیر مشخص می‌سازیم

|     | ۱ | ۲ | ... | $n$ |
|-----|---|---|-----|-----|
| $A$ |   |   |     |     |
| $B$ |   |   |     |     |

در سطر اول، در مقابل  $A$ ، در مربع‌هایی ۱ می‌گذاریم که اعداد بالای آنها عضو  $A$  هستند. همچنین در سطر دوم در مکان‌هایی ۱ می‌گذاریم که عضو  $B$  باشند. در جاهای دیگری که باقی می‌ماند نیز ۰ می‌گذاریم. مثلاً

|     | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ |
|-----|---|---|---|---|---|
| $A$ | ۱ | ۰ | ۱ | ۱ | ۰ |
| $B$ | ۰ | ۰ | ۰ | ۱ | ۱ |

مشخص می‌کند که  $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ،  $A = \{1, 3, 4\}$  و  $B = \{4, 5\}$ .

بنابراین در حقیقت زیر هر عدد یک مستطیل  $2 \times 1$  می‌گذاریم و آنها را پر می‌کنیم. این مستطیل‌ها را می‌توان با ۰۱، ۱۰، ۱۱ پر کرد. اما اگر مستطیل زیر یک عدد مانند  $i$  را به صورت ۱۰ پر کنیم بدان معنی است که  $i$  عضو  $A$  است ولی عضو  $B$  نمی‌باشد. پس هیچ مستطیلی را نمی‌توان به صورت ۱۰ پر کرد و لذا هر مستطیل به ۳ صورت پر می‌شود.

۱۰ کتاب داریم که آنها را با شماره‌های ۱ تا ۱۰ شماره‌گذاری کرده‌ایم. به چند طریق می‌توان این کتاب‌ها را در کنار یکدیگر قرار داد به گونه‌ای که کتاب ۱ بعد از کتاب ۳ (اما نه لزوماً دقیقاً پس از آن) و کتاب ۳ دقیقاً بعد از کتاب ۶ بیاید؟

اکنون مستطیل اول و مستطیل دوم و ... و مستطیل  $n$  ام را هر یک به ۳ طریق پر می‌کنیم و لذا پاسخ این قسمت برابر  $۳^n$  است. ♠

این مثال را می‌توان به صورت زیر تعمیم داد.

**قضیه ۹.۱.۲.** فرض کنیم  $X = \{1, 2, \dots, n\}$ . در این صورت تعداد  $(A_1, A_2, \dots, A_k)$  هایی که  $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_k \subseteq X$  برابر است با  $(k+1)^n$ .

**برهان.** اگر به روش مثال فوق عمل کنیم باید مستطیل‌هایی را در نظر بگیریم که اعداد ۱ ظاهر شده در آنها زیر ه‌های آن باشد. این مستطیل‌ها یا اصلاً ۱ ندارند یا فقط یک بار عدد ۱ آمده است (که باید در پایین‌ترین مربع آن آمده باشد) یا دو بار عدد ۱ آمده است (که باید دو مربع پایینی را اشغال کنند) یا ... یا  $k$  بار عدد ۱ آمده است (که همه مربع‌ها شامل ۱ هستند). بنابراین هر مستطیل به  $k+1$  روش پر می‌شود و لذا تعداد حالات پر کردن کل مستطیل‌ها برابر  $(k+1) \times (k+1) \times \dots \times (k+1)$  است که  $k+1$  به تعداد  $n$  بار نوشته شده است، زیرا باید مستطیل اول را پر کنیم و مستطیل دوم را پر کنیم و ... و مستطیل  $n$  ام را پر کنیم. ■

آیا می‌توانید همین حکم را به استقرا اثبات کنید؟ استقرا را روی  $n$  به کار می‌برید یا  $k$ ؟

نکته‌ای که در این بین وجود دارد این است که اگر کارهای ما بر یکدیگر اثر می‌گذارند نباید ناامید شویم. به هر حال باید راهی برای غلبه بر مسأله وجود داشته باشد. آنچه مهم است این است که باید مسأله خود را به مسأله‌ای آشنا تبدیل کنیم تا حل شود. و هر چه تعداد مسأله‌های آشنای ما بیشتر باشد مسائل بیشتری را می‌توانیم حل کنیم.

اکنون که راه حل بالا برای اثبات حکم را آموخته‌ایم نباید اثبات قضیه زیر سخت باشد. وقتی برهان حکمی را می‌خوانید دو چیز را باید فرا گیرید: اول، اثبات خود حکم و دوم (که از اولی خیلی مهم‌تر است) این است که ترفند اثبات را برای غلبه بر مسائل دیگر مشابه آن به خاطر بسپارید.

**قضیه ۱۰.۱.۲.** فرض کنیم  $X = \{1, 2, \dots, n\}$ . در این صورت تعداد

$(A_1, A_2, \dots, A_k)$  هایی که  $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k = X$  برابر است با  $(2^k - 1)^n$ .

**برهان.** این بار مستطیل‌ها باید به گونه‌ای پر شوند که لااقل یک بار عدد ۱ در هر مستطیل آمده باشد زیرا اگر مثلاً مستطیل زیر عدد  $i$  به صورت  $0 \dots 0$  پر شود این بدان معنی است که  $i$  متعلق به هیچ یک از  $A_1, A_2, \dots, A_k$  نیست و لذا نمی‌تواند متعلق به اجتماع آنها باشد که در نتیجه اجتماع  $A_j$  ها برابر  $X$  نخواهد شد.

اما به چند طریق می‌توان یک مستطیل را پر کرد که لااقل یک بار عدد ۱ در آن آمده باشد؟ می‌دانیم که هر مستطیل از  $k$  مربع تشکیل شده است که هر مربع به ۲ طریق (۰ یا ۱) پر می‌شود. بنابراین اگر بخواهیم مربع اول مستطیل و مربع دوم آن و ... و مربع  $k$  ام آن را پر کنیم به  $2^k$  روش امکان‌پذیر است. ولی یکی از این حالات پر کردن مستطیل متناظر با  $0 \dots 0$  می‌باشد. بنابراین اگر بخواهیم مستطیل‌ها را پر کنیم و لااقل یک بار عدد ۱ در آنها آمده باشد  $2^k - 1$  حالت ممکن وجود دارد. لذا تعداد مطلوب برابر  $(2^k - 1) \times (2^k - 1) \times \dots \times (2^k - 1)$  است که  $2^k - 1$  به تعداد  $n$  بار نوشته شده است. ■

**قضیه ۱.۱.۱.۲.** فرض کنیم  $X = \{1, 2, \dots, n\}$ . در این صورت تعداد  $(A_1, A_2, \dots, A_k)$  هایی که  $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k = X$  و  $A_j$  ها دو به دو مجزا هستند برابر است با  $k^n$ .

**برهان.** این بار غیر از این که مستطیل‌ها باید حداقل یک بار ۱ داشته باشند (چون قرار است اجتماع مجموعه‌ها برابر  $X$  شود) باید در هر مستطیل حداکثر یک بار ۱ داشته باشیم (چون قرار است مجموعه‌ها دو به دو مجزا باشند). لذا باید در هر مستطیل دقیقاً یک بار عدد ۱ آمده باشد. این ۱ می‌تواند در مربع اول یا مربع دوم یا ... یا مربع  $k$  ام باشد. بنابراین هر مستطیل می‌تواند به  $k$  روش پر شود. حال چون  $n$  مستطیل داریم، تعداد مطلوب برابر  $k^n$  است. ■

بد نیست حکمی سخت‌تر را تجربه کنیم.

اگر این شرط اضافی را هم بگذاریم که  $A_j$  ها ناتهی باشند چه جوابی برای این مسأله دارید؟

قضیه ۱۲.۱.۲. فرض کنیم  $X = \{1, 2, \dots, n\}$  و

$$\mathcal{S} = \{(A_1, A_2, \dots, A_k) : A_1, A_2, \dots, A_k \subseteq X\}.$$

قرار می‌دهیم

$$\alpha = \sum_{(A_1, A_2, \dots, A_k) \in \mathcal{S}} |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k|.$$

در این صورت

$$\alpha = n \cdot (2^k - 1) \cdot 2^{k(n-1)}.$$

**برهان.** یک سطر جدید زیر همه سطرها به صورت زیر اضافه می‌کنیم.

|                                    | ۱ | ۲ | ... | $n$ |
|------------------------------------|---|---|-----|-----|
| $A_1$                              |   |   |     |     |
| $A_2$                              |   |   |     |     |
| $\vdots$                           |   |   |     |     |
| $A_k$                              |   |   |     |     |
| $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k$ |   |   |     |     |

یک مربع در سطر آخر با عدد ۱ پر می‌شود فقط و فقط وقتی که حداقل یک بار عدد ۱ در مستطیل بالای آن ظاهر شده باشد. مقدار  $\alpha$  برابر است با مجموع ۱‌هایی که در سطر آخر برای همه حالات مختلف پر کردن مستطیل‌ها ایجاد می‌شود.

برای آن که مقدار  $\alpha$  را به دست آوریم بدین طریق عمل می‌کنیم. ابتدا یکی از مستطیل‌ها را انتخاب می‌کنیم و سپس آن مستطیل را طوری پر می‌کنیم که عدد ۱ در مربع سطر آخر این مستطیل ایجاد شود و پس از آن بقیه مستطیل‌ها را به دلخواه پر می‌کنیم.

از آنجایی که با هر مستطیلی چنین کاری را انجام می‌دهیم، مجموع همه ۱‌های ممکن در همه حالات ممکن به دست می‌آید.

اثبات این مسأله به استقرا واقعاً کار پر دردسری است. اما بد نیست آن را یک بار امتحان کنید. آیا راه دیگری نیز سراغ دارید که بتوان این مسأله را به مسأله‌ای دیگر تبدیل کرد و سپس آن را حل کرد؟

اما انتخاب کردن یک مستطیل به  $n$  طریق صورت می‌پذیرد و برای آن که در مربع سطر آخر این مستطیل عدد ۱ ظاهر شود می‌توانیم مستطیل مذکور را به  $2^k - 1$  طریق پر کنیم (چون هر مستطیل به  $2^k$  طریق پر می‌شود و باید حالتی که همه مربع‌ها با ۰ پر شده‌اند را کنار بگذاریم) و بقیه مستطیل‌ها که تعداد آنها برابر  $n - 1$  است هر یک به  $2^k$  طریق پر می‌شوند.

بنابراین تعداد مطلوب برابر است با  $n$  ضربدر  $2^k - 1$  ضربدر  $n - 1$  بار  $2^k$ . این عدد برابر است با  $2^{k(n-1)} \cdot (2^k - 1) \cdot n$ . ■

## ۲.۲ انتخاب

ریاضیات عبارت است از هنر اعطا کردن نام یکسان به اشیاء متفاوت.

**Jules Henri Poincaré**

29 April 1854 - 17 July 1912



در این بخش به سه سؤال مهم ترکیبیات می‌پردازیم. به طور کلی ترکیبیات با مسائل مختلف مربوط به ترکیب‌ها سر و کار دارد و ترکیب چیزی است که در این بخش مورد مطالعه قرار می‌گیرد. این سه سؤال مهم در قضیه زیر آمده است. **قضیه ۱.۲.۲.** فرض کنیم  $n$  و  $k$  اعدادی صحیح و نامنفی باشند و  $k \leq n$ . در این صورت

i. تعداد حالات مختلف قرار گرفتن  $n$  نفر در کنار یکدیگر برابر است با  $n!$ ؛

ii. تعداد حالات مختلف انتخاب یک تیم  $k$  نفری از بین  $n$  نفر به طوری که ترتیب افراد در تیم اهمیت نداشته باشد برابر است با  $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ ؛

iii. تعداد حالات مختلف انتخاب یک تیم  $k$  نفری از بین  $n$  نفر به طوری که ترتیب افراد در تیم اهمیت نداشته باشد برابر است با  $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ .

**برهان.** حکم در حالتی که  $n$  یا  $k$  برابر ۰ باشد بدیهی است. بنابراین می‌توان فرض کرد که  $n$  و  $k$  طبیعی هستند.

i. این قسمت در مثال ۵.۱.۲ اثبات شد.

ii. برای انتخاب یک تیم  $k$  نفری،  $k$  مربع خالی در نظر می‌گیریم. مربع اول به

$n$  طریق پر می‌شود و مربع دوم به  $n-1$  طریق و ... و مربع آخر به  $n-k+1$  طریق<sup>۴</sup>. بنابراین تعداد حالات ممکن برابر است با حاصلضرب این اعداد یعنی  $n \times (n-1) \times \dots \times (n-k+1)$ . برای این که این عدد را به صورت فاکتوریلی نمایش دهیم آن را در  $1 \times 2 \times \dots \times (n-k)$  ضرب و بر همین عدد تقسیم می‌کنیم. بنابراین تعداد مطلوب برابر است با

$$\begin{aligned} & n \times (n-1) \times \dots \times (n-k+1) \\ = & \frac{n \times (n-1) \times \dots \times (n-k+1) \times (n-k) \times \dots \times 2 \times 1}{(n-k) \times \dots \times 2 \times 1} \\ = & \frac{n!}{(n-k)!}. \end{aligned}$$

iii. اگر ترتیب اهمیت نداشته باشد برخی از حالت‌هایی که در قسمت قبل متفاوت تلقی می‌شدند اکنون یکی هستند<sup>۵</sup>. در حقیقت می‌توان گفت که با انتخاب  $k$  فرد مشخص، در حالتی که ترتیب اهمیت داشته باشد می‌توانیم  $k!$  تیم بسازیم (بنابر قسمت i)، اما اگر ترتیب اهمیت نداشته باشد همه این  $k!$  تیم به یک تیم تبدیل می‌شوند. پس تعداد مطلوب در این حالت  $\frac{1}{k!}$  برابر عدد مذکور در قسمت قبل است یعنی برابر است با

$$\frac{1}{k!} \cdot \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

فرض کنیم  $n$  و  $m$  اعدادی طبیعی باشند و  $m < n$ . چند جایگشت از اعداد ۱ تا  $n$  داریم که اگر اعداد  $m+1$  تا  $n$  را از آن حذف کنیم، جایگشت باقی مانده به صورت  $1 \dots m$  باشد؟

و در نتیجه حکم اثبات می‌شود.

سه مسأله فوق از مهم‌ترین سؤال‌های ترکیبیات هستند. هر یک از حالت‌های

<sup>۴</sup> برای آن که بهتر این مطلب را متوجه شوید مثلاً فرض کنید که  $n=8$  و  $k=3$ . در این صورت ۳ مربع داریم که اولی به ۸ طریق و دومی به ۷ طریق و سومی به ۶ طریق پر می‌شوند. توجه کنید که  $6 = 8 - 3 + 1 = n - k + 1$ .

<sup>۵</sup> مثلاً با فرض  $n=8$  و  $k=3$  تیم‌های  $(1, 2, 4)$ ،  $(1, 4, 2)$ ،  $(2, 1, 4)$ ،  $(2, 4, 1)$ ،  $(4, 1, 2)$  و  $(4, 2, 1)$  در قسمت اول متفاوت تلقی می‌شوند اما اگر ترتیب اهمیت نداشته باشد همه این حالات به یک تیم  $\{1, 2, 4\}$  تبدیل می‌شوند.

مختلف ایستادن افراد در صف در قسمت  $i$  قضیه فوق را یک جایگشت<sup>۶</sup> می‌نامیم. معمولاً به جای آن که جایگشت را بین افراد در نظر بگیرند آن را روی حروف الفبا یا اعداد طبیعی در نظر می‌گیرند. مثلاً در حالت  $n = 3$  تعداد جایگشت‌ها برابر  $3! = 6$  است که آنها را روی سه حرف  $a, b, c$  به صورت

$$abc, acb, bac, bca, cab, cba$$

یا روی سه عدد ۱، ۲ و ۳ به صورت

۱۲۳، ۱۳۲، ۲۱۳، ۲۳۱، ۳۱۲، ۳۲۱

نمایش می‌دهند.

مجموعه همه جایگشت‌های مختلف روی  $n$  حرف را با  $S_n$  نمایش می‌دهیم. تعداد اعضای  $S_n$  برابر  $n!$  است و روش‌های مختلفی برای نمایش دادن اعضای آن وجود دارد که از آن میان یکی را که کار کردن با آن ساده‌تر است در اینجا شرح می‌دهیم.

اگر در بین حروف استفاده شده، حروف تکراری هم وجود داشته باشد چند جایگشت داریم؟

اگر جایگشت را روی  $n$  عدد ۱، ۲، ...،  $n$  در نظر بگیریم می‌توانیم فرض کنیم که  $n$  صندلی با شماره‌های ۱ تا  $n$  داریم و  $n$  نفر با شماره‌های ۱ تا  $n$  که می‌خواهند روی این صندلی‌ها بنشینند. در حالتی که هر فردی روی صندلی خود بنشیند جایگشتی به دست می‌آید که آن را جایگشت همانی<sup>۷</sup> می‌نامیم. این جایگشت را می‌توان به صورت

$$1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 2, \dots, n \rightarrow n$$

نمایش داد. هر یک از جایگشت‌های دیگر را نیز می‌توان با همین پیکان‌ها نمایش داد اما این کار در عمل باعث پیچیده شدن محاسبات خواهد شد. مثلاً

<sup>۶</sup> permutation

<sup>۷</sup> identity permutation

فرض کنید  $n = 7$  و جایگشت

$$1 \rightarrow 5, 2 \rightarrow 4, 3 \rightarrow 7, 4 \rightarrow 3, 5 \rightarrow 1, 6 \rightarrow 6, 7 \rightarrow 2$$

را در نظر بگیرید. به جای آن که این جایگشت را به این شکل طولانی نمایش دهیم شکل ساده‌تری را معرفی می‌کنیم.

ابتدا یک پرانتز باز می‌کنیم و یکی از اعداد را به دلخواه می‌نویسیم. این عدد می‌تواند هر یک از اعداد ۱ تا  $n$  باشد اما معمولاً عدد ۱ را می‌نویسیم. سپس عددی را می‌نویسیم که در سمت راست پیکانی که با ۱ شروع می‌شود واقع شده است. مثلاً برای جایگشتی که در بالا آمد می‌نویسیم

(۱ ۵)

پس از آن عددی را می‌نویسیم که در سمت راست پیکان عدد دوم ما نوشته شده است. مثلاً در جایگشت ما چون عدد دوم برابر ۵ است پس باید بینیم پیکانی که سمت چپ آن ۵ آمده در سمت راست چه عددی را دارد. این عدد در مثال ما برابر ۱ است.

چند جایگشت روی  $n$  عدد داریم که در آن هیچ عددی به تنهایی در یک پرانتز نیامده باشد؟

این کار را ادامه می‌دهیم و هرگاه با عددی برخورد کردیم که آن را قبلاً نوشته‌ایم پرانتز را می‌بندیم، پرانتز جدیدی باز می‌کنیم و یکی از اعدادی را که تاکنون نوشته نشده است می‌نویسیم. برای جایگشت ما باید نوشت

(۶)(۲ ۴ ۳ ۷)(۱ ۵).

عدد ۶ که به تنهایی در یک پرانتز آمده است بدین معناست که  $6 \rightarrow 6$  در جایگشت ما ظاهر شده است. قرارداد می‌کنیم پرانتزهایی که دارای تنها یک عدد هستند را ننویسیم. بنابراین جایگشتمان را می‌توانیم به صورت

(۱ ۵)(۲ ۴ ۳ ۷)

نمایش دهیم. این نمایش را نمایش دوری می‌نامیم و هر یک از پرانتزهای ظاهر شده یک دور نامیده می‌شود. مثلاً می‌توان گفت که در جایگشت ما ۱ و ۵ به

تعداد جایگشت‌های روی  $n$   
عدد که دقیقاً از  $k$  دور تشکیل  
شده باشند چند است؟

طور دوری جای خود را عوض می‌کنند، ۲، ۴، ۳ و ۷ نیز به صورت دوری جای خود را با یکدیگر عوض می‌کنند و ۶ بر صندلی خود می‌نشیند. می‌توانیم اعداد ۱ و ۵ را دور یک دایره و اعداد ۲، ۴، ۳ و ۷ را دور دایره‌ای دیگر بنویسیم.

مثلاً همه جایگشت‌های روی سه عدد ۱، ۲ و ۳ را که عبارتند از

$$1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 3$$

$$1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 2$$

$$1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 3$$

$$1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 1$$

$$1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 2$$

$$1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 1$$

می‌توان به صورت

$$(1)$$

$$(2\ 3)$$

$$(1\ 2)$$

$$(1\ 2\ 3)$$

$$(1\ 3\ 2)$$

$$(1\ 3)$$

نمایش داد. توجه کنید که در اولین جایگشت در حقیقت چون هر کسی در جای خود می‌نشیند پس همه پرانتزها شامل تنها یک عدد هستند و لذا طبق قرارداد ما هیچ کدام از آنها نباید نوشته شود اما برای خالی نبودن عریضه (۱) را می‌نویسیم!



با این نمادگذاری می‌توان نوشت

$$S_3 = \{(1), (1\ 2), (1\ 3), (2\ 3), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}.$$

یک تعبیر دیگر برای این ۶ جایگشت این است که سه عدد ۱، ۲ و ۳ را روی رئوس یک مثلث متساوی‌الاضلاع بنویسیم و هر یک از جایگشت‌ها را به عنوان جا به جا کردن رئوس تلقی کنیم. با این تعبیر جایگشت همانی (۱) هیچ عملی روی مثلث انجام نمی‌دهد، جایگشت‌های (۱ ۲)، (۱ ۳) و (۲ ۳) متناظر با دوران‌های محوری هستند و جایگشت‌های (۱ ۲ ۳) و (۱ ۳ ۲) متناظرند با دوران‌های مرکزی. البته این یک حالت استثنایی است. برای  $n$  های بزرگ‌تر از ۳ جایگشت‌های دیگری نیز داریم که با دوران‌های محوری یا مرکزی روی یک  $n$  ضلعی منتظم در تناظر نیستند. مثلاً جایگشت (۱ ۲) روی مربع با رئوس ۱، ۲، ۳ و ۴، فقط ضلع بین دو رأس ۱ و ۲ را می‌پیچاند!

قسمت دوم قضیه فوق انتخاب تیمی مرتب و  $k$  نفری از یک جمع  $n$  نفری را مورد بررسی قرار می‌دهد. هر یک از حالات مذکور در این قسمت را یک انتخاب با ترتیب می‌نامیم و می‌توانیم آن را با  $k$  تایی مرتب نمایش دهیم. مثلاً برای  $n = 7$  و  $k = 3$  می‌توان تیم (۲، ۵، ۶) را معرفی کرد.<sup>۸</sup>

تعداد تیم‌های  $k$  تایی مرتب (یعنی همان تعداد  $k$  تایی‌های مرتب) از مجموعه  $n$  نفری  $\{1, 2, \dots, n\}$  را که برابر  $\frac{n!}{(n-k)!}$  است با  $P(n, k)$  نمایش می‌دهیم و آن را ترتیب  $k$  تا از  $n$  تا می‌خوانیم.

همچنین قسمت سوم قضیه انتخاب تیمی بدون احتساب ترتیب و  $k$  نفری از یک جمع  $n$  نفری را مورد بررسی قرار می‌دهد. هر یک از حالات مذکور در این قسمت را یک ترکیب<sup>۹</sup> می‌نامیم و می‌توانیم آن را با زیرمجموعه‌ای  $k$  عضوی نمایش دهیم. مثلاً برای  $n = 7$  و  $k = 3$  می‌توان تیم  $\{2, 5, 6\}$  را معرفی کرد.

تعداد تیم‌های  $k$  تایی بدون احتساب ترتیب (یعنی همان تعداد زیرمجموعه‌های

<sup>۸</sup> توجه کنید که این نماد نباید با نمایش دوری برای جایگشت اشتباه شود؛ (۲ ۵ ۶) یک جایگشت دوری است و (۲، ۵، ۶) یک تیم سه نفری مرتب.

<sup>۹</sup> combination

هر جایگشت را می‌توان به عنوان تابعی یک به یک و برو از مجموعه ۱ تا  $n$  به همان مجموعه در نظر گرفت. بنابراین می‌توان دو جایگشت را در هم ضرب کرد؛ در حقیقت حاصلضرب دو جایگشت یعنی ترکیب آنها. آیا می‌توانید قاعده‌ای برای ضرب کردن جایگشت‌ها با توجه به نماد دوری آنها ارائه دهید؟

اگر بخواهیم از مجموعه‌ای  $n$  عضوی، تیمی نامرتب و  $k$  عضوی انتخاب کنیم که اعضای آن می‌توانند تکراری هم باشند، چند حالت وجود دارد؟ برای تعداد تیم‌های مرتب با اعضای تکراری چه پاسخی دارید؟

$k$  تایی) از مجموعه  $n$  نفری  $\{1, 2, \dots, n\}$  را که برابر  $\frac{n!}{k!(n-k)!}$  است با  $\binom{n}{k}$  نمایش می‌دهیم و آن را ترکیب  $k$  تا از  $n$  تا می‌خوانیم.

بدین ترتیب سه قسمت مذکور در قضیه فوق، سه نماد مهم ترکیبیات یعنی  $n!$ ،  $P(n, k)$  و  $\binom{n}{k}$  را معرفی می‌کنند.

اکنون که با این سه نماد آشنا شدیم می‌توانیم سؤال‌های دیگری را به این سه سؤال آشنا تبدیل کنیم تا حل شوند.

برای اثبات احکامی که خواهد آمد از ترفندی استفاده می‌کنیم که دوبار شمار<sup>۱۰</sup> نامیده می‌شود. در این روش، ما مقداری مشخص را به دو طریق مختلف می‌شماریم و از این مطلب که این مقدار مشخص از هر طریقی که شمرده شود باید به یک عدد برسد استفاده می‌کنیم تا یک اتحاد را اثبات کنیم. در این بین فراموش نمی‌کنیم که **و یعنی ضرب و یا یعنی جمع!**

**قضیه ۲.۲.۲.** اگر  $n$  عددی طبیعی باشد آنگاه

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n.$$

**برهان.** مجموعه  $X = \{1, 2, \dots, n\}$  را در نظر می‌گیریم. می‌دانیم که تعداد زیرمجموعه‌های این مجموعه برابر است با  $2^n$  (مثال ۴.۱.۲ را ببینید). از سوی دیگر می‌دانیم که هر زیرمجموعه از  $X$  یا  $\emptyset$  عضو دارد یا ۱ عضو دارد یا ... یا  $n$  عضو. همچنین می‌دانیم که تعداد زیرمجموعه‌های  $\emptyset$  عضوی برابر  $\binom{n}{0}$ ، تعداد زیرمجموعه‌های ۱ عضوی برابر  $\binom{n}{1}$ ، ... و بالاخره تعداد زیرمجموعه‌های  $n$  عضوی برابر  $\binom{n}{n}$  است. پس تعداد کل زیرمجموعه‌ها باید برابر مجموع این اعداد باشد، یعنی حکم برقرار است. ■

**قضیه ۳.۲.۲.** (بسط دوجمله‌ای<sup>۱۱</sup>) به ازای هر  $a$  و  $b$  داریم

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

برای  $(a - b)^n$  چه حکمی می‌توان ارائه داد؟

<sup>۱۰</sup>double counting

<sup>۱۱</sup>binomial expansion



## برهان. عبارت

$$(a+b)(a+b)\dots(a+b)$$

را که در آن  $n$  بار  $(a+b)$  نوشته شده است در نظر می‌گیریم. این مقدار به طور بدیهی برابر است با  $(a+b)^n$ . از سوی دیگر وقتی این پرانتزها را در یکدیگر ضرب می‌کنیم باید هر جمله‌ای از هر پرانتزی در هر جمله‌ای از هر پرانتز دیگر ضرب شود. در این عملیات ضرب **یا** از هیچ پرانتزی  $a$  انتخاب نمی‌شود و از همه پرانتزها  $b$  انتخاب می‌شود **یا** از ۱ پرانتز  $a$  را انتخاب می‌کنیم و از  $n-1$  پرانتز  $b$  را **یا** ... **یا** از  $n-1$  پرانتز  $a$  انتخاب می‌کنیم و از یک پرانتز  $b$  **یا** از همه پرانتزها  $a$  انتخاب می‌کنیم و از هیچ پرانتزی  $b$  انتخاب نمی‌شود. اگر بخواهیم از  $k$  پرانتز  $a$  انتخاب کنیم به  $\binom{n}{k}$  طریق می‌توانیم این کار را انجام دهیم. بنابراین  $(a+b)^n$  برابر است با مجموع  $\binom{n}{k}$  (به دلیل تعداد حالات انتخاب  $k$  پرانتز  $a$ ) ضربدر  $a^k$  (چون وقتی از  $k$  پرانتز  $a$  انتخاب کنیم  $a^k$  به وجود می‌آید) ضربدر  $b^{n-k}$  (چون مجبوریم که از بقیه پرانتزها که تعداد آنها  $n-k$  است  $b$  را انتخاب کنیم و در یکدیگر ضرب کنیم)؛ اما این مجموع روی  $k$  های از ۰ تا  $n$  محاسبه می‌شود چون  $k$  **یا** برابر ۰ است **یا** ۱ **یا** ... **یا**  $n$ .<sup>۱۲</sup> ■

از آنجایی که اعداد  $\binom{n}{k}$  در بسط دوجمله‌ای ظاهر می‌شوند آنها را ضرایب دوجمله‌ای<sup>۱۳</sup> نیز می‌نامند.

نتیجه ۴.۲.۲. اگر  $n$  عددی طبیعی باشد آنگاه

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n.$$

برهان. کافی است در بسط دوجمله‌ای به جای  $a$  و  $b$  عدد ۱ قرار دهیم. ■

<sup>۱۲</sup> می‌توان این قضیه و بسیاری از احکام این فصل را با استفاده از استقرا نیز اثبات کرد اما اثبات به شیوه دوبار شمار دو مزیت دارد: اول این که نیازی نیست حکم را داشته باشید بلکه حکم خود به خود به دست می‌آید و دوم این که استدلال‌ها بدون محاسبات جبری و صرفاً با بیان چند جمله و توجه به حروف ربط و **یا** حاصل می‌شوند.

<sup>۱۳</sup> binomial coefficients



می‌دانیم  $\frac{n!}{k!(n-k)!}$  برابر است با تعداد تیم‌های نامرتب  $k$  عضوی از مجموعه‌ای  $n$  عضوی. آیا تعبیری برای  $\frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_m!}$  سراغ دارید؟

بسط دوجمله‌ای را می‌توان به صورت زیر تعمیم داد.

قضیه ۵.۲.۲. (بسط  $m$ -جمله‌ای)<sup>۱۴</sup> به ازای هر  $a_1, a_2, \dots, a_m$  داریم

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_m)^n = \sum_{\sum_{i=1}^m k_i = n} \frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_m!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_m^{k_m}.$$

**برهان.** عبارت  $(a_1 + a_2 + \dots + a_m)$  را  $n$  بار در خود ضرب می‌کنیم. این مقدار برابر  $(a_1 + a_2 + \dots + a_m)^n$  است. از سوی دیگر در این ضرب کردن هر جمله‌ای از هر پرانتزی در هر جمله‌ای از هر پرانتز دیگر ضرب می‌شود. لذا جملاتی به صورت  $a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_m^{k_m}$  داریم که مجموع توان‌های ظاهر شده باید برابر تعداد کل پرانتزها باشد، یعنی  $\sum_{i=1}^m k_i = n$ . لذا در عمل ضرب کردن این پرانتزها با مجموعی از جملات مواجه می‌شویم که به صورت ضربی از  $a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_m^{k_m}$  هستند و این مجموع روی همه انتخاب‌های  $k_i$  محاسبه می‌شود که در شرط  $\sum_{i=1}^m k_i = n$  صدق می‌کنند. اما این ضریب برابر است با تعداد حالات انتخاب  $k_1$  پرانتز از بین  $n$  پرانتز برای  $a_1$  و  $k_2$  پرانتز از بین  $n - k_1$  پرانتز باقی مانده برای  $a_2$  و  $\dots$  و  $k_m$  پرانتز از پرانتزهای باقی مانده برای  $a_m$ .

تعداد انتخاب  $k_1$  پرانتز اول برابر  $\binom{n}{k_1}$  و  $k_2$  پرانتز بعدی برابر  $\binom{n-k_1}{k_2}$  و  $\dots$  و  $k_m$  پرانتز آخر برابر  $\binom{n-k_1-\dots-k_{m-1}}{k_m}$  است. لذا ضربی که به دنبال آن هستیم برابر است با

$$\frac{n!}{k_1!(n-k_1)!} \cdot \frac{(n-k_1)!}{k_2!(n-k_1-k_2)!} \cdots \frac{(n-k_1-\dots-k_{m-1})!}{k_m!(n-k_1-\dots-k_{m-1}-k_m)!}$$

و پس از ساده کردن با توجه به آن که  $1 = 0! = (n - k_1 - \dots - k_{m-1} - k_m)!$  این ضریب برابر

$$\frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_m!}$$

است. ■

می‌توانیم  $\frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_m!}$  را ضریب  $m$ -جمله‌ای<sup>۱۵</sup> بنامیم و با  $\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_{m-1}}$  نمایش

<sup>۱۴</sup>  $m$ -nomial expansion

<sup>۱۵</sup>  $m$ -nomial coefficient

دهیم. واضح است که این نماد با نماد ضریب دوجمله‌ای سازگار است.

نتیجه ۶.۲.۲. اگر  $n$  و  $m$  اعدادی طبیعی باشد آنگاه

$$\sum_{\sum_{i=1}^m k_i = n} \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!} = m^n.$$

**برهان.** کافی است در بسط  $m$ -جمله‌ای به جای  $a_1$  تا  $a_m$ ، عدد ۱ را قرار

دهیم. ■

سؤال جالبی که پیش می‌آید این است که تعداد جملات عبارت فوق چند است. این سؤال را بعداً پاسخ خواهیم داد.

خداوند ممکن است وجود داشته باشد یا نداشته باشد. من می‌توانم بدان معتقد باشم یا نباشم. در بین چهار حالتی که به وجود می‌آید تنها یکی از آنها برای من زیانبار است. برای اجتناب از آن حالت به خداوند معتقدم.

**Blaise Pascal**

19 June 1623 - 19 Aug 1662



## ۳.۲ افراد را از جمع بیرون کنید

در این بخش با چند اتحاد ترکیبیاتی آشنا می‌شویم. این اتحادها را می‌توان به دو روش اثبات کرد: جبری و ترکیبیاتی. در برهان‌های جبری از عملیات جبری و استقرا استفاده می‌کنیم اما در برهان‌های ترکیبیاتی با گفتن یک یا چند جمله و توجه به حروف ربط و استفاده از دوبار شمار، احکام را اثبات می‌کنیم. برهان‌های ترکیبیاتی دو مزیت نسبت به اثبات‌های جبری دارند؛ اثبات‌ها کوتاه‌تر است و لازم نیست احکام را حفظ کنید.

در این بخش هر دو روش را برای اثبات درستی اتحادها به کار خواهیم برد. در احکام ساده‌تر این مزایا مشهود نیست اما وقتی احکام پیچیده را اثبات کنیم خواهید دید که برهان‌های ترکیبیاتی چقدر کارایی بیشتری دارند.

قضیه ۱.۳.۲. ضرایب دوجمله‌ای در رابطه

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

صدق می‌کنند.

**برهان جبری.** با استفاده از تعریف ضرایب دوجمله‌ای داریم

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \binom{n}{n-k}.$$

**برهان ترکیبیاتی.** اگر بخواهیم از یک مجموعه  $n$  عضوی یک زیرمجموعه  $k$  عضوی انتخاب کنیم، می‌توانیم زیرمجموعه‌ای  $n-k$  عضوی را در نظر بگیریم و آن را کنار بگذاریم. بنابراین تعداد حالات انتخاب  $k$  عضو از  $n$  عضو برابر است با تعداد حالات انتخاب  $n-k$  عضو از  $n$  عضو. ■

**قضیه ۲.۳.۲.** ضرایب دوجمله‌ای در رابطه بازگشتی

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

صدق می‌کنند.

**برهان جبری.** داریم

$$\begin{aligned} & \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \\ &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} \\ &= \frac{(n-1)!(k+n-k)}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \binom{n}{k}. \end{aligned}$$

**برهان ترکیبیاتی.** می‌خواهیم از مجموعه  $n$  عضوی  $X = \{1, 2, \dots, n\}$  یک زیرمجموعه  $k$  عضوی انتخاب کنیم. این کار به  $\binom{n}{k}$  طریق صورت می‌پذیرد. از سوی دیگر اگر ۱ را در نظر بگیریم، یا ۱ در زیرمجموعه انتخاب شده آمده است یا نیامده است. اگر ۱ آمده باشد آنگاه باید از  $n-1$  عضو دیگر  $k-1$  عضو دیگر را انتخاب کنیم (به  $\binom{n-1}{k-1}$  طریق). همچنین اگر ۱ نیامده باشد آنگاه باید از  $n-1$  عضو دیگر همه  $k$  عضو مورد نظر را انتخاب کنیم (به  $\binom{n-1}{k}$  طریق).

آیا می‌توانید همین حکم را به استقرا اثبات کنید؟ از استقرا روی  $n$  استفاده می‌کنید یا روی  $k$ ؟

■ بنابراین با توجه به اصل جمع حکم نتیجه می‌شود.

رابطه مذکور در قضیه بالا را بازگشتی نامیدیم زیرا با استفاده از این رابطه می‌توان ضرایب دوجمله‌ای را به طور استقرایی تعریف کرد. این حکم و قضیه قبل از آن اساس احداث مثلث خیام است. این مثلث با شکل

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \quad 1 \\ 1 \quad 2 \quad 1 \end{array}$$

آغاز می‌گردد و در سطرهاى بعدی آن هر عدد برابر است با مجموع دو عددی که بالای آن قرار گرفته‌اند. بدین ترتیب سطر بعدی ۱ ۲ ۱ و سطر پس از آن ۱ ۳ ۳ ۱ است.

اگر سطرى که فقط یک بار عدد ۱ آمده است را سطر صفرم، سطرى که به صورت ۱ ۱ است را سطر یکم، سطر ۱ ۲ ۱ را سطر دوم بنامیم و به همین ترتیب سطرهاى بعدی را شماره‌گذاری کنیم و اعدادی که در سطرها آمده‌اند را از چپ به راست به ترتیب عدد صفرم، عدد یکم، عدد دوم و الی آخر بنامیم آنگاه می‌بینیم که عدد  $k$  در سطر  $n$  ام همان ضریب دوجمله‌ای  $\binom{n}{k}$  است.

این مطلب با توجه به قضیه فوق به آسانی به وسیله استقرا روی  $n$  اثبات می‌شود. اگر فرض کنیم که این حکم برای سطر  $n - 1$  ام درست باشد آنگاه با توجه به آن که عدد  $k$  ام سطر  $n$  ام مجموع دو عدد بالایی است نتیجه می‌گیریم که این عدد برابر است با  $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$  که طبق قضیه فوق همان  $\binom{n}{k}$  است. حکم قضیه ۱.۳.۲ در حقیقت بیان می‌دارد که این مثلث نسبت به ارتفاعش متقارن است.

قضیه ۳.۳.۲. ضرایب دوجمله‌ای در رابطه بازگشتی

$$\binom{n}{k} = \binom{n-2}{k-2} + 2\binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k}$$

صدق می‌کنند.

مثلث خیام را تا سطر دهم بنویسید و سعی کنید قواعدی کلی را در آن بیابید. مثلاً مجموع اعداد سطر  $n$  ام برابر  $2^n$  است یا مثلاً می‌توانید به بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک اعداد هر سطر (غیر از عدد اول و آخر) توجه کنید. آیا می‌توانید حدس‌هایی را که می‌زنید اثبات کنید؟

برهان جبری. با استفاده از قضیه قبل داریم

$$\begin{aligned}
 & \binom{n-2}{k-2} + 2\binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k} \\
 &= \left[ \binom{n-2}{k-2} + \binom{n-2}{k-1} \right] + \left[ \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k} \right] \\
 &= \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \\
 &= \binom{n}{k}.
 \end{aligned}$$

**برهان ترکیبیاتی.** یک جمع  $n$  نفری داریم و می‌خواهیم یک تیم  $k$  نفری (بدون احتساب ترتیب) از آنها انتخاب کنیم. این کار به  $\binom{n}{k}$  طریق صورت می‌پذیرد.

دو نفر را از جمع بیرون می‌آوریم و  $n-2$  نفر را نگه می‌داریم. این دو نفر را ۱ و ۲ می‌نامیم. یا ۱ و ۲ هر دو در تیم هستند یا ۱ هست ولی ۲ نیست یا ۲ هست ولی ۱ نیست یا هیچ کدام در تیم نیستند.

- اگر ۱ و ۲ در تیم باشند آنگاه باید از  $n-2$  نفر دیگر  $k-2$  نفر دیگر تیم را انتخاب کنیم. این کار به  $\binom{n-2}{k-2}$  طریق صورت می‌گیرد.
- اگر ۱ در تیم باشد و ۲ نباشد آنگاه باید از  $n-2$  نفر دیگر  $k-1$  نفر دیگر تیم را انتخاب کنیم. این کار به  $\binom{n-2}{k-1}$  طریق صورت می‌گیرد.
- اگر ۲ در تیم باشد و ۱ نباشد آنگاه باید از  $n-2$  نفر دیگر  $k-1$  نفر دیگر تیم را انتخاب کنیم. این کار به  $\binom{n-2}{k-1}$  طریق صورت می‌گیرد.
- و بالاخره اگر ۱ و ۲ در تیم نباشند آنگاه باید از  $n-2$  نفر دیگر همه  $k$  نفر تیم را انتخاب کنیم. این کار به  $\binom{n-2}{k}$  طریق صورت می‌گیرد.

بنابراین  $\binom{n}{k}$  برابر است با مجموع اعدادی که در این چهار حالت ذکر شد و لذا حکم برقرار است. ■

به یک ریاضیدان یک کتری دادند و از او خواستند که چای دم کند. او در کتری آب ریخت و منتظر ماند تا آب به جوش بیاید و بقیه مراحل را انجام داد. صبح روز بعد یک کتری پر از آب جوش به او دادند و از او خواستند تا چای دم کند. او آب داخل کتری را خالی کرد، نفس راحتی کشید و گفت: اکنون مسأله تبدیل شد به مسأله دیروز که خوشبختانه پاسخ آن را می‌دانیم!



آیا می‌توانید پیش‌بینی کنید که چگونه می‌توان این فرآیند را ادامه داد تا حکم فوق تعمیم یابد؟ بدون شک در صورتی می‌توانید راحت‌تر حکم بعدی را پیش‌بینی کنید که برهان ترکیبیاتی را مد نظر داشته باشید. مثلاً با خود فکر کنید که اگر ۳ نفر یا بیشتر را از جمع بیرون کنید چه اتفاقی رخ خواهد داد.

**قضیه ۴.۳.۲.** فرض کنیم  $n, k$  و  $r$  عدد طبیعی دلخواهی باشند که  $r \leq k \leq n$ . در این صورت ضرایب دوجمله‌ای در روابط

$$\binom{n}{k} = \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} \binom{n-r}{k-i} = \sum_{i=0}^r \binom{r}{k-i} \binom{n-r}{i}$$

صدق می‌کنند.

**برهان جبری.** کافی است یکی از تساوی‌ها را اثبات کنیم. به استقرا روی  $r$  عمل می‌کنیم. برای  $r = 1$  حکم همان چیزی است که در قضیه ۲.۳.۲ اثبات شد. فرض کنیم حکم برای  $r - 1$  و هر  $n$  و  $k$  درست باشد. داریم

اگر به استقرا روی  $n$  یا  $k$  عمل می‌کردیم راحت‌تر نبود؟

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} \binom{n-r}{k-i} &= \sum_{i=1}^{r-1} \binom{r}{i} \binom{n-r}{k-i} + \binom{n-r}{k} + \binom{n-r}{k-r} \\ &= \sum_{i=1}^{r-1} \left[ \binom{r-1}{i-1} + \binom{r-1}{i} \right] \binom{n-r}{k-i} + \binom{n-r}{k} + \binom{n-r}{k-r} \\ &= \sum_{i=1}^{r-1} \binom{r-1}{i-1} \binom{n-r}{k-i} + \sum_{i=1}^{r-1} \binom{r-1}{i} \binom{n-r}{k-i} + \binom{n-r}{k} + \binom{n-r}{k-r} \\ &= \sum_{j=0}^{r-2} \binom{r-1}{j} \binom{(n-1)-(r-1)}{k-(j+1)} + \binom{n-r}{k-r} \\ &\quad + \sum_{i=1}^{r-1} \binom{r-1}{i} \binom{(n-1)-(r-1)}{k-i} + \binom{n-r}{k} \\ &= \sum_{j=0}^{r-1} \binom{r-1}{j} \binom{(n-1)-(r-1)}{(k-1)-j} + \sum_{i=0}^{r-1} \binom{r-1}{i} \binom{(n-1)-(r-1)}{k-i} \\ &= \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}. \end{aligned}$$

**برهان ترکیبیاتی.** یک جمع  $n$  نفری داریم که  $r$  نفر آن دختر و بقیه پسر هستند. می‌خواهیم یک تیم  $k$  نفری (بدون احتساب ترتیب) انتخاب کنیم. این کار به  $\binom{n}{k}$  طریق صورت می‌پذیرد. دخترها را از جمع خارج می‌کنیم. برای انتخاب تیم  $k$  نفری یا ۰ دختر و  $k$  پسر انتخاب می‌کنیم یا ۱ دختر و  $k-1$  پسر یا ۲ دختر و  $k-2$  پسر یا ... یا  $k-2$  دختر و ۲ پسر یا  $k-1$  دختر و ۱ پسر یا  $k$  دختر و ۰ پسر. برای انتخاب  $i$  دختر می‌توانیم به  $\binom{r}{i}$  و برای انتخاب  $k-i$  پسر می‌توانیم به  $\binom{n-r}{k-i}$  طریق عمل کنیم؛ یعنی این کار به  $\binom{r}{i} \binom{n-r}{k-i}$  طریق صورت می‌پذیرد. اکنون حکم با توجه به اصل جمع بدیهی است. ■

اگر پسرها را از جمع خارج می‌کردیم چه اتفاقی می‌افتاد؟

اثبات‌های ترکیبیاتی ایده به دست آوردن احکام جدید را به دست می‌دهند. کافی است به یک جمله ساده فکر کنید، افرادی را از جمع بیرون کنید، یک نفر را در جمع مشخص کنید و از حکمی که با دسترنج خود آن را پخته‌اید لذت ببرید! **قضیه ۵.۳.۲.** فرض کنیم  $n$  عدد طبیعی دلخواهی باشد. در این صورت

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}.$$

**برهان جبری.** به استقرا روی  $n$  عمل می‌کنیم. برای  $n=1$  حکم بدیهی است. فرض کنیم حکم برای  $n-1$  برقرار باشد. داریم

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} &= \sum_{k=1}^{n-1} k \binom{n}{k} + n = \sum_{k=1}^{n-1} k \left[ \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \right] + n \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} k \binom{n-1}{k-1} + n + \sum_{k=1}^{n-1} k \binom{n-1}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} (k-1+1) \binom{n-1}{k-1} + n + (n-1) \cdot 2^{n-2} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} (k-1) \binom{n-1}{k-1} + n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k-1} + (n-1) \cdot 2^{n-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[ \sum_{\ell=0}^{n-2} \ell \binom{n-1}{\ell} + n-1 \right] + \left[ 1 + \sum_{\ell=0}^{n-2} \binom{n-1}{\ell} \right] + (n-1) \cdot 2^{n-2} \\
&= \sum_{\ell=0}^{n-1} \ell \binom{n-1}{\ell} + \sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{n-1}{\ell} + (n-1) \cdot 2^{n-2} \\
&= (n-1) \cdot 2^{n-2} + 2^{n-1} + (n-1) \cdot 2^{n-2} \\
&= (n-1+2+n-1) \cdot 2^{n-2} = 2n \cdot 2^{n-2} = n \cdot 2^{n-1}.
\end{aligned}$$

**برهان ترکیبیاتی.** می‌خواهیم از یک جمع  $n$  نفری یک تیم انتخاب کنیم (بدون احتساب ترتیب) و یک نفر از آنها را به عنوان سرپرست تیم تعیین کنیم (تعداد افراد تیم می‌تواند از ۱ نفر تا  $n$  نفر باشد). برای این کار می‌توان اول سرپرست تیم را انتخاب کرد (به  $n$  طریق) و سپس از بین  $n-1$  نفر باقی مانده یک زیرمجموعه دلخواه را به عنوان بقیه افراد تیم در نظر گرفت (به  $2^{n-1}$  طریق؛ چون تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه  $n-1$  عضوی برابر  $2^{n-1}$  است). لذا طبق اصل ضرب این کار به  $n \cdot 2^{n-1}$  طریق صورت می‌پذیرد.

از سوی دیگر می‌توان گفت که این تیم یا ۱ نفری است یا ۲ نفری یا ... یا  $n$  نفری.

تیم  $k$  نفری به  $\binom{n}{k}$  طریق انتخاب می‌شود و پس از انتخاب تیم می‌توان به  $k$  طریق یک نفر از آنها را به عنوان سرپرست تعیین کرد. پس این کار به  $k \binom{n}{k}$  طریق صورت می‌پذیرد که طبق اصل جمع باید این اعداد را برای  $k$  های ۱ تا  $n$  جمع کرد.<sup>۱۶</sup>

در قضیه فوق می‌خواستیم یک نفر را به عنوان سرپرست معرفی کنیم. اگر یک سرپرست و یک معاون لازم داشته باشیم چه اتفاقی می‌افتد؟ مسلماً این توانایی را در خود یافته‌اید که حکم بعدی را حدس بزنید.

<sup>۱۶</sup> برای کسانی که با مفهوم مشتق آشنا هستند برهان دیگری هم داریم! فرض کنیم  $f(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$ . بنابر بسط دوجمله‌ای می‌دانیم که  $f(x) = (x+1)^n$ . بنابراین  $f'(x) = n(x+1)^{n-1}$ . از سوی دیگر می‌دانیم که  $f'(x) = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} k x^{k-1}$ . با مساوی قرار دادن این دو عبارت در نقطه  $x=1$  حکم نتیجه می‌شود.

اگر می‌خواستیم دو سرپرست انتخاب کنیم و این امکان وجود داشت که هر دو سرپرست یک نفر باشند به چه اتحادی می‌رسیدیم؟

و اگر قرار باشد که یک تیم انتخاب کنیم و در آن تیم، یک تیم  $r$  نفری مرتب را تعیین کنیم چگونه؟

قضیه ۶.۳.۲. فرض کنیم  $n$  عدد طبیعی دلخواهی باشد. در این صورت

$$\sum_{k=2}^n k(k-1) \binom{n}{k} = n(n-1) \cdot 2^{n-2}. \blacksquare$$

اما اجازه دهید حکم کلی‌تر زیر را به جای آن اثبات کنیم.

قضیه ۷.۳.۲. فرض کنیم  $n$  و  $r$  اعداد طبیعی دلخواهی باشند که  $r \leq n$ . در

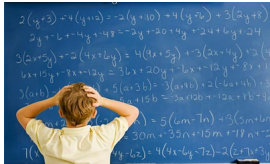
این صورت

$$\sum_{k=r}^n \binom{n}{k} \binom{k}{r} = \binom{n}{r} \cdot 2^{n-r}.$$

برهان جبری. به استقرا روی  $n$  عمل می‌کنیم. برای  $n = 1$  حکم بدیهی است.

فرض کنیم حکم برای  $n - 1$  برقرار باشد. داریم

$$\begin{aligned} & \sum_{k=r}^n \binom{n}{k} \binom{k}{r} \\ &= \sum_{k=r}^{n-1} \binom{n}{k} \binom{k}{r} + \binom{n}{n} \\ &= \sum_{k=r}^{n-1} \left[ \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \right] \binom{k}{r} + \binom{n}{n} \\ &= \sum_{k=r+1}^{n-1} \binom{n-1}{k-1} \left[ \binom{k-1}{r-1} + \binom{k-1}{r} \right] + \binom{n-1}{r-1} + \binom{n}{n} \\ &+ \sum_{k=r}^{n-1} \binom{n-1}{k} \binom{k}{r} \\ &= \sum_{\ell=r}^{n-2} \binom{n-1}{\ell} \binom{\ell}{r-1} + \binom{n-1}{r-1} \\ &+ \sum_{\ell=r}^{n-2} \binom{n-1}{\ell} \binom{\ell}{r} + \binom{n}{r} \\ &+ \sum_{k=r}^{n-1} \binom{n-1}{k} \binom{k}{r} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \sum_{\ell=r-1}^{n-1} \binom{n-1}{\ell} \binom{\ell}{r-1} - \binom{n-1}{r-1} \\
&+ \sum_{\ell=r}^{n-2} \binom{n-1}{\ell} \binom{\ell}{r} + \binom{n}{r} \\
&+ \sum_{k=r}^{n-1} \binom{n-1}{k} \binom{k}{r} \\
&= \sum_{\ell=r-1}^{n-1} \binom{n-1}{\ell} \binom{\ell}{r-1} \\
&+ \sum_{\ell=r}^{n-2} \binom{n-1}{\ell} \binom{\ell}{r} + \binom{n}{r} - \binom{n-1}{r-1} \\
&+ \sum_{k=r}^{n-1} \binom{n-1}{k} \binom{k}{r} \\
&= \sum_{\ell=r-1}^{n-1} \binom{n-1}{\ell} \binom{\ell}{r-1} \\
&+ \sum_{\ell=r}^{n-1} \binom{n-1}{\ell} \binom{\ell}{r} \\
&+ \sum_{k=r}^{n-1} \binom{n-1}{k} \binom{k}{r} \\
&= \binom{n-1}{r-1} \cdot 2^{(n-1)-(r-1)} \\
&+ \binom{n-1}{r} \cdot 2^{(n-1)-r} \\
&+ \binom{n-1}{r} \cdot 2^{(n-1)-r} \\
&= \left[ \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} \right] \cdot 2^{n-r} \\
&= \binom{n}{r} \cdot 2^{n-r}.
\end{aligned}$$

حالتی را تصور کنید که در آن،  
بتوانیم در تیم‌ها افراد تکراری  
هم داشته باشیم. آیا می‌توانید  
اتحادهای مشابهی را بیان و  
اثبات کنید؟

**برهان ترکیبیاتی.** می‌خواهیم از یک جمع  $n$  نفری یک تیم انتخاب کنیم

(بدون احتساب ترتیب) و  $r$  نفر از آنها را به عنوان یک زیرتیم تعیین کنیم (تعداد افراد تیم می‌تواند از  $r$  نفر تا  $n$  نفر باشد). برای این کار می‌توان اول  $r$  نفر را انتخاب کرد (به  $\binom{n}{r}$  طریق) و سپس از بین  $n - r$  نفر باقی مانده یک زیرمجموعه دلخواه را به عنوان بقیه افراد تیم در نظر گرفت (به  $2^{n-r}$  طریق؛ چون تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه  $n - r$  عضوی برابر  $2^{n-r}$  است). لذا طبق اصل ضرب این کار به  $2^{n-r} \cdot \binom{n}{r}$  طریق صورت می‌پذیرد. از سوی دیگر می‌توان گفت که این تیم یا  $r$  نفری است یا  $r + 1$  نفری یا ... یا  $n$  نفری.

تیم  $k$  نفری به  $\binom{n}{k}$  طریق انتخاب می‌شود و پس از انتخاب تیم می‌توان به  $\binom{k}{r}$  طریق  $r$  نفر از آنها را به عنوان افراد یکم تا  $r$  ام تیم تعیین کرد. پس این کار به  $\binom{n}{k} \binom{k}{r}$  طریق صورت می‌پذیرد که طبق اصل جمع باید این اعداد را برای  $k$  های از  $r$  تا  $n$  جمع کرد. ■



برای آن که اتحاد جدیدی را به دست آورید کافی است به یک جمع  $n$  نفری و انتخاب یک تیم با یک ویژگی خاص فکر کنید. مسلماً چیزی به دست خواهد آمد. آزمایش کنید!

**قضیه ۸.۳.۲.** فرض کنیم  $n$  و  $k$  اعدادی طبیعی باشند و  $k \leq n$ . در این صورت

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}.$$

**برهان جبری.** داریم

$$\begin{aligned} k \binom{n}{k} &= k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \\ &= n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} \\ &= n \binom{n-1}{k-1}. \end{aligned}$$

**برهان ترکیبیاتی.** می‌خواهیم از یک جمع  $n$  نفری یک تیم  $k$  نفری انتخاب کنیم و یک نفر از آنها را به عنوان سرپرست تعیین کنیم. این کار به  $\binom{n}{k}$  ضربدر  $k$  طریق صورت می‌پذیرد.

از سوی دیگر می‌توان اول یک نفر را به عنوان سرپرست تعیین کرد (به  $n$  طریق) و سپس از بین  $n - 1$  نفر باقی مانده  $k - 1$  نفر دیگر تیم را انتخاب نمود (به  $\binom{n-1}{k-1}$  طریق). لذا حکم برقرار است. ■

**نتیجه ۹.۳.۲.** فرض کنیم  $n$  عددی طبیعی باشد. در این صورت

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}.$$

برای کسانی که با مفهوم انتگرال آشنا هستند راه حل دیگری نیز وجود دارد!

**برهان.** با توجه به قضیه فوق داریم

$$\begin{aligned} 2^{n+1} - 1 &= \sum_{\ell=1}^{n+1} \binom{n+1}{\ell} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{n+1}{k+1} \binom{n}{k} \\ &= (n+1) \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

هر کس استدلال ترکیبیاتی این قضیه را می‌داند دستش را بلند کند!

کماکان می‌توانید احکام جدیدی را به دست آورید. کافی است از زاویه‌ای دیگر به انتخاب تیم خود فکر کنید!

**قضیه ۱۰.۳.۲.** فرض کنیم  $n$ ،  $k$  و  $r$  اعداد طبیعی دلخواهی باشند که  $r \leq k \leq n$ . در این صورت

$$\binom{n}{k} \binom{k}{r} = \binom{n}{r} \binom{n-r}{k-r}.$$

برهان جبری. داریم

$$\begin{aligned}\binom{n}{k}\binom{k}{r} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{k!}{r!(k-r)!} \\ &= \frac{n!}{r!(n-r)!} \cdot \frac{(n-r)!}{(k-r)!((n-r)-(k-r))!} \\ &= \binom{n}{r}\binom{n-r}{k-r}\end{aligned}$$

هر ایده خوب را می توان در  
پنجاه کلمه یا کمتر شرح  
داد.

**Stanislaw Marcin Ulam**

3 April 1909 - 13 May 1984



**برهان ترکیبیاتی.** می خواهیم از یک جمع  $n$  نفری یک تیم  $k$  نفری انتخاب کنیم و سپس در آن تیم  $k$  نفری یک تیم  $r$  نفری انتخاب کنیم. این کار به  $\binom{n}{k}$  ضربدر  $\binom{k}{r}$  طریق صورت می پذیرد.

از سوی دیگر می توانیم ابتدا از بین  $n$  نفر  $r$  نفر را برای تیم  $k$  نفری خود انتخاب کنیم و سپس از بین  $n-r$  نفر باقی مانده  $k-r$  نفر دیگر تیم را انتخاب کنیم. این کار به  $\binom{n}{r}$  ضربدر  $\binom{n-r}{k-r}$  طریق انجام می شود. ■

**قضیه ۱۱.۳.۲.** فرض کنیم  $n$  و  $r$  اعداد طبیعی دلخواهی باشند و  $r \leq n$ . در این صورت

$$\sum_{k=r}^n \binom{k}{r} = \binom{n+1}{r+1}.$$

**برهان جبری.** به استقرا روی  $n$  عمل می کنیم. برای  $n=1$  حکم بدیهی است. فرض کنیم حکم برای  $n-1$  برقرار باشد. داریم

$$\begin{aligned}\sum_{k=r}^n \binom{k}{r} &= \sum_{k=r}^{n-1} \binom{k}{r} + \binom{n}{r} \\ &= \binom{n}{r+1} + \binom{n}{r} \\ &= \binom{n+1}{r+1}.\end{aligned}$$

**برهان ترکیبیاتی.** می خواهیم از مجموعه  $X = \{1, 2, \dots, n+1\}$  یک زیرمجموعه

$r+1$  عضوی انتخاب کنیم. این کار به  $\binom{n+1}{r+1}$  طریق صورت می‌پذیرد.

از سوی دیگر می‌توان گفت که یا عدد  $n+1$  در زیرمجموعه انتخابی هست یا نیست.

در حالتی که عدد  $n+1$  در زیرمجموعه باشد برای انتخاب بقیه زیرمجموعه باید  $n$  عضو دیگر  $r$  عضو انتخاب کنیم و این کار به  $\binom{n}{r}$  طریق انجام می‌شود. اما اگر  $n+1$  در زیرمجموعه نباشد آنگاه  $n+1$  را از مجموعه  $X$  بیرون می‌کنیم و دیگر کاری به آن نداریم. در این حالت یا  $n$  در زیرمجموعه هست یا نیست.

در حالتی که  $n$  در زیرمجموعه باشد برای انتخاب بقیه زیرمجموعه باید از  $n-1$  عضو دیگر  $r$  عضو انتخاب کنیم و این کار به  $\binom{n-1}{r}$  طریق انجام می‌شود. اما اگر  $n$  در زیرمجموعه نباشد آنگاه  $n$  را از مجموعه  $X$  بیرون می‌کنیم و دیگر کاری به آن نداریم. در این حالت یا  $n-1$  در زیرمجموعه هست یا نیست.

این فرآیند را تا زمانی می‌توان ادامه داد که عدد  $r+2$  را از مجموعه  $X$  بیرون کنیم و اعداد ۱ تا  $r+1$  در  $X$  باقی بمانند زیرا پس از آن دیگر انتخاب مجموعه‌ای  $r+1$  عضوی ممکن نیست.

اکنون بنابر اصل جمع باید  $\binom{n}{r}, \dots, \binom{n-1}{r}, \dots, \binom{n}{r}$  را با یکدیگر جمع کرد و لذا حکم برقرار است. ■

احکامی که تا اینجا گفته شد در مورد اعداد ترکیبی یعنی  $\binom{n}{k}$  بود. می‌توان احکام مشابهی را در مورد  $P(n, k)$  اثبات کرد. فقط باید توجه داشته باشیم که از این پس ترتیب اهمیت دارد. چند نمونه را با هم بررسی می‌کنیم.

قضیه ۱۲.۳.۲.  $P(n, k)$  در رابطه بازگشتی

$$P(n, k) = kP(n-1, k-1) + P(n-1, k)$$

صدق می‌کند.

چرا این بار استدلال ترکیبیاتی طولانی‌تر شد؟ البته هنوز هم اگر می‌خواهید اتحاد را خودتان به دست آورید شاید یادگیری استدلال ترکیبیاتی بهتر باشد.

## برهان جبری. داریم

$$\begin{aligned}
 kP(n-1, k-1) + P(n-1, k) &= k \cdot \frac{(n-1)!}{(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!} \\
 &= \frac{(k+n-k) \cdot (n-1)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!} = P(n, k).
 \end{aligned}$$

با استفاده از این قضیه، چیزی شبیه مثلث خیام را برای  $P(n, k)$  ها بسازید.

**برهان ترکیبیاتی.** می‌خواهیم از مجموعه  $n$  عضوی  $X = \{1, 2, \dots, n\}$  یک تیم مرتب  $k$  عضوی انتخاب کنیم. این کار به  $P(n, k)$  طریق صورت می‌پذیرد. از سوی دیگر اگر ۱ را در نظر بگیریم، یا ۱ در تیم مرتب انتخاب شده آمده است یا نیامده است. اگر ۱ آمده باشد آنگاه ۱ می‌تواند یکی از  $k$  مکان مختلف در تیم مرتب را بپذیرد (به  $k$  طریق) و سپس باید از  $n-1$  عضو دیگر  $k-1$  عضو دیگر را انتخاب کنیم (به  $P(n-1, k-1)$  طریق). همچنین اگر ۱ نیامده باشد آنگاه باید از  $n-1$  عضو دیگر همه  $k$  عضو مورد نظر را انتخاب کنیم (به  $P(n-1, k)$  طریق). بنابراین با توجه به اصل جمع حکم نتیجه می‌شود. ■

می‌توان از قضیه فوق برای ساختن چیزی شبیه مثلث خیام استفاده کرد. در این مثلث برای نوشتن عدد  $k$  ام در سطر  $n$  ام باید  $k$  برابر عدد  $k-1$  ام سطر  $n-1$  ام را با عدد  $k$  ام سطر  $n-1$  ام جمع کنیم.

**قضیه ۱۳.۳.۲.**  $P(n, k)$  در رابطه بازگشتی

$$P(n, k) = k(k-1)P(n-2, k-2) + 2kP(n-2, k-1) + P(n-2, k)$$

صدق می‌کند.

## برهان جبری. با استفاده از قضیه قبل داریم

$$\begin{aligned}
 &k(k-1)P(n-2, k-2) + 2kP(n-2, k-1) + P(n-2, k) \\
 &= k[(k-1)P(n-2, k-2) + P(n-2, k-1)] \\
 &\quad + [kP(n-2, k-1) + P(n-2, k)] \\
 &= kP(n-1, k-1) + P(n-1, k) = P(n, k).
 \end{aligned}$$

**برهان ترکیبیاتی.** یک جمع  $n$  نفری داریم و می‌خواهیم یک تیم  $k$  نفری مرتب از آنها انتخاب کنیم. این کار به  $P(n, k)$  طریق صورت می‌پذیرد.

این حکم را با استفاده از استقرا نیز اثبات کنید.

دو نفر را از جمع بیرون می‌آوریم و  $n - 2$  نفر را نگه می‌داریم. این دو نفر را ۱ و ۲ می‌نامیم. یا ۱ و ۲ هر دو در تیم هستند یا ۱ هست ولی ۲ نیست یا ۲ هست ولی ۱ نیست یا هیچ کدام در تیم نیستند.

- اگر ۱ و ۲ در تیم باشند آنگاه ۱ باید یکی از  $k$  مکان ممکن در تیم را انتخاب کند و ۲ باید یکی از  $k - 1$  مکان باقی مانده در تیم را انتخاب کند و ما باید از  $n - 2$  نفر دیگر  $k - 2$  نفر دیگر تیم را انتخاب کنیم. این کار به  $k$  ضربدر  $k - 1$  ضربدر  $P(n - 2, k - 2)$  طریق صورت می‌گیرد.

- اگر ۱ در تیم باشد و ۲ نباشد آنگاه ۱ باید یکی از  $k$  مکان ممکن در تیم را انتخاب کند و ما باید از  $n - 2$  نفر دیگر  $k - 1$  نفر دیگر تیم را انتخاب کنیم. این کار به  $k$  ضربدر  $P(n - 2, k - 1)$  طریق صورت می‌گیرد.

- اگر ۲ در تیم باشد و ۱ نباشد آنگاه ۲ باید یکی از  $k$  مکان ممکن در تیم را انتخاب کند و ما باید از  $n - 2$  نفر دیگر  $k - 1$  نفر دیگر تیم را انتخاب کنیم. این کار به  $P(n - 2, k - 1)$  طریق صورت می‌گیرد.

- و بالاخره اگر ۱ و ۲ در تیم نباشند آنگاه باید از  $n - 2$  نفر دیگر همه  $k$  نفر تیم را انتخاب کنیم. این کار به  $P(n - 2, k)$  طریق صورت می‌گیرد.

بنابراین  $P(n, k)$  برابر است با مجموع اعدادی که در این چهار حالت ذکر شد و لذا حکم برقرار است. ■

اکنون راحت‌تر می‌توانید احکام بعدی را حدس بزنید. کافی است به چند صفحه قبل نگاه کنید و نسخه‌ای مرتب از احکام پیشین را ارائه دهید.

**قضیه ۱۴.۳.۲.** فرض کنیم  $n, k$  و  $r$  اعداد طبیعی دلخواهی باشند که

البته سعی کنید با احتیاط تمام این کار را انجام دهید و بد نیست اتحادی را که به دست می‌آورید برای چند عدد کوچک بررسی کنید.

$r \leq k \leq n$  در این صورت  $P(n, k)$  در روابط

$$\begin{aligned} P(n, k) &= \sum_{i=0}^r \binom{k}{i} P(r, i) P(n-r, k-i) \\ &= \sum_{i=0}^r \binom{k}{i} P(r, k-i) P(n-r, i) \end{aligned}$$

صدق می‌کند.

**برهان جبری.** کافی است یکی از تساوی‌ها را اثبات کنیم. با استدلالی مشابه (یا با قرار دادن  $k-i$  به جای  $i$  در یکی از اتحادها) می‌توان حکم دیگر را نتیجه گرفت. به استقرا روی  $r$  عمل می‌کنیم. برای  $r=1$  حکم همان چیزی است که در قضیه ۱۲.۳.۲ اثبات شد. فرض کنیم حکم برای  $r-1$  و هر  $n$  و  $k$  درست باشد. در این صورت داریم

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^r \binom{k}{i} P(r, i) P(n-r, k-i) \\ &= \sum_{i=1}^{r-1} \binom{k}{i} P(r, i) P(n-r, k-i) \\ &\quad + P(n-r, k) + \binom{k}{r} P(r, r) P(n-r, k-r) \\ &= \sum_{i=1}^{r-1} \binom{k}{i} [iP(r-1, i-1) + P(r-1, i)] P(n-r, k-i) \\ &\quad + P(n-r, k) + \binom{k}{r} P(r, r) P(n-r, k-r) \\ &= \sum_{i=1}^{r-1} \frac{k}{i} \cdot \binom{k-1}{i-1} iP(r-1, i-1) P(n-r, k-i) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{r-1} \binom{k}{i} P(r-1, i) P(n-r, k-i) \\ &\quad + P(n-r, k) + \binom{k}{r} P(r, r) P(n-r, k-r) \end{aligned}$$

عجله نکنید! درست است که در صفحه بعد استدلال ترکیبیاتی قضیه نوشته شده است که بسیار کوتاه‌تر و زیباتر از این اثبات می‌باشد، اما فراموش نکنید که اثبات‌های طولانی هم نکات آموزنده زیادی را در خود دارند. با آرامش این صفحه را بخوانید و مطمئن باشید کسی نمی‌تواند لذت خواندن صفحه بعد را از شما بگیرد.

$$\begin{aligned}
&= k \sum_{j=0}^{r-1} \binom{k-1}{j} P(r-1, j) P(n-r, k-1-j) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{r-1} \binom{k}{i} P(r-1, i) P(n-r, k-i) \\
&\quad + P(n-r, k) \\
&\quad + k \binom{k-1}{r-1} P(r-1, r-1) P(n-r, (k-1)-(r-1)) \\
&= k \sum_{j=0}^{r-1} \binom{k-1}{j} P(r-1, j) P((n-1)-(r-1), k-1-j) \\
&\quad + \sum_{i=0}^{r-1} \binom{k}{i} P(r-1, i) P((n-1)-(r-1), k-i) \\
&= k P(n-1, k-1) + P(n-1, k) \\
&= P(n, k).
\end{aligned}$$

**برهان ترکیبیاتی.** یک جمع  $n$  نفری داریم که  $r$  نفر آن دختر و بقیه پسر هستند. می‌خواهیم یک تیم  $k$  نفری مرتب انتخاب کنیم. این کار به  $P(n, k)$  طریق صورت می‌پذیرد.

دخترها را از جمع خارج می‌کنیم.  $k$  صندلی برای  $k$  مکانی که در تیم داریم می‌گذاریم و آنها را از ۱ تا  $k$  شماره‌گذاری می‌کنیم. تعداد دخترهای تیم می‌تواند  $i$  نفر باشد که  $i$  یا ۰ است یا ۱ یا ... یا  $k$ .

و اگر پسرها را از جمع خارج می‌کردیم چه اتفاقی می‌افتاد؟

از بین  $k$  صندلی  $i$  تا بدون ترتیب برای دخترها انتخاب می‌کنیم (به  $\binom{k}{i}$  طریق) و از بین دخترها یک تیم  $i$  نفری مرتب انتخاب می‌کنیم که در صندلی‌های انتخاب شده بنشینند (به  $P(r, i)$  طریق) و از بین پسرها که تعداد آنها  $n-r$  است بقیه تیم یعنی  $k-i$  نفر را به طور مرتب انتخاب می‌کنیم تا در بقیه صندلی‌ها بنشینند (به  $P(n-r, k-i)$  طریق). لذا حکم برقرار است. ■

اکنون باید به مزایای اثبات ترکیبیاتی پی برده باشید؛ اثبات‌ها قابل درکند، نیازی به حفظ کردن آنها نیست و حتی نیازی نیست که خود احکام را حفظ کنید.

این بخش را در همین جا به پایان می‌بریم. باید چیزهایی را برای تمرین باقی بگذاریم. حیف است از این لذت بی‌بهره بمانید.

## ۴.۲ هیچ کس در جای خود نمی‌نشیند

در این بخش مثال‌های مختلفی را تجربه می‌کنیم که با استفاده از اصل استقرا، اصل جمع و اصل ضرب حل می‌شوند. قصد داریم همه توشه‌ای را که اندوخته‌ایم یک جا برای مبارزه با یک مسأله به کار ببریم. با مثال‌های ساده‌تر شروع می‌کنیم و بتدریج نمونه‌های پیچیده‌تری را می‌آزماییم.

**مثال ۱.۴.۲.**  $n$  سکه یکسان داریم. سکه‌ها پشت و رو دارند. می‌خواهیم این  $n$  سکه را در یک صف در کنار یکدیگر قرار دهیم به گونه‌ای که هیچ دو سکه رو کنار هم قرار نگیرند. این کار به چند روش امکان‌پذیر است؟

اگر پشت سکه را با  $o$  و روی آن را با  $1$  نمایش دهیم آنگاه می‌خواهیم تعداد کدهای  $n$  رقمی با ارقام  $o$  و  $1$  را بیابیم که هیچ دو رقم کنار هم توأم  $11$  نباشند.

برای  $4$  مقدار اولیه  $n$ ، حالت‌ها عبارتند از

$o, 1$   
 $oo, o1, 1o$   
 $ooo, ooo1, o1o, 1oo, 1o1$   
 $oooo, oooo1, oo1o, o1oo, o1o1, 1ooo, 1oo1, 1o1o.$

اگر پاسخ مسأله را با  $a_n$  نمایش دهیم با کمی تحقیق مشخص می‌شود که مقادیر اولیه  $a_n$  عبارتند از

$$a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 5, a_4 = 8, a_5 = 13, a_6 = 21, a_7 = 34, \dots$$

به نظر می‌رسد که این دنباله شبیه دنباله فیبوناچی رفتار می‌کند اما چگونه

نباید صرفاً این را بخوانید، با آن مبارزه کنید! سؤالات خودتان را بپرسید، به مثال‌های خودتان بنگرید، برهان‌های خودتان را کشف نمایید. آیا فرض‌ها واقعاً لازمند؟ آیا عکس حکم نیز برقرار است؟ در حالت خاص متعارف چه اتفاقی می‌افتد؟ در مورد حالات استثنایی چطور؟ برهان، کجا از فرض استفاده می‌کند؟

Paul Richard Halmos

می‌توانیم این حدس خود را اثبات کنیم؟ به عبارت دقیق‌تر می‌توان گفت که اگر  $\{F_n\}$  دنباله فیبوناچی باشد که با  $F_0 = 1$  و  $F_1 = 1$  آغاز می‌شود و جملات بعدی مجموع دو جمله قبل از خود هستند آنگاه حدس می‌زنیم که  $a_n = F_{n+1}$ . این حدس را به وسیله استقرا اثبات می‌کنیم.

حکم برای  $n = 1$  بدیهی است. فرض کنیم حکم برای  $n$  برقرار باشد و  $n + 1$  سکه داشته باشیم. یا سکه سمت چپ را پشت می‌گذاریم یا رو. اگر سکه سمت چپ پشت باشد آنگاه  $n$  سکه دیگر می‌توانند طبق فرض استقرا به  $a_n = F_{n+1}$  روش قرار گیرند. اما اگر سکه سمت چپ رو باشد آنگاه سکه دوم از سمت چپ باید پشت باشد و  $n - 1$  سکه دیگر طبق فرض استقرا به  $a_{n-1} = F_n$  روش قرار خواهند گرفت. لذا با توجه به اصل جمع داریم

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1} = F_{n+1} + F_n = F_{n+2}.$$

بنابراین حکم برقرار است. **مثال ۲.۴.۲.** می‌خواهیم با استفاده از ارقام ۱، ۳ و ۴ اعدادی بسازیم که مجموع ارقام آنها برابر  $n$  باشد. می‌توانیم ارقام تکراری داشته باشیم و یا رقمی را اصلاً به کار نبریم. این کار به چند روش صورت می‌پذیرد؟

برای ۶ مقدار اولیه  $n$ ، حالت‌ها عبارتند از

۱

۱۱

۱۱۱، ۳

۱۱۱۱، ۱۳، ۳۱، ۴

۱۱۱۱۱، ۱۱۳، ۱۳۱، ۳۱۱، ۱۴، ۴۱

۱۱۱۱۱۱، ۱۱۱۳، ۱۱۳۱، ۱۳۱۱، ۳۱۱۱، ۳۳، ۱۱۴، ۱۴۱، ۴۱۱.

اگر پاسخ مسأله را  $a_n$  بنامیم، با اندکی تحقیق می‌توانیم چند مقدار اولیه  $a_n$  را

مردم دنیا بر ۱۰ دسته/ند. یک دسته آنهایی که با اعداد در مبنای ۳ آشنا هستند، دسته دوم آنهایی که با این اعداد آشنا نیستند و دسته سوم کسانی هستند که فکر می‌کنند ۱۰ یا به معنای عدد ده است یا به معنای عدد  $10_2 = 2!$



بیابیم. این مقادیر عبارتند از

$$a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 4, a_5 = 6, a_6 = 9, a_7 = 15, \\ a_8 = 25, a_9 = 40, a_{10} = 64, a_{11} = 104, a_{12} = 169, \dots$$

آیا می‌توانید حدسی بزنید؟ اجازه دهید بینیم اصل جمع می‌تواند کمکی بکند. برای نوشتن عددی که مجموع ارقام آن برابر  $n$  باشد یا رقم سمت چپ آن برابر ۱ است یا ۳ یا ۴.

- اگر رقم سمت چپ برابر ۱ باشد مجموع بقیه ارقام باید برابر  $n-1$  شود. این کار به  $a_{n-1}$  روش صورت می‌پذیرد؛
- اگر رقم سمت چپ برابر ۳ باشد مجموع بقیه ارقام باید برابر  $n-3$  شود. این کار به  $a_{n-3}$  روش صورت می‌پذیرد؛
- و بالاخره اگر رقم سمت چپ برابر ۴ باشد مجموع بقیه ارقام باید برابر  $n-4$  شود. این کار به  $a_{n-4}$  روش صورت می‌پذیرد.

بنابراین با توجه به اصل جمع نتیجه می‌شود که  $a_n = a_{n-1} + a_{n-3} + a_{n-4}$ .

اما ممکن است با توجه به چند مقدار اولیه  $a_n$  حدس‌های دیگری زده باشید. مثلاً می‌توان گفت که

آیا می‌توانید مقدار صریح  $a_n$  را مستقیماً و بدون استفاده از مقادیر قبلی آن بنویسید؟

$$a_{2n+1} = a_{2n} + a_{2n-1}, \\ a_{2n+2} = a_{2n+1} + a_{2n} + (-1)^{n+1}, \\ a_{2n} = F_n^2, \\ a_{2n+1} = F_{n+1}^2 - F_n^2 + (-1)^n.$$

که در آن  $F_n$  جمله  $n$  ام دنباله فیبوناچی است.

دو حکم اول را به استقرا اثبات می‌کنیم. برای  $n=1$  حکم بدیهی است. فرض

کنیم حکم برای  $n$  برقرار باشد. با استفاده از رابطه  $a_n = a_{n-1} + a_{n-3} + a_{n-4}$  که اثبات شد داریم

$$\begin{aligned} a_{2(n+1)+1} &= a_{2n+3} \\ &= a_{2n+2} + (a_{2n} + a_{2n-1}) \\ &= a_{2n+2} + a_{2n+1}. \end{aligned}$$

لذا حکم استقراً برقرار است.

همچنین برای حکم دوم نیز حالت  $n = 1$  بدیهی است و اگر حکم برای  $n$  برقرار باشد آنگاه داریم

$$\begin{aligned} a_{2(n+1)+2} &= a_{2n+4} \\ &= a_{2n+3} + (a_{2n+1} + a_{2n}) \\ &= a_{2n+3} + a_{2n+2} - (-1)^{n+1} \\ &= a_{2n+3} + a_{2n+2} + (-1)^{(n+1)+1}. \end{aligned}$$

لذا این حکم نیز برقرار است.

اما برای اثبات دو حکم بعدی به خواصی از دنباله فیبوناچی احتیاج داریم. توجه کنید که اگر حکم سوم اثبات شود آنگاه با استفاده از حکم دوم می‌توان به سادگی چهارمی را نتیجه گرفت. ♠

همچنین اگر چهارمی اثبات شود به سادگی می‌توانیم سومی را از آن نتیجه بگیریم.

مجدداً به این مثال بر می‌گردیم. فعلاً به ارائه چند حکم در مورد دنباله فیبوناچی می‌پردازیم.

ماتریس  $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  را در نظر بگیرید<sup>۱۷</sup>. داریم

$$\begin{aligned} F^2 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ F^3 &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\ F^4 &= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

حدس می‌زنیم که  $F^n = \begin{bmatrix} F_n & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_{n-2} \end{bmatrix}$  و این حدس را به استقرا اثبات می‌کنیم.

قضیه ۳.۴.۲. فرض کنیم  $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  در این صورت

$$F^n = \begin{bmatrix} F_n & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_{n-2} \end{bmatrix}$$

که در آن  $F_n$  جمله  $n$  ام دنباله فیبوناچی است و  $F_{-1} = 0$ .

**برهان.** برای  $n = 1$  حکم بدیهی است. فرض کنیم حکم برای  $n - 1$  برقرار

همین کار را با ماتریس‌های دیگری انجام دهید و روابط بازگشتی دیگری را بیازمایید.

<sup>۱۷</sup> اگر با مبحث ماتریس‌ها آشنا نیستید زیاد نگران نشوید. کافی است بدانید که هر جدول  $n \times m$  از اعداد را یک ماتریس  $n \times m$  می‌نامیم. در اینجا فقط با ماتریس‌های  $2 \times 2$  سر و کار داریم. برای دو ماتریس  $2 \times 2$  مانند  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}$  مجموع آنها با نماد  $A+B$  برابر  $\begin{bmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{bmatrix}$  و حاصلضرب آنها با نماد  $AB$  برابر  $\begin{bmatrix} aa'+bc' & ab'+bd' \\ ca'+dc' & cb'+dd' \end{bmatrix}$  تعریف می‌شود. همچنین دترمینان (determinant) ماتریس  $A$  با نماد  $\det(A)$  برابر  $ad-bc$  تعریف می‌گردد. می‌دانیم که  $\det(AB) = \det(A) \det(B)$ .

باشد. داریم

$$\begin{aligned}
 F^n &= F^{n-1} F \\
 &= \begin{bmatrix} F_{n-1} & F_{n-2} \\ F_{n-2} & F_{n-3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} F_{n-1} + F_{n-2} & F_{n-1} \\ F_{n-2} + F_{n-3} & F_{n-2} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} F_n & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_{n-2} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

و لذا حکم برقرار است. ■

این حکم نتایج جالب زیر را به همراه دارد.

**قضیه ۴.۴.۲.** فرض کنیم  $F_n$  جمله  $n$  ام دنباله فیبوناچی باشد. در این صورت به ازای هر  $n$  و  $m$  داریم

$$F_n F_m + F_{n-1} F_{m-1} = F_{n+m}.$$

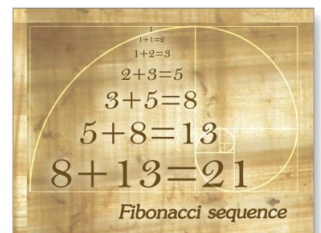
**برهان.** با توجه به این که  $F^n F^m = F^{n+m}$  داریم

$$\begin{bmatrix} F_n & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_{n-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_m & F_{m-1} \\ F_{m-1} & F_{m-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{n+m} & F_{n+m-1} \\ F_{n+m-1} & F_{n+m-2} \end{bmatrix}$$

و لذا

$$\begin{aligned}
 &\begin{bmatrix} F_n F_m + F_{n-1} F_{m-1} & F_n F_{m-1} + F_{n-1} F_{m-2} \\ F_{n-1} F_m + F_{n-2} F_{m-1} & F_{n-1} F_{m-1} + F_{n-2} F_{m-2} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} F_{n+m} & F_{n+m-1} \\ F_{n+m-1} & F_{n+m-2} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

اکنون اگر به عبارت اول در سطر اول هر دو طرف تساوی نگاه کنیم حکم را



می‌بینیم.

می‌توانیم حکم فوق را به استقرا روی  $n$  نیز اثبات کنیم.

**برهان استقرایی قضیه بالا.** برای  $n = 1$  داریم

$$F_1 F_m + F_0 F_{m-1} = F_m + F_{m-1} = F_{m+1} = F_{1+m}.$$

حال فرض کنیم حکم برای  $n - 1$  و هر  $m$  برقرار باشد. داریم

$$\begin{aligned} F_n F_m + F_{n-1} F_{m-1} &= (F_{n-1} + F_{n-2}) F_m + F_{n-1} F_{m-1} \\ &= F_{n-1} (F_m + F_{m-1}) + F_{n-2} F_m \\ &= F_{n-1} F_{m+1} + F_{n-2} F_m \\ &= F_{(n-1)+(m+1)} \\ &= F_{n+m}. \blacksquare \end{aligned}$$

در جبر، اتحاد **براهماگوپتا**، که گاهی اوقات آن را اتحاد **فیوناچی** نیز می‌نامند، بیان می‌دارد که

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2) \times (c^2 + d^2) \\ &= (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 \\ &= (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2. \end{aligned}$$

با توجه به این اتحاد، مجموعه اعدادی که به صورت مجموع دو مجذور قابل بیان هستند تحت عمل ضرب بسته‌اند.

**Brahmagupta**

598 - 670

با استفاده از ترفند ماتریسی می‌توان حکم دیگری را نیز به دست آورد. کافی است از عبارت به دست آمده برای  $F^n$  دترمینان بگیریم. مزیت این شیوه در آن است که احکام، خود را به ما نشان می‌دهند و لازم نیست آنها را از قبل بدانیم. در حالی که اگر بخواهیم اثباتی استقرایی برای حکم ارائه دهیم باید صورت حکمی را که می‌خواهیم اثبات کنیم بدانیم.

**قضیه ۵.۴.۲.** اگر  $F_n$  جمله  $n$  ام دنباله فیوناچی باشد آنگاه

$$F_n F_{n-2} - F_{n-1}^2 = (-1)^n.$$

**برهان.** داریم

$$\begin{aligned} F_n F_{n-2} - F_{n-1}^2 &= \det \begin{bmatrix} F_n & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_{n-2} \end{bmatrix} = \det(F^n) \\ &= \det(F)^n = \left( \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right)^n = (-1)^n. \blacksquare \end{aligned}$$

این احکام، نتایج جالبی دارند که گرچه جدا از موضوع اصلی بحث ما (یعنی اثبات حکم سوم در مثال ۲.۴.۲) می باشد با این حال از آنجایی که قابل توجه هستند آنها را در اینجا ذکر می کنیم.

**قضیه ۶.۴.۲.** جملات متوالی دنباله فیبوناچی نسبت به هم اول هستند.

**برهان.** فرض کنیم  $d$  مقسوم علیه مشترکی از  $F_n$  و  $F_{n-1}$  باشد. در این صورت  $d$  مقسوم علیهی از  $F_n F_{n-2} - F_{n-1}^2$  خواهد بود و چون طبق قضیه قبل، این مقدار برابر  $(-1)^n$  است پس  $d$  مقسوم علیهی از ۱ است. بنابراین  $d = 1$ . ■

حتی می توان حکم کلی تر زیر را اثبات کرد.

**قضیه ۷.۴.۲.** فرض کنیم  $u_n = F_{n-1}$  به ازای هر  $n \in \mathbb{N}$ . در این صورت به ازای هر  $n$  و  $m$  داریم

$$\gcd(u_n, u_m) = u_{\gcd(n, m)},$$

که در آن منظور از  $\gcd$ ، بزرگ ترین مقسوم علیه مشترک می باشد.

**برهان.** با توجه به قضیه ۴.۴.۲ داریم

$$u_{n+1}u_{m+1} + u_n u_m = u_{n+m+1}.$$

و با تبدیل  $m$  به  $m-1$  در عبارت فوق داریم

$$u_{n+1}u_m + u_n u_{m-1} = u_{n+m} \quad (*)$$

در حکم قضیه می توانیم فرض کنیم که  $m \leq n$  و چون حکم برای  $m = n$  بدیهی است پس فرض می کنیم که  $m < n$ . این حکم را به استقرای قوی روی  $n$  اثبات می کنیم. برای  $n = 2$  حکم بدیهی است. فرض کنیم حکم برای هر عدد کوچک تر از  $n$  برقرار باشد.

با توجه به  $(*)$  می توان نوشت

$$u_{n-m+1}u_m + u_{n-m}u_{m-1} = u_n \quad (**)$$

بنابراین  $\gcd(u_{n-m}, u_m) | u_n$ . از طرفی  $\gcd(u_{n-m}, u_m) | u_m$ . بنابراین

$$\gcd(u_{n-m}, u_m) | \gcd(u_n, u_m) \quad (\dagger)$$

بنابر تعریف، بزرگ ترین مقسوم علیه مشترک دو عدد طبیعی مانند  $a$  و  $b$  برابر  $d$  است فقط و فقط وقتی که  $d$  مقسوم علیه  $a$  و  $b$  باشد و به ازای هر عدد طبیعی دیگر مانند  $e$  که  $e | a$  و  $e | b$  داشته باشیم  $e \leq d$ ، اما به طور معادل می توان گفت که  $d$  بزرگ ترین مقسوم علیه مشترک  $a$  و  $b$  است هرگاه  $d | a$  و  $d | b$  و برای هر  $e$  دیگر با این خاصیت، داشته باشیم  $e | d$ .

از سوی دیگر با توجه به  $(**)$  داریم  $u_n - u_{n-m+1}u_m = u_{n-m}u_{m-1}$ . بنابراین  $\gcd(u_n, u_m) | u_{n-m}u_{m-1}$ . اما  $\gcd(u_n, u_m) | u_{n-m}u_{m-1}$  است و چون طبق قضیه فوق  $u_m$  و  $u_{m-1}$  نسبت به هم اول هستند پس  $\gcd(u_n, u_m) | u_{n-m}$  نیز نسبت به  $u_{m-1}$  اول است و لذا  $\gcd(u_n, u_m) | u_{n-m}$ . بنابراین

$$\gcd(u_n, u_m) | \gcd(u_{n-m}, u_m) \quad (\dagger)$$

اکنون از  $(\dagger)$  و  $(\ddagger)$  نتیجه می‌شود که

$$\gcd(u_{n-m}, u_m) = \gcd(u_n, u_m).$$

اما  $\max\{n-m, m\} < \max\{n, m\} = n$  و لذا با توجه به فرض استقرای قوی نتیجه می‌گیریم که  $\gcd(u_{n-m}, u_m) = u_{\gcd(n-m, m)}$ . در نتیجه

$$\gcd(u_n, u_m) = \gcd(u_{n-m}, u_m) = u_{\gcd(n-m, m)} = u_{\gcd(n, m)}. \blacksquare$$

اما حکمی که ما برای ادامه استدلال مثال ۲.۴.۲ احتیاج داریم از این قرار است.

قضیه ۸.۴.۲. فرض کنیم  $F_n$  جمله  $n$  ام دنباله فیبوناچی باشد. در این صورت

$$3F_{n+1}^2 = F_{n+2}^2 + F_n^2 + 2 \cdot (-1)^{n+1}.$$

برهان. با توجه به قضیه ۵.۴.۲ داریم

$$\begin{aligned} F_{n+2}^2 + F_n^2 - 3F_{n+1}^2 &= (F_{n+1} + F_n)^2 + F_n^2 - 3F_{n+1}^2 \\ &= F_{n+1}^2 + F_n^2 + 2F_{n+1}F_n + F_n^2 - 3F_{n+1}^2 \\ &= 2F_n(F_{n+1} + F_n) - 2F_{n+1}^2 \\ &= 2(F_nF_{n+2} - F_{n+1}^2) = 2 \cdot (-1)^n. \blacksquare \end{aligned}$$

ترفندی که برای اثبات قضیه بعد به کار می‌رود بسیار مهم است. آن را فراموش نکنید.

اکنون به اثبات حکم سوم مثال ۲.۴.۲ می‌پردازیم. چیزی که جالب است این است که گرچه اثبات حکم سوم، چهارمی را نتیجه خواهد داد، با این حال برای آن که گام استقرایی ما پیش برود مجبوریم که حکم سوم و چهارم مذکور

در آن مثال را با هم اثبات کنیم. به عبارت دیگر برای آن که استدلال ساده تر شود بهتر است حکم مسأله را سخت تر کنیم! این مطلب شاید عجیب باشد اما در اثبات های استقرایی گاهی اوقات چنین وضعیتی رخ می دهد. از آنجا که در استدلال استقرایی، حکم مسأله به فرض استقرا تبدیل می گردد گاهی اوقات صرف می کند که حکم را سخت کنیم چرا که در حقیقت با این کار فرض خود را قوی ساخته ایم. برهان زیر را ببینید و آن را به عنوان تدبیری برای حل مسائل استقرایی به خاطر بسپارید.

**قضیه ۹.۴.۲.** فرض کنیم  $a_n$  تعداد اعدادی باشد که با استفاده از همه یا بعضی از ارقام ۱، ۳ و ۴ ساخته می شوند و مجموع ارقام آنها برابر  $n$  است. در این صورت  $a_{2n} = F_n^2$ ، که  $F_n$  جمله  $n$  ام دنباله فیبوناچی است.

**برهان.** به جای آن، دو حکم زیر را به عنوان  $P(n)$  در اثبات استقرایی خود در نظر می گیریم.

$$\begin{aligned} a_{2n} &= F_n^2, \\ a_{2n+1} &= F_{n+1}^2 - F_n^2 + (-1)^n. \end{aligned}$$

$P(1)$  برقرار است زیرا

$$\begin{aligned} a_2 &= 1 = F_1^2, \\ a_3 &= 2 = F_2^2 - F_1^2 + (-1)^1. \end{aligned}$$

فرض کنیم  $P(n)$  برقرار باشد. با توجه به آنچه در مثال ۲.۴.۲ اثبات شد داریم

$$\begin{aligned} a_{2(n+1)} &= a_{2n+2} = a_{2n+1} + a_{2n} + (-1)^{n+1} \\ &= F_{n+1}^2 - F_n^2 + (-1)^n + F_n^2 + (-1)^{n+1} = F_{n+1}^2. \end{aligned}$$

دقت کنید که با فرض درستی حکم دوم  $P(n)$  توانستیم حکم اول  $P(n+1)$  را اثبات کنیم.

آیا می توانید حکم قضیه را تعمیم دهید؟ اگر به جای استفاده از ارقام ۱، ۳ و ۴ از ارقام دیگری استفاده می کردیم چه احکامی را می توانستیم اثبات کنیم؟

همچنین با توجه به قضیه بالا داریم

$$\begin{aligned}
 a_{2(n+1)+1} &= a_{2n+3} \\
 &= a_{2n+2} + a_{2n+1} \\
 &= F_{n+1}^2 + F_{n+1}^2 - F_n^2 + (-1)^n \\
 &= F_{n+2}^2 - F_{n+1}^2 + 2 \cdot (-1)^{n+1} - (-1)^{n+1} \\
 &= F_{(n+1)+1}^2 - F_{n+1}^2 + (-1)^{n+1}.
 \end{aligned}$$

مجدداً دقت کنید که با استفاده از حکم اول  $P(n+1)$  که اثبات کرده بودیم توانستیم حکم دوم  $P(n+1)$  را اثبات کنیم. ■

چند بار این استدلال را بخوانید و ببینید که احکام مذکور در  $P(n)$  چگونه به کمک یکدیگر می‌آیند تا  $P(n+1)$  را به دست دهند. نمی‌توانیم هر یک از احکام مذکور در  $P(n)$  را به طور جداگانه با فرآیندی استقرایی اثبات کنیم.

در یک مسابقه اسب‌سواری اعلام شده که جایزه به اسبی تعلق می‌گیرد که آخر از همه به خط پایان برسد! چه کار کنیم تا مسابقه انجام شود؟ با این شرط ممکن است همه در جای خود بایستند تا آخر شوند و جایزه را دریافت کنند.

کماکان معتقدیم که دیدن مثال‌های متفاوت باعث تبصر در حل مسأله می‌شود و گرنه یادگیری برهان خلف، استقرا و اصول جمع و ضرب اصلاً کار سختی نیست. پس اجازه دهید مسائل بیشتری را تجربه کنیم. به عنوان زیباترین نمونه، مسأله جایگشت‌های پریش را حل می‌کنیم.

**تعریف ۱۰.۴.۲.** افراد ۱ تا  $n$  و صندلی‌هایی که با شماره‌های ۱ تا  $n$  شماره گذاری شده‌اند را در نظر می‌گیریم. اگر افراد طوری روی صندلی‌ها بنشینند که هیچ کس در جای خود ننشسته باشد آنگاه می‌گوییم که یک جایگشت پریش<sup>۱۸</sup> از این افراد داریم. ♣

به عبارت دیگر یک جایگشت، پریش است هرگاه در نمایش دوری آن همه اعداد ظاهر شده باشند. یادآوری می‌کنیم که در نمایش جایگشتی، اعدادی که به خودشان تصویر می‌شدند نمی‌آمدند یعنی اگر قرار بود عددی به تنهایی در

<sup>۱۸</sup> derangement permutation. پریش به معنای پریشان است و derangement در نقطه مقابل arrangement قرار دارد.

یک پرانتز بیاید آن را حذف می‌کردیم. بنابراین مثلاً برای  $n = 7$  جایگشت  $(4\ 7)(2\ 5)(1\ 3\ 6)$  پریش است در صورتی که جایگشت  $(3\ 7)(1\ 4\ 2\ 5)$  پریش نیست چون ۶ در جای خود نشسته است.

مسئله یافتن تعداد جایگشت‌های پریش روی  $n$  حرف نیز از مسائل جالبی است که در حل آن اصل استقرا و اصول جمع و ضرب به کار می‌رود.

**قضیه ۱۱.۴.۲.** فرض کنیم  $D_n$  تعداد جایگشت‌های پریش روی  $n$  حرف باشد. در این صورت

$$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2}).$$

**برهان.** فرض کنیم  $n$  نفر با شماره‌های ۱ تا  $n$  و  $n$  صندلی با شماره‌های ۱ تا  $n$  داریم. شخص شماره ۱ را در نظر می‌گیریم. این شخص یک دوست از بین  $n-1$  نفر دیگر انتخاب می‌کند (به  $n-1$  طریق) و یکی از دو اتفاق زیر رخ می‌دهد (دوست ۱ را  $i$  می‌نامیم):

- ۱ به  $i$  می‌گوید که من در جای تو می‌نشینم (۱ طریق) و تو در جای من بنشین (۱ طریق) و بقیه که تعداد آنها  $n-2$  نفر است به صورت پریش بنشینند (به  $D_{n-2}$  طریق)؛

- یا ۱ به  $i$  می‌گوید که من در جای تو می‌نشینم (به ۱ طریق) اما تو در جای من ننشین. در این حالت ۱ و صندلی شماره  $i$  را از بحث خارج می‌کنیم، برچسب صندلی ۱ را برمی‌داریم و به آن برچسب  $i$  می‌زنیم (چون صندلی  $i$  نداریم می‌توانیم چنین کاری را انجام دهیم). اکنون  $n-1$  نفر باقی مانده‌اند و هیچ کس نباید در جای خود بنشیند چون قرار بود که  $i$  در صندلی شماره ۱ بنشیند و چون اکنون شماره این صندلی برابر  $i$  می‌باشد پس می‌توان گفت که  $i$  نباید در صندلی خود بنشیند. لذا  $n-1$  نفری که داریم باید به صورت پریش بنشینند (به  $D_{n-1}$  طریق).

لذا با توجه به اصل ضرب و اصل جمع می‌توان گفت که  $D_n$  برابر است با  $n-1$  (تعداد حالات انتخاب  $i$ ) ضربدر  $D_{n-2}$  (تعداد حالاتی که ۱ و  $i$  جای خود

در مسئله تعداد جایگشت‌های پریش می‌خواهیم  $n$  عدد را به صورت چند دور بنویسیم که در هر دور حداقل دو عدد آمده باشد. اگر قرار باشد که  $n$  عدد را به صورت اجتماع چند مجموعه بنویسیم که در هر مجموعه حداقل دو عدد آمده باشد، چند روش وجود دارد؟

را با یکدیگر عوض می‌کنند) به علاوه  $D_{n-1}$  (تعداد حالاتی که بعد از کنار گذاشتن شخص ۱ و صندلی  $i$  و برچسب  $i$  زدن بر صندلی ۱ به وجود می‌آید). ■  
**نتیجه ۱۲.۴.۲.** فرض کنیم  $D_n$  تعداد جایگشت‌های پریش روی  $n$  حرف باشد. در این صورت

$$D_n = nD_{n-1} + (-1)^n.$$

**برهان.** به استقرا حکم را اثبات می‌کنیم. برای  $n = 2$  بدیهی است. فرض کنیم حکم برای  $n - 1$  برقرار باشد. با توجه به قضیه فوق داریم

$$\begin{aligned} D_n &= (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2}) \\ &= (n-1)D_{n-1} + (n-1)D_{n-2} \\ &= (n-1)D_{n-1} + D_{n-1} - (-1)^{n-1} \\ &= nD_{n-1} + (-1)^n. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

در بخش قبل وقتی با بسط  $m$ - جمله‌ای آشنا شدیم این سؤال را مطرح کردیم که تعداد جملات در این بسط برابر چند است. در حقیقت سؤالی که پیش می‌آید این است که یک عدد طبیعی مانند  $n$  را به چند طریق می‌توان به صورت مجموع  $k$  عدد طبیعی نوشت. این سؤال و مسائلی شبیه آن را به همراه نتایجی که از حل آنها می‌توانیم بگیریم در ادامه این بخش می‌آوریم. آنچه در اینجا می‌آموزیم الفبای ۹ سؤال مهم شمارشی است که در فصل‌های بعدی به بررسی آنها خواهیم پرداخت.

**مثال ۱۳.۴.۲.** در یک گل‌فروشی ۵ نوع گل مختلف وجود دارد. می‌خواهیم ۱۳ شاخه گل از این گل‌فروشی بخریم به طوری که از هر نوع گل لااقل یک شاخه خریده باشیم. فرض کنیم از هر گلی به هر تعداد که بخواهیم وجود دارد. به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟

اگر تعداد گل‌های نوع  $i$  ام را با  $x_i$  نمایش دهیم، در حقیقت می‌خواهیم ۱۳ را به صورت  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$  بنویسیم که  $x_i$  ها اعدادی طبیعی هستند. واضح

دقت کنید که تعداد کل جایگشت‌ها، یعنی  $n!$ ، در رابطه  $n! = n(n-1)!$  صدق می‌کند. این تشابه بین  $n!$  و  $D_n$  جالب نیست؟ آیا این تشابه ایجاب می‌کند که  $D_n$  تنها یک واحد کمتر یا بیشتر از  $n!$  است؟

اگر یکی از انواع گل پژمرده باشد و نخواهیم از آن نوع، گلی بخریم چند حالت وجود دارد؟

است که مثلاً دو جواب  $۱۳ = ۲ + ۳ + ۵ + ۱ + ۲$  و  $۱۳ = ۲ + ۳ + ۵ + ۲ + ۱$  متفاوت تلقی می‌شوند چون در اولی از گل نوع چهارم ۲ شاخه و از نوع پنجم ۱ شاخه می‌خریم در حالی که در دومی از گل نوع چهارم ۱ شاخه و از نوع پنجم ۲ شاخه می‌خریم.

بنابراین باید ببینیم به چند طریق می‌توانیم ۱۳ را به صورت مجموع ۵ عدد طبیعی بنویسیم. اگر عدد ۱۳ را توسط ۱۳ توپ یکسان نمایش دهیم مثلاً جواب اولی را که در بالا آمد می‌توان به صورت

$$\bigcirc\bigcirc|\bigcirc\bigcirc\bigcirc|\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc|\bigcirc\bigcirc|\bigcirc$$

نمایش داد در حالی که جواب دوم به صورت

$$\bigcirc\bigcirc|\bigcirc\bigcirc\bigcirc|\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc|\bigcirc|\bigcirc\bigcirc$$

مشخص می‌شود. در اینجا تعداد توپ‌هایی که توسط دیوارهای به شکل | جدا شده‌اند از چپ به راست برابرند با  $x_1$  تا  $x_5$ .

بنابراین می‌توان گفت که تعداد حالت‌های انتخاب گل‌ها برابر است با تعداد حالت‌هایی که می‌توان بین ۱۳ توپ یکسان ۴ دیوار یکسان گذاشت به طوری که هیچ دو دیواری کنار هم نباشند. این که تعداد دیوارها برابر ۴ است بدین دلیل است که در حقیقت دیوارها به جای علامت‌های + در عبارت

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$$

قرار گرفته‌اند و این که هیچ دو دیواری کنار هم نیستند نیز به خاطر آن است که هیچ  $x_i$  بی برابر ۰ نیست.

اما به چند طریق می‌توان بین ۱۳ توپ ۴ دیوار گذاشت به گونه‌ای که هیچ دو دیواری کنار هم نباشند. در حقیقت می‌توان گفت که مکان‌های مجاز برای دیوار گذاشتن برابر است با ۱۲ (بین ۱۳ توپ ۱۲ مکان داریم) و ما می‌خواهیم از بین آنها ۴ مکان مختلف انتخاب کنیم. ترتیب اهمیت ندارد چون دیوارها یکسان فرض شده‌اند. لذا تعداد حالت‌ها برابر است با ترکیب ۴ تا از ۱۲ تا، یعنی  $\binom{12}{4}$ .



این مطلب را می‌توان به صورت زیر تعمیم داد.

**قضیه ۱۴.۴.۲.** فرض کنیم  $n$  و  $k$  اعدادی طبیعی باشند. در این صورت تعداد جواب‌های طبیعی معادله  $n = x_1 + \dots + x_k$  برابر است با  $\binom{n-1}{k-1}$ .

**برهان.** فرض کنیم  $n$  توپ یکسان داریم که می‌خواهیم بین آنها  $k-1$  دیوار قرار دهیم. همان طور که در مثال بالا دیدیم تعداد جواب‌های طبیعی معادله  $n = x_1 + \dots + x_k$  دقیقاً برابر است با تعداد حالات قرار دادن این  $k-1$  دیوار در بین این  $n$  توپ.

در بین توپ‌ها  $n-1$  مکان برای انتخاب داریم که می‌خواهیم  $k-1$  مکان برای دیوارها انتخاب کنیم و توجه داریم که ترتیب اهمیتی ندارد. این تعداد برابر است با  $\binom{n-1}{k-1}$ . ■

اکنون ببینیم اگر حق داشته باشیم که از برخی گل‌ها هیچ شاخه‌ای انتخاب نکنیم چند حالت امکان‌پذیر است.

**مثال ۱۵.۴.۲.** در یک گل‌فروشی ۵ نوع گل مختلف وجود دارد. می‌خواهیم ۱۳ شاخه گل از این گل‌فروشی بخریم. فرض کنیم از هر گلی به هر تعداد که بخواهیم وجود دارد. به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟

اگر به همان روش توپ و دیواره عمل کنیم این بار باید تعداد حالاتی را بشماریم که ۴ دیوار یکسان و ۱۳ توپ یکسان در کنار یکدیگر قرار می‌گیرند (بدون محدودیت کنار هم نبودن دو دیوار).

برای آن که این تعداد را بشماریم می‌توانیم فرض کنیم که ۱۷ صندلی در کنار یکدیگر گذاشته‌ایم و قرار است توپ‌ها ۱۳ مکان را انتخاب کنند و بنشینند.<sup>۱۹</sup> ترتیب در انتخاب ۱۳ مکان از بین ۱۷ مکان برای توپ‌ها اهمیتی ندارد چون توپ‌ها یکسان هستند. لذا تعداد مطلوب برابر است با  $\binom{17}{13}$ .<sup>۲۰</sup> ♠

<sup>۱۹</sup> البته فرقی نمی‌کند اگر فرض کنیم که قرار است دیوارها ۴ مکان مختلف را انتخاب کنند. در هر دو حالت پاسخ یکی است.

<sup>۲۰</sup> توجه داریم که اگر قرار بود دیوارها مکان خود را انتخاب کنند پاسخ برابر  $\binom{17}{4}$  می‌شد که با  $\binom{17}{13}$  یکی است.

اگر قرار بود با همین شرط، اول دیوارها را قرار دهیم و بعد توپ‌ها را آیا مسأله به همین سادگی حل می‌شد؟ مسلماً در هر دو حالت باید به یک جواب برسیم.

**قضیه ۱۶.۴.۲.** فرض کنیم  $n$  و  $k$  اعدادی طبیعی باشند. در این صورت تعداد جواب‌های حسابی<sup>۲۱</sup> معادله  $n = x_1 + \dots + x_k$  برابر است با

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{n+k-1}{n}.$$

اگر در این قضیه و قضیه قبل، ترتیب نوشتن  $x_i$  ها اهمیتی نداشته باشد، چند حالت وجود دارد؟

**برهان.** می‌خواهیم  $n$  توپ یکسان و  $k-1$  دیوار یکسان را در کنار یکدیگر قرار دهیم که دیوارها می‌توانند در کنار هم باشند. اگر  $n+k-1$  مکان در نظر بگیریم و توپ‌ها  $n$  مکان برای خود اختیار کنند، چون توپ‌ها یکسان هستند و ترتیب اهمیت ندارد پاسخ برابر است با  $\binom{n+k-1}{n}$ . ■

ترفند دیگری نیز برای اثبات حکم فوق وجود دارد که آموخته است.

**برهان دوم حکم بالا.** به جای آن که  $n$  را به صورت مجموع  $k$  عدد حسابی بنویسیم می‌توانیم  $n+k$  را به صورت مجموع  $k$  عدد طبیعی به شکل  $y_1 + \dots + y_k$  بنویسیم و سپس از هر  $y_i$  یک واحد کم کنیم تا  $n$  به صورت

$$(y_1 - 1) + \dots + (y_k - 1)$$

نوشته شود. اکنون اگر  $x_i$  را برابر  $y_i - 1$  بگیریم پاسخی حسابی برای  $n = x_1 + \dots + x_k$  یافته‌ایم. لذا تعداد مطلوب ما برابر است با تعداد جواب‌های طبیعی معادله  $n+k = y_1 + \dots + y_k$ . بنابر قضیه ۱۴.۴.۲ می‌دانیم که این تعداد برابر  $\binom{n+k-1}{k-1}$  است. ■

برهان دوم از این جهت حائز اهمیت است که ترفندی برای پاسخ به سؤال زیر را به دست می‌دهد.

**مثال ۱۷.۴.۲.** در یک گل‌فروشی ۵ نوع گل مختلف وجود دارد. می‌خواهیم ۱۳ شاخه گل از این گل‌فروشی بخریم به گونه‌ای که از گل نوع اول حداقل دو شاخه و از گل نوع چهارم حداقل سه شاخه و از بقیه گل‌ها حداقل یک شاخه خریداری کنیم. فرض کنیم از هر گلی به هر تعداد که بخواهیم وجود دارد. به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟

فرض کنیم  $y_1 = x_1 - 1$ ،  $y_2 = x_2$ ،  $y_3 = x_3$ ،  $y_4 = x_4 - 2$  و  $y_5 = x_5$ . در

<sup>۲۱</sup> یعنی جواب‌های صحیح نامنفی؛ به عبارت دیگر  $x_i$  ها می‌توانند صفر هم باشند.

این صورت می‌توان نوشت

$$۱۳ = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = y_1 + ۱ + y_2 + y_3 + y_4 + ۲ + y_5.$$

پس اگر تعداد جواب‌های طبیعی  $۱۰ = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5$  بیابیم پاسخ مسأله را یافته‌ایم. این تعداد برابر است با  $(۱-۱)^5$ . ♠

اما اگر برای خریدن گلی از نوعی خاص محدودیتی از بالا داشته باشیم (مثلاً شرط کنیم که از گل نوع سوم حداکثر سه شاخه باید خریداری شود) چه کار باید بکنیم؟

آنچه در این چند حکم بررسی شد/افراز مرتب<sup>۲۲</sup> یک عدد طبیعی مانند  $n$  به  $k$  عدد طبیعی نامیده می‌شود. طبیعتاً دو سؤال در اینجا مطرح می‌شود: اگر ترتیب در نوشتن اهمیتی نداشته باشد پاسخ چیست؟ و اگر ترتیب اهمیت داشته باشد اما تعداد  $x_i$  ها مشخص نباشد چگونه؟

فعلاً به سؤال دوم می‌پردازیم. قرار نیست این غذای لذیذ به یکباره بلعیده شود!

سؤال این است که به چند طریق می‌توان یک عدد طبیعی را به صورت مجموع یک یا چند عدد طبیعی نوشت به طوری که ترتیب اهمیت داشته باشد. ممکن است در ابتدا فکر کنید که این سؤال همان تعداد حالات نوشتن  $n$  به صورت  $x_1 + \dots + x_n$  است<sup>۲۳</sup> که  $x_i$  ها می‌توانند صفر هم باشند. نکته ظریفی در این بین وجود دارد. اجازه دهید برای  $n = ۴$  این دو مسأله را با هم مقایسه کنیم. مثال ۱۸.۴.۲. کلیه حالت‌های ممکن/افراز مرتب ۴ به صورت مجموع اعداد طبیعی و کلیه جواب‌های حسابی معادله  $۴ = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$  را بنویسید.

افرازهای مرتب ۴ عبارتند از

$$\begin{aligned} ۱ + ۱ + ۱ + ۱ &= ۱ + ۱ + ۲ = ۱ + ۲ + ۱ = ۲ + ۱ + ۱ \\ &= ۲ + ۲ = ۱ + ۳ = ۳ + ۱ = ۴, \end{aligned}$$

<sup>۲۲</sup> ordered partition

<sup>۲۳</sup> توجه کنید که تعداد متغیرها را  $n$  گرفته‌ایم نه  $k$ .

عجله نکنید. به جواب این سؤال هم خواهیم رسید، اما نه در این فصل. برای پاسخ دادن به این سؤال به اصل دیگری احتیاج داریم.

در حالی که جواب‌های حسابی معادله  $۴ = x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴$  عبارتند از

$$\begin{aligned} ۰ + ۰ + ۰ + ۴ &= ۰ + ۰ + ۱ + ۳ = ۰ + ۰ + ۲ + ۲ \\ &= ۰ + ۱ + ۱ + ۲ = ۱ + ۱ + ۱ + ۱ \end{aligned}$$

و همه حالت‌هایی که از جا به جا کردن عوامل ظاهر شده در این حالت‌ها به دست می‌آیند. می‌دانیم که تعداد کل حالت‌ها برابر است با

$$\binom{۴+۴-۱}{۴} = \frac{۷!}{۴!۳!} = \frac{۷ \times ۶ \times ۵}{۳!} = ۳۵. \spadesuit$$

این مثال شاید واضح‌تر از هر استدلالی تفاوت این دو سؤال را مشخص کند و نکته ظریفی را که بدان اشاره کردیم روشن سازد.

اکنون به سه روش تعداد افزای مرتب را به دست می‌آوریم.

**قضیه ۱۹.۴.۲.** تعداد حالات نوشتن  $n$  به صورت مجموع یک یا چند عدد طبیعی به طوری که ترتیب اهمیت داشته باشد برابر است با  $۲^{n-۱}$ .

و اگر ترتیب اهمیت نداشته باشد چطور؟

**برهان.** اگر بخواهیم  $n$  را به صورت مجموع یک یا چند عدد طبیعی بنویسیم این تعداد می‌تواند برابر ۱ یا ۲ یا ... یا  $n$  باشد.

تعداد حالاتی که می‌توان  $n$  را به صورت مجموع  $k$  عدد طبیعی نوشت برابر است با  $\binom{n-۱}{k-۱}$ . بنابراین با توجه به اصل جمع، تعداد مطلوب برابر

$$\sum_{k=۱}^n \binom{n-۱}{k-۱} = \sum_{\ell=۰}^{n-۱} \binom{n-۱}{\ell} = ۲^{n-۱}$$

خواهد بود. ■

برای آن که کسی بتواند برهان فوق را بفهمد باید اصل جمع را بداند، تعداد جواب‌های طبیعی معادله  $n = x_۱ + \dots + x_k$  را بداند، تغییر دادن اندیس سیگما را بلد باشد و بالاخره این که با بسط دو جمله‌ای آشنا باشد. کسی که از این مطالب مختلف اطلاع داشته باشد ممکن است سراغ چنین برهانی برود. اما برهان دوم را ببینید.

**برهان دوم.** فرض کنیم  $n$  را به صورت  $x_1 + \dots + x_k$  نوشته باشیم. یک کد  $n$  رقمی به این شکل می‌سازیم که از سمت چپ به تعداد  $x_1$  بار ۱، به تعداد  $x_2$  بار ۰، به تعداد  $x_3$  بار ۱ داشته باشد و به همین ترتیب تا  $x_k$  پیش برود<sup>۲۴</sup>. بدین ترتیب تعداد مطلوب برابر است با تعداد حالاتی که می‌توانیم کدهای  $n$  رقمی با ارقام ۰ و ۱ بسازیم که رقم سمت چپ آنها همواره برابر ۱ است<sup>۲۵</sup>. تعداد چنین کدهایی برابر است با تعداد کدهای  $n-1$  رقمی با ارقام ۰ و ۱، چون رقم سمت چپ در اختیار ما نیست و همیشه ۱ است. اما تعداد کدهای  $n-1$  رقمی با ارقام ۰ و ۱ برابر است با  $2^{n-1}$ . ■

برای آن که چنین برهانی به ذهن کسی برسد لازم است که با مسئلهٔ تعداد کدهای  $n$  رقمی آشنا باشد و ایدهٔ تبدیل مسئله به مسئلهٔ آشنا را به کار برد. اما ببینیم راه حل سوم چگونه است.

**برهان سوم.** برای آن که  $n$  را به صورت مجموع چند عدد طبیعی بنویسیم  $n$  توپ یکسان در نظر می‌گیریم و بین آنها دیوار می‌گذاریم. تعداد دیوارها می‌تواند از ۱ تا  $n-1$  باشد. بنابراین بین هر دو توپ یا می‌توانیم دیوار بگذاریم یا نگذاریم (۲ حالت) و چون بین توپ‌ها  $n-1$  مکان وجود دارد تعداد مطلوب برابر است با  $2^{n-1}$ . ■

این برهان مخصوص کسانی است که هیچ چیز غیر از اصل ضرب را نمی‌دانند! توجه کنید که حتی استفاده‌ای اساسی از اصل جمع در این برهان نشده است. فراموش نکنید که یاد گرفتن ترفندها و حقایق جدید نباید باعث گردد که راه‌های ساده، کوتاه، ابتکاری و بدون استناد به قضایای پیشرفته را کنار بگذارید. هر راه حل زیبایی خود را دارد. حتی اثبات‌های طولانی نیز می‌توانند آموزنده باشند چون رهیافتی دیگر به راه حل را نشان می‌دهند. آنچه مهم است این است که از هر برهانی برای الگو گرفتن در حل مسائل دیگر درس بگیرید. کوتاه یا طولانی

<sup>۲۴</sup> مثلاً برای  $13 = 2 + 3 + 5 + 2 + 1$  کد  $1100011111001$  را می‌سازیم.

<sup>۲۵</sup> توجه کنید که وقتی از سمت چپ شروع می‌کنیم  $x_1$  بار ۱ می‌گذاریم و لذا رقم سمت چپ کدهایی که می‌سازیم همواره برابر ۱ است.

هر برهانی زیبایی خاص خود را دارد. اگر در حال یاد گرفتن یا یاد دادن مطلبی هستید سعی کنید همهٔ راه‌های مقابله با آن را بیاموزید، اما اگر می‌خواهید در یک مسابقه، برتری خود را به دیگران نشان دهید همیشه زیباترین و کوتاه‌ترین راهی را که می‌دانید به کار ببرید.

بودن راه حل‌ها مهم نیست. مهم، کلیدی طلایی است که در کُنه هر استدلالی پنهان شده است.

مثال بعدی مربوط به محاسبهٔ عدد کاتالان است. یادآوری می‌کنیم که در مسألهٔ کاتالان (مثال ۱۲.۲.۱) تعداد حالت‌هایی که می‌توان  $n$  متغیر مختلف را در یکدیگر ضرب کرد و عبارت نشان دهندهٔ حاصلضرب آنها را پرانتزگذاری کرد مورد سؤال بود.

مثال ۲۰.۴.۲. (محاسبهٔ عدد کاتالان) اگر در مسألهٔ کاتالان همهٔ متغیرها با هم مساوی باشند، تعداد حالات مختلف پرانتزگذاری برابر چند است؟

در حالتی که تعداد متغیرها برابر  $n$  باشد این تعداد را با  $C_{n-1}$  نمایش می‌دهیم و آن را عدد کاتالان می‌نامیم.

همان طور که در مثال ۱۲.۲.۱ دیدیم، اگر تعداد حالات مختلف پرانتزگذاری برای  $n$  متغیر متفاوت را با  $O_n$  نمایش دهیم آنگاه

$$O_{n+1} = 2(2n-1)O_n.$$

اما وقتی متغیرها یکی فرض شوند، هر  $n!$  حالت متمایز به یک حالت تبدیل می‌گردد و لذا اگر پاسخ مسأله در این حالت را با  $C_{n-1}$  نمایش دهیم داریم  $C_{n-1} = \frac{O_n}{n!}$ . ادعا می‌کنیم که

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

این ادعا را به استقرا اثبات می‌کنیم. برای  $n=1$  حکم بدیهی است. فرض کنیم حکم برای  $n-1$  برقرار باشد. داریم

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{O_{n+1}}{(n+1)!} \\ &= \frac{2(2n-1)O_n}{(n+1)!} \end{aligned}$$

در حقیقت  $C_n$  برابر است با تعداد حالات مختلف پرانتزگذاری برای متغیرهای یکسان که در آنها  $n$  بار عمل ضرب ظاهر شود.

با توجه به این رابطه، چندان واضح نیست که  $C_n$  ها اعدادی طبیعی هستند. ثابت کنید  $C_n$  برابر است با

$$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$$

و نتیجه بگیرید که  $C_n$  ها اعدادی طبیعی هستند. البته با توجه به تعریف  $C_n$ ، از قبل می‌دانستیم که این اعداد باید طبیعی باشند.

$$\begin{aligned}
&= \frac{2(2n-1)}{n+1} \cdot \frac{O_n}{n!} \\
&= \frac{2(2n-1)}{n+1} \cdot C_{n-1} \\
&= \frac{2(2n-1)}{n+1} \cdot \frac{1}{n} \binom{2(n-1)}{n-1} \\
&= \frac{2(2n-1)}{n+1} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!} \cdot \frac{n}{n} \\
&= \frac{(2n)!}{(n+1)n!n!} \\
&= \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \cdot \spadesuit
\end{aligned}$$

مثال بعدی نمونه دیگری از تبدیل مسأله به مسأله آشناست. این مثال نشان می‌دهد که چگونه می‌توانیم با یک تناظر یک به یک ساده به جای شمردن تعداد اعضای یک مجموعه، تعداد اعضای مجموعه‌ای دیگر را بیابیم که به سادگی محاسبه می‌شود.

**مثال ۲۱.۴.۲.** یک مستطیل  $n \times m$  داریم که از  $nm$  مربع  $1 \times 1$  تشکیل شده است. مهره‌ای را در خانه گوشه سمت چپ پایین این مستطیل قرار داده‌ایم (این خانه را  $A$  می‌نامیم). می‌توانیم این مهره را روی خطوط افقی و عمودی (فقط در جهت‌های از چپ به راست و از پایین به بالا) حرکت دهیم تا به خانه گوشه سمت راست بالای مستطیل برسد (این خانه را  $B$  می‌نامیم). چند مسیر برای رسیدن به این نقطه وجود دارد؟

در هر مسیری که از  $A$  به  $B$  در نظر بگیریم تعدادی حرکت به راست و تعدادی حرکت به بالا وجود دارد. دقیق‌تر بگوییم؛  $m-1$  قدم به راست و  $n-1$  قدم به بالا.

اگر حرکت به راست را با  $R$  و حرکت به بالا را با  $U$  نمایش دهیم هر مسیر را می‌توان به صورت  $m-1$  تا  $R$  و  $n-1$  تا  $U$  نمایش داد که  $R$  و  $U$  ها به هر ترتیبی می‌توانند در کنار یکدیگر بیایند. بنابراین می‌توانیم تعداد دنباله‌های  $m-1+n-1$  جمله‌ای متشکل از  $m-1$  بار  $R$  و  $n-1$  بار  $U$  را بشماریم. اگر

اگر حرکت در جهت قطری از پایین چپ به بالا راست نیز مجاز باشد چند حالت وجود دارد؟

$m - 1 + n - 1$  صندلی قرار دهیم و  $R$  ها بدون احتساب ترتیب  $m - 1$  مکان را انتخاب کنند این تعداد برابر  $\binom{m-1+n-1}{m-1}$  خواهد بود. ♠

در مثال ۷.۲.۱ تعداد مربع‌های داخل یک مربع  $n \times n$  را شمردیم و این سؤال را مطرح کردیم که تعداد مستطیل‌های داخل یک مستطیل  $n \times m$  برابر چند است. اکنون می‌توانیم به این سؤال پاسخ بدهیم.

مثال ۲۲.۴.۲. یک مستطیل  $n \times m$  داریم که از  $nm$  مربع  $1 \times 1$  تشکیل شده است. چند مستطیل در این مستطیل وجود دارد؟

این مستطیل از خطوط افقی و عمودی تشکیل یافته است. اگر خطوط افقی را از بالا به پایین با  $0, 1, \dots, n$  و خطوط عمودی را از چپ به راست با  $0, 1, \dots, m$  نمایش دهیم برای آن که یک مستطیل را مشخص کنیم کافی است دو شماره افقی و دو شماره عمودی را (بدون احتساب ترتیب) مشخص کنیم و این چهار خط را پررنگ کنیم تا مرز یک مستطیل را نمایش دهند. اما از بین  $n + 1$  خط افقی می‌توان به  $\binom{n+1}{2}$  طریق دو خط افقی انتخاب کرد و از بین  $m + 1$  خط عمودی نیز می‌توان به  $\binom{m+1}{2}$  طریق دو خط عمودی را انتخاب کرد. لذا تعداد مستطیل‌ها برابر است با  $\binom{n+1}{2} \binom{m+1}{2}$ . ♠

حال ببینید چگونه می‌توانید با تمرین‌ها دست و پنجه نرم کنید.

تعداد کل آثار دیریکله  
چندان زیاد نیست؛  
جواهرات را با ترازوی بقالی  
نمی‌سنجند.

**Johann Carl  
Friedrich Gauss**

30 April 1777 - 23 Feb 1855



## ۵.۲ تمرین‌ها

ممکن است شما بتوانید روشی برای پاسخ دادن به سؤالات زیر بیابید. این کافی نیست. مهم این است که بتوانید احکام را تعمیم دهید. همواره این سؤال را از خود پرسید که آیا می‌توان حکمی کلی‌تر را بیان و اثبات کرد. از سوی دیگر ممکن است نتوانید برخی از سؤالات را پاسخ دهید. این نباید باعث نگرانی شما شود. گرچه ترفندهای خوبی را برای مواجه شدن با مسائل آموخته‌اید با این حال ممکن است این برای پاسخ دادن به هر سؤالی در این زمینه کافی نباشد. بد

نیست به کتاب‌های دیگر سری بزنید و پس از مدتی با دست پر به این تمرین‌ها مراجعه کنید تا بتوانید آنها را مغلوب خود سازید.

۱.۵.۲. فرض کنیم  $B$  زیرمجموعه ثابتی از  $X = \{1, \dots, n\}$  باشد. چند  $A$  وجود دارد که  $A \subseteq B \subseteq X$ ؟ با استفاده از آن تعداد  $(A, B)$  هایی که  $A \subseteq B \subseteq X$  را بیابید. آیا می‌توانید به همین روش تعداد  $(A_1, \dots, A_k)$  هایی که  $A_1 \subseteq \dots \subseteq A_k \subseteq X$  را بیابید؟

۲.۵.۲. فرض کنیم  $X = \{1, 2, \dots, n\}$ . چند زیرمجموعه  $k$  عضوی از  $X$  وجود دارد که تفاضل هر دو عضو آن حداقل ۲ باشد؟ چنین مجموعه‌هایی را ۲-مجزا می‌نامیم.

۳.۵.۲. فرض کنیم  $X = \{1, 2, \dots, n\}$ . چند زیرمجموعه  $k$  عضوی از  $X$  وجود دارد که تفاضل هر دو عضو آن حداقل  $m$  باشد؟ چنین مجموعه‌هایی را  $m$ -مجزا می‌نامیم.

۴.۵.۲. فرض کنیم  $X = \{1, 2, \dots, n\}$ . ثابت کنید تعداد زیرمجموعه‌هایی از  $X$  که شامل  $k$  هستند با تعداد آنهایی که شامل  $k$  نیستند برابر است.

۵.۵.۲. ثابت کنید تعداد زیرمجموعه‌هایی از  $X$  که بزرگترین عضو آنها  $k$  است برابر است با  $2^{k-1}$  و نتیجه بگیرید که  $\sum_{k=0}^{n-1} 2^k = 2^n - 1$ .

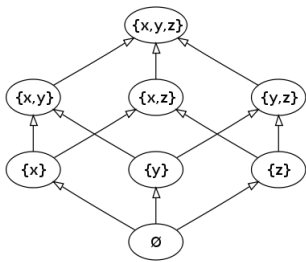
۶.۵.۲. تعداد  $(i, j, k)$  هایی را بیابید که  $1 \leq i \leq j \leq k \leq n$ .

۷.۵.۲. تعداد ۵ کتاب ترکیبیات، ۱۳ کتاب نظریه اعداد و ۱۰ کتاب نظریه گراف داریم که همگی با هم فرق دارند. به چند طریق می‌توان ۲ کتاب از بین آنها انتخاب کرد که در یک زمینه نباشند؟

۸.۵.۲. تعداد  $n$  نفر دور یک میز نشسته‌اند. به چند طریق می‌توان  $k$  نفر از بین آنها انتخاب کرد به گونه‌ای که هیچ دو نفر کنار هم انتخاب نشوند؟

۹.۵.۲. یک ماتریس  $n \times n$  با درایه‌های ۰ و ۱ را جایگشتی می‌نامیم هرگاه در هر سطر و هر ستون آن فقط یک بار عدد ۱ آمده باشد. تعداد ماتریس‌های جایگشتی را بیابید. چند ماتریس  $n \times n$  با درایه‌های ۰ و ۱ وجود دارد که در هر سطر و هر ستون آن دقیقاً دو بار عدد ۱ آمده باشد؟

۱۰.۵.۲. ثابت کنید تعداد ماتریس‌های  $n \times n$  با درایه‌های ۰ و ۱ که در هر سطر و



یادآوری می‌کنیم پیرانهایی را که در آنها فقط یک عدد وجود داشته باشد نمی‌نویسیم و لذا می‌خواهیم تعداد جایگشت‌هایی را بیابیم که دقیقاً از  $k$  دور با حداقل دو عضو تشکیل شده باشند.

هر ستون آنها ۳ بار عدد ۱ آمده باشد برابر است با

$$6^{-n} \sum_{a+b+c=n} \frac{(-1)^b n! (b+3c)! 2^a 3^b}{a! b! (c!)^2 6^c}.$$

آیا می‌توانید رابطه‌ای بازگشتی برای تعیین این تعداد بیابید؟

۱۱.۵.۲. چند جایگشت روی  $n$  عدد وجود دارد که دقیقاً از  $k$  دور تشکیل شده باشند؟

۱۲.۵.۲. تعداد جایگشت‌هایی از اعداد  $1, \dots, n$  را بیابید که از یک دور با  $k$  عضو تشکیل شده باشند.

۱۳.۵.۲. جایگشت  $k$  ام را در بین  $n!$  جایگشت روی اعداد  $1, \dots, n$  بیابید.

۱۴.۵.۲. فرض کنیم  $a_1 \dots a_m$  جایگشتی باشد که  $a_i$  ها از بین اعداد ۱ تا  $n$  انتخاب شده‌اند. چند جایگشت از اعداد  $1, \dots, n$  وجود دارد که در آنها جایگشت  $a_1 \dots a_m$  با همین ترتیب (ولی نه لزوماً پشت سر هم) ظاهر شده باشد؟ مثلاً اگر  $n = 8$  و  $a_1 a_2 a_3 = 274$  آنگاه جایگشت  $12367458$  جایگشتی است که در آن  $274$  ظاهر شده است، گرچه این اعداد پشت سر هم نیامده‌اند.

۱۵.۵.۲. فرض کنیم  $a_1 \dots a_m$  جایگشتی باشد که  $a_i$  ها از بین اعداد ۱ تا  $n$  انتخاب شده‌اند. در بین جایگشت‌هایی از اعداد  $1, \dots, n$  که در آنها جایگشت  $a_1 \dots a_m$  با همین ترتیب (ولی نه لزوماً پشت سر هم) ظاهر شده است  $k$  امین جایگشت کدام است؟

۱۶.۵.۲. در یک مسابقه اسب‌سواری ۵ اسب شرکت کرده‌اند. به چند طریق ممکن است این اسب‌ها به خط پایان برسند؟

۱۷.۵.۲. فرض کنیم  $a_1 \dots a_n$  جایگشتی از  $X = \{1, \dots, n\}$  باشد و  $A \subseteq X$ . می‌گوییم جایگشت  $a_1 \dots a_n$  مجموعه  $A$  را می‌شکافد<sup>۲۶</sup> هرگاه بتوانیم  $a_i, a_j$  و  $a_k$  بی‌پیدا کنیم که  $1 \leq i < j < k \leq n$  و  $a_i, a_k \in A$  اما  $a_j \notin A$ . برای یک مجموعه مانند  $A$  چند جایگشت وجود دارد که  $A$  را می‌شکافد؟ برای یک جایگشت مانند  $a_1 \dots a_n$  چند مجموعه وجود دارد که توسط این جایگشت شکافته می‌شوند؟

توجه کنید که ممکن است چند اسب با هم برسند.

مثلاً جایگشت  $13542$  مجموعه  $\{1, 2, 3\}$  را می‌شکافد اما مجموعه  $\{3, 4, 5\}$  را نمی‌شکافد.

<sup>۲۶</sup>splits

۱۸.۵.۲. فرض کنیم  $A_1, \dots, A_{n-2}$  زیرمجموعه‌هایی از  $X = \{1, \dots, n\}$  باشند که حداقل ۲ عضو و حداکثر  $n-1$  عضو دارند. ثابت کنید جایگشتی از  $X$  وجود دارد که همگی  $A_i$  ها را می‌شکافد.

۱۹.۵.۲. تعداد  $2n$  نفر می‌خواهند اشیاء گران قیمت خود را در یک صندوقچه بگذارند و قفل‌هایی برای آن صندوقچه بگذارند و برخی از افراد کلید برخی از قفل‌ها را داشته باشند به طوری که هر  $n$  نفر از آنها بتوانند در صندوق را باز کنند ولی هیچ  $n-1$  نفر از آنها نتوانند این کار را انجام دهند. حداقل چند قفل باید برای صندوقچه بگذاریم و کلید هر قفلی را به چه فرد یا افرادی باید بدهیم؟

۲۰.۵.۲. ثابت کنید هر جایگشت را می‌توان به صورت تعدادی دور دوتایی نوشت.

۲۱.۵.۲. تعداد کدهای  $n$  رقمی با ارقام ۰ و ۱ را بیابید که در آنها دقیقاً  $m$  بار ۰ ظاهر شده باشد.

۲۲.۵.۲. با توجه به این که

$$\begin{aligned} k \binom{n}{k} &= n \binom{n-1}{k-1}, \\ (n-k) \binom{n}{k} &= n \binom{n-1}{k} \end{aligned}$$

و جمع کردن طرفین تساوی‌ها، نتیجه بگیرید که

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

آیا در این استدلال  $n$  می‌تواند برابر ۰ باشد؟

۲۳.۵.۲. ثابت کنید

$$\sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n+k}{k} 2^{n-k}$$

و نتیجه بگیرید که  $\sum_{k=0}^n \binom{n+k}{k} 2^{-k} = 2^n$ .

ابتدا مسأله را برای ۴ نفر حل کنید.

۲۴.۵.۲. ثابت کنید

$$\sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell-k}{m} \binom{s}{k-n} (-1)^k = (-1)^{\ell+m} \binom{s-m-\ell}{\ell-m-n}.$$

همچنین ثابت کنید اتحاد

$$\sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell-k}{m} \binom{q+k}{n} = \binom{\ell+q+1}{m+n+1}$$

برای هر  $n \geq q$  برقرار است.

۲۵.۵.۲. ثابت کنید

$$\sum_{k=0}^{\min\{a,b,c\}} \binom{a+b}{a+k} \binom{b+c}{b+k} \binom{c+a}{c+k} (-1)^k = \frac{(a+b+c)!}{a!b!c!}$$

برای هر  $a, b, c$  ی حسابی برقرار است.

۲۶.۵.۲. ثابت کنید

$$\binom{n-1}{k-1} \binom{n}{k+1} \binom{n+1}{k} = \binom{n-1}{k} \binom{n+1}{k+1} \binom{n}{k-1}$$

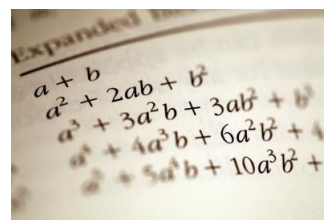
برای هر  $k \leq n$  برقرار است.۲۷.۵.۲. با توجه به آن که  $\binom{k}{2} = 3 \binom{k+1}{4}$  ثابت کنید که

$$\sum_{k=0}^n \binom{k}{2} \binom{2n-k}{n} = 3 \binom{2n+2}{n+5}$$

برای هر  $n$  برقرار است.

۲۸.۵.۲. مثلثی شبیه مثلث خیام بسازید که دو ضلع کناری آن اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، ... باشند و هر عدد در مثلث برابر با مجموع دو عدد بالایی خود باشد. بنابراین در سطر اول ۱، در سطر دوم ۲ ۲، در سطر سوم ۳ ۴ ۳ و در سطر چهارم ۴ ۷ ۷ ۴ را داریم. اگر عدد  $k$  ام در سطر  $n$  ام را با  $\binom{n}{k}$  نمایش دهیم داریم

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

و  $\binom{n}{1} = \binom{n}{n} = n$ . ثابت کنید  $\binom{n+1}{k} - \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}$ .۲۹.۵.۲. بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک اعداد  $\binom{2n}{1}, \binom{2n}{3}, \dots, \binom{2n}{2n-1}$  برابر

راهنمایی: مجموع این اعداد را در نظر بگیرید.

چند است؟

۳۰.۵.۲. ثابت کنید

$$\begin{aligned} & \gcd\left(\binom{n-1}{k-1}, \binom{n}{k+1}, \binom{n+1}{k}\right) \\ &= \gcd\left(\binom{n-1}{k}, \binom{n+1}{k+1}, \binom{n}{k-1}\right) \end{aligned}$$

که در آن  $\gcd$  به معنای بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک است.

۳۱.۵.۲. یک سکه را  $n$  بار می‌اندازیم. ثابت کنید احتمال آن که  $k$  بار رو

بیاید برابر است با  $\frac{\binom{n}{k}}{2^n}$ . نتیجه بگیرید که  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{2^n} = 1$ . با استدلالی از این

نوع نشان دهید که  $\sum_{k=0}^n \binom{n+k}{k} \frac{1}{2^k} = 2^n$ .

۳۲.۵.۲. تعداد  $6n$  شیء از ۳ نوع مختلف داریم (از هر نوع  $2n$  تا) که آنها

را بین دو نفر به طور مساوی تقسیم کرده‌ایم. این کار به چند طریق صورت می‌پذیرد؟

۳۳.۵.۲. تعداد  $3n+1$  شیء داریم که  $n$  تای آنها یکسان و بقیه متمایز هستند.

نشان دهید تعداد حالاتی که می‌توان از بین آنها  $n$  شیء انتخاب کرد برابر است با  $2^{2n}$ .

۳۴.۵.۲. جایگشت  $a_1 \dots a_n$  از  $X = \{1, \dots, n\}$  را در نظر می‌گیریم. می‌دانیم

که می‌توانیم این جایگشت را به عنوان تابعی یک به یک و برو مانند  $\sigma$  از  $X$  به

خودش در نظر بگیریم. اگر به ازای  $1 \leq i \leq n$  داشته باشیم  $i = \sigma(\sigma(i))$  آنگاه

می‌گوییم جایگشت  $\sigma$  خودمعکوس<sup>۲۷</sup> است. فرض کنیم  $t_n$  برابر باشد با تعداد

جایگشت‌های خودمعکوس روی  $X$ . ثابت کنید  $t_{n+1} = t_n + nt_{n-1}$ . نشان

دهید  $t_n$  را می‌توان از دستور صریح

$$t_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} \frac{(2k)!}{2^k k!}$$

نیز به دست آورد.

<sup>۲۷</sup>self-inverse

۳۵.۵.۲. فرض کنیم  $a_n$  برابر تعداد دنباله‌های  $n$  رقمی با ارقام ۰، ۱ و ۲ باشد که در آن ۰۰ ظاهر نشده است. رابطه‌ای بازگشتی برای  $a_n$  بیابید.

۳۶.۵.۲. تعداد  $n$  زوج (زن و شوهر) داریم که می‌خواهیم آنها را دور یک میز قرار دهیم به طوری که هر زنی کنار شوهرش باشد. به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟

۳۷.۵.۲. به چند طریق می‌توان  $2n$  نفر را به  $n$  گروه ۲ تایی تقسیم کرد؟ اگر بخواهیم  $kn$  نفر را به  $n$  گروه  $k$  تایی تقسیم کنیم چند حالت وجود دارد؟

۳۸.۵.۲. در قضیه ۶.۴.۱ دیدیم که هر عدد طبیعی را می‌توان به صورت مجموعی از جملات متمایز دنباله فیبوناچی نوشت. ثابت کنید اگر دنباله  $\{F_n\}$  را از  $n = 1$  به بعد در نظر بگیریم آنگاه این طرز نوشتن منحصر به فرد است مشروط بر آن که دو عدد فیبوناچی متوالی در نمایش  $n$  ظاهر نشود. بدین ترتیب می‌توان گفت که هر عدد طبیعی مانند  $n$  نمایشی در مبنای فیبوناچی<sup>۲۸</sup> به صورت  $b_r \dots b_1 b_0$  دارد که در آن ارزش ارقام از راست به چپ به ترتیب برابر ۱، ۲، ۳، ۵، ۸، ... است و  $b_i$  ها ۰ یا ۱ هستند و هیچ دو تا از آنها که کنار هم باشند توأمآً ۱ نیستند. مثلاً نمایش عدد ۲۸ در مبنای فیبوناچی برابر است با  $1001010$  زیرا  $28 = 21 + 5 + 2$ .

۳۹.۵.۲. آیا تابعی مانند  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  وجود دارد که  $f(1) = 2$  و به ازای هر

$n \in \mathbb{N}$  داشته باشیم  $f(f(n)) = f(n) + n$  و  $f(n) < f(n+1)$ ؟

۴۰.۵.۲. فرض کنیم  $p_n(k)$  تعداد جایگشت‌هایی از  $n$  نفر باشد که دقیقاً  $k$  نفر از آنها در جای خود نشسته‌اند.

i. ثابت کنید  $p_n(k) = \binom{n}{k} D_{n-k}$  که در آن  $D_{n-k}$  تعداد جایگشت‌های پریش روی  $n-k$  عدد است.

ii. نتیجه بگیرید که  $p_n(n-1) = 0$ .

iii. ثابت کنید  $\sum_{k=0}^n p_n(k) = n!$ .

iv. ثابت کنید  $\sum_{k=1}^n k \cdot p_n(k) = n!$ .

راهنمایی: اگر  $b_r \dots b_0$  نمایش  $n$  در مبنای فیبوناچی باشد،  $f(n)$  را برابر عددی تعریف کنید که نمایش آن در مبنای فیبوناچی برابر  $b_r \dots b_0$  است.

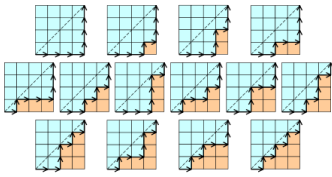
<sup>۲۸</sup>Fibonacci base

$v$ . نتیجه بگیرید که  $D_n = \sum_{k=2}^n (k-1) \cdot p_n(k)$

۴۱.۵.۲. ضریب  $x^{19}$  در  $(1 + x^3 + x^7 + x^9)^{100}$  برابر چند است؟

۴۲.۵.۲. تعداد  $2n$  نقطه روی محیط یک دایره قرار گرفته‌اند. به چند طریق می‌توان این نقاط را دو به دو به یکدیگر وصل کرد به طوری که هیچ دو خطی یکدیگر را قطع نکنند.

۴۳.۵.۲. می‌خواهیم در صفحه مختصات از نقطه  $(0,0)$  خود را به نقطه  $(n,n)$  برسانیم به طوری که مسیر حرکت ما از نقاط با مختصات صحیح باشد، همیشه به راست یا بالا حرکت کنیم و زیر نیمساز ربع اول باشیم. به چند طریق می‌توانیم این کار را انجام دهیم؟ آیا این تعداد با عدد کاتالان مرتبط است؟ آیا می‌توانید برهانی ترکیبیاتی ارائه دهید که این ارتباط را روشن سازد؟



# بودن یا نبودن؛ مسأله این است

فرض کنیم تناقضی در اصول  
موضوعه نظریه مجموعه‌ها  
یافت شود. آیا جداً معتقدید  
که پلی از میان برداشته خواهد  
شد؟

**Frank Plumpton Ramsey**

22 Feb 1903 - 19 Jan 1930



## ۰.۳ آنچه در این فصل می‌خوانید

در فصل قبل دیدیم که اصل جمع و ضرب چگونه می‌توانند به حل مسائل شمارشی کمک کنند. مسائلی نیز در این بین وجود دارد که ممکن است نتوانیم آنها را صرفاً با استفاده از این دو اصل حل کنیم و شاید مجبور باشیم از اصل استقرا نیز کمک بگیریم. با این حال هنوز هم مسائلی وجود دارد که به این سادگی قابل حل نیستند و لازم است ابزارهای دیگری را برای مواجهه شدن با آنها به کار ببریم.

برای  $n$  مساوی ۱، ۲، ۳، ۴، ۵،  
۶ و ۷ تعداد حالات عبارتند از  
۵، ۵، ۲، ۱۲، ۳۱۲، ۹۶۰۰ و  
۴۱۶۸۸۰.

به مسأله‌ای سخت فکر کنید. ممکن است نتوانید آن را حل کنید، اما چیز دیگری را اثبات خواهید کرد.

## Littlewood

بنابراین بودن یا نبودن عضوی در اشتراک این دو مجموعه می‌تواند بر تعدادی که می‌شماریم تأثیر بگذارد و لذا مسئله ما در این فصل این است: بودن یا نبودن!

problème des ménages

## ۱.۳ اصل شمول و طرد

همان گونه که دیدیم اصل جمع در حقیقت بیان می‌دارد که وقتی  $A$  و  $B$  دو مجموعه مجزا باشند داریم  $|A \cup B| = |A| + |B|$ . اما اگر این دو مجموعه اشتراک داشته باشند چه می‌توانیم بگوییم؟

مثلاً وقتی  $A = \{1, 2, 3, a, b\}$  و  $B = \{a, b, \square, \circ, \diamond\}$  آنگاه وقتی تعداد اعضای  $A$  را با  $B$  جمع می‌زنیم، اعضای  $a$  و  $b$  که در هر دوی مجموعه‌ها آمده‌اند دو بار به شمار می‌آیند. بنابراین به نظر می‌رسد که اگر این تعداد دو بار شمرده شده را از مجموع تعداد دو مجموعه کم کنیم به آنچه می‌خواسته‌ایم خواهیم رسید. به عبارت دیگر

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

برای اثبات تساوی فوق می‌توان از ترفند دوبار شمار استفاده کرد. می‌خواهیم تعداد اعضای  $A \cup B$  را بشماریم. این تعداد برابر است با  $|A \cup B|$ . اما ببینیم که در سمت راست تساوی فوق چه اتفاقی می‌افتد. اگر  $x$  عضوی از  $A$  باشد که در  $B$  نباشد آنگاه در سمت راست تساوی، این  $x$  در  $|A|$  یک بار به شمار می‌آید ولی در  $|B|$  و  $|A \cap B|$  شمرده نمی‌شود. همچنین اگر  $x$  عضوی از  $B$  باشد که در  $A$  نباشد آنگاه در سمت راست تساوی، این  $x$  در  $|B|$  یک بار به شمار می‌آید ولی در  $|A|$  و  $|A \cap B|$  شمرده نمی‌شود. به علاوه هر  $x$  که هم در  $A$  و هم در  $B$  باشد در سمت راست تساوی، یک بار در  $|A|$  و یک بار در  $|B|$  شمرده می‌شود و یک بار از این به شمار آمدن‌ها در  $|A \cap B|$  کم می‌گردد و لذا  $1 + 1 - 1 = 1$  بار به شمار می‌آید.

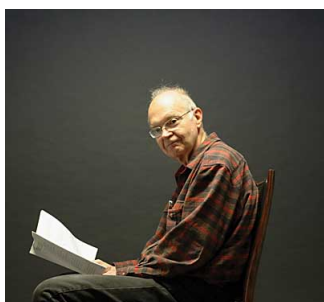
اگر با سه مجموعه کار کنیم داریم

$$\begin{aligned} & |A \cup B \cup C| \\ &= |A \cup (B \cup C)| = |A| + |B \cup C| - |A \cap (B \cup C)| \\ &= |A| + |B| + |C| - |B \cap C| - |(A \cap B) \cup (A \cap C)| \end{aligned}$$

علم عبارت است از چیزهایی که درک می‌کنیم تا برای توضیح دادن به رایانه به اندازه کافی خوب باشد. همه آنچه باقی می‌ماند هنر است.

Donald Ervin Knuth

10 Jan 1938



$$\begin{aligned}
 &= |A| + |B| + |C| - |B \cap C| - (|A \cap B| + |(A \cap C)| - |A \cap B \cap C|) \\
 &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.
 \end{aligned}$$

این تساوی را نیز می‌توان با دوبار شمار به دست آورد. می‌توانیم این فرآیند را ادامه دهیم و اتحادی را ارائه دهیم که در آن  $n$  مجموعه ظاهر شده باشد. اثبات استقرایی آن چندان سخت نیست اما راه ساده‌تری هم وجود دارد. در حقیقت برای آن که تعداد اعضای اجتماعی از مجموعه‌ها را بشماریم تعداد اعضای تک تک مجموعه‌ها را مشمول شمارش خود می‌کنیم، تعداد اشتراک‌های دوتایی از مجموعه‌ها را طرد می‌کنیم، سه‌تایی‌ها را به شمار می‌آوریم، چهارتایی‌ها را کنار می‌گذاریم و این کار را ادامه می‌دهیم.

**قضیه ۱.۱.۳. (اصل شمول و طرد)<sup>۲</sup>** فرض کنیم  $A_1, \dots, A_n$  مجموعه‌هایی متناهی باشند. در این صورت

$$|\cup_{i=1}^n A_i| = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n}} (-1)^{k+1} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}|.$$

**برهان.** می‌خواهیم تعداد اعضای  $\cup_{i=1}^n A_i$  را بشماریم. این تعداد برابر است با عبارتی که در سمت چپ تساوی نوشته شده است. اما ببینیم در سمت راست چه اتفاقی می‌افتد.

فرض کنیم  $x$  عضوی باشد که دقیقاً در  $r$  مجموعه از مجموعه‌های  $A_1, \dots, A_n$  آمده است. این مجموعه‌ها را  $A_{j_1}, \dots, A_{j_r}$  می‌نامیم. بنابراین در سمت راست تساوی، این  $x$  هنگامی به شمار می‌آید که  $k \leq r$  زیرا در اشتراک‌های بیشتر از  $r$  تایی این  $x$  نمی‌تواند ظاهر شده باشد. اما وقتی  $k \leq r$  این  $x$  هنگامی در  $|A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}|$  شمرده می‌شود که  $i_1 < \dots < i_k$  از بین اعداد  $j_1$  تا  $j_r$  انتخاب شده باشند. لذا باید از بین این  $r$  عدد  $k$  عدد را انتخاب کنیم. توجه کنید که ترتیب اعداد انتخاب شده مهم نیست زیرا هر طور که انتخاب شوند باید به ترتیب از کوچک به بزرگ به صورت  $i_1 < \dots < i_k$  بیایند. لذا این  $x$  در

وقتی استادتان چیزی را به عنوان تمرین برای شما باقی می‌گذارد مطمئن باشید که برای حل آن سؤال، باید ۳ اصل از اصول شمارشی را به کار ببرید و ۲ بار از استقرای قوی با استدلالی طولانی استفاده کنید و ۶ حالت خاص دیگر باقی می‌ماند که باید آنها را مستقیماً بررسی کنید!



<sup>۲</sup> the principle of inclusion and exclusion (PIE)

$\binom{r}{k}$  تا از جملاتی به شکل  $|A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}|$  ظاهر می‌شود.

بنابراین می‌توان گفت که تعداد شمرده شدن  $x$  در سمت راست تساوی برابر است با  $\sum_{k=1}^r (-1)^{k+1} \binom{r}{k}$  اما داریم

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^r (-1)^{k+1} \binom{r}{k} &= - \sum_{k=1}^r \binom{r}{k} (-1)^k \\ &= - \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} (-1)^k 1^{r-k} + 1 \\ &= -(-1 + 1)^r + 1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

اگر اثباتی برای این حکم داریم  
چرا آن را اصل نامیده‌ایم؟

لذا هر  $x$  که در سمت چپ یک بار شمرده شود در سمت راست نیز یک بار  
به شمار می‌آید و در نتیجه حکم برقرار است. ■

مثال ۲.۱.۳. برای مجموعه‌های

$$A_1 = \{1, 2, 3, 4\},$$

$$A_2 = \{1, 4, 5, 6, 7, 8\},$$

$$A_3 = \{1, 2, 7, 9\},$$

$$A_4 = \{8, 10, 11\},$$

اصل شمول و طرد را تحقیق کنید.

داریم

$$A_1 \cap A_2 = \{1, 4\},$$

$$A_1 \cap A_3 = \{1, 2\},$$

$$A_1 \cap A_4 = \phi,$$

$$A_2 \cap A_3 = \{1, 7\},$$

$$\begin{aligned}
A_2 \cap A_4 &= \{8\}, \\
A_3 \cap A_4 &= \phi, \\
A_1 \cap A_2 \cap A_3 &= \{1\}, \\
A_1 \cap A_2 \cap A_4 &= \phi, \\
A_1 \cap A_3 \cap A_4 &= \phi, \\
A_2 \cap A_3 \cap A_4 &= \phi, \\
A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 &= \phi.
\end{aligned}$$

و می‌بینیم که

$$\begin{aligned}
&4 + 6 + 4 + 3 \\
&- 2 - 2 - 0 - 2 - 1 - 0 \\
&+ 1 + 0 + 0 + 0 \\
&- 0
\end{aligned}$$

♠ برابر است با تعداد اعضای اجتماع این چهار مجموعه.

همان طور که در مثال فوق دیده می‌شود لزومی ندارد که تعداد اعضای اشتراک‌های  $k$  تایی از مجموعه‌های داده شده با هم برابر باشد. مثلاً ممکن است اشتراک دو مجموعه اول برابر ۲ و اشتراک دو مجموعه دیگر برابر ۱ شود.

سعی کنید اصل شمول و طرد را با استفاده از استقرا اثبات کنید.

از سوی دیگر ممکن است به عنوان یک حالت استثنایی این اتفاق رخ دهد که هر  $k$  مجموعه از بین  $n$  مجموعه داده شده تعداد اعضای یکسانی داشته باشند. مثلاً همه اشتراک‌های دوتایی از مجموعه‌ها ۴ عضو داشته باشند و همه اشتراک‌های سه‌تایی ۲ عضوی باشند. اگر چنین حالتی رخ دهد اصل شمول و طرد به شکلی ساده‌تر بیان می‌گردد.

قضیه ۳.۱.۳. (اصل شمول و طرد؛ حالت خاص) فرض کنیم  $A_1, \dots,$

$A_n$  مجموعه‌هایی متناهی باشند به قسمی که به ازای هر  $k$  که  $1 \leq k \leq n$  مقدار  
 $|A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}|$  مستقل از انتخاب  $i_1, \dots, i_k$  و فقط وابسته به  $k$  باشد. اگر  
 $\alpha_k = |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}|$

آنگاه

$$|\cup_{i=1}^n A_i| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \alpha_k.$$

**برهان.** باید در تساوی مذکور در اصل شمول و طرد به جای  $|A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}|$  مقدار  $\alpha_k$  را قرار دهیم. اما این جمله چند بار در مجموع مذکور ظاهر شده است؟ تعداد جملاتی که باید به جای آنها  $\alpha_k$  قرار دهیم برابر است با تعداد حالاتی که می‌توان از بین  $n$  اندیس ۱ تا  $n$  تعداد  $k$  اندیس را انتخاب کرد. توجه داریم که در این انتخاب ترتیب اهمیت ندارد چون به هر شکلی اندیس‌ها را انتخاب کنیم باید آنها را به ترتیب از کوچک به بزرگ بنویسیم. تعداد چنین انتخاب‌هایی برابر است با  $\binom{n}{k}$ . لذا  $\binom{n}{k}$  بار  $\alpha_k$  داریم که  $k$  از ۱ تا  $n$  تغییر می‌کند. ■

اگر مجدداً این دو صورت مختلف اصل شمول و طرد را بخوانید می‌بینید که واقعاً احکام ساده‌ای هستند. تنها چیزی که آن را سخت جلوه می‌دهد ظاهر پیچیده‌ای است که برای اجتماع  $n$  مجموعه ارائه دادیم وگرنه خود اصل بیان ساده‌ای دارد: برای شمردن تعداد انجام کار اول یا دوم کافی است یک بار همه را مشمول شمارش خود کنید و سپس هر چه را زیادی شمرده‌اید طرد کنید. با این حال تا نمونه‌های مختلف کاربرد این اصل را نبینید نمی‌توانید آن را به خوبی لمس کنید.

تعیین تعداد جایگشت‌های  
 پریش، اولین بار در سال ۱۷۰۸  
 توسط

**Pierre Rémond  
 de Montmort**

مطرح شد و در سال ۱۷۱۳  
 توسط وی و تقریباً در همان  
 زمان توسط

**Nicholas Bernoulli**  
 حل گردید.

## ۲.۳ هیچ سری بی کلاه نمی ماند

به عنوان اولین مثال از کاربرد اصل شمول و طرد، مسأله یافتن تعداد جایگشت‌های پریش را مجدداً مورد بررسی قرار می‌دهیم و این بار پاسخ صریحی برای آن

می یابیم. به خاطر دارید که در فصل قبل پاسخی استقرایی برای این مسأله یافتیم که با استفاده از مقادیر قبلی  $D_n$  مقدار جدید آن را به دست می داد. قضیه ۱.۲.۳. فرض کنیم  $D_n$  تعداد جایگشت های پریش روی  $n$  حرف باشد. در این صورت

$$D_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot \frac{n!}{k!}.$$

**برهان.** به جای آن که تعداد جایگشت های پریش را بشماریم، غیرپریش ها را می شماریم و از تعداد کل آنها که برابر  $n!$  است کم می کنیم.

فرض کنیم  $n$  نفر با شماره های ۱ تا  $n$  داریم و  $n$  صندلی که با شماره های ۱ تا  $n$  شماره گذاری شده اند. می خواهیم تعداد جایگشت هایی از این افراد را بشماریم که لااقل یک نفر در جای خود نشسته باشد. برای این منظور فرض کنیم  $A_i$  مجموعه همه جایگشت هایی باشد که شخص شماره  $i$  در جای خود یعنی صندلی شماره  $i$  نشسته است. واضح است که  $\bigcup_{i=1}^n A_i$  برابر مجموعه همه جایگشت های غیرپریش می باشد.

برای آن که تعداد اعضای  $\bigcup_{i=1}^n A_i$  را بشماریم از اصل شمول و طرد استفاده می کنیم. لذا باید تعداد اعضای  $A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}$  را برای انتخابی دلخواه مانند  $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$  به دست آوریم.

اگر جایگشتی متعلق به  $A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}$  باشد به این معنی است که هر یک از افراد با شماره های  $i_1, \dots, i_k$  در جای خود نشسته است.<sup>۳</sup> در نتیجه این  $k$  نفر به یک طریق بر صندلی های خود می نشینند (چون حق انتخابی ندارند) و بقیه افراد که تعداد آنها برابر  $n - k$  است به دلخواه بر روی  $n - k$  صندلی دیگر خواهند نشست (می دانیم که این کار به  $(n - k)!$  طریق صورت می گیرد). لذا تعداد جایگشت هایی که در  $A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}$  هستند برابر است با  $(n - k)!$ .

مجدداً این سؤال را مطرح می کنیم: در یک مسابقه اسب سواری قرار است جایزه به اسی تعلق بگیرد که آخر از همه به خط پایان برسد. چه کار کنیم تا مسابقه انجام شود؟ پاسخ را در صفحه بعد ببینید.

<sup>۳</sup> دقت کنید که چیزی در مورد محل قرار گرفتن بقیه افراد نمی دانیم و محدودیتی وجود ندارد که این افراد نباید در جای خود نشسته باشند. در حقیقت اهمیت استفاده از اصل شمول و طرد در همین نکته ظریف است.

مشاهده می شود که تعداد اعضای  $A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}$  مستقل از انتخاب  $i_1, \dots, i_k$  و صرفاً وابسته به  $k$  (و  $n$  که مقدار ثابتی است) می باشد. لذا با فرض

$$\alpha_k = (n - k)!$$

می توانیم از حالت خاص اصل شمول و طرد استفاده کنیم. داریم

$$\begin{aligned} |\cup_{i=1}^n A_i| &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \alpha_k \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} (n - k)! \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \cdot \frac{n!}{k!(n - k)!} \cdot (n - k)! \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1} n!}{k!}. \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} D_n &= n! - |\cup_{i=1}^n A_i| \\ &= n! - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1} n!}{k!} \\ &= n! + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k n!}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot \frac{n!}{k!}. \blacksquare \end{aligned}$$

کافی است جایگشتی پریش از اسب ها و اسب سوارها را در نظر بگیریم. بدین ترتیب چون اسب سوار شماره  $i$  سوار اسب  $j$  است که  $i \neq j$ ، بنابراین سعی می کند که با سرعت تمام اسب را به خط پایان برساند!

این مطلب نشان می دهد که  $\frac{D_n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$ . بنابراین وقتی  $n$  به سمت بی نهایت میل کند مقدار  $\frac{D_n}{n!}$  به  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}$  میل خواهد کرد. به عنوان حکمی معروف می دانیم که مقدار اخیر برابر  $\frac{1}{e}$  است و لذا می توان گفت برای  $n$  های به قدر کافی بزرگ، احتمال این که جایگشتی پریش باشد تقریباً برابر است با  $\frac{1}{e}$ .

فرض کنیم  $X = \{1, 2, \dots, m\}$  و  $Y = \{1, 2, \dots, n\}$ . به راحتی می توان دید که تعداد توابع  $f: X \rightarrow Y$  برابر است با  $n^m$ ، زیرا برای آن که یک تابع از  $X$  به  $Y$  تعریف کنیم باید  $f(1)$  و  $f(2)$  و  $\dots$  و  $f(m)$  تعریف شوند. اما برای تعریف کردن  $f(i)$  تعداد انتخاب ها برابر است با  $n$  زیرا می توانیم هر یک از اعضای  $Y$  را به عنوان  $f(i)$  انتخاب کنیم. بنابراین با توجه به اصل ضرب، تعداد چنین توابعی برابر است با  $n \times n \times \dots \times n$  که  $n$  به تعداد  $m$  بار آمده است.

$n$  نفر با شماره های ۱ تا  $n$  و نیز  $n$  کلاه با شماره های ۱ تا  $n$  داریم. چقدر احتمال دارد که هیچ کس کلاه خود را بر سرش نگذارد؟

نگران نباشید! برای  $n \geq 2$  هیچ سری بی کلاه نمی ماند.

با توجه به این توضیحات، موجه است که مجموعه همه توابع  $f: X \rightarrow Y$  را با نماد  $Y^X$  تعریف کنیم. در حقیقت همان گونه که بنابر اصل ضرب، تساوی  $|Y^X| = |Y|^{|X|}$  برقرار است، با این نمادگذاری ما نیز تساوی  $|X \times Y| = |X| |Y|$  برقرار خواهد بود. حتی در حالتی که  $X$  و  $Y$  متناهی نباشند نیز این تعریف را می پذیریم.

**تعریف ۲.۲.۳.** فرض کنیم  $X$  و  $Y$  دو مجموعه باشند مجموعه همه توابع  $f: X \rightarrow Y$  را  $Y^X$  به توان  $X$  نامیده و با  $Y^X$  نمایش می دهیم. ♣

همان گونه که هم اکنون دیدیم<sup>۴</sup>

**قضیه ۳.۲.۳.** اگر  $X$  و  $Y$  متناهی باشند آنگاه  $|Y^X| = |Y|^{|X|}$ . ■

اکنون که تعداد توابع از یک مجموعه به مجموعه ای دیگر مشخص شد این سؤال پیش می آید که تعداد توابع یک به یک<sup>۵</sup> و تعداد توابع برو<sup>۶</sup> (پوشا) برابر چند است. خوشبختانه یکی از این دو به راحتی محاسبه می شود.

**قضیه ۴.۲.۳.** تعداد توابع یک به یک از مجموعه  $X = \{1, 2, \dots, m\}$  به مجموعه  $Y = \{1, 2, \dots, n\}$  برابر است با  $P(n, m)$ .

**برهان.** فرض کنیم  $f: X \rightarrow Y$  یک تابع باشد. در این صورت

$$(f(1), \dots, f(m))$$

<sup>۴</sup> این حکم به تعبیری برای مجموعه های نامتناهی نیز درست است که از بحث ما خارج می باشد.

<sup>۵</sup> one to one

<sup>۶</sup> onto

یک  $m$  تایی مرتب از اعضای  $Y$  خواهد بود که این  $m$  عضو متمایزند. بنابراین، تعریف یک تابع یک به یک از  $X$  به  $Y$  معادل است با تعیین یک تیم  $m$  نفری مرتب از میان اعضای  $Y$ . تعداد چنین تیم‌هایی همان طور که در فصل قبل دیدیم برابر  $P(n, m)$  می باشد.<sup>۷</sup>

ولی اگر  $n = m$  آنگاه یک به یک بودن و برو بودن معادلند. چرا؟

اما پیدا کردن تعداد توابع برو اندکی سخت تر است.

**قضیه ۵.۲.۳.** تعداد توابع برو از  $X = \{1, 2, \dots, m\}$  به  $Y = \{1, 2, \dots, n\}$  برابر است با

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m.$$

**برهان.** به جای آن، تعداد توابع غیربرو را می شماریم و از تعداد کل توابع که برابر  $n^m$  است کم می کنیم.

فرض کنیم  $A_i$  مجموعه همه توابعی از  $X$  به  $Y$  باشد که  $i$  در برد آن نیست. به عبارت دیگر فرض کنیم که  $A_i = (Y \setminus \{i\})^X$ . بنابراین  $\bigcup_{i=1}^n A_i$  برابر است با مجموعه همه توابع غیربرو.

برای آن که تعداد اعضای  $\bigcup_{i=1}^n A_i$  را بشماریم از اصل شمول و طرد استفاده می کنیم. لذا باید تعداد اعضای  $A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}$  را برای انتخابی دلخواه مانند  $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$  به دست آوریم.

تعداد توابعی که دقیقاً یک عضو از  $Y$  در برد آنها نباشد چند است؟ دقیقاً  $k$  عضو چطور؟

اگر تابعی مانند  $f$  متعلق به  $A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}$  باشد به این معنی است که  $i_1, \dots, i_k$  در برد  $f$  نیامده اند و لذا  $A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k} = (Y \setminus \{i_1, \dots, i_k\})^X$ . اما طبق قضیه ۳.۲.۳ این تعداد برابر است با  $(n-k)^m$ .

مشاهده می شود که تعداد اعضای  $A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}$  مستقل از انتخاب  $i_1, \dots, i_k$  و صرفاً وابسته به  $k$  (و  $n$  و  $m$  که مقادیر ثابتی هستند) می باشد. لذا با فرض

$$\alpha_k = (n-k)^m$$

<sup>۷</sup>توجه داریم که اگر  $n < m$  آنگاه این عدد برابر ۰ است.

می توانیم از حالت خاص اصل شمول و طرد استفاده کنیم. داریم

$$\begin{aligned} |\cup_{i=1}^n A_i| &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \alpha_k \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} (n-k)^m. \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \text{تعداد توابع برو} &= n^m - |\cup_{i=1}^n A_i| \\ &= n^m - \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} (n-k)^m \\ &= n^m + \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m. \blacksquare \end{aligned}$$

**قضیه ۶.۲.۳. نتیجه.** فرض کنیم  $n$  عددی طبیعی باشد. در این صورت

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^n = n!.$$

**برهان.** فرض کنیم  $X = Y = \{1, 2, \dots, n\}$ . در این صورت یک تابع مانند  $f: X \rightarrow Y$  یک به یک است فقط و فقط وقتی که برو باشد. لذا تعداد توابع برو برابر است با تعداد توابع یک به یک، یعنی

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^n = P(n, n) = \frac{n!}{0!} = n!. \blacksquare$$

**نتیجه ۷.۲.۳.** فرض کنیم  $n$  و  $m$  اعدادی طبیعی باشد و  $m < n$ . در این صورت

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m = 0.$$

همین حکم را به استقرا روی  $n$  اثبات کنید.

**برهان.** فرض کنیم  $X = \{1, 2, \dots, m\}$  و  $Y = \{1, 2, \dots, n\}$ . در این صورت هیچ تابع برویی از  $X$  به  $Y$  وجود ندارد و لذا تعداد توابع برو برابر است با صفر. ■

اگر از ترند دوبار شمار استفاده کنیم و تعداد اعضای یک مجموعه را به طور مستقیم و با استفاده از اصل شمول و طرد محاسبه کنیم اتحادهای جالبی به دست می آید.

**قضیه ۸.۲.۳.** فرض کنیم  $n, m$  و  $r$  اعدادی طبیعی باشند که  $r \leq m$ . در این صورت

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \binom{m+n-k}{r-k} = \binom{m}{r}.$$

به علاوه اگر  $m < r$  آنگاه این مجموع برابر صفر خواهد بود.

**برهان.** فرض کنیم  $n$  پسر و  $m$  دختر داریم و می خواهیم یک زیرمجموعه  $r$  نفری از دخترها انتخاب کنیم. این کار به طور بدیهی به  $\binom{m}{r}$  روش امکان پذیر است (توجه کنید که اگر  $m < r$  آنگاه این تعداد برابر صفر خواهد بود).

از سوی دیگر می توانیم با استفاده از اصل شمول و طرد این تعداد را به دست آوریم. به جای آن، تعداد حالاتی را می یابیم که لااقل یک پسر در زیرمجموعه انتخابی وجود داشته باشد و از تعداد کل که برابر  $\binom{m+n}{r}$  است کم می کنیم.

فرض کنیم  $A_i$  مجموعه همه زیرمجموعه های  $r$  عضوی از افراد باشد که پسر  $i$  ام در آنها آمده است. بنابراین  $\bigcup_{i=1}^n A_i$  برابر است با مجموعه همه زیرمجموعه های  $r$  عضوی از افراد که لااقل یک پسر در آنها آمده است.

برای آن که تعداد اعضای  $\bigcup_{i=1}^n A_i$  را بشماریم از اصل شمول و طرد استفاده می کنیم. لذا باید تعداد اعضای  $A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}$  را برای انتخابی دلخواه مانند  $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$  به دست آوریم.

اگر زیرمجموعه ای مانند  $E$  متعلق به  $A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}$  باشد به این معنی است که  $i_1, \dots, i_k \in E$ . بنابراین باید بقیه عناصر  $E$  را که تعداد آنها برابر  $r - k$  است

اگر بخواهیم یک زیرمجموعه  $r$  نفری از دخترها و یک زیرمجموعه  $s$  نفری از پسرها انتخاب کنیم چه اتفاقی می افتد؟ اتحادی را که به دست خواهد آمد بیان و اثبات کنید.

از بقیه افراد که تعداد آنها برابر  $m + n - k$  است انتخاب کنیم و چون ترتیب اهمیت ندارد این تعداد برابر است با  $\binom{m+n-k}{r-k}$ .

مشاهده می شود که تعداد اعضای  $A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}$  مستقل از انتخاب  $i_1, \dots, i_k$  و صرفاً وابسته به  $k$  (و  $m, n$  و  $r$  که مقادیر ثابتی هستند) می باشد. لذا با فرض

$$\alpha_k = \binom{m+n-k}{r-k}$$

می توانیم از حالت خاص اصل شمول و طرد استفاده کنیم. داریم

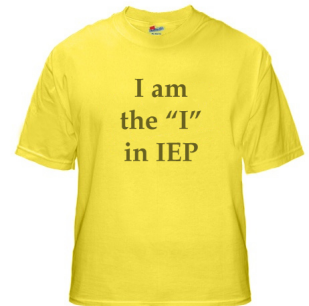
$$\begin{aligned} |\cup_{i=1}^n A_i| &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \alpha_k \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \binom{m+n-k}{r-k}. \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \binom{m}{r} &= \binom{m+n}{r} - |\cup_{i=1}^n A_i| \\ &= \binom{m+n}{r} - \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \binom{m+n-k}{r-k} \\ &= \binom{m+n}{r} + \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n}{k} \binom{m+n-k}{r-k} \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \binom{m+n-k}{r-k}. \blacksquare \end{aligned}$$

اکنون می توانیم به حل مسئله زوج های ازدواج کرده بپردازیم. بد نیست قبل از آن چند مسئله ساده را حل کنیم.

**مثال ۹.۲.۳.**  $n$  پسر و  $n$  دختر می خواهند در یک صف قرار بگیرند به طوری که یکی در میان پسر و دختر باشند. به چند روش می توان این کار را انجام داد؟



ابتدا  $n$  پسر را در یک صف قرار می دهیم (به  $n!$  طریق) و سپس  $n$  دختر را در یک صف قرار می دهیم (به  $n!$  طریق). اکنون این دو صف را یکی در میان در بین یکدیگر می گذاریم. یا صف با پسر شروع می شود (به  $n! \times n!$  طریق) یا با دختر شروع می شود (به  $n! \times n!$  طریق). بنابراین پاسخ مسأله برابر است با  $\spadesuit$

$$2(n!)^2 = (n!)^2 + (n!)^2.$$

**مثال ۱۰.۲.۳.** به چند طریق می توان  $n$  نفر را دور یک دایره قرار داد؟

اجازه دهید در ابتدا مسأله را برای  $n = 4$  بررسی کنیم. صف هایی که با چهار نفر ۱، ۲، ۳ و ۴ می توان ساخت عبارتند از

۱۲۳۴، ۱۲۴۳، ۱۳۲۴، ۱۳۴۲، ۱۴۲۳، ۱۴۳۲،  
 ۲۱۳۴، ۲۱۴۳، ۲۳۱۴، ۲۳۴۱، ۲۴۱۳، ۲۴۳۱،  
 ۳۱۲۴، ۳۱۴۲، ۳۲۱۴، ۳۲۴۱، ۳۴۱۲، ۳۴۲۱،  
 ۴۱۲۳، ۴۱۳۲، ۴۲۱۳، ۴۲۳۱، ۴۳۱۲، ۴۳۲۱.



اگر صف ۱۲۳۴ را به یک دایره تبدیل کنیم دور (۴ ۳ ۲ ۱) به وجود می آید. اما داریم

$$(1\ 2\ 3\ 4) = (2\ 3\ 4\ 1) = (3\ 4\ 1\ 2) = (4\ 1\ 2\ 3).$$

یعنی چهار صف مختلف وجود دارند که به یک دایره تبدیل می شوند. همچنین

$$\begin{aligned} (1\ 2\ 4\ 3) &= (2\ 4\ 3\ 1) = (4\ 3\ 1\ 2) = (3\ 1\ 2\ 4), \\ (1\ 3\ 2\ 4) &= (3\ 2\ 4\ 1) = (2\ 4\ 1\ 3) = (4\ 1\ 3\ 2), \\ (1\ 3\ 4\ 2) &= (3\ 4\ 2\ 1) = (4\ 2\ 1\ 3) = (2\ 1\ 3\ 4), \\ (1\ 4\ 2\ 3) &= (4\ 2\ 3\ 1) = (2\ 3\ 1\ 4) = (3\ 1\ 4\ 2) \\ (1\ 4\ 3\ 2) &= (4\ 3\ 2\ 1) = (3\ 2\ 1\ 4) = (2\ 1\ 4\ 3). \end{aligned}$$

بنابراین ۶ دایره مختلف داریم. در حقیقت تعداد صف ها ۴ برابر تعداد دایره هاست

چون ۴ صف مختلف به دایره‌ای یکسان تبدیل می‌شوند.

در حالت کلی می‌توان گفت که اگر  $n$  نفر داشته باشیم آنگاه  $n$  صف مختلف به یک دایره تبدیل می‌شوند و لذا تعداد صف‌ها  $n$  برابر تعداد دایره‌هاست. در نتیجه تعداد دایره‌ها برابر  $(n-1)!$  خواهد بود. ♠

**مثال ۱۱.۲.۳.** به چند طریق می‌توان  $n$  پسر و  $n$  دختر را دور یک دایره قرار داد به طوری که یکی در میان پسر و دختر باشند؟

همان طور که دیدیم تعداد صف‌ها برابر است با  $2(n!)^2$ . اما  $2n$  صف مختلف دایره‌ای یکسان را تشکیل می‌دهند. بنابراین تعداد دایره‌ها برابر

$$\frac{2(n!)^2}{2n} = n!(n-1)!$$

است. ♠

**قضیه ۱۲.۲.۳.** (مسئله زوج‌های ازدواج کرده) تعداد حالتی که می‌توان  $n$  زن و شوهر را در  $2n$  صندلی دور یک میز قرار داد به طوری که یکی در میان زن و مرد باشند ولی هیچ زنی در کنار شوهر خود ننشسته باشد برابر است با

$$2n! \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{(n-k)!}{2n-k} \binom{2n-k}{k}.$$

**برهان.** تعداد حالتی را می‌شماریم که یکی در میان زن و مرد باشند و لااقل یک زن در کنار شوهر خود ننشسته باشد و سپس این تعداد را از تعداد کل که برابر  $n!(n-1)!$  است کم می‌کنیم.

فرض کنیم  $A_i$  مجموعه همه حالتی باشد که افراد یکی در میان دور میز ننشسته باشند و زن و شوهر  $i$  ام در کنار هم باشند. می‌خواهیم تعداد اعضای  $\bigcup_{i=1}^n A_i$  را بشماریم. این مجموعه برابر است با مجموعه همه حالتی که افراد یکی در میان دور میز ننشسته‌اند و لااقل یک زن و شوهر در کنار هم هستند.

برای محاسبه تعداد اعضای  $\bigcup_{i=1}^n A_i$  از اصل شمول و طرد استفاده می‌کنیم. بدین منظور باید تعداد اعضای  $A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}$  را برای هر  $k$  ی دلخواه که  $1 \leq k \leq n$  محاسبه کنیم.

اگر این دختر و پسر دو به دو با هم ازدواج کرده باشند و قرار باشد زن و شوهرها در کنار یکدیگر باشند چند حالت وجود دارد؟

لایبنتز هرگز ازدواج نکرد. او در سن پنجاه سالگی به این فکر افتاد اما زنی که او در فکر داشت از لایبنتز خواست تا فرصت دهد که به این مسئله فکر کند. لایبنتز هم از وی خواست تا به او فرصت دهد که فکر کند می‌تواند به او فرصتی برای فکر کردن بدهد یا نه، و لذا لایبنتز هیچگاه ازدواج نکرد.

**Bernard le Bouyer de Fontenelle**

11 Feb 1657 - 9 Jan 1757



فرض کنیم زن و شوهر  $i_1$  ام حوا و آدم باشند. ابتدا آدم و حوا را در یک جای دلخواه در کنار یکدیگر قرار می دهیم. این کار به ۲ طریق انجام می شود (در جهت عقربه های ساعت اول آدم و بعد حوا بنشینند یا اول حوا و بعد آدم). اکنون  $k-1$  زوج  $i_2, \dots, i_k$  باقی مانده اند و  $n-k$  مرد دیگر و  $n-k$  زن دیگر.

$n-k$  مرد را در یک صف قرار می دهیم (به  $(n-k)!$  طریق) و  $n-k$  زن را نیز در یک صف قرار می دهیم (به  $(n-k)!$  طریق) و این دو صف را پس از آدم و حوا دور میز می نشانیم (در جهت عقربه های ساعت، اگر اول آدم و سپس حوا نشسته بود باید اول یک مرد را قرار دهیم و سپس یک زن را). اکنون آدم و حوا و  $n-k$  مرد و  $n-k$  زن دور میز قرار گرفته اند و  $k-1$  زوج دیگر باقی مانده اند که این زوجها باید کنار یکدیگر بنشینند. لذا می توان زوج  $i_2$  را یک نفر حساب کرد، زوج  $i_3$  را یک نفر حساب کرد و به همین ترتیب زوج  $i_k$  را یک نفر به حساب آورد. این زوجها را باید در بین افرادی که دور میز هستند بنشانیم. چون آدم و حوا نیز یک نفر به حساب می آیند و نباید بین آنها فاصله بیفتد پس می توان گفت که  $2(n-k)+1$  نفر دور میز نشسته اند. این  $2(n-k)+1$  نفر را توپ های یکسانی در نظر می گیریم که قرار است  $k-1$  دیوار (مربوط به  $k-1$  زوج دیگر) در بین آنها قرار گیرند (فعلاً فرض می کنیم که  $k-1$  زوج یکسان هستند و نقش دیوارهای یکسان را دارند). توجه داریم که دیوارها می توانند در کنار یکدیگر قرار گیرند. لذا در مجموع  $1 + (k-1) + (2(n-k)+1)$  مکان داریم که می خواهیم از بین آنها  $k-1$  مکان برای قرار دادن دیوارها انتخاب کنیم. این کار به  $\binom{2(n-k)+1}{k-1}$  طریق صورت می پذیرد.

اما ما فرض کرده بودیم  $k-1$  زوج دیگر یکسان هستند در حالی که چنین نیست. لذا با توجه به متفاوت بودن  $k-1$  زوج، باید عدد به دست آمده در مورد توپ ها و دیوارها را در  $(k-1)!$  ضرب کنیم. خلاصه این که:

تعداد اعضای  $A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}$  برابر است با تعداد حالات نشستن آدم و حوا (۲ طریق) ضربدر تعداد حالات قرار دادن  $n-k$  مرد و  $n-k$  زن دیگر (به  $(n-k)!$  طریق) ضربدر تعداد قرار دادن  $k-1$  زوج دیگر (به  $(k-1)!$  طریق) ضربدر  $\binom{2(n-k)+1}{k-1}$  (طریق).

چند جایگشت از اعداد ۱ تا  $n$  داریم که ۱ در مکان اول و دوم نباشد، ۲ در مکان دوم و سوم نباشد، ... و  $n$  در مکان  $n$  ام و یکم نباشد؟

بنابراین مشاهده می شود که تعداد اعضای  $A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}$  مستقل از انتخاب  $i_1, \dots, i_k$  و صرفاً وابسته به  $k$  (و  $n$  که مقدار ثابتی است) می باشد. لذا با فرض

$$\begin{aligned}\alpha_k &= 2 \cdot (n-k)! \cdot \binom{2n-k-1}{k-1} \cdot (k-1)! \\ &= 2 \cdot (n-k)! \cdot \frac{(2n-k-1)!}{(2n-2k)!}\end{aligned}$$

می توانیم از حالت خاص اصل شمول و طرد استفاده کنیم. داریم

$$\begin{aligned}|\cup_{i=1}^n A_i| &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \alpha_k \\ &= 2n! \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{(n-k)!}{k!} \cdot \frac{(2n-k-1)!}{(2n-2k)!}.\end{aligned}$$

بنابراین تعداد حالات مطلوب برابر است با

$$\begin{aligned}& n!(n-1)! - |\cup_{i=1}^n A_i| \\ &= n!(n-1)! - 2n! \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{(n-k)!}{k!} \cdot \frac{(2n-k-1)!}{(2n-2k)!} \\ &= n!(n-1)! + 2n! \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{(n-k)!}{k!} \cdot \frac{(2n-k-1)!}{(2n-2k)!} \\ &= 2n! \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{(n-k)!}{2n-k} \cdot \binom{2n-k}{k}. \blacksquare\end{aligned}$$

در همه نمونه هایی که تا کنون دیدیم از حالت خاص اصل شمول و طرد استفاده کردیم. به عبارت دیگر اتفاق خوبی که در احکام بالا رخ داد این بود که همواره مقدار  $|A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}|$  مستقل از انتخاب  $i_1, \dots, i_k$  و فقط وابسته به  $k$  (و احیاناً مقادیری ثابت) به دست آمد. اکنون می خواهیم نمونه ای را بررسی کنیم که چنین اتفاقی در آن رخ نمی دهد. قبل از آن باید چند مسئله ساده را حل کنیم.



در مسئله زوج های ازدواج کرده، برای ۱۰ نفر (یعنی ۵ زوج) ۳۱۲۰ حالت وجود دارد.

**مثال ۱۳.۲.۳.** فرض کنیم  $m$  و  $r$  اعدادی طبیعی باشند. تعداد مضارب  $r$  که کوچک تر یا مساوی  $m$  هستند چند است؟

تعداد مضارب  $r$  که بین  $n$  تا  $m$  هستند چند است؟

اگر  $\ell r$  بزرگ ترین مضرب  $r$  باشد که کوچک تر یا مساوی  $m$  است آنگاه  $m < (\ell + 1)r$ . بنابراین  $\ell r \leq m < (\ell + 1)r$  و لذا  $\frac{m}{r} < \ell + 1$  و  $\frac{m}{r} \leq \ell$ . در نتیجه  $\ell$  بزرگ ترین عدد صحیح کوچک تر از  $\frac{m}{r}$  است<sup>۸</sup> و لذا تعداد مضارب  $r$  که کوچک تر یا مساوی  $m$  هستند برابر است با  $\lfloor \frac{m}{r} \rfloor$ . ♠

**مثال ۱۴.۲.۳.** فرض کنیم  $b_1, \dots, b_n$  اعدادی دلخواه باشند. ثابت کنید

$$(x + b_1)(x + b_2) \dots (x + b_n) = x^n + B_1 x^{n-1} + B_2 x^{n-2} + \dots + B_{n-2} x^2 + B_{n-1} x + B_n,$$

اگر  $b_i = i$  آنگاه  $B_k$  برابر چند است؟

که در آن  $B_k$  برابر است با مجموع حاصلضرب های  $k$  تایی از عناصر متمایز مجموعه  $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ . نتیجه بگیرید که اگر  $c_1, \dots, c_n$  اعدادی دلخواه باشند آنگاه

$$(x - c_1)(x - c_2) \dots (x - c_n) = x^n + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \dots + C_{n-2} x^2 + C_{n-1} x + C_n,$$

که در آن  $C_k$  برابر است با  $(-1)^k$  ضربدر مجموع حاصلضرب های  $k$  تایی از عناصر متمایز مجموعه  $\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ . سرانجام نتیجه بگیرید که اگر  $(-1)^k$  ضربدر مجموع حاصلضرب های  $k$  تایی از عناصر متمایز مجموعه  $\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$  را برای  $k$  های از ۰ تا  $n$  با هم جمع کنیم<sup>۹</sup> برابر است با  $(1 - c_1)(1 - c_2) \dots (1 - c_n)$ .

<sup>۸</sup> می دانیم که بزرگ ترین عدد صحیح کوچک تر یا مساوی  $x$  با  $[x]$  یا  $\lfloor x \rfloor$  نمایش داده می شود و جزء صحیح  $x$  یا کف  $x$  نامیده می شود. همچنین کوچک ترین عدد صحیح بزرگ تر یا مساوی  $x$  را با  $\lceil x \rceil$  نمایش می دهند و آن را سقف  $x$  می نامند.

<sup>۹</sup> توجه کنید که حاصلضرب ۰ تایی یا حاصلضرب خالی برابر ۱ تعریف می شود.

برای ضرب کردن  $n$  پرانتز  $(x + b_1), \dots, (x + b_n)$  باید هر جمله از هر پرانتز در هر جمله از هر پرانتز دیگر ضرب شود. اگر از  $n - k$  پرانتز جمله  $x$  را انتخاب کنیم و عبارت  $x^{n-k}$  حاصل شود آنگاه باید از  $k$  پرانتز دیگر جملات ثابت را انتخاب کنیم. پس اگر بخواهیم ضریب  $x^{n-k}$  (یعنی  $B_k$ ) را به دست آوریم باید جملات ثابت  $k$  پرانتز مختلف را در هم ضرب کنیم و عبارت های حاصل را با هم جمع کنیم. اکنون اگر به جای  $b_k$  قرار دهیم  $-c_k$ ، حکم قسمت بعد بدیهی است.

♠ سرانجام اگر  $x$  را برابر ۱ قرار دهیم قسمت آخر حکم نتیجه می شود.

حکمی که می خواهیم آن را با استفاده از اصل شمول و طرد اثبات کنیم در مورد یک تابع حسابی معروف است. اجازه دهید در ابتدا ببینیم که تابع حسابی چیست و با چند نمونه از آن آشنا شویم.

**تعریف ۱۵.۲.۳.** هر تابع مانند  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$  را یک تابع حسابی می نامیم. تابع حسابی  $f$  ضریبی نامیده می شود هرگاه به ازای هر  $n$  و  $m$  نسبت به هم اول داشته باشیم  $f(nm) = f(n)f(m)$ . این تابع را ضریبی قوی می نامیم هرگاه  $f(nm) = f(n)f(m)$  برای هر  $n$  و  $m$  طبیعی برقرار باشد. ♣

از توابع حسابی معروف می توان  $\tau, \sigma, \sigma_r, \varphi$  و  $\mu$  را نام برد که در زیر آنها را تعریف می کنیم.

**تعریف ۱۶.۲.۳.** فرض کنیم  $m$  عددی طبیعی باشد. تعداد مقسوم علیه های  $m$  را با  $\tau(m)$ ، مجموع مقسوم علیه های آن را با  $\sigma(m)$  و مجموع توان  $k$  ام مقسوم علیه های آن را با  $\sigma_k(m)$  نمایش می دهیم. همچنین  $\varphi(m)$  را برابر تعداد اعداد طبیعی کوچک تر یا مساوی  $m$  که نسبت به  $m$  اول هستند تعریف می کنیم و آن را تابع  $\varphi$ -ویلر<sup>۱۰</sup> می نامیم. تابع  $\mu$  که تابع موبیوس<sup>۱۱</sup> نامیده می شود به

قضیه معروف اوایلر بیان می دارد که اگر  $a$  و  $m$  نسبت به هم اول باشند آنگاه  $a^{\varphi(m)} \equiv_m 1$ .

<sup>۱۰</sup>  $\varphi$ -Euler function

<sup>۱۱</sup> Möbius function

صورت

$$\mu(m) = \begin{cases} 1 & m = 1 \\ 0 & m \text{ بر مربع یک عدد اول بخش پذیر باشد} \\ (-1)^r & m = p_1 \dots p_r \text{ که } p_i \text{ ها اعداد اول متمایزی می باشند} \end{cases}$$

♣ تعریف می گردد.

چیزی که قصد داریم ارائه دهیم اثبات فرمولی برای  $\varphi(m)$  به کمک اصل شمول و طرد است.

**قضیه ۱۷.۲.۳.** فرض کنیم  $m = p_1^{t_1} \dots p_n^{t_n}$  تجزیه  $m$  به اعداد اول متمایز باشد. در این صورت

$$\varphi(m) = m \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_n}\right).$$

**برهان.** برای محاسبه  $\varphi(m)$ ، تعداد اعداد کوچک تر یا مساوی  $m$  را که نسبت به  $m$  اول نیستند می شماریم و از تعداد کل اعداد که برابر  $m$  است کم می کنیم.

فرض کنیم  $A_i$  مجموعه همه اعداد کوچک تر یا مساوی  $m$  باشد که بزرگ ترین مقسوم علیه مشترک هر یک از آنها با  $m$  مضرب  $p_i$  است (چنین اعدادی نسبت به  $m$  اول نیستند). در این صورت  $\bigcup_{i=1}^n A_i$  مجموعه همه اعداد کوچک تر یا مساوی  $m$  است که نسبت به  $m$  اول نیستند.

بد نیست این قضیه را برای عددی مانند ۶۰ برای خود بازنویسی کنید.

برای محاسبه تعداد اعضای  $\bigcup_{i=1}^n A_i$  از اصل شمول و طرد استفاده می کنیم. بدین منظور باید تعداد اعضای  $A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}$  را برای هر  $k$  ی دلخواه که  $1 \leq k \leq n$  محاسبه کنیم.

یک عدد دلخواه مانند  $s$  عضو  $A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}$  است فقط و فقط وقتی که بزرگ ترین مقسوم علیه مشترک  $s$  و  $m$  هم مضرب  $p_{i_1}$ ، هم مضرب  $p_{i_2}$ ، ... و هم مضرب  $p_{i_k}$  باشد. از آنجایی که  $p_i$  ها اول و متمایزند نتیجه می گیریم که  $s$  عضو  $A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}$  است فقط و فقط وقتی که مضرب  $p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_k}$  باشد. می دانیم تعداد مضارب  $p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_k}$  که کوچک تر یا مساوی  $m$  هستند برابر است با

$\lfloor \frac{m}{p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_k}} \rfloor$ . اما کف  $\frac{m}{p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_k}}$  برابر خود این عدد است چون  $p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_k}$  مقسوم‌علیهی از  $m$  است.

بنابراین

$$|A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}| = \frac{m}{p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_k}}.$$

توجه داریم که در اینجا تعداد اعضای  $A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}$  وابسته به انتخاب  $i_1, \dots, i_k$  است و لذا نمی‌توانیم از حالت خاص اصل شمول و طرد استفاده کنیم. اکنون داریم

$$\begin{aligned} \varphi(m) &= m - |\cup_{i=1}^n A_i| \\ &= m - \sum_{1 \leq k \leq n; i_1 < \dots < i_k} (-1)^{k+1} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}| \\ &= m + m \sum_{1 \leq k \leq n; i_1 < \dots < i_k} (-1)^k \frac{1}{p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_k}} \\ &= m + m \sum_{k=1}^n (-1)^k \sum_{i_1 < \dots < i_k} \frac{1}{p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_k}} \\ &= m \sum_{k=0}^n (-1)^k C_k, \end{aligned}$$

که در آن  $C_k$  برابر است با مجموع حاصلضرب‌های  $k$  تایی از عناصر متمایز مجموعه  $\{\frac{1}{p_1}, \dots, \frac{1}{p_n}\}$ . بنابراین با توجه به آنچه در مثال ۱۴.۲.۳ اثبات شد داریم

$$\varphi(m) = m(1 - \frac{1}{p_1}) \dots (1 - \frac{1}{p_n}). \blacksquare$$

فرمولی که در قضیه بالا برای تابع  $\varphi$ -اویلر اثبات شد نشان می‌دهد که این تابع ضربی است. گرچه بحث توابع حسابی ضربی جدا از مباحث این فصل می‌باشد با این حال از آنجایی که توابع ضربی ابزار مناسبی برای حل برخی مسائل شمارشی هستند در بخش کوتاه بعد نگاهی اجمالی به این موضوع خواهیم داشت.

ریاضیدانان تا امروز بیهوده به دنبال کشف نظمی در دنباله اعداد اول بوده‌اند، و دلایلی داریم تا معتقد شویم این رازی است که هیچگاه ذهن بشر بدان نفوذ پیدا نخواهد کرد.

**Leonhard Euler**

15 April 1707 - 18 Sept 1783



## ۳.۳ توابع حسابی ضربی

اگر نشان دهیم که تابعی حسابی مانند  $f$  ضربی است آنگاه برای آن که مقدار آن را در هر نقطه مانند  $m$  به دست آوریم کافی است بدانیم که مقدار آن در  $p^t$  برای عددی اول مانند  $p$  و عددی طبیعی مانند  $t$  چیست. به عبارت دیگر هر تابع ضربی توسط مقادیرش بر مجموعه  $\{p^t : p \in \mathbb{P}, t \in \mathbb{N}\}$  تعیین می‌گردد. در این بخش ضربی بودن توابعی را که در بخش قبل معرفی شدند اثبات می‌کنیم.

**قضیه ۱.۳.۳.** تابع حسابی  $\tau : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  که به هر  $m \in \mathbb{N}$  تعداد مقسوم‌علیه‌های آن را نسبت می‌دهد، تابعی ضربی است.

تابعی حسابی مانند  $f$  مثال بزنید که به ازای هر  $n$  و  $m$  نسبت به هم اول داشته باشیم  $f(nm) = f(n) + f(m)$ . آیا می‌توانید همه چنین توابعی را دقیقاً مشخص کنید؟

**برهان.** فرض کنیم  $m$  و  $n$  دو عدد نسبت به هم اول باشند. در این صورت یک عدد طبیعی مانند  $d$  مقسوم‌علیه  $mn$  است فقط و فقط وقتی که  $d = d_1 d_2$  که  $d_1$  مقسوم‌علیهی از  $m$  و  $d_2$  مقسوم‌علیهی از  $n$  باشد. لذا با توجه به اصل ضرب نتیجه می‌گیریم که تعداد مقسوم‌علیه‌های  $mn$  برابر است با تعداد مقسوم‌علیه‌های  $m$  ضربدر تعداد مقسوم‌علیه‌های  $n$ . ■

**نتیجه ۲.۳.۳.** فرض کنیم  $m = p_1^{t_1} \dots p_r^{t_r}$  تجزیه  $m$  به اعداد اول متمایز باشد. در این صورت

$$\tau(m) = (t_1 + 1) \dots (t_r + 1).$$

**برهان.** ابتدا  $\tau(p^t)$  را برای عددی اول مانند  $p$  و عددی طبیعی مانند  $t$  به دست می‌آوریم. یک عدد طبیعی مانند  $d$  مقسوم‌علیهی از  $p^t$  است فقط و فقط وقتی که به صورت  $p^s$  باشد که  $s = 0, 1, \dots, t$ . بنابراین  $d$  می‌تواند برابر  $p^0$  یا  $p^1$  یا  $\dots$  یا  $p^t$  باشد و لذا با توجه به اصل جمع، تعداد مقسوم‌علیه‌های  $p^t$  برابر است با  $t + 1$ .

اکنون با توجه به ضربی بودن  $\tau$  داریم

$$\tau(m) = \tau(p_1^{t_1} \dots p_r^{t_r}) = \tau(p_1^{t_1}) \dots \tau(p_r^{t_r}) = (t_1 + 1) \dots (t_r + 1). \quad \blacksquare$$

راه دیگر برای اثبات این مطلب این است که بگوییم یک عدد طبیعی مانند  $d$  مقسوم‌علیهی از  $m = p_1^{t_1} \dots p_r^{t_r}$  است فقط و فقط وقتی که به صورت  $p_1^{s_1} \dots p_r^{s_r}$  باشد که  $s_i = 0, 1, \dots, t_i$ . حال چون هر  $s_i$  به  $t_i + 1$  طریق انتخاب می‌شود، بنابراین اصل ضرب حکم نتیجه می‌گردد.

**قضیه ۳.۳.۳.** تابع حسابی  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  که به هر  $m \in \mathbb{N}$  مجموع مقسوم‌علیه‌های آن را نسبت می‌دهد، تابعی ضربی است.

**برهان.** فرض کنیم  $m$  و  $n$  دو عدد نسبت به هم اول باشند. در این صورت یک عدد طبیعی مانند  $d$  مقسوم‌علیه  $mn$  است فقط و فقط وقتی که  $d = d_1 d_2$  که  $d_1$  مقسوم‌علیهی از  $m$  و  $d_2$  مقسوم‌علیهی از  $n$  باشد. بنابراین

$$\begin{aligned} \sigma(mn) &= \sum_{d|mn} d \\ &= \sum_{d_1|m; d_2|n} d_1 d_2 \\ &= \sum_{d_1|m} \sum_{d_2|n} d_1 d_2 \\ &= \sum_{d_1|m} d_1 \left( \sum_{d_2|n} d_2 \right) \\ &= \sum_{d_1|m} d_1 \sigma(n) \\ &= \left( \sum_{d_1|m} d_1 \right) \sigma(n) \\ &= \sigma(m) \sigma(n). \blacksquare \end{aligned}$$

عدد طبیعی  $n$  را تام (perfect) می‌نامیم هرگاه  $\sigma(n)$  برابر  $2n$  باشد. یک عدد زوج مانند  $n$  تام است فقط و فقط وقتی که به شکل  $(2^p - 1)2^{p-1}$  باشد که  $p$  و  $2^p - 1$  اولند. این که آیا عددی تام و فرد وجود دارد یا نه به عنوان مسأله‌ای حل نشده باقی مانده است.

**نتیجه ۴.۳.۳.** فرض کنیم  $m = p_1^{t_1} \dots p_r^{t_r}$  تجزیه  $m$  به اعداد اول متمایز باشد. در این صورت

$$\sigma(m) = \left( \frac{p_1^{t_1+1} - 1}{p_1 - 1} \right) \dots \left( \frac{p_r^{t_r+1} - 1}{p_r - 1} \right).$$

**برهان.** ابتدا  $\sigma(p^t)$  را برای عددی اول مانند  $p$  و عددی طبیعی مانند  $t$  به دست

می‌آوریم. یک عدد طبیعی مانند  $d$  مقسوم‌علیهی از  $p^t$  است فقط و فقط وقتی که به صورت  $p^s$  باشد که  $s = 0, 1, \dots, t$ . بنابراین  $d$  می‌تواند برابر  $p^0$  یا  $p^1$  یا ... یا  $p^t$  باشد و لذا

$$\sigma(p^t) = \sum_{s=0}^t p^s = \frac{p^{t+1} - 1}{p - 1}.$$

اکنون با توجه به ضربی بودن  $\sigma$  داریم

$$\begin{aligned}\sigma(m) &= \sigma(p_1^{t_1} \dots p_r^{t_r}) \\ &= \sigma(p_1^{t_1}) \dots \sigma(p_r^{t_r}) \\ &= \left( \frac{p_1^{t_1+1} - 1}{p_1 - 1} \right) \dots \left( \frac{p_r^{t_r+1} - 1}{p_r - 1} \right). \blacksquare\end{aligned}$$

دو عدد طبیعی مانند  $n$  و  $m$  را متحابه (amicable) یا همدوست می‌نامیم هرگاه  $\sigma(n)$ ،  $\sigma(m)$  و  $n + m$  با هم برابر باشند. مثلاً ۲۲۰ و ۲۸۴ همدوست هستند. این که آیا یک عدد فرد و یک عدد زوج وجود دارد که همدوست باشند مسأله‌ای حل نشده است.

**قضیه ۵.۳.۳.** تابع حسابی  $\sigma_k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  که به هر  $m \in \mathbb{N}$  مجموع توان  $k$  ام مقسوم‌علیه‌های آن را نسبت می‌دهد، تابعی ضربی است.

**برهان.** فرض کنیم  $m$  و  $n$  دو عدد نسبت به هم اول باشند. در این صورت یک عدد طبیعی مانند  $d$  مقسوم‌علیه  $mn$  است فقط و فقط وقتی که  $d = d_1 d_2$  که  $d_1$  مقسوم‌علیهی از  $m$  و  $d_2$  مقسوم‌علیهی از  $n$  باشد. بنابراین

$$\begin{aligned}\sigma_k(mn) &= \sum_{d|mn} d^k = \sum_{d_1|m; d_2|n} d_1^k d_2^k = \sum_{d_1|m} \sum_{d_2|n} d_1^k d_2^k = \sum_{d_1|m} d_1^k \left( \sum_{d_2|n} d_2^k \right) \\ &= \sum_{d_1|m} d_1^k \sigma_k(n) = \left( \sum_{d_1|m} d_1^k \right) \sigma_k(n) = \sigma_k(m) \sigma_k(n). \blacksquare\end{aligned}$$

**نتیجه ۶.۳.۳.** فرض کنیم  $m = p_1^{t_1} \dots p_r^{t_r}$  تجزیه  $m$  به اعداد اول متمایز باشد. در این صورت

$$\sigma_k(m) = \left( \frac{p_1^{k(t_1+1)} - 1}{p_1 - 1} \right) \dots \left( \frac{p_r^{k(t_r+1)} - 1}{p_r - 1} \right).$$

**برهان.** ابتدا  $\sigma_k(p^t)$  را برای عددی اول مانند  $p$  و عددی طبیعی مانند  $t$  به دست می‌آوریم. یک عدد طبیعی مانند  $d$  مقسوم‌علیهی از  $p^t$  است فقط و فقط وقتی

که به صورت  $p^s$  باشد که  $s = 0, 1, \dots, t$ . بنابراین  $d$  می‌تواند برابر  $p^0$  یا  $p^1$  یا ... یا  $p^t$  باشد و لذا

$$\sigma_k(p^t) = \sum_{s=0}^t (p^s)^k = \sum_{s=0}^t (p^k)^s = \frac{(p^k)^{t+1} - 1}{p^k - 1} = \frac{p^{k(t+1)} - 1}{p^k - 1}.$$

اکنون با توجه به ضربی بودن  $\sigma_k$  داریم

$$\begin{aligned} \sigma_k(m) &= \sigma_k(p_1^{t_1} \dots p_r^{t_r}) = \sigma_k(p_1^{t_1}) \dots \sigma_k(p_r^{t_r}) \\ &= \left( \frac{p_1^{k(t_1+1)} - 1}{p_1^k - 1} \right) \dots \left( \frac{p_r^{k(t_r+1)} - 1}{p_r^k - 1} \right). \blacksquare \end{aligned}$$

**قضیه ۷.۳.۳.** تابع حسابی  $\mu : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$  که به صورت

$$\mu(m) = \begin{cases} 1 & m = 1 \\ 0 & \text{بر مربع یک عدد اول بخش پذیر باشد} \\ (-1)^r & m = p_1 \dots p_r \text{ که } p_i \text{ ها اعداد اول متمایزی می باشند} \end{cases}$$

تعریف می‌شود ضربی است.

**برهان.** در حالتی که  $m$  یا  $n$  برابر ۱ باشند یا بر مربع یک عدد اول بخش پذیر باشند بدیهی است که  $\mu(mn) = \mu(m)\mu(n)$ . بنابراین فرض کنیم که  $n = q_1 \dots q_s$  و  $m = p_1 \dots p_r$  که  $p_i$  ها اول و متمایز و  $q_j$  ها نیز اول و متمایزند. اگر  $m$  و  $n$  نسبت به هم اول باشند،  $p_i$  ها و  $q_j$  ها متمایزند و لذا  $p_1 \dots p_r q_1 \dots q_s$  تجزیه  $mn$  به اعداد اول متمایز است. در نتیجه

$$\mu(mn) = (-1)^{r+s} = (-1)^r (-1)^s = \mu(m)\mu(n). \blacksquare$$

جمع بستن روی مقسوم علیه‌های یک عدد مانند  $m$  زمینه‌ای برای به دست آوردن اتحادهایی شبه ترکیبیاتی را فراهم می‌آورد. در اتحادهای ترکیبیاتی معمولاً با یک جمع به صورت  $\sum_{k=1}^n a_k$  سر و کار داریم که برای اثبات آن از دوبار شمار، اصل جمع و این حقیقت که  $k$  می‌تواند برابر ۱ یا ۲ یا ... یا  $n$  باشد استفاده می‌کنیم. اکنون اگر همین ترفند دوبار شمار و اصل جمع را در مورد  $d$  هایی که

مویوس نه تنها به خاطر تابع حسابی  $\mu$  بلکه به خاطر نوارش نیز در ریاضیات معروف است. نوار مویوس مثالی از یک سطح جهت ناپذیر می‌باشد. برای آن که تصویری از این نوار داشته باشید می‌توانید یک کمر بند را در نظر بگیرید، آن را یک دور بپیچانید و سپس ببندید.

**August Ferdinand Möbius**

17 Nov 1790 - 26 Sept 1868



آیا می‌توانید مقدار  $\sum_{d|m} \varphi(d)$  را بیابید؟ ابتدا برای چند مقدار مختلف  $m$  آن را محاسبه کنید.

می‌توانند ۱ یا هر مقسوم‌علیه  $m$  باشند به کار ببریم اتحادهای جالبی را به دست خواهیم آورد. اجازه دهید در ابتدا یک حکم جالب را اثبات کنیم.

**قضیه ۸.۳.۳.** فرض کنیم  $f$  یک تابع ضربی باشد و  $F: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$  به صورت

$$F(m) = \sum_{d|m} f(d)$$

تعریف شود. در این صورت  $F$  نیز ضربی است.

**برهان.** فرض کنیم  $m$  و  $n$  دو عدد نسبت به هم اول باشند. در این صورت یک عدد طبیعی مانند  $d$  مقسوم‌علیه  $mn$  است فقط و فقط وقتی که  $d = d_1 d_2$  که  $d_1$  مقسوم‌علیه از  $m$  و  $d_2$  مقسوم‌علیه از  $n$  باشد. بنابراین

$$\begin{aligned} F(mn) &= \sum_{d|mn} f(d) \\ &= \sum_{d_1|m; d_2|n} f(d_1 d_2) \\ &= \sum_{d_1|m; d_2|n} f(d_1) f(d_2) \\ &= \sum_{d_1|m} f(d_1) \sum_{d_2|n} f(d_2) \\ &= \sum_{d_1|m} f(d_1) F(n) \\ &= \left( \sum_{d_1|m} f(d_1) \right) F(n) \\ &= F(m) F(n). \blacksquare \end{aligned}$$

اکنون مجدداً می‌توانیم ضربی بودن توابع حسابی فوق‌الذکر را اثبات کنیم.

**نتیجه ۹.۳.۳.** توابع  $\sigma$ ،  $\tau$  و  $\sigma_k$  ضربی هستند.

**برهان.** داریم  $\tau(m) = \sum_{d|m} 1$  و چون تابع  $f(d) = 1$  ضربی است پس  $\tau$  نیز ضربی می‌باشد. همچنین  $\sigma(m) = \sum_{d|m} d$  و چون تابع  $f(d) = d$  ضربی است پس  $\sigma$  نیز ضربی است. به همین ترتیب چون  $f(d) = d^k$  ضربی است پس

اگر تنها یک روز از عمرم باقی مانده باشد آن را در کلاس درس ریاضی می‌گذرانم چون به نظر می‌رسد که از صد قرن طولانی‌تر است!



■  $\sigma_k(m) = \sum_{d|m} d^k$  ضربی است.

قضیه ۱۰.۳.۳. فرض کنیم  $m$  عددی طبیعی باشد. در این صورت

$$\sum_{d|m} \varphi(d) = m.$$

**برهان.** فرض کنیم  $F(m) = \sum_{d|m} \varphi(d)$ . چون  $\varphi$  ضربی است پس  $F$  نیز ضربی می‌باشد. ابتدا مقدار  $F(p^t)$  را برای  $p$  بی اول و  $t$  بی طبیعی به دست می‌آوریم. داریم

$$\begin{aligned} F(p^t) &= \sum_{d|p^t} \varphi(d) \\ &= \sum_{s=0}^t \varphi(p^s) \\ &= 1 + \sum_{s=1}^t p^s \left(1 - \frac{1}{p}\right) \\ &= 1 + \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{s=1}^t p^s \\ &= 1 + \left(1 - \frac{1}{p}\right) (\sigma(p^t) - 1) \\ &= 1 + \left(\frac{p-1}{p}\right) \left(\frac{p^{t+1}-p}{p-1}\right) \\ &= 1 + p^t - 1 \\ &= p^t. \end{aligned}$$

اکنون چون  $F$  ضربی است برای هر  $m = p_1^{t_1} \dots p_r^{t_r}$  داریم

$$F(m) = F(p_1^{t_1} \dots p_r^{t_r}) = F(p_1^{t_1}) \dots F(p_r^{t_r}) = p_1^{t_1} \dots p_r^{t_r} = m. \quad \blacksquare$$

اما راه دیگری نیز برای اثبات قضیه فوق وجود دارد.

**برهان دوم حکم بالا.** مجموعه  $X = \{1, 2, \dots, m\}$  را در نظر می‌گیریم. برای هر  $n \in X$  می‌دانیم  $\gcd(m, n) = d$  فقط و فقط وقتی که  $\gcd(\frac{m}{d}, \frac{n}{d}) = 1$ .

این برهان، نمونه‌ای از ترفند دوبار شمار برای محاسبه مجموعی روی مقسوم‌علیه‌های یک عدد است. این ترفند را به خاطر بسپارید.

بنابراین تعداد  $n$  هایی که  $\gcd(m, n) = d$  برابر است با تعداد  $d' = \frac{n}{d}$  هایی که کوچک‌تر یا مساوی  $\frac{m}{d}$  هستند و نسبت به آن اولند. می‌دانیم که این تعداد برابر است با  $\varphi(\frac{m}{d})$ .

لذا به جای آن که تعداد  $n$  هایی را بشماریم که عضو  $X$  هستند (که می‌دانیم این تعداد برابر  $m$  است) می‌توانیم برای  $d$  هایی که مقسوم‌علیه  $m$  هستند مقادیر

$$\varphi(\frac{m}{d}) \text{ را با هم جمع بزنیم؛ یعنی } m = \sum_{d|m} \varphi(\frac{m}{d}). \text{ اما داریم}$$

$$\sum_{d|m} \varphi(\frac{m}{d}) = \sum_{\frac{m}{e}|m} \varphi(e) = \sum_{e|m} \varphi(e). \blacksquare$$

این بار به جای  $\varphi$ ، تابع موبیوس را قرار می‌دهیم.

قضیه ۱۱.۳.۳. فرض کنیم  $m$  عددی طبیعی باشد. در این صورت

$$\sum_{d|m} \mu(d) = \begin{cases} 1 & m = 1 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

**برهان.**  $F(m) = \sum_{d|m} \mu(d)$  یک تابع ضربی است. برای  $p$  ی اول و  $t$  ی طبیعی داریم

$$\begin{aligned} F(p^t) &= \sum_{d|p^t} \mu(d) \\ &= \sum_{s=0}^t \mu(p^s) \\ &= \mu(1) + \mu(p) + 0 + \dots + 0 \\ &= 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

بنابراین با توجه به ضربی بودن  $F$ ، برای هر  $m = p_1^{t_1} \dots p_r^{t_r}$  داریم

$$F(m) = F(p_1^{t_1} \dots p_r^{t_r}) = F(p_1^{t_1}) \dots F(p_r^{t_r}) = 0.$$

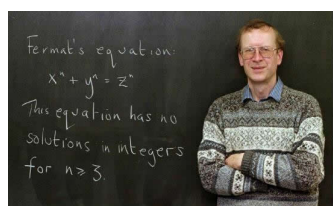
همچنین بدیهی است که  $F(1) = 1$ .

می‌توان این حکم را به صورت ترکیباتی نیز اثبات کرد.

ریاضیات اندکی شبیه استخراج نفت است. اما ریاضیات مزیت بزرگی نسبت به نفت دارد، چرا که هیچ کس تا به حال روشی نیافته است که بر اساس آن بتوانید از مقدار ثابتی نفت تا ابد استفاده کنید.

**Andrew John Wiles**

11 April 1953



**برهان دوم حکم بالا.** فرض کنیم  $m = p_1^{t_1} \dots p_r^{t_r}$ . برای مقسوم‌علیه‌هایی مانند  $d \neq 1$  از  $m$  که در تجزیه آنها به اعداد اول،  $k$  عدد اول متمایز با توان ۱ ظاهر شود مقدار  $\mu(d)$  برابر  $(-1)^k$  است و برای دیگر مقسوم‌علیه‌ها  $\mu(d) = 0$  و لذا در مجموع تأثیری ندارد.

اما تعداد  $d$  هایی که در تجزیه آنها  $k$  عدد اول متمایز با توان ۱ ظاهر شده است برابر است با تعداد حالت‌هایی که می‌توان از بین  $r$  عدد اول  $p_1$  تا  $p_r$  که در تجزیه  $m$  آمده‌اند  $k$  تا را انتخاب کرد (بدون احتساب ترتیب). می‌دانیم که این تعداد برابر است با  $\binom{r}{k}$ . بنابراین

$$\begin{aligned} \sum_{d|m} \mu(d) &= 1 + \sum_{\substack{d=p_{i_1} \dots p_{i_k} \\ 1 \leq k \leq r}} \mu(d) \\ &= 1 + \sum_{k=1}^r \binom{r}{k} (-1)^k \\ &= \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} (-1)^k \\ &= \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} (-1)^k 1^{r-k} \\ &= (1 - 1)^r \\ &= 0. \blacksquare \end{aligned}$$

قضیه فوق کمک می‌کند تا حکم معروف زیر را که بسیار پرکاربرد است اثبات کنیم.

**قضیه ۱۲.۳.۳. (دستور عکس موبیوس<sup>۱۲</sup>)** فرض کنیم  $f$  یک تابع حسابی

دلخواه باشد<sup>۱۳</sup> و  $F(m) = \sum_{d|m} f(d)$  در این صورت

$$f(m) = \sum_{d|m} \mu(d) F\left(\frac{m}{d}\right) = \sum_{d|m} \mu\left(\frac{m}{d}\right) F(d).$$

در چنین وضعیتی  $f$  و  $F$  را انتقال موبیوس یکدیگر می‌نامیم.

<sup>۱۲</sup> Möbius Inversion Formula (MIF)

<sup>۱۳</sup> دقت کنید که لازم نیست  $f$  ضربی باشد.

**برهان.** کافی است تساوی دوم اثبات شود. داریم

$$\begin{aligned}\sum_{d|m} \mu\left(\frac{m}{d}\right) F(d) &= \sum_{d|m} \mu\left(\frac{m}{d}\right) \sum_{d'|d} f(d') \\ &= \sum_{d'|m} f(d') \sum_{\frac{m}{d} | \frac{m}{d'}} \mu\left(\frac{m}{d}\right) \\ &= \sum_{d'|m} f(d') \sum_{e|\frac{m}{d'}} \mu(e).\end{aligned}$$

اما بنابر قضیه فوق مقدار  $\sum_{e|\frac{m}{d'}} \mu(e)$  فقط در صورتی مخالف صفر است که  $\frac{m}{d'} = 1$  و یا به طور معادل  $d' = m$ . بنابراین

$$\sum_{d|m} \mu\left(\frac{m}{d}\right) F(d) = \sum_{d'=m} f(d') = f(m). \blacksquare$$

این قضیه از آن جهت به دستور عکس معروف است که در حقیقت معادله  $F(m) = \sum_{d|m} f(d)$  را بر حسب  $f$  حل می‌کند و در جهت عکس، با معلوم بودن  $F$  مجهول  $f$  را به دست می‌دهد. حکم زیر را ببینید.

**قضیه ۱۳.۳.۳.** فرض کنیم  $m$  عددی طبیعی باشد. در این صورت

$$\sum_{d|m} \frac{\mu(d)}{d} = \frac{\varphi(m)}{m}.$$

**برهان.** همان طور که در قضیه ۱۰.۳.۳ دیدیم  $m = \sum_{d|m} \varphi(d)$ . اگر دستور عکس موبیوس را اثر دهیم داریم

$$\varphi(m) = \sum_{d|m} \mu(d) \cdot \frac{m}{d} = m \sum_{d|m} \frac{\mu(d)}{d}.$$

و لذا حکم برقرار است.  $\blacksquare$

به عنوان کاربردی از دستور عکس موبیوس یک مسأله شمارشی را حل می‌کنیم.  
**مثال ۱۴.۳.۳.** می‌خواهیم با مهره‌های سیاه و سفید یک گردنبند بسازیم. دو گردنبند را یکسان تلقی می‌کنیم اگر با چرخاندن (و نه گرداندن) به یکدیگر

به عنوان مثال، برای  $m = 6$  همه گردنبندهای ممکن را مشخص کنید.

تبدیل شوند<sup>۱۴</sup>. چند گردنبند  $m$  مهره‌ای می‌توان ساخت؟

پاسخ مسأله را با  $a_m$  نمایش می‌دهیم. فرض کنیم  $M(d)$  تعداد گردنبدهای  $d$  مهره‌ای باشد که متناوب نیستند (بدون یکی تلقی کردن تحت چرخاندن). در این صورت  $a_m = \sum_{d|m} M(d)$ . زیرا هر گردنبند دلخواه مانند  $C$  که در نظر بگیریم یا متناوب نیست (که تعداد چنین گردنبندهایی برابر  $M(m)$  است) یا کوچک‌ترین دوره تناوب آن برابر  $d$  است. یعنی می‌توان  $m$  مهره را به تعداد صحیحی  $d$  مهره تقسیم کرد که خود  $d$  مهره‌ای‌ها متناوب نیستند (چون  $d$  کوچک‌ترین دوره تناوب است). پس در این حالت  $d|m$  و تعداد چنین گردنبندهایی برابر  $M(d)$  است.

چون هر مهره می‌تواند یا سیاه یا سفید باشد، اگر تعداد کل گردنبندها را (بدون یکی تلقی کردن تحت چرخاندن) بشماریم برابر  $2^m$  خواهد بود. از سوی دیگر این مقدار برابر است با  $\sum_{d|m} dM(d)$  زیرا اگر  $C$  گردنبندی با کوچک‌ترین دوره تناوب  $d$  باشد که مهره‌های آن شماره‌گذاری نشده‌اند (یعنی تحت چرخاندن یکی تلقی می‌شوند) آنگاه با شماره‌گذاری مهره‌های این گردنبند می‌توان  $d$  گردنبند متمایز ساخت (می‌توانیم اولین مهره را در قسمتی که تکرار می‌شود ۱ بنامیم یا دومین مهره را ۱ بنامیم یا ... یا  $d$  امین مهره را ۱ بنامیم).

در نتیجه  $2^m = \sum_{d|m} dM(d)$  و اگر از دستور عکس مویوس استفاده کنیم

نگران پیچیدگی راه حل این مسأله نباشید. شاید از خوشاقبالی شما، استادتان این مثال را از درس حذف کند، اما فراموش نکنید که به هر حال این مسأله وجود دارد و بد نیست راه حل آن را بدانید!

<sup>۱۴</sup> برای آن که بهتر مسأله را درک کنید اجازه دهید مثالی بزنیم. گردنبندی را در نظر بگیرید که در جهت عقربه‌های ساعت مهره‌های سیاه، سفید، سفید، سیاه و سفید دیده می‌شود. اگر سیاه را با ۰ و سفید را با ۱ نمایش دهیم این گردنبند را می‌توان به صورت (۰ ۱ ۰ ۱ ۰ ۱) نشان داد. اگر این گردنبند را حول مرکزش بچرخانیم گردنبندهای دیگری که با آن یکی تلقی می‌شوند عبارتند از (۰ ۱ ۰ ۱ ۰ ۱)، (۱ ۰ ۱ ۰ ۱ ۰)، (۱ ۰ ۱ ۰ ۱ ۰)، (۰ ۱ ۰ ۱ ۰ ۱) و (۱ ۰ ۱ ۰ ۱ ۰). اما اگر این گردنبند را حول یک محور بگردانیم شکل‌های دیگری هم به وجود خواهد آمد. مثلاً (۱ ۰ ۱ ۰ ۱ ۰) گردنبندی است که از گرداندن گردنبند اصلی حاصل می‌شود و با هیچ یک از شش گردنبند فوق یکی نیست. مسأله شمردن گردنبندهایی که تحت چرخاندن و گرداندن یکی تلقی می‌شوند سخت‌تر است که به مباحثی سطح بالاتر نیاز دارد.

داریم  $mM(m) = \sum_{d|m} \mu\left(\frac{m}{d}\right) 2^d$  بنابراین

$$\begin{aligned} a_m &= \sum_{d|m} M(d) \\ &= \sum_{d|m} \frac{1}{d} \sum_{d'|d} \mu\left(\frac{d}{d'}\right) 2^{d'} \\ &= \sum_{d'|m} \frac{2^{d'}}{d'} \sum_{k|\frac{m}{d'}} \frac{\mu(k)}{k} \\ &= \sum_{d'|m} \frac{2^{d'}}{d'} \cdot \frac{\varphi\left(\frac{m}{d'}\right)}{\frac{m}{d'}} \\ &= \frac{1}{m} \sum_{d'|m} \varphi\left(\frac{m}{d'}\right) 2^{d'}. \spadesuit \end{aligned}$$

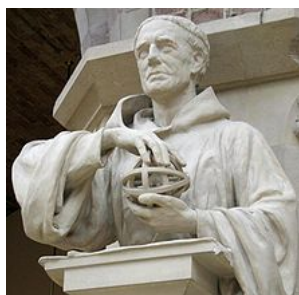
سعی کنید با یک مثال عددی استدلال این مثال را برای خودتان بازنویسی کنید.

## ۴.۳ توپ‌ها و جعبه‌ها

نیمی از علم، پرسیدن سؤال مناسب است.

**Roger Bacon**

1214 - June 1292



در این بخش هشت سؤال مهم در ترکیبیات را مورد بررسی قرار می‌دهیم. این هشت سؤال، شبیه یکدیگر بیان می‌شوند و مسائل بسیار مهمی از ترکیبیات به این هشت مسأله تبدیل می‌گردند. از این رو شاید بتوان گفت که این هشت سؤال، اهمیت ویژه‌ای در مسائل شمارشی دارند.

هر هشت سؤال به وسیله قرار دادن تعدادی توپ در تعدادی جعبه بیان می‌شود. یکی از این مسائل، موجب به وجود آمدن مسأله‌ای جدید می‌گردد و لذا می‌توان گفت که هدف اصلی ما در این بخش و بخش بعدی این فصل، پاسخ دادن به این نه مسأله مهم شمارشی می‌باشد.

فرض کنیم  $r$  توپ و  $n$  جعبه داریم که می‌خواهیم این توپ‌ها را در جعبه‌ها قرار دهیم. توپ‌ها و جعبه‌ها می‌توانند متمایز یا یکسان باشند. در این صورت چهار

حالت زیر به وجود می‌آید:

- $r$  توپ متمایز و  $n$  جعبه متمایز داریم؛
- $r$  توپ متمایز و  $n$  جعبه یکسان داریم؛
- $r$  توپ یکسان و  $n$  جعبه متمایز داریم؛
- $r$  توپ یکسان و  $n$  جعبه یکسان داریم.

حال می‌توان دو دسته مسأله مطرح کرد. در چهار مسأله اول این شرط اضافی را می‌گذاریم که جعبه‌ها نباید خالی بمانند و در چهار مسأله دوم می‌توانیم جعبه خالی هم داشته باشیم.

اجازه دهید برای روشن شدن این هشت مسأله، برای  $r = ۸$  و  $n = ۴$  آنها را بررسی کنیم. برای هر حالت، سه نمونه از وضعیت‌ها را به عنوان مثال ارائه می‌دهیم.

- فرض کنیم ۸ توپ متمایز و ۴ جعبه متمایز داریم و جعبه‌ها نباید خالی باشند. در این حالت توپ‌ها را با اعداد ۱ تا ۸ و جعبه‌ها را با  $B_1$  تا  $B_4$  نمایش می‌دهیم. مثلاً سه نمونه از وضعیت‌هایی که پیش می‌آید عبارتند از:

$$B_1 = \{1, 2, 4\}, B_2 = \{3, 8\}, B_3 = \{5, 7\}, B_4 = \{6\};$$

$$B_1 = \{5, 6, 7, 8\}, B_2 = \{1\}, B_3 = \{3\}, B_4 = \{2, 4\};$$

$$B_1 = \{1\}, B_2 = \{5, 6, 7, 8\}, B_3 = \{3\}, B_4 = \{2, 4\}.$$

توجه کنید که نمونه دوم و سوم متفاوت تلقی می‌شوند.

- فرض کنیم ۸ توپ متمایز و ۴ جعبه یکسان داریم و جعبه‌ها نباید خالی باشند. در این حالت توپ‌ها را با اعداد ۱ تا ۸ نمایش می‌دهیم. مثلاً سه

در هر یک از سؤال‌ها، بررسی کنید که اگر قرار باشد در هر جعبه حداقل دو توپ قرار دهیم نمونه‌های ممکن به چه شکلی هستند.

نمونه از وضعیت‌هایی که پیش می‌آید عبارتند از:

$$\{1, 2, 4\}, \{3, 8\}, \{5, 7\}, \{6\};$$

$$\{5, 6, 7, 8\}, \{1\}, \{3\}, \{2, 4\};$$

$$\{1, 3\}, \{2, 6, 7, 8\}, \{4\}, \{5\}.$$

توجه کنید که جعبه‌ها را شماره‌گذاری نکرده‌ایم و لذا ترتیب نوشتن مجموعه‌ها در سه نمونه بالا اهمیتی ندارد.

- فرض کنیم ۸ توپ یکسان و ۴ جعبه متمایز داریم و جعبه‌ها نباید خالی باشند. در این حالت جعبه‌ها را با  $B_1$  تا  $B_4$  نمایش می‌دهیم. مثلاً سه نمونه از وضعیت‌هایی که پیش می‌آید عبارتند از:

$$|B_1| = 3, |B_2| = 2, |B_3| = 1, |B_4| = 2;$$

$$|B_1| = 2, |B_2| = 3, |B_3| = 1, |B_4| = 2;$$

$$|B_1| = 2, |B_2| = 2, |B_3| = 2, |B_4| = 2.$$

توجه کنید که فقط تعداد توپ‌های داخل هر جعبه مهم است و لذا می‌توان این سه نمونه را به صورت ساده‌تر

$$8 = 3 + 2 + 1 + 2$$

$$8 = 2 + 3 + 1 + 2$$

$$8 = 2 + 2 + 2 + 2$$

نمایش داد که در آن ترتیب نوشتن اعداد مهم است چون جعبه‌ها شماره‌گذاری شده‌اند. بنابراین دو نمونه اول و دوم متفاوت تلقی می‌شوند.

- فرض کنیم ۸ توپ یکسان و ۴ جعبه یکسان داریم و جعبه‌ها نباید خالی

اگر تعداد جعبه‌ها از یکی تا  $n$  تا باشد چند حالت وجود دارد؟ این مسأله برایتان آشنا نیست؟

باشند. مثلاً سه نمونه از وضعیت‌هایی که پیش می‌آید عبارتند از:

$$۸ = ۳ + ۲ + ۱ + ۲;$$

$$۸ = ۳ + ۳ + ۱ + ۱;$$

$$۸ = ۲ + ۲ + ۲ + ۲.$$

توجه کنید که در نمایش بالا، ترتیب نوشتن اعداد مهم نیست چون جعبه‌ها شماره‌گذاری نشده‌اند.

با این توضیحات می‌توانیم جواب این چهار سؤال را به صورتی که در چهار قضیه بعد خواهد آمد تعیین کنیم.

**قضیه ۱.۴.۳.** فرض کنیم  $r$  توپ متمایز و  $n$  جعبه متمایز داریم. تعداد حالاتی که می‌توان این توپ‌ها را در جعبه‌ها قرار داد به طوری که هیچ جعبه‌ای خالی نباشد برابر است با

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^r,$$

که این تعداد، برابر است با تعداد توابع برو از یک مجموعه  $r$  عضوی به یک مجموعه  $n$  عضوی.

**برهان.** هر یک از حالات قرار دادن توپ‌ها در جعبه‌ها متناظر با تابعی است که بر توپ‌ها بتوی جعبه‌ها تعریف شده است زیرا در حقیقت با قرار دادن توپ‌ها در جعبه‌ها، تعیین می‌کنیم که توپ شماره  $i$  در چه جعبه‌ای باید قرار گیرد. این طرز قرار دادن، یک تابع است زیرا برای هر توپ، جعبه‌ای مشخص را معرفی می‌کنیم. البته چنین تابعی لزوماً یک به یک نخواهد بود چون ممکن است چند توپ در یک جعبه قرار گیرند. از سوی دیگر چون قرار است هیچ جعبه‌ای خالی نماند، این بدان معنی است که تابع مورد نظر باید برو باشد. با توجه به قضیه ۵.۲.۳، تعداد توابع برو از مجموعه‌ای  $r$  عضوی به مجموعه‌ای  $n$  عضوی برابر

قبلاً دیدیم که برای تعداد جایگشت‌های پریش روی  $n$  عدد (یعنی  $D_n$ ) هم رابطه‌ای بازگشتی و هم رابطه‌ای صریح وجود دارد. آیا می‌توانید رابطه‌ای بازگشتی برای تعداد توابع برو بیابید؟

است با

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^r.$$

و لذا حکم برقرار است. ■  
**قضیه ۲.۴.۳.** فرض کنیم  $r$  توپ متمایز و  $n$  جعبه یکسان داریم. تعداد حالاتی که می‌توان این توپ‌ها را در جعبه‌ها قرار داد به طوری که هیچ جعبه‌ای خالی نباشد برابر است با

$$\frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^r,$$

که این تعداد،  $\frac{1}{n!}$  برابر تعداد توابع برواز یک مجموعه  $r$  عضوی به یک مجموعه  $n$  عضوی می‌باشد.

**برهان.** چون جعبه‌ها یکسان تلقی می‌شوند،  $n!$  نمونه از نمونه‌های متمایز در حالت قبلی به یک نمونه در این حالت تبدیل می‌گردند و لذا تعداد مورد نظر در این حالت  $\frac{1}{n!}$  برابر تعداد قبلی است. ■

مسأله قرار دادن  $r$  توپ متمایز در  $n$  جعبه یکسان را می‌توان با افراز کردن مجموعه‌ای  $r$  عضوی به صورت اجتماعی از  $n$  مجموعه یکی دانست، و از آنجایی که جعبه‌ها نباید خالی باشند می‌توان گفت که تعداد مورد نظر برابر است با تعداد افرازهای مجموعه‌ای  $r$  عضوی به صورت اجتماعی از  $n$  مجموعه ناتهی. این شاید توجیهی برای تعریف زیر باشد.

**تعریف ۳.۴.۳.** فرض کنیم  $r$  و  $n$  اعدادی طبیعی باشند. تعداد افرازهای مجموعه‌ای  $r$  عضوی به صورت اجتماعی از  $n$  مجموعه ناتهی را با  $\{n\}^r$  نمایش می‌دهیم و آن را  $r$  به  $n$  مجموعه<sup>۱۵</sup> می‌خوانیم. این اعداد را اعداد/سترلینگ نوع دوم<sup>۱۶</sup> می‌نامیم. ♣

عجله نکنید! اعداد استرلینگ نوع اول را هم به زودی تعریف می‌کنیم.

<sup>۱۵</sup>  $r$  subset  $n$

<sup>۱۶</sup> Stirling numbers of the second kind

بنابر آنچه در قضیه فوق اثبات کردیم داریم

$$\left\{ \begin{matrix} r \\ n \end{matrix} \right\} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^r.$$

بعداً رابطه‌ای بازگشتی برای تعیین اعداد استرلینگ نوع دوم را به دست خواهیم داد.

**قضیه ۴.۴.۳.** فرض کنیم  $r$  توپ یکسان و  $n$  جعبه متمایز داریم. تعداد حالاتی که می‌توان این توپ‌ها را در جعبه‌ها قرار داد به طوری که هیچ جعبه‌ای خالی نباشد برابر است با  $\left\{ \begin{matrix} r-1 \\ n-1 \end{matrix} \right\}$ .

**برهان.** اگر جعبه‌ها را با  $B_1$  تا  $B_n$  نمایش دهیم و تعداد توپ‌های جعبه  $B_j$  برابر  $x_j$  باشد، آنگاه تعداد مورد نظر برابر است با تعداد جواب‌های طبیعی معادله  $r = x_1 + \dots + x_n$ . اما با توجه به قضیه ۱۴.۴.۲ این تعداد برابر  $\left\{ \begin{matrix} r-1 \\ n-1 \end{matrix} \right\}$  است. ■

قبل از این که به حل سؤال چهارم بپردازیم اجازه دهید با یک مثال عددی آن را بررسی کنیم. این بار برای  $r = 8$  و  $n = 4$ ، همه نمونه‌های ممکن را می‌یابیم. **مثال ۵.۴.۳.** می‌خواهیم ۸ توپ یکسان را در ۴ جعبه یکسان قرار دهیم به طوری که هیچ جعبه‌ای خالی نباشد. کلیه حالات ممکن را فهرست کنید.

برای آن که مطمئن باشیم که هیچ جعبه‌ای خالی نمی‌ماند ابتدا در هر جعبه یک توپ قرار می‌دهیم. اکنون باید چهار توپ باقیمانده را در حداکثر چهار جعبه بگذاریم. توجه داریم که پس از قرار دادن یک توپ در هر جعبه، کماکان جعبه‌ها یکسان هستند.

این چهار توپ باقیمانده را می‌توان در ۱ جعبه یا ۲ جعبه یا ۳ جعبه یا ۴ جعبه قرار داد.

اگر بخواهیم هر ۴ توپ را در ۱ جعبه قرار دهیم به حالت

$$8 = 5 + 1 + 1 + 1$$

می‌رسیم. توجه داریم که در این مسأله ترتیب نوشتن اعداد مهم نیست و لذا

و اگر برای  $r$  توپ و  $n$  جعبه، قرار باشد در یکی از جعبه‌ها حداکثر  $k$  توپ قرار دهیم چگونه؟

فرقی نمی‌کند که کدام یک از جعبه‌ها دارای ۵ توپ باشد.

اگر بخواهیم ۴ توپ باقیمانده را در دقیقاً ۲ جعبه قرار دهیم این کار به صورت‌های زیر انجام می‌شود:

$$۸ = ۴ + ۲ + ۱ + ۱,$$

$$۸ = ۳ + ۳ + ۱ + ۱.$$

اگر بخواهیم ۴ توپ باقیمانده را در دقیقاً ۳ جعبه قرار دهیم باید ابتدا در هر یک از ۳ جعبه یک توپ قرار دهیم و سپس توپ چهارم را در یکی از آن سه جعبه بگذاریم که منجر به حالت

$$۸ = ۳ + ۲ + ۲ + ۱$$

می‌گردد.

و بالاخره اگر بخواهیم ۴ توپ باقیمانده را در ۴ جعبه بگذاریم به حالت

$$۸ = ۲ + ۲ + ۲ + ۲$$

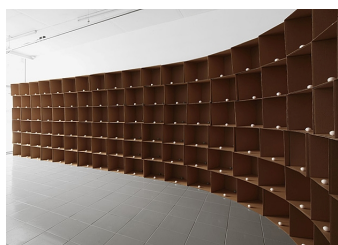
می‌رسیم. لذا می‌توان گفت که ۵ حالت ممکن برای قرار دادن توپ‌ها در جعبه‌ها وجود دارد. ♠

اگر تعداد حالات قرار دادن  $r$  توپ یکسان در  $n$  جعبه یکسان (طوری که جعبه‌ها خالی نباشند) را با  $\Pi(r, n)$  نمایش دهیم با توجه به آنچه در مثال بالا گفته شد می‌بینیم که

$$\Pi(۸, ۴) = \Pi(۴, ۱) + \Pi(۴, ۲) + \Pi(۴, ۳) + \Pi(۴, ۴),$$

زیرا در ابتدا باید در هر جعبه یک توپ بگذاریم و پس از آن ۴ توپ باقیمانده را در ۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴ جعبه قرار دهیم. لذا می‌توان حکم کلی زیر را اثبات کرد.

**قضیه ۶.۴.۳.** فرض کنیم  $r$  توپ یکسان و  $n$  جعبه یکسان داریم. اگر تعداد حالات ممکن برای قرار دادن این توپ‌ها در جعبه‌ها، به طوری که هیچ جعبه‌ای



خالی نباشد، را با  $\Pi(r, n)$  نمایش دهیم **آنگاه**

$$\Pi(r, n) = \sum_{k=0}^n \Pi(r-n, k),$$

که در آن  $\Pi(r, n)$  برای  $n > r$  برابر است و به علاوه

$$\Pi(r, r) = \Pi(r, 1) = \Pi(0, 0) = 1.$$

**برهان.** ابتدا در هر جعبه یک توپ قرار می‌دهیم و سپس  $r-n$  توپ باقیمانده را در ۰ یا ۱ یا ... یا  $n$  جعبه می‌گذاریم. توجه داریم که اگر  $r = n$  آنگاه پس از قرار دادن یک توپ در هر جعبه، تویی باقی نمی‌ماند و می‌توان ۰ توپ باقی مانده را به ۱ طریق در ۰ جعبه قرار داد.

همچنین بدیهی است که قرار دادن همه  $r$  توپ در ۱ جعبه فقط به ۱ روش امکانپذیر است. ■

**مثال ۷.۴.۳.** مطلوب است مقدار  $\Pi(10, 3)$ .

داریم

$$\begin{aligned} \Pi(10, 3) &= \Pi(7, 1) + \Pi(7, 2) + \Pi(7, 3) \\ &= 1 + \Pi(5, 1) + \Pi(5, 2) \\ &\quad + \Pi(4, 1) + \Pi(4, 2) + \Pi(4, 3) \\ &= 1 + 1 + \Pi(3, 1) + \Pi(3, 2) + 1 \\ &\quad + \Pi(2, 1) + \Pi(2, 2) + \Pi(1, 1) \\ &= 1 + 1 + 1 + \Pi(1, 1) + 1 + 1 + 1 + 1 \\ &= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \\ &= 8. \spadesuit \end{aligned}$$

از آنجایی که  $\Pi(r, n)$  تعداد حالات مختلف نوشتن  $r$  به صورت مجموع دقیقاً  $n$  عدد طبیعی است که ترتیب نوشتن اهمیتی ندارد، تعریف زیر را داریم.

برای آن که متوجه شوید چرا در این مجموع،  $k = 0$  را هم در نظر گرفته‌ایم حالت  $r = n$  را مورد بررسی قرار دهید.

کلیه حالات ممکن را فهرست کنید.

**تعریف ۸.۴.۳.** فرض کنیم  $r$  و  $n$  اعدادی طبیعی باشند. در این صورت  $\Pi(r, n)$  را تعداد/فرازهای نامرتب<sup>۱۷</sup> عدد  $r$  به  $n$  عدد می‌نامیم. ♣

اکنون که پاسخ چهار سؤال اول را یافتیم می‌توانیم به راحتی جواب چهار سؤال دوم را هم به دست آوریم. این بار جعبه‌ها می‌توانند خالی باشند.

**قضیه ۹.۴.۳.** فرض کنیم  $r$  توپ متمایز و  $n$  جعبه متمایز داریم. تعداد حالاتی که می‌توان این توپ‌ها را در جعبه‌ها قرار داد برابر است با  $n^r$ ، که این تعداد، برابر است با تعداد توابع از یک مجموعه  $r$  عضوی به یک مجموعه  $n$  عضوی.

**برهان.** هر یک از حالات قرار دادن توپ‌ها در جعبه‌ها متناظر با تابعی است که بر توپ‌ها بتوی جعبه‌ها تعریف شده است. با توجه به اصل ضرب می‌دانیم که این تعداد برابر است با  $n^r$ . ■

**قضیه ۱۰.۴.۳.** فرض کنیم  $r$  توپ متمایز و  $n$  جعبه یکسان داریم. تعداد حالاتی که می‌توان این توپ‌ها را در جعبه‌ها قرار داد برابر است با

$$\sum_{k=1}^n \left\{ \begin{matrix} r \\ k \end{matrix} \right\}.$$

**برهان.** از آنجایی که جعبه‌ها می‌توانند خالی باشند، تعداد مورد نظر برابر است با تعداد حالاتی که می‌توان  $r$  توپ متمایز را در دقیقاً ۱ یا ۲ یا ... یا  $n$  جعبه یکسان قرار داد. با توجه به قضیه ۲.۴.۳ تعداد حالات قرار دادن  $r$  توپ متمایز در  $k$  جعبه یکسان برابر است با  $\left\{ \begin{matrix} r \\ k \end{matrix} \right\}$  و لذا با توجه به اصل جمع حکم برقرار است. ■

**قضیه ۱۱.۴.۳.** فرض کنیم  $r$  توپ یکسان و  $n$  جعبه یکسان داریم. تعداد حالاتی که می‌توان این توپ‌ها را در جعبه‌ها قرار داد برابر است با  $\binom{r+n-1}{r}$ .

**برهان.** اگر جعبه‌ها را با  $B_1$  تا  $B_n$  نمایش دهیم و تعداد توپ‌های جعبه  $B_j$  برابر  $x_j$  باشد، آنگاه تعداد مورد نظر برابر است با تعداد جواب‌های حسابی معادله  $r = x_1 + \dots + x_n$ . اما با توجه به قضیه ۱۶.۴.۲ این تعداد برابر  $\binom{r+n-1}{r}$  است. ■

و اگر کران بالایی برای تعداد توپ‌های هر جعبه تعیین کرده باشیم چطور؟

<sup>۱۷</sup>unordered partition

**قضیه ۱۲.۴.۳.** فرض کنیم  $r$  توپ یکسان و  $n$  جعبه یکسان داریم. تعداد حالات ممکن برای قرار دادن این توپ‌ها در جعبه‌ها برابر است با  $\Pi(r+n, n)$ .

**برهان.** موقتاً  $n$  توپ جدید به توپ‌ها اضافه می‌کنیم و  $r+n$  توپ را در جعبه‌ها قرار می‌دهیم به طوری که هیچ جعبه‌ای خالی نماند. اکنون اگر از هر جعبه یک توپ برداریم در حقیقت  $n$  توپ جدیدی را که موقتاً اضافه کرده بودیم کنار گذاشته‌ایم و بدین ترتیب ممکن است جعبه یا جعبه‌هایی خالی به وجود بیاید. اما با توجه به قضیه ۶.۴.۳ تعداد حالاتی که می‌توان  $r+n$  توپ را در جعبه‌ها قرار داد به طوری که هیچ جعبه‌ای خالی نباشد برابر است با  $\Pi(r+n, n)$ . ■

برای  $r=8$  و  $n=3$  این برهان را بررسی کنید.

می‌توان احکام فوق در مورد این هشت سؤال را به صورت زیر خلاصه کرد:

- تعداد حالات قرار دادن  $r$  توپ متمایز در  $n$  جعبه متمایز در حالتی که هیچ جعبه‌ای خالی نباشد برابر است با  $n!\{n^r\}$  و در حالت کلی برابر است با  $n^r$ ؛

- تعداد حالات قرار دادن  $r$  توپ متمایز در  $n$  جعبه یکسان در حالتی که هیچ جعبه‌ای خالی نباشد برابر است با  $\{n^r\}$  و در حالت کلی برابر است با  $\sum_{k=1}^n \{n^k\}$ ؛

- تعداد حالات قرار دادن  $r$  توپ یکسان در  $n$  جعبه متمایز در حالتی که هیچ جعبه‌ای خالی نباشد برابر است با  $\binom{r+n-1}{n-1}$  و در حالت کلی برابر است با  $\binom{r+n-1}{r}$ ؛

- تعداد حالات قرار دادن  $r$  توپ یکسان در  $n$  جعبه یکسان در حالتی که هیچ جعبه‌ای خالی نباشد برابر است با  $\Pi(r, n)$  و در حالت کلی برابر است با  $\Pi(r+n, n)$ .

فراموش نکنید که هنوز اعداد استرلینگ نوع اول را تعریف نکرده‌ایم. در بخش بعد به این موضوع می‌پردازیم.

## ۵.۳ مسأله نهم

اکنون موقعیت آن فراهم آمده است تا به معرفی مسأله نهم بپردازیم. این مسأله شبیه دومین سؤال از هشت سؤال فوق می‌باشد:

به چند طریق می‌توان  $r$  توپ متمایز را در  $n$  جعبه یکسان قرار داد به طوری که هیچ جعبه‌ای خالی نباشد و توپ‌های داخل هر جعبه دور یک دایره چیده شوند؟

اجازه دهید برای نمونه، حالتی خاص را بررسی کنیم.

**مثال ۱.۵.۳.** کلیه حالات ممکن قرار دادن ۴ توپ متمایز در ۲ جعبه یکسان را بنویسید به طوری که هیچ جعبه‌ای خالی نباشد و توپ‌های هر جعبه دور یک دایره چیده شده باشند.

توپ‌ها را با ۱ تا ۴ نمایش می‌دهیم و برای نشان دادن توپ‌های داخل جعبه دور یک دایره از نماد پرانتزی که در فصل دوم برای جایگشت‌ها توضیح داده شد استفاده می‌کنیم. مثلاً (۱۲۴) یعنی سه توپ با شماره‌های ۱، ۲ و ۴ با همین ترتیب در جهت حرکت عقربه‌های ساعت دور یک دایره چیده شده‌اند. بدین ترتیب، حالت‌های ممکن عبارتند از:

$$\begin{aligned} & (۱)(۲۳۴), \quad (۲)(۱۳۴), \quad (۳)(۱۲۴), \quad (۴)(۱۲۳) \\ & (۱)(۲۴۳), \quad (۲)(۱۴۳), \quad (۳)(۱۴۲), \quad (۴)(۱۳۲) \\ & (۱۲)(۳۴), \quad (۱۳)(۲۴), \quad (۱۴)(۲۳). \spadesuit \end{aligned}$$

قبل از هر چیز اجازه دهید نمادی را برای پاسخ این سؤال در نظر بگیریم. **تعریف ۲.۵.۳.** فرض کنیم  $r$  و  $n$  اعدادی طبیعی باشند. تعداد افرازهای مجموعه‌ای  $r$  عضوی به صورت اجتماعی از  $n$  دور ناتهی را با  $[n]^r$  نمایش می‌دهیم و آن را  $r$  به  $n$  دور<sup>۱۸</sup> می‌خوانیم. این اعداد را اعداد استرلینگ نوع

<sup>۱۸</sup> $r$  subset  $n$

استرلینگ نه تنها به دلیل اعداد استرلینگ نوع اول و دوم، بلکه به خاطر فرمولش نیز معروف می‌باشد. این فرمول بیان می‌دارد که برای  $n$  های بزرگ، مقدار

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

تقریبی برای  $n!$  است.

**James Stirling**

May 1692 - 5 Dec 1770



اول<sup>۱۹</sup> می‌نامیم.

برای آن که مقدار  $[r]$  را تعیین کنیم از دستوری بازگشتی استفاده می‌کنیم. همان طور که قبلاً دیدیم با استدلال ترکیبیاتی ساده‌ای می‌توان دو اتحاد زیر را اثبات کرد:

$$P(r, n) = nP(r-1, n-1) + P(r-1, n),$$

$$\binom{r}{n} = \binom{r-1}{n-1} + \binom{r-1}{n}.$$

به طریق مشابه می‌توان روابطی بازگشتی برای تعیین  $\{r_n\}$  و  $[r]$  را اثبات کرد. قضیه ۳.۵.۳. فرض کنیم  $r$  و  $n$  اعدادی طبیعی و بزرگتر یا مساوی ۲ باشند. در این صورت

$$\left\{ \begin{matrix} r \\ n \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} r-1 \\ n-1 \end{matrix} \right\} + n \left\{ \begin{matrix} r-1 \\ n \end{matrix} \right\}.$$

**برهان.** می‌خواهیم  $r$  توپ متمایز را در  $n$  جعبه یکسان قرار دهیم به طوری که هیچ جعبه‌ای خالی نباشد. این کار به  $\{r_n\}$  طریق انجام می‌شود. توپ شماره ۱ را در نظر می‌گیریم. یا این توپ به تنهایی در یک جعبه آمده است یا توپ دیگری نیز در جعبه شامل این توپ قرار دارد. اگر این توپ به تنهایی در یک جعبه آمده باشد باید بقیه توپ‌ها را در بقیه جعبه‌ها قرار دهیم به طوری که هیچ جعبه‌ای خالی نباشد. این کار به  $\{r_{n-1}\}$  طریق صورت می‌پذیرد. و اگر این توپ به تنهایی در یک جعبه نباشد آنگاه باید بقیه توپ‌ها را در تمام جعبه‌ها قرار دهیم (به  $\{r_n\}$  طریق) و سپس این توپ را در یکی از جعبه‌ها بگذاریم (به  $n$  طریق؛ چون اکنون جعبه‌ها متمایز هستند). ■

قضیه ۴.۵.۳. فرض کنیم  $r$  و  $n$  اعدادی طبیعی و بزرگتر یا مساوی ۲ باشند. در این صورت

$$\left[ \begin{matrix} r \\ n \end{matrix} \right] = \left[ \begin{matrix} r-1 \\ n-1 \end{matrix} \right] + (r-1) \left[ \begin{matrix} r-1 \\ n \end{matrix} \right].$$

اگر از این  $r$  توپ،  $s$  تا متمایز و  $t$  تا یکسان باشند چند حالت به وجود می‌آید؟

<sup>۱۹</sup>Stirling numbers of the first kind

اگر قرار باشد در هر جعبه حداقل دو توپ داشته باشیم چند حالت وجود دارد؟

**برهان.** می‌خواهیم  $r$  توپ متمایز را در  $n$  جعبه یکسان قرار دهیم به طوری که هیچ جعبه‌ای خالی نباشد و توپ‌های داخل هر جعبه دور دایره چیده شده باشند. این کار به  $\begin{bmatrix} r \\ n \end{bmatrix}$  طریق انجام می‌شود. توپ شماره ۱ را در نظر می‌گیریم. یا این توپ به تنهایی در یک جعبه آمده است یا توپ دیگری نیز در جعبه شامل این توپ قرار دارد. اگر این توپ به تنهایی در یک جعبه آمده باشد بقیه توپ‌ها را در بقیه جعبه‌ها قرار دهیم به طوری که هیچ جعبه‌ای خالی نباشد. این کار به  $\begin{bmatrix} r-1 \\ n-1 \end{bmatrix}$  طریق صورت می‌پذیرد. و اگر این توپ به تنهایی در یک جعبه نباشد آنگاه باید بقیه توپ‌ها را در تمام جعبه‌ها قرار دهیم (به  $\begin{bmatrix} r-1 \\ n \end{bmatrix}$  طریق) و سپس این توپ را بعد از یکی از توپ‌های ۲ تا  $r$  در جهت عقربه‌های ساعت قرار دهیم (به  $r-1$  طریق). ■

همان طور که قبلاً دیدیم، رابطه بازگشتی موجود در مورد  $\begin{pmatrix} r \\ n \end{pmatrix}$  ها موجب شکل گرفتن مثلث خیام می‌گردد که عدد هر سطر از جمع کردن دو عددی که بالای آن نوشته شده است به دست می‌آید. اگر همین فرآیند را برای ساختن مثلث‌هایی مشابه با استفاده از سه رابطه بازگشتی دیگر به کار ببریم می‌توانیم  $P(r, n)$  ها،  $\{r_n\}$  ها و  $\begin{bmatrix} r \\ n \end{bmatrix}$  ها را به دست آوریم. برای  $\{r_n\}$  داریم

|   |    |    |    |    |   |
|---|----|----|----|----|---|
| ۱ |    |    |    |    |   |
| ۱ | ۱  |    |    |    |   |
| ۱ | ۳  | ۱  |    |    |   |
| ۱ | ۷  | ۶  | ۱  |    |   |
| ۱ | ۱۵ | ۲۵ | ۱۰ | ۱  |   |
| ۱ | ۳۱ | ۹۰ | ۶۵ | ۱۵ | ۱ |

این اعداد با توجه به رابطه بازگشتی  $\{r_n\} = \{r_{n-1}\} + n\{r_{n-1}\}$  به دست آمده‌اند و لذا برای به دست آوردن عدد  $n$  ام در سطر  $r$  ام باید عدد  $n-1$  ام در سطر  $r-1$  ام را با  $n$  برابر عدد  $n$  ام در سطر  $r-1$  ام جمع کنیم.

با توجه به این اعداد می‌توان برخی از مقادیر  $\{r_n\}$  ها را حدس زد. به عنوان مثال به ستون دوم نگاه کنید.

قضیه ۵.۵.۳. به ازای هر عدد طبیعی مانند  $r \geq 2$ ،

$$\left\{ \begin{matrix} r \\ 2 \end{matrix} \right\} = 2^{r-1} - 1.$$

**برهان.** به استقرا روی  $r$  حکم را اثبات می‌کنیم. برای  $r = 2$  حکم به طور بدیهی برقرار است. فرض کنیم حکم برای  $r - 1$  برقرار باشد. با توجه به رابطه بازگشتی مذکور در قضیه ۳.۵.۳ داریم

$$\left\{ \begin{matrix} r \\ 2 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} r-1 \\ 1 \end{matrix} \right\} + 2 \left\{ \begin{matrix} r-1 \\ 2 \end{matrix} \right\} = 1 + 2(2^{r-2} - 1) = 2^{r-1} - 1. \blacksquare$$

اما راه دیگری نیز برای اثبات این حکم وجود دارد.

آیا می‌توانید مقدار  $\left\{ \begin{matrix} r \\ 2 \end{matrix} \right\}$  را صریحاً مشخص کنید؟

**برهان دوم حکم بالا.** می‌خواهیم مجموعه  $X = \{1, \dots, r\}$  را به دو مجموعه ناتهی افراز کنیم. ابتدا یک زیرمجموعه ناتهی مانند  $A$  انتخاب می‌کنیم (به  $2^r - 1$  روش) سپس  $X$  را به صورت  $A \cup A^c$  افراز می‌کنیم که  $A^c$  متمم  $A$  است. حال چون ترتیب نوشتن زیرمجموعه‌ها در افراز اهمیتی ندارد (به عبارت دیگر چون جعبه‌ها یکسان هستند) پس باید این تعداد را بر ۲ تقسیم کنیم، یعنی تعداد مورد نظر برابر است با  $\frac{2^r - 2}{2} = 2^{r-1} - 1$ .  $\blacksquare$

قضیه ۶.۵.۳. فرض کنیم  $r$  عددی طبیعی و بزرگتر از ۱ باشد. در این صورت

$$\left\{ \begin{matrix} r \\ r-1 \end{matrix} \right\} = \binom{r}{2}.$$

**برهان.** به استقرا روی  $r$  حکم را اثبات می‌کنیم. برای  $r = 2$  حکم به طور بدیهی برقرار است. فرض کنیم حکم برای  $r - 1$  برقرار باشد. با توجه به رابطه

بازگشتی مذکور در قضیه ۳.۵.۳ داریم

$$\begin{aligned}\left\{ \begin{matrix} r \\ r-1 \end{matrix} \right\} &= \left\{ \begin{matrix} r-1 \\ r-2 \end{matrix} \right\} + (r-1) \left\{ \begin{matrix} r-1 \\ r-1 \end{matrix} \right\} \\ &= \binom{r-1}{2} + r-1 \\ &= \binom{r}{2}. \blacksquare\end{aligned}$$

اما راه دیگری نیز برای اثبات این حکم وجود دارد.

$\{r-2\}$  برابر چند است؟

**برهان دوم حکم بالا.** می‌خواهیم  $r$  توپ متمایز را در  $r-1$  جعبه یکسان قرار دهیم به گونه‌ای که هیچ جعبه‌ای خالی نباشد. پس یکی از جعبه‌ها دو توپ دارد و بقیه جعبه‌ها هر کدام یک توپ دارند. بنابراین می‌توانیم ابتدا دو توپ را از بین  $r$  توپ انتخاب کنیم (به  $\binom{r}{2}$  طریق)، آنها را در یک جعبه قرار دهیم و توپ‌های باقی مانده را هر کدام در یک جعبه بگذاریم. ■

به طریق مشابه، رابطه بازگشتی مذکور در قضیه ۴.۵.۳ موجب تشکیل مثلث زیر می‌گردد.

|     |     |     |    |    |   |
|-----|-----|-----|----|----|---|
| ۱   |     |     |    |    |   |
| ۱   | ۱   |     |    |    |   |
| ۲   | ۳   | ۱   |    |    |   |
| ۶   | ۱۱  | ۶   | ۱  |    |   |
| ۲۴  | ۵۰  | ۳۵  | ۱۰ | ۱  |   |
| ۱۲۰ | ۲۷۴ | ۲۲۵ | ۸۵ | ۱۵ | ۱ |

این اعداد با توجه به رابطه بازگشتی  $\left[ \begin{matrix} r \\ n \end{matrix} \right] = \left[ \begin{matrix} r-1 \\ n-1 \end{matrix} \right] + (r-1) \left[ \begin{matrix} r-1 \\ n \end{matrix} \right]$  به دست آمده‌اند و لذا برای به دست آوردن عدد  $n$  ام در سطر  $r$  ام باید عدد  $n-1$  ام در سطر  $r-1$  ام را با  $r-1$  برابر عدد  $n$  ام در سطر  $r-1$  ام جمع کنیم.

با توجه به این اعداد می توان سه حکم زیر را حدس زد.  
قضیه ۷.۵.۳. فرض کنیم  $r$  عددی طبیعی باشد. در این صورت

$$\begin{bmatrix} r \\ r \end{bmatrix} = 1.$$

**برهان.** می خواهیم  $r$  توپ را در  $r$  جعبه بگذاریم به گونه ای که هیچ جعبه ای خالی نباشد. بنابراین در هر جعبه یک توپ قرار می گیرد و در نتیجه فرقی نمی کند که توپ های داخل یک جعبه دور دایره چیده شود یا نه. لذا  $\{r\} = \begin{bmatrix} r \\ r \end{bmatrix} = 1$ .  
قضیه ۸.۵.۳. فرض کنیم  $r$  عددی طبیعی باشد. در این صورت

$$\begin{bmatrix} r \\ 1 \end{bmatrix} = (r-1)!.$$

**برهان.** می خواهیم  $r$  توپ متمایز را در یک جعبه دور یک دایره قرار دهیم. تعداد حالاتی که می توان  $r$  توپ را در یک صف قرار داد برابر است با  $r!$ . اما وقتی بخواهیم  $r$  توپ را دور یک دایره قرار دهیم  $r$  صف که قبلاً متمایز بودند به دایره ای یکسان تبدیل می شوند و لذا تعداد مورد نظر برابر است با  $(r-1)! = \frac{r!}{r}$ . ■

مقدار  $\begin{bmatrix} r \\ 1 \end{bmatrix}$  را به طور صریح مشخص کنید.

قضیه ۹.۵.۳. فرض کنیم  $r$  عددی طبیعی باشد. در این صورت

$$\begin{bmatrix} r \\ r-1 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{matrix} r \\ r-1 \end{matrix} \right\} = \binom{r}{2}.$$

**برهان.** می خواهیم  $r$  توپ متمایز را در  $r-1$  جعبه یکسان قرار دهیم. بنابراین یکی از جعبه ها شامل ۲ توپ و بقیه هر کدام یک توپ دارند. در جعبه هایی که شامل یک توپ هستند فرقی نمی کند که توپ داخل جعبه دور یک دایره قرار داده شده باشد یا نه. از طرف دیگر وقتی بخواهیم ۲ توپ را داخل یک جعبه قرار دهیم به یک صورت انجام می شود و با توجه به حکم بالا اگر بخواهیم این ۲ توپ را دور یک دایره بگذاریم هم این کار به یک صورت انجام می گیرد. بنابراین فرقی نمی کند که در جعبه شامل ۲ توپ، توپ ها را دور دایره بگذاریم یا نگذاریم. در نتیجه  $\begin{bmatrix} r \\ r-1 \end{bmatrix}$  همان  $\left\{ \begin{matrix} r \\ r-1 \end{matrix} \right\}$  است که قبلاً دیدیم مقدار آن برابر  $\binom{r}{2}$  می باشد. ■

این حکم را به استقرا اثبات کنید.

اعداد استرلینگ در مسائل شمارشی زیادی ظاهر می‌شوند و همانند اعداد ترکیبی، اتحادهای متنوعی را می‌توان در مورد این اعداد اثبات کرد. در اینجا به چند نمونه از آنها اشاره می‌کنیم. قبل از آن اجازه دهید یک تعریف ساده را با هم ببینیم.

**تعریف ۱۰.۵.۳.** فرض کنیم  $r$  عددی طبیعی باشد. چند جمله‌ای

$$x(x-1)\dots(x-(r-1))$$

را توان فاکتوریلی کاهشی<sup>۲۰</sup> متغیر  $x$  نامیده و با  $x^{\underline{r}}$  نمایش می‌دهیم. همچنین

$$x(x+1)\dots(x+(r-1))$$

را توان فاکتوریلی افزایشی<sup>۲۱</sup> متغیر  $x$  نامیده و با  $x^{\overline{r}}$  نمایش می‌دهیم. ♣

**مثال ۱۱.۵.۳.** توان‌های فاکتوریلی کاهشی و افزایشی اول تا ششم متغیر  $x$  را بنویسید.

برای توان‌های فاکتوریلی کاهشی داریم

$$x^{\underline{1}} = x,$$

$$x^{\underline{2}} = x(x-1) = x^2 - x,$$

$$x^{\underline{3}} = x(x-1)(x-2) = x^3 - 3x^2 + 2x,$$

$$x^{\underline{4}} = x(x-1)(x-2)(x-3) = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x,$$

$$x^{\underline{5}} = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

$$= x^5 - 10x^4 + 35x^3 - 50x^2 + 24x,$$

$$x^{\underline{6}} = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$$

$$= x^6 - 15x^5 + 85x^4 - 225x^3 + 274x^2 - 120x.$$

همچنین برای توان‌های فاکتوریلی افزایشی داریم

قبل از این که به خواندن ادامه دهید سعی کنید حکمی را حدس بزنید!

<sup>۲۰</sup> falling factorial power

<sup>۲۱</sup> rising factorial power

$$\begin{aligned}
x^{\overline{1}} &= x, \\
x^{\overline{2}} &= x(x+1) = x^2 + x, \\
x^{\overline{3}} &= x(x+1)(x+2) = x^3 + 3x^2 + 2x, \\
x^{\overline{4}} &= x(x+1)(x+2)(x+3) = x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x, \\
x^{\overline{5}} &= x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) \\
&= x^5 + 10x^4 + 35x^3 + 50x^2 + 24x, \\
x^{\overline{6}} &= x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5) \\
&= x^6 + 15x^5 + 85x^4 + 225x^3 + 274x^2 + 120x. \spadesuit
\end{aligned}$$

احکامی که حدس زده‌اید کاملاً درست هستند! هم اکنون آنها را اثبات می‌کنیم.

قضیه ۱۲.۵.۳. فرض کنیم  $r$  عددی طبیعی باشد. در این صورت

$$(-x)^{\overline{r}} = (-1)^r x^{\overline{r}}, \quad (-x)^{\overline{r}} = (-1)^r x^{\overline{r}}.$$

برهان. داریم

$$\begin{aligned}
(-x)^{\overline{r}} &= (-x)(-x-1)\dots(-x-(r-1)) \\
&= (-1)^r x(x+1)\dots(x+(r-1)) \\
&= (-1)^r x^{\overline{r}}. \blacksquare
\end{aligned}$$

قضیه ۱۳.۵.۳. فرض کنیم  $r$  عددی طبیعی باشد. در این صورت

$$x^{\overline{r}} = \sum_{k=1}^r (-1)^{r-k} \begin{bmatrix} r \\ k \end{bmatrix} x^k, \quad x^{\overline{r}} = \sum_{k=1}^r \begin{bmatrix} r \\ k \end{bmatrix} x^k.$$

برهان. کافی است حکم دوم را اثبات کنیم. به استقرا روی  $r$  عمل می‌کنیم.

بدیهی است که حکم برای  $r=1$  برقرار است. فرض کنیم حکم برای  $r-1$



برقرار باشد. داریم

$$\begin{aligned}
 x^{\bar{r}} &= x(x+1)\dots(x+(r-2))(x+(r-1)) \\
 &= x^{\overline{r-1}}(x+(r-1)) \\
 &= \left(\sum_{k=1}^{r-1} \begin{bmatrix} r-1 \\ k \end{bmatrix} x^k\right) (x+(r-1)) \\
 &= \sum_{k=1}^{r-1} \begin{bmatrix} r-1 \\ k \end{bmatrix} x^{k+1} + \sum_{k=1}^{r-1} (r-1) \begin{bmatrix} r-1 \\ k \end{bmatrix} x^k \\
 &= \sum_{\ell=2}^r \begin{bmatrix} r-1 \\ \ell-1 \end{bmatrix} x^\ell + \sum_{k=1}^{r-1} (r-1) \begin{bmatrix} r-1 \\ k \end{bmatrix} x^k \\
 &= \left(\sum_{k=2}^{r-1} \begin{bmatrix} r-1 \\ k-1 \end{bmatrix} x^k\right) + \begin{bmatrix} r-1 \\ r-1 \end{bmatrix} x^r \\
 &\quad + \left(\sum_{k=1}^{r-1} (r-1) \begin{bmatrix} r-1 \\ k \end{bmatrix} x^k\right) + (r-1) \begin{bmatrix} r-1 \\ 1 \end{bmatrix} x \\
 &= \sum_{k=2}^{r-1} \left(\begin{bmatrix} r-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + (r-1) \begin{bmatrix} r-1 \\ k \end{bmatrix}\right) x^k \\
 &\quad + x^r + (r-1)(r-2)!x \\
 &= \left(\sum_{k=2}^{r-1} \begin{bmatrix} r \\ k \end{bmatrix} x^k\right) + \begin{bmatrix} r \\ r \end{bmatrix} x^r + \begin{bmatrix} r \\ 1 \end{bmatrix} x \\
 &= \sum_{k=1}^r \begin{bmatrix} r \\ k \end{bmatrix} x^k. \blacksquare
 \end{aligned}$$

برای فرار از این اثبات طولانی  
باید راه دیگری هم وجود داشته  
باشد. آیا ترفندی ترکیبیاتی  
برای اثبات این حکم می‌دانید؟

سؤالی که مطرح می‌شود این است که اعداد استرلینگ نوع دوم در این میان چه نقشی دارند. مثال زیر را ببینید.

**مثال ۱۴.۵.۳.** توان‌های معمولی متغیر  $x$  را بر حسب توان‌های فاکتوریلی کاهشی اول تا ششم آن بنویسید.

داریم

$$\begin{aligned}
x &= x^1, \\
x^2 &= x^1 + x = x^1 + x^1, \\
x^3 &= x^2 + 3x^1 - 2x \\
&= x^2 + 3(x^1 + x^1) - 2x^1 \\
&= x^2 + 3x^1 + x^1, \\
x^4 &= x^3 + 6x^2 - 11x^1 + 6x \\
&= x^3 + 6(x^2 + 3x^1 + x^1) - 11(x^1 + x^1) + 6x^1 \\
&= x^3 + 6x^2 + 7x^1 + x^1, \\
x^5 &= x^4 + 10x^3 - 35x^2 + 50x^1 - 24x \\
&= x^4 + 10(x^3 + 6x^2 + 7x^1 + x^1) \\
&\quad - 35(x^2 + 3x^1 + x^1) + 50(x^1 + x^1) - 24x^1 \\
&= x^4 + 10x^3 + 25x^2 + 15x^1 + x^1, \\
x^6 &= x^5 + 15x^4 - 85x^3 + 225x^2 - 274x^1 + 120x \\
&= x^5 + 15(x^4 + 10x^3 + 25x^2 + 15x^1 + x^1) \\
&\quad - 85(x^3 + 6x^2 + 7x^1 + x^1) \\
&\quad + 225(x^2 + 3x^1 + x^1) - 274(x^1 + x^1) + 120x^1 \\
&= x^5 + 15x^4 + 65x^3 + 90x^2 + 31x^1 + x^1. \spadesuit
\end{aligned}$$

مثال‌هایی که می‌آوریم برای آن است که بتوانید احکام پس از آن را حدس بزنید. حتماً این کار را انجام دهید.

این بار هم درست حدس زده‌اید! حکم بعدی را ببینید.  
قضیه ۵.۳.۱۵. فرض کنیم  $r$  عددی طبیعی باشد. در این صورت

$$x^r = \sum_{k=1}^r \left\{ \begin{matrix} r \\ k \end{matrix} \right\} x^k.$$

برهان. به استقرا روی  $r$  عمل می‌کنیم. بدیهی است که حکم برای  $r = 1$

برقرار است. فرض کنیم حکم برای  $r-1$  برقرار باشد. داریم  

$$x^k(x-k) = x(x-1)\dots(x-(k-1))(x-k) = x^{\underline{k+1}}.$$

بنابراین

$$x^k x = x^{\underline{k+1}} + kx^{\underline{k}}.$$

لذا داریم

$$\begin{aligned} x^r &= x^{r-1}x \\ &= \left( \sum_{k=1}^{r-1} \left\{ \begin{matrix} r-1 \\ k \end{matrix} \right\} x^{\underline{k}} \right) x \\ &= \sum_{k=1}^{r-1} \left\{ \begin{matrix} r-1 \\ k \end{matrix} \right\} (x^{\underline{k+1}} + kx^{\underline{k}}) \\ &= \sum_{k=1}^{r-1} \left\{ \begin{matrix} r-1 \\ k \end{matrix} \right\} x^{\underline{k+1}} + \sum_{k=1}^{r-1} k \left\{ \begin{matrix} r-1 \\ k \end{matrix} \right\} x^{\underline{k}} \\ &= \sum_{\ell=2}^r \left\{ \begin{matrix} r-1 \\ \ell-1 \end{matrix} \right\} x^{\underline{\ell}} + \sum_{k=1}^{r-1} k \left\{ \begin{matrix} r-1 \\ k \end{matrix} \right\} x^{\underline{k}} \\ &= \left( \sum_{k=2}^r \left\{ \begin{matrix} r-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} x^{\underline{k}} \right) + \left\{ \begin{matrix} r-1 \\ r-1 \end{matrix} \right\} x^{\underline{r}} \\ &\quad + \left( \sum_{k=1}^{r-1} k \left\{ \begin{matrix} r-1 \\ k \end{matrix} \right\} x^{\underline{k}} \right) + \left\{ \begin{matrix} r-1 \\ 1 \end{matrix} \right\} x^{\underline{1}} \\ &= \sum_{k=2}^{r-1} \left( \left\{ \begin{matrix} r-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} + k \left\{ \begin{matrix} r-1 \\ k \end{matrix} \right\} \right) x^{\underline{k}} + \left\{ \begin{matrix} r \\ r \end{matrix} \right\} x^{\underline{r}} + \left\{ \begin{matrix} r \\ 1 \end{matrix} \right\} x^{\underline{1}} \\ &= \sum_{k=2}^{r-1} \left\{ \begin{matrix} r \\ k \end{matrix} \right\} x^{\underline{k}} + \left\{ \begin{matrix} r \\ r \end{matrix} \right\} x^{\underline{r}} + \left\{ \begin{matrix} r \\ 1 \end{matrix} \right\} x^{\underline{1}} \\ &= \sum_{k=1}^r \left\{ \begin{matrix} r \\ k \end{matrix} \right\} x^{\underline{k}}. \blacksquare \end{aligned}$$

هر کس اثبات ترکیبیاتی این  
 قضیه را می‌داند دستش را بلند  
 کند!

می‌توان اتحادهای دیگری را نیز به دست آورد که در آنها اعداد استرلینگ ظاهر شده باشند. چیزهایی را برای شما در تمرین‌ها باقی گذاشته‌ایم.

## ۶.۳ تمرین‌ها

۱.۶.۳. اصل شمول و طرد را با استفاده از استقرا اثبات کنید.

۲.۶.۳. فرض کنیم  $A_1, \dots, A_n$  مجموعه‌های متناهی دلخواهی باشند. با استفاده از اصل شمول و طرد تعداد اعضای  $\bigcup_{i=1}^n A_i$  را بیابید که متعلق به دقیقاً  $m$  مجموعه از مجموعه‌های  $A_1, \dots, A_n$  باشند.

۳.۶.۳. فرض کنیم  $n$  و  $k$  اعدادی طبیعی باشند. معادله  $n = x_1 + \dots + x_k$  چند جواب طبیعی دارد که  $x_1 \leq 6$ ,  $x_2 \leq 7$  و  $x_3 \geq 4$ ؟

۴.۶.۳. یک مستطیل  $n \times m$  داریم که از  $nm$  مربع تشکیل شده است. فرض کنید این مستطیل را طوری در صفحه مختصات قرار داده‌ایم که گوشه پایین سمت چپ آن روی مبدأ مختصات باشد. این نقطه را  $A$  و نقطه گوشه بالای سمت راست مستطیل را  $B$  می‌نامیم. فرض کنیم در بین پاره‌خطهایی که نقاط با مختصات صحیح را به هم وصل کرده‌اند سه پاره خطی که نقطه  $(1, 1)$  را به  $(1, 2)$ ،  $(1, 4)$  را به  $(2, 4)$  و نقطه  $(2, 5)$  را به  $(2, 6)$  وصل می‌کنند رسم نشده باشند. اکنون چند مسیر از  $A$  به  $B$  وجود دارد که کوتاه‌ترین فاصله ممکن را داشته باشند؟

۵.۶.۳. فرض کنیم  $0 \leq k \leq r \leq n$  و  $r \geq 1$ . تعداد جایگشت‌های  $r$  تایی از اعداد  $\{1, \dots, n\}$  را که دقیقاً  $k$  عدد در جای خود آمده‌اند با  $D(n, r, k)$  نمایش می‌دهیم. ثابت کنید

$$D(n, r, k) = \frac{\binom{r}{k}}{(n-r)!} \sum_{i=0}^{r-k} (-1)^i \binom{r-k}{i} (n-k-i)!.$$

مقدار  $D(5, 3, k)$  را برای  $k = 0, 1, 2, 3$  به دست آورید.

۶.۶.۳. اگر  $D(n, r, k)$  همان باشد که در تمرین بالا تعریف شد، آنگاه ثابت

در مورد جواب‌های حسابی  
چطور؟

اگر به جای حذف کردن  
پاره‌خطها، چند نقطه را حذف  
کنیم تعداد مطلوب برابر چند  
است؟

کنید که

$$\begin{aligned} D(n, r, k) &= \binom{r}{k} D(n-k, r-k, 0); \\ D(n, r, k) &= D(n-1, r-1, k-1) \\ &+ (n-1)D(n-1, r-1, k) \\ &+ (r-1)(D(n-2, r-2, k) - D(n-2, r-2, k-1)), \end{aligned}$$

که در آن  $D(n, r, -1)$  را برابر ۰ تعریف می‌کنیم.  
۷.۶.۳. با همان مفروضات تمرین ۵.۶.۳ ثابت کنید که

$$\begin{aligned} D(n, n, k) &= nD(n-1, n-1, k) + (-1)^{n-k} \binom{n}{k}; \\ \binom{k}{t} D(n, r, k) &= \binom{r}{t} D(n-t, r-t, k-t), \end{aligned}$$

که در آن  $0 \leq t$ . همچنین نشان دهید که اگر  $r < n$  آنگاه  
 $D(n, r, k) = rD(n-1, r-1, k) + D(n-1, r, k)$ .

به علاوه ثابت کنید که

$$D(n, n-r, 0) = \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} D(n-i, n-i, 0).$$

با توجه به آن که  $D_n = D(n, n, 0)$ ، مقدار صریح  $D_n$  را بیابید.

۸.۶.۳. اعداد  $1, \dots, m$  را به ترتیب دور یک دایره در جهت عقربه‌های ساعت می‌نویسیم. برای  $0 \leq k \leq \lfloor \frac{m}{4} \rfloor$  فرض کنیم  $\alpha(k)$  برابر تعداد زیرمجموعه‌های  $k$  عضوی از  $\{1, \dots, m\}$  باشد که هیچ دو عضوی از آنها در کنار یکدیگر دور دایره قرار نگرفته باشند. مثلاً اگر  $m = 10$  و  $k = 4$  آنگاه  $\{1, 3, 6, 9\}$  و  $\{3, 5, 8, 10\}$  در شمارش ما به حساب می‌آیند در صورتی که  $\{1, 6, 8, 10\}$  و  $\{2, 6, 7, 9\}$  نباید شمرده شوند (چون در اولی ۱ و ۱۰ کنار هم هستند و در

برای  $m = 10$  و  $k = 4$  همه حالت‌های ممکن را بنویسید.

دومی ۶ و ۷). ثابت کنید

$$\alpha(k) = \frac{m}{k} \binom{m-k-1}{k-1}.$$

(می‌توانیم همین سؤال را در حالتی که اعداد به جای این که دور دایره باشند در یک صف قرار گرفته باشند نیز حل کنیم.)

۹.۶.۳. در مسئلهٔ زوج‌های ازدواج کرده، به چند طریق می‌توان زن و شوهرها را در یک صف قرار داد به طوری که هیچ زن و شوهری در کنار یکدیگر نباشند؟  
 ۱۰.۶.۳. در مسئلهٔ زوج‌های ازدواج کرده، به چند طریق می‌توان زن و شوهرها را در یک صف قرار داد به طوری که دقیقاً  $k$  زن و شوهر در کنار یکدیگر باشند؟  
 ۱۱.۶.۳. در مسئلهٔ زوج‌های ازدواج کرده، به چند طریق می‌توان زن و شوهرها را دور میز نشاند به طوری که دقیقاً  $k$  زن و شوهر در کنار یکدیگر باشند؟

۱۲.۶.۳. تعداد  $n$  پسر و پدر و مادرهای آنها در یک جمع حضور دارند. به چند طریق می‌توان این  $3n$  نفر را به  $n$  گروه ۳ نفری تقسیم کرد به طوری که در هر گروه یک پسر، یک مرد و یک زن داشته باشیم اما هیچ پسری با پدر و مادر خودش در یک گروه نباشد؟

۱۳.۶.۳. سه توپ سیاه، چهار توپ قرمز و پنج توپ سفید داریم. به چند طریق می‌توان آنها را در کنار یکدیگر قرار داد به طوری که همهٔ توپ‌های هم‌رنگ یک جا در کنار یکدیگر نباشند؟ (بنابراین، مثلاً می‌توانیم دو یا سه توپ قرمز در کنار یکدیگر داشته باشیم ولی چهارتایی نباید در کنار هم باشند.)

۱۴.۶.۳. فرض کنیم  $k$ ،  $n$  و  $r$  اعدادی طبیعی باشند. ثابت کنید تعداد جواب‌های حساسی معادلهٔ

$$x_1 + \dots + x_n = r$$

که  $x_i$  ها حداکثر  $k$  باشند برابر

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} \binom{r - (k+1)i + n - 1}{n-1}$$

است. همچنین ثابت کنید که تعداد جواب‌های طبیعی با همین شرط برابر

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} \binom{r - ki - 1}{n-1}$$

این مسئله را به حالت کلی تعمیم دهید.

می‌باشد.

۱۵.۶.۳. فرض کنیم  $T_n$  برابر تعداد جایگشت‌های اعداد  $1, \dots, n$  باشد که در آنها به ازای هر  $k = 1, \dots, n-1$  هیچگاه  $k+1$  بعد از  $k$  نیامده باشد. ثابت کنید  $T_n = D_n + D_{n-1}$ .

۱۶.۶.۳. فرض کنیم  $m$  و  $n$  اعدادی طبیعی باشند و  $m < n$ . تعداد جایگشت‌هایی مانند  $a_1 \dots a_n$  از اعداد  $1, \dots, n$  را بیابید که

$$\{a_1, \dots, a_m\} = \{1, \dots, m\}.$$

(برای تعیین این تعداد از تعداد جایگشت‌های پریش استفاده کنید.)

۱۷.۶.۳. یک جایگشت مانند  $a_1 \dots a_{2n}$  از اعداد  $1, \dots, 2n$  را خوب می‌نامیم هرگاه برای حداقل یک  $i \in \{1, 2, \dots, 2n-1\}$  داشته باشیم  $|a_i - a_{i+1}| = n$ . نشان دهید به ازای هر  $n$ ، تعداد جایگشت‌های خوب بیشتر از جایگشت‌های غیرخوب است.

۱۸.۶.۳. فرض کنیم  $T_n$  برابر باشد با تعداد ماتریس‌های  $n \times n$  با درایه‌های  $0$  و  $1$  که در هر سطر و هر ستون آنها حداقل یک بار  $1$  آمده باشد. ثابت کنید  $T_n$  برابر

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (2^{n-k} - 1)^n$$

است.

۱۹.۶.۳. فرض کنیم  $m$  و  $n$  اعدادی طبیعی باشند و  $d = \gcd(m, n)$ . ثابت کنید  $\varphi(mn)\varphi(d) = \varphi(m)\varphi(n)d$ .

۲۰.۶.۳. ثابت کنید  $\varphi(m)$  برای هر  $m \geq 3$  زوج است.

۲۱.۶.۳. آیا عددی مانند  $m$  هست که  $\varphi(m) = 14$ ؟ شرطی لازم و کافی برای آن که معادله  $\varphi(x) = k$  جواب داشته باشد را بیان و اثبات کنید.

۲۲.۶.۳. فرض کنیم دنباله  $\{a_n\}$  توسط رابطه  $\sum_{d|n} a_d = 2^n$  تعیین گردد. ثابت کنید  $n|a_n$ .

۲۳.۶.۳. ثابت کنید  $\left\{ \begin{smallmatrix} r \\ 3 \end{smallmatrix} \right\} = \frac{1}{4}(3^{r-1} + 1) - 2^{r-1}$ .

۲۴.۶.۳. ثابت کنید  $\left\{ \begin{smallmatrix} r \\ r-2 \end{smallmatrix} \right\} = \binom{r}{3} + 3\binom{r}{4}$ .

آیا می‌توانید مقدار  $a_n$  را صریحاً مشخص کنید؟

این چند مسأله را به دو روش حل کنید؛ هم با استفاده از استقرا و هم با استفاده از استدلالی ترکیبیاتی.

۲۵.۶.۳. ثابت کنید  $\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} (n-1-k)^n = (n-1)! \binom{n}{2}$

۲۶.۶.۳. ثابت کنید

$$\sum_{k=0}^{n-2} (-1)^k \binom{n-2}{k} (n-2-k)^n = (n-2)! \left( \binom{n}{3} + 3 \binom{n}{4} \right).$$

آیا می‌توانید برای  $n-3$  اتحاد مشابهی را به دست دهید؟

۲۷.۶.۳. ثابت کنید  $[r] = (r-1)! \left( 1 + \frac{1}{r} + \dots + \frac{1}{r-1} \right)$

۲۸.۶.۳. ثابت کنید  $[r-2] = \frac{1}{r(r-1)} (r-2)(3r-1)$

۲۹.۶.۳. ثابت کنید  $\sum_{n=0}^r [n] = r!$

۳۰.۶.۳. ثابت کنید

$$\sum_{i=1}^m i^r = \sum_{n=1}^r \left\{ \begin{matrix} r \\ n \end{matrix} \right\} \binom{m+1}{n+1} n!$$

و برای  $r=4, 5$  اتحادهای به دست آمده را بنویسید.

۳۱.۶.۳. مقدار  $\sum_{n=0}^r (-1)^n \binom{r}{n}$  را بیابید.

۳۲.۶.۳. ثابت کنید

$$F(r) = \sum_{n=0}^r (-1)^n \binom{r}{n} f(n)$$

فقط و فقط وقتی که

$$f(r) = \sum_{n=0}^r (-1)^n \left\{ \begin{matrix} r \\ n \end{matrix} \right\} F(n).$$

(این حکم را می‌توان نوعی دستور عکس دانست.)

۳۳.۶.۳. فرض کنیم  $p$  عددی اول باشد. ثابت کنید

$$\left\{ \begin{matrix} p \\ k \end{matrix} \right\} \equiv_p \left[ \begin{matrix} p \\ k \end{matrix} \right] \equiv_p 0$$

به ازای هر  $1 < k < p$ .

۳۴.۶.۳. فرض کنیم  $p$  عددی اول باشد. ثابت کنید

$$\left[ \begin{matrix} p-1 \\ k \end{matrix} \right] \equiv_p 1$$

به ازای هر  $1 \leq k \leq p$ .

۳.۳۵.۶. فرض کنیم  $p$  عددی اول باشد. ثابت کنید

$$\left\{ \begin{matrix} 2p-2 \\ p \end{matrix} \right\} \equiv_p \left[ \begin{matrix} 2p-2 \\ p \end{matrix} \right] \equiv_p 0.$$

همچنین ثابت کنید که اگر  $p > 3$  آنگاه  $\left[ \begin{matrix} p \\ 2 \end{matrix} \right] \equiv_p 0$ .

۳.۳۶.۶. فرض کنیم  $r$  و  $n$  اعدادی طبیعی باشند و  $X = \{1, \dots, n\}$ . ثابت کنید

$$n^r = \sum_{\phi \neq A \subseteq X} |A|! \left\{ \begin{matrix} r \\ |A| \end{matrix} \right\} = \sum_{k=1}^r \binom{n}{k} k! \left\{ \begin{matrix} r \\ k \end{matrix} \right\} = \sum_{k=1}^r \left\{ \begin{matrix} r \\ k \end{matrix} \right\} n^{\underline{k}}$$

به مجموعه همه توابع از مجموعه‌ای  $r$  عضوی به  $X$  توجه کنید و برد چنین توابعی را  $A$  بنامید.

و با توجه به آن قضیه ۳.۵.۵ را نتیجه بگیرید.

۳.۳۷.۶. ثابت کنید

$$\left\{ \begin{matrix} r+1 \\ n \end{matrix} \right\} = \sum_{k=1}^r \binom{r}{k} \left\{ \begin{matrix} k \\ n-1 \end{matrix} \right\}.$$

## بازگشت

حقایق ریاضی همانند  
شکوفه‌های بهاری در بیشه‌زارها  
هستند که در فصل خود  
شکופا می‌شوند و هیچ انسانی  
نمی‌تواند شکופا شدن آنها را  
تسریع بخشد یا به تعویق افکند.  
**János Bolyai**

15 Dec 1802 - 27 Jan 1860

### ۰.۴ آنچه در این فصل می‌خوانید

همان گونه که ممکن است تا به حال متوجه شده باشید، در حل مسائل شمارشی اغلب پیش می‌آید که جواب مسأله توسط یک رابطه بازگشتی تعیین می‌گردد. در حقیقت هرگاه که برای پاسخ دادن به یک سؤال شمارشی از استقرای ریاضی استفاده کنیم با رابطه‌ای بازگشتی مواجه می‌شویم. ممکن است این فرآیند توسط استقرای معمولی یا به وسیله استقرای قوی انجام گیرد. اگر پاسخ سؤال شمارشی مورد نظر را با  $a_n$  نمایش دهیم و حل این سؤال با استفاده از استقرای معمولی



صورت پذیرد، آنگاه رابطه‌ای که برای تعیین  $a_n$  به دست می‌آوریم تابعی از  $a_{n-1}$  و  $n$  خواهد بود و در حقیقت با دانستن  $a_{n-1}$  می‌توانیم جمله بعدی دنباله، یعنی  $a_n$  را به دست آوریم. اما اگر از استقرای قوی استفاده کنیم آنگاه برای تعیین  $a_n$  مجبوریم از برخی یا همه جمله‌های قبلی، یعنی  $a_1, \dots, a_{n-1}$  استفاده کنیم.

بنابراین با دنباله‌هایی مانند  $a_n$  مواجه می‌شویم که در رابطه‌ای مانند

$$a_n = f(n, a_1, \dots, a_{n-1})$$

صدق می‌کنند که در آن  $f$  تابعی است که ارتباط جمله‌های قبلی دنباله و عدد  $n$  را با  $a_n$  مشخص می‌سازد. عبارتی به شکل فوق را یک رابطه بازگشتی<sup>۱</sup> یا معادله بازگشتی<sup>۲</sup> می‌نامیم. به کار بردن کلمه معادله دلالت بر این دارد که چیزی در این میان باید حل شود و لذا وقتی با یک معادله بازگشتی مواجه می‌شویم قاعدتاً باید یافتن مجهولی مورد نظر باشد. اما این مجهول چیست؟

منظور از حل یک معادله بازگشتی، ارائه دستوری صریح برای یافتن دنباله  $\{a_n\}$  است؛ دستوری که مقدار  $a_n$  را مستقیماً بر حسب  $n$  و بدون توجه به مقادیر قبلی  $a_n$  به دست دهد. ممکن است پاسخ صریحی که برای یک معادله بازگشتی به دست می‌آید نوعی بازگشت در محاسبات را در خود داشته باشد. اما حتی اگر چنین وضعیتی رخ دهد باز هم پاسخ ارائه شده را یک جواب صریح برای آن معادله می‌نامیم.

مثلاً اگر پاسخ صریح معادله را به صورت  $a_n = n!$  ارائه دهیم آیا واقعاً مقدار  $a_n$  صریحاً مشخص می‌گردد؟

اجازه دهید برای روشن شدن بحث مثالی بزنیم. همان طور که در مثال ۳.۲.۱ دیدیم، تعداد حرکت‌های لازم برای انتقال  $n$  حلقه از میله اول به میله سوم در برج هانوی توسط رابطه بازگشتی

$$a_n = 2a_{n-1} + 1$$

به دست می‌آید. با دانستن جمله اول این دنباله که برابر ۱ است می‌توان جملات

<sup>۱</sup>recurrence relation

<sup>۲</sup>recurrence equation

بعدی آن را به دست آورد. داریم

$$a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 7, a_4 = 15, \dots$$

اما همان طور که در قضیه ۴.۲.۱ دیدیم مقدار  $a_n$  توسط دستور صریح  $a_n = 2^n - 1$  تعیین می‌گردد. این دستور بدون مراجعه به مقادیر قبلی  $a_n$  مقدار آن را به دست می‌دهد و از این رو پاسخ صریح این دنباله نامیده می‌شود. بدیهی است که مثلاً برای تعیین  $a_1$  باید  $2^1 - 1$  را محاسبه کنیم و محاسبه این عدد نیازمند نوعی محاسبات بازگشتی است اما به هر حال پاسخ  $a_n = 2^n - 1$  برای معادله بازگشتی  $a_n = 2a_{n-1} + 1$  با شرط  $a_1 = 1$  را یک پاسخ صریح برای آن می‌نامند.

به کار بردن کلمه یک در جمله قبلی این تصور را ایجاد می‌کند که ممکن است پاسخ‌های صریح دیگری نیز برای این معادله با همین شرط  $a_1 = 1$  وجود داشته باشد؛ اما حقیقت امر این است که چنین نیست و در واقع این تنها پاسخ ممکن برای این معادله است. شاید چون هنوز یکتایی جواب صریح را اثبات نکرده‌ایم خود را ملزم می‌دانیم که پاسخ ارائه شده را یک پاسخ صریح برای معادله بدانیم.

در هر صورت به سادگی می‌توان اثبات کرد که با شرط  $a_1 = 1$ ، معادله بازگشتی  $a_n = 2a_{n-1} + 1$  جوابی منحصر به فرد دارد. فرض کنیم دو پاسخ برای این معادله وجود داشته باشد. به سادگی می‌توان به وسیله استدلالی استقرایی اثبات کرد که این دو جواب لزوماً با هم برابرند.

همان طور که می‌دانیم جواب مسائل شمارشی فقط به وسیله دنباله‌های یک متغیره معرفی نمی‌شوند و ممکن است ما با مسأله‌ای شمارشی مواجه شویم که چند متغیر در آن دخالت داشته باشند. به عنوان نمونه‌هایی معروف از این نوع می‌توانیم به نُه مسأله‌ای که در فصل قبل به آنها پرداختیم اشاره کنیم. وقتی می‌خواهیم تعداد حالات قرار دادن  $r$  توپ در  $n$  جعبه را مورد بررسی قرار دهیم مسلماً با جوابی به صورت  $a_{r,n}$  مواجه می‌شویم. به عنوان مثال، اعداد استرلینگ نوع اول و دوم یعنی  $[n]$  و  $\{n\}$  نمونه‌هایی از دنباله‌های دو متغیره هستند.

اگر شرط اولیه نداشته باشیم آیا پاسخ منحصر به فرد است؟

در این گونه موارد ممکن است مقدار  $a_{r,n}$  بر اساس مقادیر قبلی  $a_{r,1}, \dots, a_{r-1,n}$  تعیین گردد یا ممکن است مقدار  $a_{r,n}$  با مقادیر قبلی  $a_{1,n}, \dots, a_{r-1,n}$  در ارتباط باشد. اگر چنین اتفاقی بیفتد در حقیقت می‌توان یکی از متغیرها را پارامتری دلخواه در نظر گرفت و دنباله‌ای جدید تعریف کرد که یک متغیره باشد و به طریق بازگشتی به دست آید. مثلاً در حالت اول می‌توانیم دنباله  $b_n$  را به صورت  $b_n = a_{r,n}$  برای پارامتر دلخواه ولی ثابت  $r$  در نظر بگیریم یا در حالت دوم می‌توانیم دنباله  $c_r$  را به صورت  $c_r = a_{r,n}$  برای پارامتر دلخواه ولی ثابت  $n$  تعریف کنیم.

اما در عمل با مسائلی مواجه می‌شویم که به این سادگی نیستند یعنی مقدار  $a_{r,n}$  با مقادیر  $a_{r,1}, \dots, a_{r,n-1}$  و مقادیر  $a_{1,n}, \dots, a_{r-1,n}$  در ارتباط است. به عنوان نمونه با توجه به قضیه ۳.۵.۳ دنباله  $a_{r,n} = \{r_n\}$  در رابطه بازگشتی

$$a_{r,n} = a_{r-1,n-1} + na_{r-1,n}$$

صدق می‌کند. اما به هر حال این گونه روابط بازگشتی برای پاسخ دادن به یک سؤال شمارشی نیز طبق فرآیندی استقرایی به دست می‌آیند.

در حل مسائل شمارشی به وسیله روابط بازگشتی، سه مطلب از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. اولین مسأله این است که بتوانیم رابطه بازگشتی را حدس بزنیم. مسأله دوم این است که بتوانیم رابطه‌ای را که حدس زده‌ایم اثبات کنیم. و از همه مهم‌تر این است که بتوانیم پاسخی صریح را در صورت وجود برای آن به دست آوریم. در این فصل به این سه مهم خواهیم پرداخت.

مثلاً در مسأله برج هانوی با هر سه مورد برخورد کردیم.

## ۱.۴ به دست آوردن روابط بازگشتی

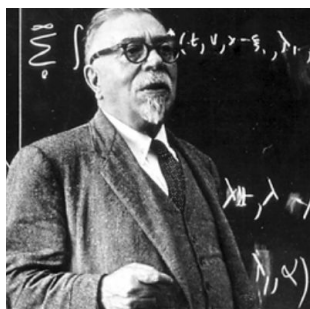
قبلاً نمونه‌هایی از مسائل شمارشی را که منجر به روابط بازگشتی می‌شوند در قضایا و مثال‌های ۳.۲.۱، ۷.۲.۱، ۱۲.۲.۱، ۳.۴.۱، ۲.۳.۲، ۳.۳.۲، ۴.۳.۲، ۱۲.۳.۲، ۱۳.۳.۲، ۱۴.۳.۲، ۱.۴.۲، ۲.۴.۲، ۱۱.۴.۲، ۱۲.۴.۲، ۱۴.۳.۳،

۶.۴.۳، ۱۰.۴.۳، ۳.۵.۳ و ۴.۵.۳ دیدیم. اما بد نیست چند نمونه دیگر را نیز تجربه کنیم.

یکی از مهم‌ترین وظایف یک ریاضیدان در مقام مشاوره برای دانشمندان این است که آنان را از توقع زیاد داشتن از ریاضیدانان بر حذر دارد.

**Norbert Wiener**

26 Nov 1894 - 18 March 1964



نمونه‌های جالبی از روابط بازگشتی را می‌توان در یافتن تعداد جایگشت‌هایی از نوعی خاص مشاهده کرد. همان طور که در قضیه ۱۱.۴.۲ دیدیم مسأله یافتن تعداد جایگشت‌های پریش، نمونه‌ای از این دست است. نکته جالبی که در این مثال وجود دارد اهمیتی است که شرط اولیه مسأله می‌تواند در تعیین رابطه بازگشتی داشته باشد. در قضیه ۱۱.۴.۲ دیدیم که تعداد جایگشت‌های پریش، یعنی  $D_n$ ، در رابطه بازگشتی

$$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$$

صدق می‌کند که شرط اولیه مسأله،  $D_1 = 0$  و  $D_2 = 1$  می‌باشد. بدین ترتیب می‌توان جملات بعدی این دنباله را به دست آورد. چند مقدار اولیه عبارتند از

$$D_1 = 0, D_2 = 1, D_3 = 2, D_4 = 9, D_5 = 44, D_6 = 265,$$

$$D_7 = 1854, D_8 = 14833, \dots$$

از سوی دیگر، دنباله  $a_n = n!$  نیز در همین رابطه بازگشتی صدق می‌کند! به سادگی می‌توان دید که

$$\begin{aligned} a_n &= n! \\ &= (n-1)(n-2)!n \\ &= (n-1)(n-2)!(n-1+1) \\ &= (n-1)((n-1)! + (n-2)!) \\ &= (n-1)(a_{n-1} + a_{n-2}). \end{aligned}$$

بنابراین  $D_n$  و  $n!$  هر دو در یک رابطه بازگشتی صدق می‌کنند و چیزی که باعث می‌شود این دو دنباله کاملاً با یکدیگر فرق داشته باشند مقدار اولیه آنهاست.

برای  $D_n$  داریم  $D_1 = 0$  و  $D_2 = 1$ ، و برای  $a_n = n!$  داریم  $a_1 = 1$  و  $a_2 = 2$ . این مطلب نشان می‌دهد که مقادیر اولیه یک دنباله می‌تواند در تعیین شکل آن بسیار مؤثر باشد. در اینجا دنباله  $a_n$  توسط رابطه صریح  $a_n = n!$  تعیین می‌گردد و  $D_n$  توسط دستور صریح

$$D_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$$

به دست می‌آید. از آنجایی که  $D_n$  و  $n!$  هر دو در یک رابطه بازگشتی صدق می‌کنند گاهی اوقات  $D_n$  را با نماد  $n!$  نمایش می‌دهند و آن را زیرفاکتوریل<sup>۳</sup> عدد  $n$  می‌خوانند. بنابراین  $n! = (n-1)((n-1)! + (n-2)!) + (n-1)!$  و مقدار صریح آن توسط  $n! = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$  تعیین می‌گردد.

در قضیه ۶.۴.۳ رابطه‌ای بازگشتی برای تعیین تعداد افراهای نامرتب  $r$  به  $n$  عدد، یعنی  $\Pi(r, n)$  را به دست آوردیم. اکنون رابطه بازگشتی دیگری را برای همین دنباله اثبات می‌کنیم.

**قضیه ۱.۱.۴.** فرض کنیم  $r$  و  $n$  اعدادی طبیعی باشند. در این صورت

$$\Pi(r, n) = \Pi(r-1, n-1) + \Pi(r-n, n).$$

**برهان.** می‌دانیم که  $\Pi(r, n)$  برابر است با تعداد حالات قرار دادن  $r$  توپ یکسان در  $n$  جعبه یکسان به طوری که هیچ جعبه‌ای خالی نباشد. برای قرار دادن  $r$  توپ در  $n$  جعبه، دو حالت ممکن است اتفاق افتد؛ یا جعبه‌ای وجود دارد که شامل دقیقاً ۱ توپ است یا در هر جعبه حداقل ۲ توپ وجود دارد.

اگر جعبه‌ای شامل دقیقاً ۱ توپ وجود داشته باشد آنگاه باید بقیه توپ‌ها را در بقیه جعبه‌ها قرار داد که این کار به  $\Pi(r-1, n-1)$  طریق صورت می‌گیرد. همچنین اگر در هر جعبه حداقل ۲ توپ وجود داشته باشد آنگاه در هر جعبه ۱ توپ قرار می‌دهیم و  $r-n$  توپ باقیمانده را در جعبه‌ها می‌گذاریم به گونه‌ای که در هر جعبه حداقل ۱ توپ قرار گیرد. این کار نیز به  $\Pi(r-n, n)$  طریق صورت

وقتی به نماد  $i$  رسیدید لازم نیست کتاب را ۱۸۰ درجه بچرخانید. این علامت درست چاپ شده است.



به چند طریق می‌توان  $r$  توپ یکسان را در  $n$  جعبه یکسان قرار داد به طوری که در هر جعبه حداقل  $k$  توپ باشد؟

<sup>۳</sup>subfactorial

می گیرد. بنابراین با توجه به اصل جمع، حکم نتیجه می شود. ■

دیدیم که تعداد افرازهای یک مجموعه  $r$  عضوی به  $n$  مجموعه ناتهی توسط اعداد استرلینگ نوع دوم تعیین می گردد که با نماد  $\{n^r\}$  نمایش داده می شود و  $r$  به  $n$  مجموعه خوانده می شود. بنابراین می توان گفت که تعداد افرازهای یک مجموعه  $r$  عضوی (به ۱ یا ۲ یا ... یا  $r$  مجموعه) برابر است با  $\sum_{n=1}^r \{n^r\}$ . این تعداد را با  $B_r$  نمایش می دهیم. تعریف زیر را ببینید.

**تعریف ۲.۱.۴.** فرض کنیم  $r \in \mathbb{N}$ . تعداد افرازهای  $\{1, 2, \dots, r\}$  را با  $B_r$  نمایش می دهیم. این اعداد را *اعداد بل* <sup>۴</sup> می نامند. ♣

**مثال ۳.۱.۴.** مقدار  $B_3$  را تعیین کنید و کلیه افرازهای  $\{1, 2, 3\}$  را بنویسید.

تعداد افرازهای یک مجموعه ۳ عضوی برابر ۵ است که عبارتند از

$$\begin{aligned} &\{1, 2, 3\}, \\ &\{1\} \cup \{2, 3\}, \\ &\{2\} \cup \{1, 3\}, \\ &\{3\} \cup \{1, 2\}, \\ &\{1\} \cup \{2\} \cup \{3\}. \spadesuit \end{aligned}$$

این تعداد برابر است با تعداد رابطه های هم ارزی <sup>۵</sup> روی  $\{1, 2, \dots, r\}$ ، زیرا تناظری یک به یک بین افرازهای روی یک مجموعه و رابطه های هم ارزی روی آن وجود دارد؛ کافی است برای یک افراز مانند  $X_1, \dots, X_n$  از مجموعه  $X$  رابطه  $\sim$  را به این صورت تعریف کنیم که  $x \sim y$  فقط و فقط وقتی که  $x$  و  $y$

آیا رابطه برادر بودن بین انسان ها رابطه ای متقارن است؟

<sup>۴</sup>Bell numbers

<sup>۵</sup>equivalence relation. یک رابطه هم ارزی روی یک مجموعه مانند  $X$  رابطه ای است که منعکس، متعدی و متقارن باشد. به عبارت دیگر رابطه  $\sim$  روی  $X$  را یک رابطه هم ارزی می نامیم هرگاه به ازای هر  $x \in X$  داشته باشیم  $x \sim x$  (منعکس بودن)؛ به ازای هر  $x, y \in X$  اگر  $x \sim y$  آنگاه  $y \sim x$  (متقارن بودن)؛ به ازای هر  $x, y, z \in X$  اگر  $x \sim y$  و  $y \sim z$  آنگاه  $x \sim z$  (متعدی بودن). مثلاً = یک رابطه هم ارزی روی مجموعه اعداد حقیقی است.

هر دو در یک مجموعه مانند  $X_i$  قرار داشته باشند. از سوی دیگر می‌توان برای رابطه هم‌ارزی داده شده  $\sim$  روی  $X$  مجموعه‌های  $\{y \in X : y \sim x\} = [x]_{\sim}$  را در نظر گرفت. این مجموعه‌ها افزایی برای  $X$  را تشکیل می‌دهند.

بنابراین مسأله یافتن تعداد افزاهای یک مجموعه  $r$  عضوی، یعنی یافتن  $B_r$ ، معادل است با مسأله یافتن تعداد رابطه‌های هم‌ارزی روی آن مجموعه. همان طور که در بالا گفتیم این تعداد برابر است با مجموع تعداد افزاهای  $r$  به  $n$  مجموعه برای  $n$  های مختلف از ۱ تا  $r$ ، یعنی

$$B_r = \sum_{n=1}^r \left\{ \begin{matrix} r \\ n \end{matrix} \right\}.$$

اما می‌توان این دنباله را توسط رابطه بازگشتی دیگری نیز محاسبه کرد. قضیه ۴.۱.۴. فرض کنیم  $r$  عددی طبیعی باشد. در این صورت

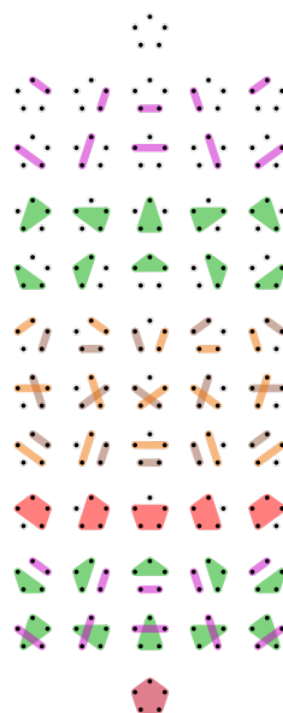
$$B_{r+1} = \sum_{n=0}^r \binom{r}{n} B_n.$$

**برهان.** عدد ۱ را در نظر می‌گیریم. این عدد ممکن است با  $n$  عضو دیگر از مجموعه  $\{1, 2, \dots, r+1\}$  در یک مجموعه افزایی آمده باشد که  $n$  می‌تواند ۰ یا ۱ یا ... یا  $r$  باشد.

اما برای این که ۱ با  $n$  عضو دیگر در یک مجموعه آمده باشد ابتدا باید  $n$  عضو از بین اعضای دیگر (یعنی ۲ تا  $r+1$ ) انتخاب کنیم و بقیه اعضا را افزای کنیم. این کار به  $\binom{r}{n}$  **ضربدر**  $B_{(r+1)-(n+1)}$  طریق صورت می‌گیرد (چون تعداد بقیه اعضا که باید افزای شوند برابر است با  $(r+1) - (n+1)$ ). لذا داریم

$$\begin{aligned} B_{r+1} &= \sum_{n=0}^r \binom{r}{n} B_{(r+1)-(n+1)} \\ &= \sum_{n=0}^r \binom{r}{n} B_{r-n} = \sum_{n=0}^r \binom{r}{r-n} B_{r-n} = \sum_{n=0}^r \binom{r}{n} B_n. \blacksquare \end{aligned}$$

قبل از آن که به روابط بازگشتی پیچیده‌تر پردازیم اجازه دهید چند مثال ساده را



مورد بررسی قرار دهیم. یادآوری می‌کنیم که بنابر اصل ضرب، تعداد دنباله‌های  $r$  حرفی که هر حرف آن می‌تواند  $n$  حالت مختلف داشته باشد برابر است با  $n^r$ . این تعداد برابر است با تعداد حالات قرار دادن  $r$  توپ متمایز در  $n$  جعبه متمایز. **مثال ۵.۱.۴.** تعداد دنباله‌های  $r$  رقمی با ارقام ۰ و ۱ را بیابید که در آنها ۰۰ ظاهر نشده باشد.

حداکثر چند دنباله  $r$  حرفی با حروف ۱ تا  $n$  می‌توان ساخت به طوری که هر دو دنباله متمایز حداقل در دو مکان متفاوت باشند؟

برای  $r = ۱, ۲, ۳, ۴$  این دنباله‌ها عبارتند از

۰, ۱.

۰۱, ۱۰, ۱۱.

۰۱۰, ۰۱۱, ۱۰۱, ۱۱۰, ۱۱۱.

۰۱۰۱, ۰۱۱۰, ۰۱۱۱, ۱۰۱۰, ۱۰۱۱, ۱۱۰۱, ۱۱۱۰, ۱۱۱۱.

اگر بخواهیم دنباله‌های ۵ رقمی مناسب را بنویسیم، یا باید در سمت چپ آنها ۰ قرار دهیم یا ۱. اگر در سمت چپ ۰ بگذاریم آنگاه باید رقم بعد از آن را برابر ۱ قرار دهیم (چون ۰۰ نباید ظاهر شود) و لذا در سمت چپ باید ۰۱ داشته باشیم. بنابراین ۳ رقم دیگر باقی می‌ماند که با توجه به حالات بالا به ۵ طریق نوشته می‌شود. اما اگر بخواهیم در سمت چپ ۱ بگذاریم آنگاه ۴ رقم دیگر باقی می‌ماند که به ۸ طریق نوشته خواهد شد. یعنی دنباله‌های ۵ رقمی مورد نظر عبارتند از

۰۱۰۱۰, ۰۱۰۱۱, ۰۱۱۰۱, ۰۱۱۱۰, ۰۱۱۱۱,

۱۰۱۰۱, ۱۰۱۱۰, ۱۰۱۱۱, ۱۱۰۱۰,

۱۱۰۱۱, ۱۱۱۰۱, ۱۱۱۱۰, ۱۱۱۱۱.

در حالت کلی می‌توان گفت که دنباله‌های  $r$  رقمی مورد نظر را می‌توان با افزودن ۰ به سمت چپ دنباله‌های مناسب  $r - ۲$  رقمی یا با افزودن ۱ به سمت چپ دنباله‌های مناسب  $r - ۱$  رقمی به دست آورد. بنابراین اگر  $a_r$  پاسخ مسأله باشد،

داریم

$$a_r = a_{r-1} + a_{r-2} \spadesuit$$

در مثال بعدی شرط دیگری را روی دنباله‌ها می‌گذاریم و تعداد آنها را به دست می‌آوریم. هدف این است که با این مثال‌ها بتوانید به دست آوردن روابط بازگشتی را تجربه کنید.

**مثال ۶.۱.۴.** تعداد دنباله‌های  $r$  رقمی با ارقام ۰، ۱ و ۲ را بیابید که در آنها رقم ۰ در سمت راست رقم ۲ نیامده باشد.

اگر از ارقام ۰، ۱، ...،  $n$  استفاده کنیم، چند دنباله با این شرط وجود دارد؟

منظور سؤال این است که اگر رقم ۲ در جایی از دنباله ظاهر شد، ارقام پس از آن (یعنی همه آنها) که در سمت راست رقم ۲ آمده‌اند) نمی‌توانند ۰ باشند. برای روشن شدن سؤال، حالات مختلف را برای  $r = 1, 2, 3$  فهرست می‌کنیم. داریم

۰، ۱، ۲.  
 ۰۰، ۰۱، ۰۲، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۲۱، ۲۲.  
 ۰۰۰، ۰۰۱، ۰۰۲، ۰۱۰، ۰۱۱، ۰۱۲، ۰۲۱، ۰۲۲،  
 ۱۰۰، ۱۰۱، ۱۰۲، ۱۱۰، ۱۱۱، ۱۱۲، ۱۲۱، ۱۲۲،  
 ۲۱۱، ۲۱۲، ۲۲۱، ۲۲۲.

اکنون ببینیم چگونه می‌توانیم دنباله‌های ۴ رقمی مناسب را با استفاده از دنباله‌های قبلی بنویسیم.

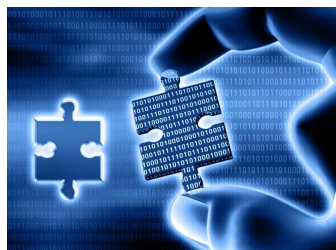
برای نوشتن یک دنباله ۴ رقمی، رقم سمت چپ می‌تواند برابر ۰ یا ۱ یا ۲ باشد. اگر رقم سمت چپ ۰ باشد آنگاه با توجه به حالات نوشته شده در بالا، ۳ رقم دیگر می‌تواند به ۲۰ روش نوشته شود.

به همین شکل، روی رقم سمت راست بحث کنید و رابطه بازگشتی را به دست آورید.

همچنین اگر رقم سمت چپ برابر ۱ باشد نیز می‌توانیم ۳ رقم دیگر را به ۲۰ روش بنویسیم. اما اگر رقم سمت چپ برابر ۲ باشد آنگاه پس از آن نباید ۰ ظاهر شود و لذا ارقام بعدی باید ۱ یا ۲ باشند که به ۲۳ طریق نوشته می‌شوند. بنابراین

کلیه دنباله‌های مورد نظر ۴ رقمی عبارتند از

۰۰۰۰, ۰۰۰۱, ۰۰۰۲, ۰۰۱۰, ۰۰۱۱, ۰۰۱۲, ۰۰۲۱, ۰۰۲۲,  
 ۰۱۰۰, ۰۱۰۱, ۰۱۰۲, ۰۱۱۰, ۰۱۱۱, ۰۱۱۲, ۰۱۲۱, ۰۱۲۲,  
 ۰۲۱۱, ۰۲۱۲, ۰۲۲۱, ۰۲۲۲,  
 ۱۰۰۰, ۱۰۰۱, ۱۰۰۲, ۱۰۱۰, ۱۰۱۱, ۱۰۱۲, ۱۰۲۱, ۱۰۲۲,  
 ۱۱۰۰, ۱۱۰۱, ۱۱۰۲, ۱۱۱۰, ۱۱۱۱, ۱۱۱۲, ۱۱۲۱, ۱۱۲۲,  
 ۱۲۱۱, ۱۲۱۲, ۱۲۲۱, ۱۲۲۲,  
 ۲۱۱۱, ۲۱۱۲, ۲۱۲۱, ۲۱۲۲, ۲۲۱۱, ۲۲۱۲, ۲۲۲۱, ۲۲۲۲.



در حالت کلی اگر پاسخ مسأله را با  $a_r$  نمایش دهیم آنگاه برای نوشتن حالات مورد نظر  $r$  رقمی، رقم سمت چپ می‌تواند برابر ۰ یا ۱ یا ۲ باشد. اگر رقم سمت چپ برابر ۰ باشد آنگاه  $r - ۱$  رقم دیگر به  $a_{r-1}$  طریق تعیین می‌شوند. همچنین اگر رقم سمت چپ برابر ۱ باشد آنگاه  $r - ۱$  رقم دیگر به  $a_{r-1}$  طریق تعیین می‌شوند. اما اگر رقم سمت چپ برابر ۲ باشد آنگاه  $r - ۱$  رقم دیگر به  $۲^{r-1}$  طریق تعیین می‌شوند چون این ارقام باید برابر ۱ یا ۲ باشند. لذا داریم

$$a_r = ۲a_{r-1} + ۲^{r-1}.$$

اما می‌توان با استدلالی دیگر مقدار  $a_r$  را صریحاً تعیین کرد. کافی است به اولین ظاهر شدن عدد ۲ توجه کنیم.

اگر اولین ظاهر شدن ۲ در رقم  $n$  ام باشد ارقام قبل از آن ۰ یا ۱ هستند (چون این اولین ظاهر شدن ۲ است) و ارقام بعد از آن ۱ یا ۲ هستند (چون بعد از ظاهر شدن ۲ نباید ۰ داشته باشیم). بنابراین بقیه ارقام (غیر از رقم  $n$  ام هر یک به ۲ طریق تعیین می‌شوند و در نتیجه  $۲^{r-1}$  حالت داریم. اما  $n$ ، یعنی مکان اولین ظاهر شدن ۲، می‌تواند برابر ۱ یا ۲ یا ... یا  $r$  باشد. لذا باید  $۲^{r-1}$  را  $r$  مرتبه با خودش جمع کنیم. بدین ترتیب تعداد حالات برابر است با  $۲^{r-1} \cdot r$ . اما یک چیز را فراموش کردیم! ممکن است اصلاً ۲ ظاهر نشده باشد. تعداد

این حالات نیز برابر است با  $2^r$  (چون  $r$  رقم داریم که هر کدام برابر ۰ یا ۱ هستند).

خلاصه مطلب این که تعداد مطلوب برابر است با

$$a_r = r \cdot 2^{r-1} + 2^r = (r+2)2^{r-1}. \spadesuit$$

بررسی کنید که این پاسخ صریح در رابطه بازگشتی بالا صدق می‌کند.

مثال بعدی کمی سخت‌تر است. البته فقط کمی!

**مثال ۷.۱.۴.** تعداد دنباله‌های  $r$  رقمی با ارقام ۰، ۱ و ۲ را بیابید که در آنها حداقل یک بار رقم ۲ ظاهر شده باشد و رقم ۰ در سمت راست آخرین ظاهر شدن ۲ نیامده باشد.

به عبارت دیگر می‌خواهیم تعداد دنباله‌هایی را بیابیم که وقتی از سمت چپ به سمت راست حرکت می‌کنیم و به آخرین ظاهر شدن ۲ می‌رسیم پس از آن ۰ دیده نشود. برای ۳ مقدار اولیه  $r$  این دنباله‌ها عبارتند از

$$\begin{aligned} & 2. \\ & 02, 12, 21, 22. \\ & 002, 012, 021, 022, \\ & 102, 112, 121, 122, \\ & 202, 212, 221, 222, 211. \end{aligned}$$

با توجه به این اعداد می‌بینیم که اگر بخواهیم دنباله‌های  $r$  رقمی مناسب را بنویسیم و به رقم سمت چپ آنها توجه کنیم رابطه بازگشتی

$$a_r = a_{r-1} + a_{r-1} + (a_{r-1} + 1)$$

آیا می‌توانید پاسخی صریح برای این رابطه بازگشتی بیابید؟

حاصل می‌شود، زیرا رقم سمت چپ برابر ۰ یا ۱ یا ۲ است. اگر رقم سمت چپ برابر ۰ باشد آنگاه برای نوشتن  $r-1$  رقم دیگر می‌توان به  $a_{r-1}$  طریق عمل کرد. همچنین اگر رقم سمت چپ برابر ۱ باشد آنگاه می‌توان به  $a_{r-1}$  طریق عمل کرد. اما اگر رقم سمت چپ برابر ۲ باشد آنگاه غیر از  $a_{r-1}$  دنباله  $r-1$

رقمی مناسب در مرحله قبل، می‌توانیم بعد از ۲ دنباله‌ای را قرار دهیم که شامل  $r - ۱$  بار رقم ۱ است. در نتیجه

$$a_r = 3a_{r-1} + 1.$$

از سوی دیگر می‌توان رابطه بازگشتی دیگری را برای همین دنباله با در نظر گرفتن رقم سمت راست به دست آورد.

اگر به رقم سمت راست توجه کنیم می‌بینیم که این رقم می‌تواند برابر ۱ یا ۲ باشد زیرا اگر رقم سمت راست را برابر ۰ بگذاریم و بخواهیم دنباله‌ای  $r - ۱$  رقمی را در سمت چپ آن قرار دهیم از آنجایی که حتماً یک بار رقم ۲ در آن دنباله ظاهر شده است، ۰ بودن رقم سمت راست با شرطی که برای دنباله گذاشته‌ایم در تناقض است.

اگر رقم سمت راست را برابر ۱ در نظر بگیریم آنگاه  $r - ۱$  رقم قبلی به  $a_{r-1}$  طریق تعیین می‌شوند و اگر رقم سمت راست برابر ۲ باشد آنگاه ارقام قبل از آن می‌توانند ۰ یا ۱ یا ۲ باشند که به  $3^{r-1}$  طریق تعیین می‌گردند. پس  $a_r$  در رابطه بازگشتی

$$a_r = a_{r-1} + 3^{r-1}$$

نیز صدق می‌کند.

از سوی دیگر می‌توان مقدار  $a_r$  را با توجه به ظاهر شدن آخرین ۲ در دنباله تعیین کرد. فرض کنیم رقم ۲ آخرین بار در مکان  $n$  ام دنباله ظاهر شده باشد. در این صورت ارقام قبل از آن می‌توانند ۰ یا ۱ یا ۲ باشند و ارقام پس از آن باید ۱ انتخاب شوند (چون این آخرین ظاهر شدن ۲ است و پس از آن نباید ۰ داشته باشیم). یعنی  $3^{n-1}$  ضربدر ۱ حالت ممکن وجود دارد که آخرین ظاهر شدن ۲ در مکان  $n$  ام باشد. اما  $n$  می‌تواند برابر ۱ یا ۲ یا ... یا  $r$  باشد. در نتیجه

$$a_r = \sum_{n=1}^r 3^{n-1} = \frac{3^r - 1}{2}. \spadesuit$$

اکنون که پاسخ این سؤال را به طور صریح پیدا کردیم به راحتی می‌توانیم با

برای این رابطه بازگشتی  
چطور؟

استدلالی ساده‌تر به همین پاسخ برسیم. این حکم ارزش آن را دارد که به صورت یک قضیه بیان شود. قبل از آن، مثال زیر را ببینید تا بتوانید استدلال ساده‌تری را که ادعا می‌کنیم در آن بیابید.

**مثال ۸.۱.۴.** کلیه دنباله‌های ۳ رقمی با ارقام ۰، ۱ و ۲ را بنویسید.

ما روشی را به کار می‌بریم که توسط آن بتوانیم دنباله‌هایی را که پس از آخرین ۲ در آنها ظاهر نشده است بهتر شناسایی کنیم. بدین منظور این دنباله‌ها را به شکل زیر می‌نویسیم:

۱۱۱  
 ۰۰۰ ↔ ۲۲۲  
 ۰۰۱ ↔ ۲۲۱  
 ۰۱۰ ↔ ۲۱۲  
 ۰۱۱ ↔ ۲۱۱  
 ۰۲۰ ↔ ۲۰۲  
 ۱۰۰ ↔ ۱۲۲  
 ۱۰۱ ↔ ۱۲۱  
 ۱۱۰ ↔ ۱۱۲  
 ۱۲۰ ↔ ۱۰۲  
 ۲۰۰ ↔ ۰۲۲  
 ۲۰۱ ↔ ۰۲۱  
 ۲۱۰ ↔ ۰۱۲  
 ۲۲۰ ↔ ۰۰۲

چه ارتباطی بین اعداد ستون  
سمت چپ و اعداد ستون سمت  
راست وجود دارد؟

به ستون سمت راست نگاه کنید. همه دنباله‌های ستون سمت راست، مطلوب

هستند. به عبارت دیگر اگر دنباله ۱۱۱ را کنار بگذاریم آنگاه در برابر هر دنباله نامطلوب یک دنباله مطلوب وجود دارد. یعنی تعداد دنباله‌های مطلوب برابر است با  $\frac{3^r-1}{2}$ . دقت کنید که برای نوشتن این تناظر یک به یک در دنباله‌های سمت چپ، به جای ۰ رقم ۲ و به جای ۲ رقم ۰ را قرار داده‌ایم. فقط یک دنباله در این میان هست که سرش بی کلاه می‌ماند؛ دنباله‌ای که تمام ارقام آن ۱ است. ♠

این ایده‌ای برای اثبات ساده‌تر حکم را به دست می‌دهد.

**قضیه ۹.۱.۴.** فرض کنیم  $r$  عددی طبیعی باشد. تعداد دنباله‌های  $r$  رقمی با ارقام ۰، ۱ و ۲ که حداقل یک بار عدد ۲ در آنها ظاهر شده و پس از آخرین ظاهر شدن ۲، رقم ۰ نیامده است برابر است با  $\frac{3^r-1}{2}$ .

این حکم را به دنباله‌های  $r$  رقمی با ارقام ۰، ۱، ...،  $n$  که حداقل یک بار  $n$  در آنها ظاهر شده و پس از آخرین ظاهر شدن  $n$ ، رقم ۰ نیامده است تعمیم دهید.

**برهان.** دنباله‌ای که  $r$  رقم آن همگی ۱ هستند را کنار می‌گذاریم. برای هر دنباله دیگر، دنباله متناظر با آن را به این صورت می‌سازیم که به جای ۲ های آن ۰ و به جای ۰ های آن ۲ می‌گذاریم. بدین ترتیب یک دنباله دلخواه، مطلوب است فقط و فقط وقتی که دنباله نظیر آن نامطلوب باشد (چرا؟). بنابراین در بین  $3^r - 1$  دنباله‌ای که در دست داریم تعداد دنباله‌های نامطلوب برابر است با تعداد دنباله‌های مطلوب و لذا نیمی از آنها مطلوب هستند. ■

روابط بازگشتی پیچیده‌تر زمانی حاصل می‌شوند که دنباله پاسخ مسأله با بیش از یک متغیر سر و کار داشته باشد یا پاسخ مسأله توسط دو دنباله متفاوت تعیین گردد که به طور بازگشتی با یکدیگر در ارتباط باشند. اکنون به دنباله‌هایی می‌پردازیم که با بیش از یک متغیر سر و کار داشته باشند. البته قبلاً نمونه‌های زیادی از این دست را دیده‌ایم. مثلاً اگر  $a_{r,n}$  را برابر  $\binom{r}{n}$  در نظر بگیریم، با توجه به مثلث خیام، می‌دانیم که این دنباله در رابطه بازگشتی

$$a_{r,n} = a_{r-1,n-1} + a_{r-1,n}$$

صدق می‌کند. همچنین دنباله  $b_{r,n} = P(r,n)$  در رابطه بازگشتی

$$b_{r,n} = nb_{r-1,n-1} + b_{r-1,n}$$

صدق می‌کند. دنباله‌های دیگری که از این نوع هستند و رابطه بازگشتی آنها برای ما شناخته شده است، دنباله‌های  $c_{r,n} = \{r_n\}$  و  $d_{r,n} = [r_n]$  می‌باشند که در روابط بازگشتی

$$\begin{aligned}c_{r,n} &= c_{r-1,n-1} + nc_{r-1,n}, \\d_{r,n} &= d_{r-1,n-1} + (r-1)d_{r-1,n}\end{aligned}$$

صدق می‌کنند. به خاطر داریم که این دنباله‌ها توسط مسئله قرار دادن  $r$  توپ متمایز در  $n$  جعبه یکسان به طوری که هیچ جعبه‌ای خالی نماند به دست آمدند که در اولی صرفاً توپ‌ها را در جعبه‌ها قرار می‌دادیم و در دومی توپ‌های داخل هر جعبه را دور دایره می‌چیدیم. اگر بخواهیم توپ‌های داخل هر جعبه را در یک صف پشت سر هم قرار دهیم چه دنباله‌ای به وجود می‌آید؟ تعریف زیر را ببینید.

**تعریف ۱۰.۱.۴.** فرض کنیم  $r$  و  $n$  اعدادی طبیعی باشند. تعداد حالات قرار دادن  $r$  توپ متمایز در  $n$  جعبه یکسان به طوری که جعبه‌ها خالی نباشند و توپ‌های داخل هر جعبه در یک صف چیده شده باشند را با  $|r_n|$  نمایش می‌دهیم و آن را  $r$  به  $n$  صف می‌نامیم. ♣

**قضیه ۱۱.۱.۴.** فرض کنیم  $r$  و  $n$  اعدادی طبیعی و بزرگتر یا مساوی ۲ باشند. در این صورت

$$\left| \begin{matrix} r \\ n \end{matrix} \right| = \left| \begin{matrix} r-1 \\ n-1 \end{matrix} \right| + (n+r-1) \left| \begin{matrix} r-1 \\ n \end{matrix} \right|.$$

**برهان.** توپ شماره ۱ را در نظر می‌گیریم. یا این توپ به تنهایی در یک جعبه آمده است یا در جعبه‌ای که این توپ قرار دارد توپ دیگری نیز وجود دارد. اگر این توپ به تنهایی در یک جعبه آمده باشد آنگاه باید بقیه توپ‌ها را در بقیه جعبه‌ها قرار دهیم که این کار به  $|r-1_{n-1}|$  طریق صورت می‌پذیرد. همچنین اگر قرار باشد که در جعبه شامل این توپ، توپ دیگری هم وجود داشته باشد آنگاه باید بقیه توپ‌ها را در کل جعبه‌ها قرار دهیم (به  $|r-1_n|$  طریق) و این توپ

فرض کنیم  $a_{r,n}$  برابر

$$\left| \begin{matrix} r \\ n \end{matrix} \right| - \left| \begin{matrix} r-1 \\ n-1 \end{matrix} \right|$$

باشد. در این صورت دنباله  $\{a_{r,n}\}$  در کدام رابطه بازگشتی صدق می‌کند؟

می‌تواند در ابتدای صف هر جعبه بیاید (به  $n$  طریق) یا می‌تواند بعد از یکی از توپ‌های دیگر در یکی از صف‌ها قرار گیرد (به  $r-1$  طریق). بنابراین با توجه به اصل جمع و اصل ضرب حکم نتیجه می‌شود. ■

بدین ترتیب می‌بینیم که دنباله  $a_{r,n} = \left| \begin{smallmatrix} r \\ n \end{smallmatrix} \right|$  در رابطه بازگشتی

$$a_{r,n} = a_{r-1,n-1} + (n+r-1)a_{r-1,n}$$

صدق می‌کند.

به چند طریق می‌توان ۳۰ توپ متفاوت را در ۵ جعبه متفاوت گذاشت به طوری که در جعبه اول و چهارم زوج توپ قرار بگیرد و در جعبه‌های دیگر فرد توپ؟



کماکان مشاهده نمونه‌های دیگری از به دست آوردن روابط بازگشتی برای پاسخ دادن به مسائل شمارشی می‌تواند مفید باشد. فراموش نمی‌کنیم که حدس زدن، اثبات کردن و حل کردن روابط بازگشتی، سه مسأله مهمی است که قصد داریم در این فصل به آنها بپردازیم و در این بخش، دو مسأله اول را مورد توجه قرار داده‌ایم.

برای آن که صورت مسأله بعدی و حکمی که به دنبال آن هستیم ملموس‌تر باشد ابتدا مثال زیر را با هم بررسی می‌کنیم.

**مثال ۱۲.۱.۴.** کلیه جایگشت‌های ممکن چهار عدد ۱، ۲، ۳ و ۴ را بنویسید و با گذاشتن علامت  $\uparrow$  و  $\downarrow$  در بین جملات متوالی هر جایگشت، تعیین کنید که جمله سمت چپ صعود می‌کند تا به جمله پس از خود برسد یا نزول می‌کند.

به عنوان مثال اگر جایگشت ۱۳۴۲ را در نظر بگیریم، بین ۱ و ۳ باید علامت  $\uparrow$  را قرار دهیم چون جمله سمت چپ باید صعود کند تا به جمله بعدی برسد. بین ۳ و ۴ هم باید همین کار را انجام دهیم اما از ۴ به ۲ باید نزول داشته باشیم. بنابراین می‌نویسیم  $1 \uparrow 3 \uparrow 4 \downarrow 2$ .

بدین ترتیب فهرست کلیه جایگشت‌های ممکن برای چهار عدد ۱، ۲، ۳ و ۴

به شرح زیر است:

$$\begin{aligned}
 & 1 \uparrow 2 \uparrow 3 \uparrow 4, 1 \uparrow 2 \uparrow 4 \downarrow 3, 1 \uparrow 3 \downarrow 2 \uparrow 4, \\
 & 1 \uparrow 3 \uparrow 4 \downarrow 2, 1 \uparrow 4 \downarrow 2 \uparrow 3, 1 \uparrow 4 \downarrow 3 \downarrow 2, \\
 & 2 \downarrow 1 \uparrow 3 \uparrow 4, 2 \downarrow 1 \uparrow 4 \downarrow 3, 2 \uparrow 3 \downarrow 1 \uparrow 4, \\
 & 2 \uparrow 3 \uparrow 4 \downarrow 1, 2 \uparrow 4 \downarrow 1 \uparrow 3, 2 \uparrow 4 \downarrow 3 \downarrow 1, \\
 & 3 \downarrow 1 \uparrow 2 \uparrow 4, 3 \downarrow 1 \uparrow 4 \downarrow 2, 3 \downarrow 2 \downarrow 1 \uparrow 4, \\
 & 3 \downarrow 2 \uparrow 4 \downarrow 1, 3 \uparrow 4 \downarrow 1 \uparrow 2, 3 \uparrow 4 \downarrow 2 \downarrow 1, \\
 & 4 \downarrow 1 \uparrow 2 \uparrow 3, 4 \downarrow 1 \uparrow 3 \downarrow 2, 4 \downarrow 2 \downarrow 1 \uparrow 3, \\
 & 4 \downarrow 2 \uparrow 3 \downarrow 1, 4 \downarrow 3 \downarrow 1 \uparrow 2, 4 \downarrow 3 \downarrow 2 \downarrow 1. \spadesuit
 \end{aligned}$$

سؤالی که اکنون مطرح می‌شود این است که در بین جایگشت‌هایی که می‌توان با اعداد ۱، ...،  $r$  نوشت چند تا وجود دارد که در آنها  $n$  بار علامت صعود مشاهده می‌شود.

بدین ترتیب چند علامت نزول خواهیم داشت؟

**تعریف ۱.۳.۱.۴.** فرض کنیم  $r$  و  $n$  اعدادی طبیعی باشند. تعداد جایگشت‌های اعداد ۱، ...،  $r$  که در آنها  $n$  بار صعود داریم را با  $\langle n \rangle^r$  نمایش می‌دهیم. این اعداد را اعداد/اعداد/ویلری مرتبه اول<sup>۶</sup> می‌نامند.

**قضیه ۱.۴.۱.۴.** فرض کنیم  $r$  و  $n$  اعدادی طبیعی و بزرگتر از ۲ باشند. در این صورت

$$\langle n \rangle^r = (r-n) \langle n-1 \rangle^{r-1} + (n+1) \langle n \rangle^{r-1}.$$

**برهان.** جایگشتی مانند  $i_1 i_2 \dots i_{r-1}$  از اعداد ۱، ...،  $r-1$  را در نظر می‌گیریم. اگر بین دو عدد متوالی از این جایگشت مانند  $i_k i_{k+1}$  علامت  $\uparrow$  آمده باشد و عدد  $r$  را بین آن دو قرار دهیم آنگاه این قسمت از جایگشت به  $i_k \uparrow r \downarrow i_{k+1}$  تبدیل می‌شود، یعنی به این روش تعداد علامت‌های  $\uparrow$  تغییر نخواهد کرد. اما

<sup>۶</sup>Eulerian numbers of the first order

اگر بین این دو عدد متوالی در جایگشت علامت  $\downarrow$  باشد آنگاه با تبدیل این قسمت به  $i_k \uparrow r \downarrow i_{k+1}$ ، در حقیقت یک واحد به تعداد علامت‌های  $\uparrow$  اضافه می‌شود. همچنین با قرار دادن  $r$  در سمت چپ یک جایگشت تغییری در تعداد علامت‌های  $\uparrow$  ایجاد نمی‌شود ولی با قرار دادن  $r$  در سمت راست آن، تعداد  $\uparrow$  ها یکی اضافه می‌شود.

بنابراین با افزودن  $r$  به یک جایگشت دو حالت ممکن است به وجود بیاید؛ تعداد  $\uparrow$  ها تغییر نمی‌کند یا یک واحد افزایش می‌یابد. اما در چند حالت تغییر نمی‌کند و در چند حالت یک واحد افزایش پیدا می‌کند؟ در صورتی که  $r$  را در سمت چپ جایگشت یا در مکان‌هایی که  $\uparrow$  ظاهر شده است قرار دهیم تعداد  $\uparrow$  ها تغییری نمی‌کند و در صورتی که  $r$  را در سمت راست جایگشت یا در مکان‌هایی که  $\downarrow$  ظاهر شده است قرار دهیم تعداد  $\uparrow$  ها یک واحد افزایش پیدا می‌کند. لذا می‌توان گفت که برای ساختن  $n$  صعود یا باید از جایگشت‌های  $r-1$  تایی با  $n$  صعود استفاده کنیم و  $r$  را طوری اضافه کنیم که تغییری در تعداد  $\uparrow$  ها ایجاد نشود (که این تعداد برابر است با  $1$  به علاوه تعداد صعودها، یعنی برابر است با  $n+1$ ) یا باید از جایگشت‌های  $r-1$  تایی با  $n-1$  صعود استفاده کنیم و  $r$  را طوری اضافه کنیم که تعداد  $\uparrow$  ها یک واحد افزایش یابد (که این تعداد برابر است با  $1$  به علاوه تعداد نزولها، یعنی برابر است با  $(n-1) - (r-2) + 1$ ).

در نتیجه برای ساختن جایگشتی از  $r$  عدد با  $n$  صعود، یا یک جایگشت از  $r-1$  عدد با  $n$  صعود انتخاب می‌کنیم (به  $\langle n-1 \rangle^r$  طریق) و  $r$  را طوری اضافه می‌کنیم که تعداد صعودها تغییری نکند (به  $n+1$  طریق) یا یک جایگشت از  $r-1$  عدد با  $n-1$  صعود انتخاب می‌کنیم (به  $\langle n-1 \rangle^r$  طریق) و  $r$  را طوری اضافه می‌کنیم که تعداد صعودها یک واحد افزایش یابد (به  $r-n$  طریق). ■

این قضیه نشان می‌دهد که دنباله  $a_{r,n} = \langle n \rangle^r$  در رابطه بازگشتی

$$a_{r,n} = (r-n)a_{r-1,n-1} + (n+1)a_{r-1,n}$$

صدق می‌کند. نکته جالب دیگر این است که این اعداد به نوعی متقارن هستند. حکمی که در زیر می‌آید چیزی شبیه اتحاد  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$  است که قبلاً اثبات آن

در این قضیه اگر اعداد را دور یک دایره نوشته باشیم چه پاسخی دارید؟

را دیده‌ایم.

**قضیه ۱۵.۱.۴.** فرض کنیم  $r$  و  $n$  اعدادی طبیعی باشند. در این صورت

$$\langle r \rangle_n = \langle r \rangle_{r-(n+1)}.$$

**برهان.** جایگشت  $i_1 \dots i_r$  را در نظر می‌گیریم. اگر این جایگشت  $n$  صعود داشته باشد آنگاه جایگشت بازتاب<sup>۷</sup> آن یعنی  $i_r \dots i_1$  دارای  $(r-1)-n$  صعود خواهد بود، چون علامت‌های  $\uparrow$  به  $\downarrow$  و بالعکس تبدیل می‌شوند (توجه داریم که تعداد کل علامت‌ها برابر  $r-1$  است و وقتی  $n$  صعود داریم باید  $(r-1)-n$  نزول داشته باشیم). بنابراین، در حقیقت عمل بازتاب تناظری یک به یک بین جایگشت‌های دارای  $n$  صعود و جایگشت‌های دارای  $(r-1)-n$  صعود برقرار می‌کند و لذا حکم برقرار است. ■

البته احکام دیگری نیز در مورد اعداد اویلری وجود دارد که معمولاً با استدلالی ترکیباتی اثبات می‌شوند. یک نمونه ساده دیگر به شرح زیر است.

**قضیه ۱۶.۱.۴.** فرض کنیم  $r$  عددی طبیعی باشد. در این صورت

$$\sum_{n=0}^{r-1} \langle r \rangle_n = r!.$$

**برهان.** هر جایگشتی می‌تواند  $0$  صعود یا  $1$  صعود یا  $\dots$  یا  $r-1$  صعود داشته باشد. بنابراین حکم به وضوح برقرار است. ■

بدیهی است که  $\langle r \rangle_0 = \langle r-1 \rangle_1 = 1$ . جایگشتی که اصلاً صعود ندارد  $1 \dots (r-1)$  و جایگشتی که دارای  $r-1$  صعود است  $r \dots 12$  می‌باشد.

اتحادهای دیگری نیز در مورد اعداد اویلری و ارتباط آنها با اعداد استرلینگ وجود دارد که در تمرین‌ها معرفی خواهند شد.

مسئله جالب دیگری که می‌توان در مورد تعداد جایگشت‌هایی خاص مطرح کرد، یافتن تعداد جایگشت‌هایی است که علامت‌های  $\uparrow$  و  $\downarrow$  به صورت متناوب

با استفاده از رابطه بازگشتی مذکور در قضیه ۱۴.۱.۴، مثلثی شبیه مثلث خیام درست کنید و نشان دهید که حکم قضیه ۱۵.۱.۴ چگونه باعث متقارن شدن اعداد آن مثلث خواهد شد.

<sup>۷</sup> reflection

ظاهر شده باشند. ابتدا برای جایگشت‌های ۵ تایی این مسأله را بررسی می‌کنیم.  
**مثال ۱۷.۱.۴.** کلیه جایگشت‌های اعداد ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ را بنویسید که هیچ دو صعود متوالی یا دو نزول متوالی در آنها نداشته باشیم.

چند جایگشت داریم که سه صعود متوالی یا دو نزول متوالی در آنها نداشته باشیم؟

مثلاً جایگشت  $4 \downarrow 5 \uparrow 2 \downarrow 3 \uparrow 1$  نمونه‌ای از چنین جایگشت‌هایی است ولی  $5 \uparrow 4 \uparrow 3 \downarrow 2 \uparrow 1$  از این نوع نیست.

جایگشت‌هایی که با  $\uparrow$  شروع می‌شوند و واجد این خاصیت هستند عبارتند از

۱۳۲۵۴، ۱۴۲۵۳، ۱۴۳۵۲، ۱۵۲۴۳، ۱۵۳۴۲،  
 ۲۳۱۵۴، ۲۴۱۵۳، ۲۴۳۵۱، ۲۵۱۴۳، ۲۵۳۴۱،  
 ۳۴۱۵۲، ۳۴۲۵۱، ۳۵۱۴۲، ۳۵۲۴۱،  
 ۴۵۱۳۲، ۴۵۲۳۱.

همچنین جایگشت‌هایی که با  $\downarrow$  شروع می‌شوند و واجد این خاصیت هستند عبارتند از

۵۳۴۱۲، ۵۲۴۱۳، ۵۲۳۱۴، ۵۱۴۲۳، ۵۱۳۲۴،  
 ۴۳۵۱۲، ۴۲۵۱۳، ۴۲۳۱۵، ۴۱۵۲۳، ۴۱۳۲۵،  
 ۳۲۵۱۴، ۳۲۴۱۵، ۳۱۵۲۴، ۳۱۴۲۵،  
 ۲۱۵۳۴، ۲۱۴۳۵. ♠

تعریف زیر را ببینید.

**تعریف ۱۸.۱.۴.** جایگشت  $i_1 \dots i_r$  از اعداد  $1, \dots, r$  را متناوب<sup>۸</sup> نامیم هرگاه دو صعود متوالی یا دو نزول متوالی در آن موجود نباشد. جایگشت متناوب  $i_1 \dots i_r$  را افزایشی نامیم هرگاه  $i_1 < i_2$  و کاهشی نامیم هرگاه  $i_1 > i_2$ . ♣

با توجه به این تعریف و با توجه به مثال بالا می‌توانیم حدس بزنیم که تعداد

<sup>۸</sup>alternating

جایگشت‌های متناوب افزایشی و کاهشی با هم برابر است. ممکن است تصور شود که اگر جایگشت متناوبی افزایشی باشد آنگاه بازتاب آن کاهشی است اما همین مثال نشان می‌دهد که این مطلب درست نیست. در حقیقت این مطلب فقط در حالتی درست است که تعداد اعداد جایگشت عددی زوج باشد.

**لم ۱۹.۱.۴.** فرض کنیم  $r$  عددی طبیعی باشد،  $A_r$  تعداد جایگشت‌های متناوب افزایشی  $r$  تایی و  $A'_r$  تعداد جایگشت‌های کاهشی  $r$  تایی. در این صورت  $A_r = A'_r$ .

**برهان.** برای هر جایگشت مانند  $i_1 \dots i_r$ ، جایگشت  $(r+1-i_1) \dots (r+1-i_r)$  را نظیر می‌کنیم. در این صورت جایگشت  $i_1 \dots i_r$  متناوب افزایشی است فقط وقتی که جایگشت  $(r+1-i_1) \dots (r+1-i_r)$  متناوب کاهشی باشد. بدین ترتیب تناظری یک به یک بین جایگشت‌های متناوب افزایشی و جایگشت‌های متناوب کاهشی ایجاد می‌شود و لذا تعداد آنها با هم برابر است. ■

**قضیه ۲۰.۱.۴.** فرض کنیم  $r$  عددی طبیعی باشد و  $A_r$  تعداد جایگشت‌های متناوب افزایشی. در این صورت

$$A_{r+1} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^r \binom{r}{n} A_n A_{r-n}.$$

با استفاده از حکم این قضیه، ۱۰ مقدار اولیه  $A_r$  را تعیین کنید.

**برهان.** عدد  $r+1$  را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم این عدد در مکان  $n+1$  ام آمده باشد که  $n$  می‌تواند برابر ۰ یا ۱ یا ... یا  $r$  باشد. این عدد در هر مکانی آمده باشد به شکل  $\downarrow (r+1) \uparrow$  ظاهر می‌شود (البته غیر از مکان اول). بنابراین عدد قبل از آن در جهت از راست به چپ باید یک جایگشت متناوب افزایشی باشند و  $r-n$  عدد پس از آن نیز در جهت از چپ به راست باید یک جایگشت متناوب افزایشی را تشکیل دهند. در نتیجه برای ساختن یک جایگشت متناوب افزایشی با  $r+1$  عدد، ابتدا  $n$  عدد از بین اعداد  $1, \dots, r$  انتخاب می‌کنیم (به  $\binom{r}{n}$  روش)، سپس آنها را از راست به چپ به شکل متناوب افزایشی می‌نویسیم (به  $A_n$  روش)، پس از آن  $r+1$  را می‌نویسیم و بعد از آن بقیه اعداد را به صورت متناوب افزایشی از چپ به راست می‌نویسیم (به  $A_{r-n}$  روش). اما به این ترتیب هم جایگشت‌های متناوب افزایشی ساخته می‌شوند و هم کاهشی. لذا

■  $\sum_{n=0}^r \binom{r}{n} A_n A_{r-n}$  برابر  $A'_{r+1} + A_{r+1}$  یعنی برابر  $2A_{r+1}$  خواهد بود.

اکنون می‌خواهیم به تعمیم تعریف اعداد اویلری مرتبه اول بپردازیم اما قبل از آن لازم است که چیزهایی در مورد مجموعه‌های چندگانه را مورد مطالعه قرار دهیم.

**تعریف ۲۱.۱.۴.** یک مجموعه چندگانه یا چند مجموعه<sup>۹</sup>، گردایه‌ای از اشیاء کاملاً مشخص (و نه لزوماً متمایز) است. به عبارت دیگر اگر  $X$  یک مجموعه باشد آنگاه هر تابع مانند  $m: X \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$  یک مجموعه چندگانه نامیده می‌شود که در آن  $m(x)$  را درجه تکرار<sup>۱۰</sup> عنصر  $x$  می‌نامیم. برای نمایش یک مجموعه چندگانه از همان نماد  $\{\}$  که برای نمایش مجموعه‌ها نیز به کار می‌رود استفاده می‌کنیم.

♣

به عبارت ساده‌تر، یک مجموعه چندگانه چیزی شبیه مجموعه است با این تفاوت که عناصر آن می‌توانند تکراری باشند.

**مثال ۲۲.۱.۴.** برای مجموعه چندگانه  $\{1, 1, 1, 2, 3, 3, 3, 3, 7, 7\}$  درجه تکرار هر عنصر را تعیین کنید.

اگر درجه تکرار  $x$  را با  $m(x)$  نمایش دهیم داریم

$$m(1) = 3, m(2) = 1, m(3) = 4, m(7) = 2.$$

و می‌توان گفت که برای  $x$  های غیر از ۱، ۲، ۳ و ۷ داریم  $m(x) = 0$ .

♠

بنابراین می‌توانیم برای مشخص کردن یک مجموعه چندگانه، تابع درجه تکرار آن یعنی  $m$  را معرفی کنیم.

**مثال ۲۳.۱.۴.** اگر

$$m(3) = 5, m(7) = 4, m(\square) = 2, m(\diamond) = 6$$

آنگاه مجموعه چندگانه‌ای را که  $m$  مشخص می‌کند بنویسید.

<sup>۹</sup>multiset

<sup>۱۰</sup>multiplicity

یک مجموعه چندگانه متناهی  
چند زیرمجموعه چندگانه  
دارد؟

این مجموعه چندگانه به صورت

$$\{3, 3, 3, 3, 3, 7, 7, 7, 7, \square, \square, \diamond, \diamond, \diamond, \diamond, \diamond\}$$

است. ♠

همان طور که می دانیم تعداد جایگشت های روی یک مجموعه  $r$  عضوی برابر  $r!$  است. یک مسأله شمارشی جالب می تواند تعیین تعداد جایگشت های روی یک چند مجموعه باشد.

**قضیه ۲۴.۱.۴.** فرض کنیم  $r$  عددی طبیعی و  $m : \{1, \dots, r\} \rightarrow \mathbb{N}$  یک مجموعه چندگانه باشد. در این صورت تعداد جایگشت های روی مجموعه

$$\text{چندگانه ای که } m \text{ آن را مشخص می کند برابر است با}$$

$$\frac{(m(1) + \dots + m(r))!}{m(1)! \dots m(r)!}.$$

این عدد قبلاً به عنوان ضریب بسط چندجمله ای ظاهر شد. چه ارتباطی بین این دو مسأله وجود دارد؟

**برهان.** اگر مجموعه چندگانه ای که  $m$  آن را مشخص می کند با  $M$  نمایش داده شود آنگاه  $M$  دارای  $m(1)$  بار ۱، دارای  $m(2)$  بار ۲، ... و دارای  $m(r)$  بار  $r$  است؛ یعنی روی هم رفته  $M$  دارای  $a = m(1) + \dots + m(r)$  عضو خواهد بود.

اکنون  $a$  مکان با شماره های ۱، ...،  $a$  در نظر می گیریم. اگر همه اشیاء ما متفاوت باشند آنها را می توان به  $a!$  طریق در کنار یکدیگر قرار داد، اما در بین آنها  $m(i)$  بار عدد  $i$  آمده که هیچ تفاوتی با هم ندارند و می توانند به  $m(i)!$  طریق مختلف جای خود را با یکدیگر عوض کنند بدون آن که هیچ تفاوتی در طرز قرار گرفتن آنها ایجاد شود. لذا باید  $a!$  را به تعداد حالاتی که ۱ ها، ۲ ها، ... و  $r$  ها می توانند جای خود را با خودشان عوض کنند تقسیم کنیم که این مقدار برابر است با  $m(1)! \dots m(r)!$ . ■

به چند طریق می توان اعضای  $M$  را دور یک دایره قرار داد؟

**تعریف ۲۵.۱.۴.** مجموعه چندگانه  $M$  را که توسط تابع درجه تکرار  $m$  مشخص می شود یک ۲-مجموعه می نامیم هرگاه برای هر  $x \in M$  داشته باشیم  $m(x) = 2$ . ♣

**نتیجه ۲۶.۱.۴.** فرض کنیم  $M = \{1, 1, 2, 2, \dots, r, r\}$  یک ۲-مجموعه باشد. در این صورت تعداد جایگشت های روی  $M$  برابر است با  $\frac{(2r)!}{2^r}$ .

**برهان.** از آنجایی که  $m(1) = \dots = m(r) = 2$  با توجه به قضیه بالا حکم بدیهی است. ■

می‌توان مسائل شمارشی مربوط به جایگشت‌های معمولی را در مورد جایگشت‌های روی یک مجموعه چندگانه نیز مطرح کرد. یکی از آنها مسأله‌ای شبیه تعیین تعداد جایگشت‌های با  $n$  صعود می‌باشد. اجازه دهید ابتدا یک مثال را بررسی کنیم.

**مثال ۱.۴.۲۷.۲-** مجموعه  $M = \{1, 1, 2, 2, 3, 3\}$  را در نظر می‌گیریم. یک جایگشت از  $M$  را خوب می‌نامیم هرگاه به ازای هر  $n = 1, 2, 3$  یا بین دو بار ظاهر شدن  $n$  هیچ عددی ظاهر نشود یا هر عددی که بین دو بار ظاهر شدن  $n$  آمده بزرگتر از  $n$  باشد. کلاً چند جایگشت روی  $M$  وجود دارد؟ کلیه جایگشت‌های خوب روی  $M$  را بنویسید.



می‌دانیم که تعداد کل جایگشت‌های روی  $M$  برابر  $90 = \frac{6!}{3!}$  می‌باشد. از آنجایی که ۳ بزرگترین عدد است باید دو بار ظاهر شدن ۳ در کنار یکدیگر باشد (چون هیچ عدد بزرگتری وجود ندارد که در بین آنها ظاهر شود). بنابراین می‌توانیم ۳۳ را یک شیء در نظر بگیریم. در این صورت ۳۳ می‌تواند بین دو بار ظاهر شدن ۱ و بین دو بار ظاهر شدن ۲ بیاید. به عبارت دیگر ۳۳ را می‌توانیم در هر جایی بنویسیم. با این توضیحات جایگشت‌های خوب عبارتند از

۳۳۱۱۲۲, ۱۳۳۱۲۲, ۱۱۳۳۲۲, ۱۱۲۳۳۲, ۱۱۲۲۳۳,  
 ۳۳۱۲۲۱, ۱۳۳۲۲۱, ۱۲۳۳۲۱, ۱۲۲۳۳۱, ۱۲۲۱۳۳,  
 ۳۳۲۲۱۱, ۲۳۳۲۱۱, ۲۲۳۳۱۱, ۲۲۱۳۳۱, ۲۲۱۱۳۳. ♠

روشی که در مثال فوق به کار رفت، شیوه‌ای استقرایی برای نوشتن جایگشت‌های خوب را به دست می‌دهد. توجه کنید که کلیه جایگشت‌های روی  $\{1, 1, 2, 2\}$  عبارتند از ۱۱۲۲, ۱۲۲۱ و ۲۲۱۱. بنابراین برای ساختن جایگشت‌های خوب روی  $\{1, 1, 2, 2, 3, 3\}$  می‌توان ۳۳ را در هر جایی بین دو عضو جایگشت‌های خوب قبلی قرار داد.

**قضیه ۲۸.۱.۴.** فرض کنیم  $r$  عددی طبیعی باشد و  $M = \{1, 1, \dots, r, r\}$  در این صورت تعداد جایگشت‌هایی از  $M$  که به ازای هر  $n = 1, \dots, r$  یا بین دو بار ظاهر شدن  $n$  هیچ عددی نیامده باشد یا هر عددی که بین دو بار ظاهر شدن  $n$  آمده است از  $n$  بزرگتر باشد برابر است با

$$1 \cdot 3 \cdots (2r-1) = \frac{(2r)!}{2^r r!}.$$

چند جایگشت خوب داریم که ۱ ها قبل از ۲ ها آمده باشند؟

**برهان.** باید دو بار ظاهر شدن  $r$  در کنار یکدیگر باشد. لذا  $rr$  یک شیء است که می‌تواند در هر جایی در جایگشت‌های خوب روی  $\{1, 1, \dots, r-1, r-1\}$  ظاهر شود. چون تعداد این اعداد برابر  $2(r-1)$  است پس  $2(r-1)+1$  مکان برای قرار دادن  $rr$  داریم.

بنابراین می‌توان گفت که اگر  $a_r$  پاسخ مسأله باشد آنگاه

$$a_r = (2(r-1) + 1)a_{r-1} = (2r-1)a_{r-1}.$$

■ حال به استقرا روی  $r$  می‌توان حکم را اثبات کرد.

منظور از جایگشت خوب در تعریف زیر همان جایگشت‌هایی است که در قضیه بالا تعداد آنها را به دست آوردیم.

**تعریف ۲۹.۱.۴.** فرض کنیم  $r$  و  $n$  اعدادی طبیعی باشند. تعداد جایگشت‌های خوب روی ۲-مجموعه  $\{1, 1, \dots, r, r\}$  که در آنها  $n$  بار (اکیداً) صعود داریم را با  $\langle\langle r \rangle\rangle_n$  نمایش می‌دهیم. این اعداد را اعداد/ویلری مرتبه دوم<sup>۱۱</sup> می‌نامیم. ♣

و لذا چند بار (اکیداً) نزول داریم؟

اکنون می‌توانیم رابطه‌ای بازگشتی برای اعداد ویلری مرتبه دوم را اثبات کنیم. این رابطه بازگشتی چیزی شبیه رابطه بازگشتی برای اعداد ویلری مرتبه اول در قضیه ۱۴.۱.۴ است با این تفاوت که ضریب جمله اول در سمت راست تساوی به جای  $r-n$  برابر  $2r-1-n$  است. از این رو این اعداد را ویلری مرتبه دوم می‌نامیم.

**قضیه ۳۰.۱.۴.** فرض کنیم  $r$  و  $n$  اعدادی طبیعی و بزرگتر از ۲ باشند. در این

<sup>۱۱</sup>Eulerian numbers of the second order

صورت

$$\left\langle \left\langle r \right\rangle \right\rangle_n = (2r - 1 - n) \left\langle \left\langle r - 1 \right\rangle \right\rangle_{n-1} + (n + 1) \left\langle \left\langle r - 1 \right\rangle \right\rangle_n.$$

**برهان.** قرارداد می‌کنیم که بین دو عضو متوالی یک جایگشت یا  $\uparrow$  می‌گذاریم (در حالت اکیداً صعود) یا  $\downarrow$  می‌گذاریم (در حالت اکیداً نزول) و یا هیچ علامتی نمی‌گذاریم (در حالت تساوی). جایگشتی خوب مانند  $i_1 i_2 \dots i_{2(r-1)}$  از ۲- مجموعه  $\{1, 1, \dots, r-1, r-1\}$  را در نظر می‌گیریم. اگر بین دو عدد متوالی از این جایگشت مانند  $i_k i_{k+1}$  علامت  $\uparrow$  آمده باشد و عدد  $rr$  را بین آن دو قرار دهیم آنگاه این قسمت از جایگشت به  $i_k \uparrow rr \downarrow i_{k+1}$  تبدیل می‌شود، یعنی به این روش تعداد علامت‌های  $\uparrow$  تغییر نخواهد کرد. اما اگر بین این دو عدد متوالی در جایگشت علامت  $\uparrow$  نباشد (یعنی یا  $\downarrow$  باشد یا هیچ علامتی نباشد) آنگاه با تبدیل این قسمت به  $i_k \uparrow rr \downarrow i_{k+1}$ ، در حقیقت یک واحد به تعداد علامت‌های  $\uparrow$  اضافه می‌شود. همچنین با قرار دادن  $rr$  در سمت چپ یک جایگشت تغییری در تعداد علامت‌های  $\uparrow$  ایجاد نمی‌شود ولی با قرار دادن  $rr$  در سمت راست آن، تعداد  $\uparrow$  ها یکی اضافه می‌شود.

اگر قرار بود اعداد را دور دایره بنویسیم چند حالت وجود می‌داشت؟

بنابراین با افزودن  $rr$  به یک جایگشت دو حالت ممکن است به وجود بیاید؛ تعداد  $\uparrow$  ها تغییر نمی‌کند یا یک واحد افزایش می‌یابد. اما در چند حالت تغییر نمی‌کند و در چند حالت یک واحد افزایش پیدا می‌کند؟ در صورتی که  $rr$  را در سمت چپ جایگشت یا در مکان‌هایی که  $\uparrow$  ظاهر شده است قرار دهیم تعداد  $\uparrow$  ها تغییری نمی‌کند و در صورتی که  $rr$  را در سمت راست جایگشت یا در مکان‌هایی که  $\uparrow$  ظاهر نشده است قرار دهیم تعداد  $\uparrow$  ها یک واحد افزایش پیدا می‌کند. لذا می‌توان گفت که برای ساختن  $n$  صعود یا باید از جایگشت‌های روی ۲- مجموعه  $\{1, 1, \dots, r-1, r-1\}$  با  $n$  صعود استفاده کنیم و  $rr$  را طوری اضافه کنیم که تغییری در تعداد  $\uparrow$  ها ایجاد نشود (که این تعداد برابر است با ۱ به علاوه تعداد صعودها، یعنی برابر است با  $1+n$ ) یا باید از جایگشت‌های روی ۲- مجموعه  $\{1, 1, \dots, r-1, r-1\}$  با  $n-1$  صعود استفاده کنیم و  $rr$  را طوری اضافه کنیم که تعداد  $\uparrow$  ها یک واحد افزایش یابد (که این تعداد برابر است با ۱

به علاوه تعداد غیر صعودها، یعنی برابر است با  $(1 + (2(r-1) - 1) - (n-1))$ .

در نتیجه برای ساختن جایگشتی از ۲- مجموعه  $\{1, 1, \dots, r, r\}$  با  $n$  صعود، یا یک جایگشت از ۲- مجموعه  $\{1, 1, \dots, r-1, r-1\}$  با  $n$  صعود انتخاب می‌کنیم (به  $\langle\langle r-1 \rangle\rangle$  طریق) و  $rr$  را طوری اضافه می‌کنیم که تعداد صعودها تغییری نکند (به  $n+1$  طریق) یا یک جایگشت از ۲- مجموعه  $\{1, 1, \dots, r-1, r-1\}$  با  $n-1$  صعود انتخاب می‌کنیم (به  $\langle\langle r-1 \rangle\rangle$  طریق) و  $rr$  را طوری اضافه می‌کنیم که تعداد صعودها یک واحد افزایش یابد (به  $2r-1-n$  طریق). ■

با توجه به قضیه فوق به سادگی می‌توان با استفاده از استقرا اثبات کرد که  $\langle\langle r \rangle\rangle = 0$ .

مشابه قضیه ۱۶.۱.۴ می‌توانیم حکم زیر را اثبات کنیم.

قضیه ۳۱.۱.۴. فرض کنیم  $r$  عددی طبیعی باشد. در این صورت

$$\sum_{n=0}^{r-1} \langle\langle r \rangle\rangle_n = \frac{(2r)!}{2^r r!}.$$

**برهان.** از آنجایی که در یک جایگشت خوب حداکثر  $r-1$  بار (اکیداً) صعود داریم و تعداد کل جایگشت‌های خوب برابر  $\frac{(2r)!}{2^r r!}$  است، حکم برقرار می‌باشد. ■

در مثال ۱۲.۲.۱ رابطه‌ای بازگشتی برای محاسبه تعداد حالات مختلف پرانتزگذاری برای  $n$  متغیر مختلف را به دست آوردیم و در قضیه ۱۴.۲.۱ پاسخی صریح برای این مسأله را ارائه دادیم. اگر همه متغیرها یکسان در نظر گرفته شوند آنگاه تعداد حالات ممکن که آن را عدد کاتالان می‌نامیم و با  $C_{n-1}$  نمایش می‌دهیم، برابر است با  $\frac{O_n}{n!}$ . بنابراین با توجه به قضیه ۱۴.۲.۱ می‌توان گفت که

$$C_n = \frac{\frac{(2n)!}{n!}}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

این حکمی است که در مثال ۲۰.۴.۲ اثبات شد. اکنون می‌خواهیم رابطه

وقتی پاسخ صریح را می‌دانیم چه نیازی است که رابطه بازگشتی پیچیده‌ای مانند آنچه در قضیه ۳۲.۱.۴ آمده است را اثبات کنیم؟ حقیقت امر این است که این رابطه، برای پاسخ دادن به سؤالاتی که مشابه مسأله کاتالان هستند بسیار مفید می‌باشد. بعداً نمونه‌هایی از کاربرد این رابطه بازگشتی را می‌بینیم.

بازگشتی دیگری را برای اعداد کاتالان اثبات کنیم.  
**قضیه ۳۲.۱.۴.** فرض کنیم  $r$  عددی طبیعی باشد. در این صورت

$$C_{r+1} = \sum_{n=0}^r C_n C_{r-n}.$$

**برهان.**  $r+2$  متغیر یکسان مانند  $a$  را در نظر می گیریم. تعداد حالاتی که می توان اعمال ضرب بین این متغیرها را پرانتزگذاری کرد برابر است با  $C_{r+1}$ . از طرف دیگر اگر به آخرین عمل ضربی که باید انجام شود توجه کنیم می بینیم که این عمل ضرب می تواند در مکان  $n+1$  ام واقع شود که  $n$  برابر ۰ یا ۱ یا ... یا  $r$  است (می دانیم که برای  $r+2$  متغیر، تعداد اعمال ضرب برابر  $r+1$  است). اکنون اگر به سمت چپ و سمت راست این عمل ضرب نگاه کنیم با دو دسته متغیر مواجه می شویم که در یکی  $n$  عمل ضرب و در دیگری  $r-n$  عمل ضرب وجود دارد. تعداد حالاتی که می توان با  $n$  عمل ضرب، متغیرها را در یکدیگر ضرب کرد برابر  $C_n$  و تعداد حالاتی که می توان با  $r-n$  عمل ضرب، متغیرها را در یکدیگر ضرب کرد برابر  $C_{r-n}$  می باشد. لذا حکم برقرار است. ■

چند مقدار اولیه اعداد کاتالان عبارتند از

$$\begin{aligned} C_0 &= 1, C_1 = 1, C_2 = 2, C_3 = 5, C_4 = 14, \\ C_5 &= 42, C_6 = 132, C_7 = 429, C_8 = 1430, \\ C_9 &= 4862, C_{10} = 16796, C_{11} = 58786, \dots \end{aligned}$$

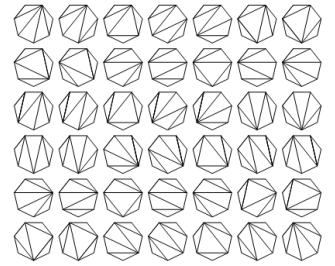
به عنوان کاربردهایی از اعداد کاتالان چند حکم زیر را می توان ارائه داد.  
**قضیه ۳۳.۱.۴.** تعداد حالات مثلث بندی یک  $r$  ضلعی<sup>۱۲</sup> برابر است با

$$\frac{1}{r-1} \binom{2(r-2)}{r-2}.$$

سعی کنید پاسخ صریح داده شده را با استفاده از استقرا اثبات کنید. آیا این کار ممکن است؟

<sup>۱۲</sup> منظور این است که برخی رئوس  $r$  ضلعی را با خطوطی غیر متقاطع به یکدیگر وصل کنیم تا  $r$  ضلعی به چند مثلث افراز شود.

**برهان.** تعداد حالات مثلث‌بندی یک  $r$  ضلعی را با  $T_r$  نمایش می‌دهیم. سه حالت زیر ممکن است اتفاق افتد:



- رأس شماره ۱ به رأس شماره ۳ وصل باشد؛ در این حالت  $r$  ضلعی به یک مثلث و یک  $r-1$  ضلعی افزای می‌شود که به  $T_{r-1}$  طریق مثلث‌بندی می‌گردد.

- اولین رأسی که رأس شماره ۱ به آن وصل است رأس شماره  $n$  باشد که  $4 \leq n \leq r-1$ ؛ در این حالت باید رأس شماره ۲ هم به رأس شماره  $n$  وصل باشد. بنابراین  $r$  ضلعی به یک  $n-1$  ضلعی، یک مثلث و یک  $r+2-n$  ضلعی افزای می‌شود که به  $T_{n-1}T_{r+2-n} + T_{r-1}$  طریق مثلث‌بندی می‌گردد.

- رأس شماره ۱ به هیچ رأسی وصل نشده باشد؛ در این حالت رأس شماره ۲ باید به رأس شماره  $r$  وصل باشد و لذا  $r$  ضلعی به یک مثلث و یک  $r-1$  ضلعی افزای می‌شود که به  $T_{r-1}$  طریق مثلث‌بندی می‌گردد.

بنابراین می‌توان گفت که

$$T_r = T_{r-1} + \sum_{n=4}^{r-1} T_{n-1}T_{r+2-n} + T_{r-1}.$$

اکنون با فرض  $C_r = T_{r+2}$  داریم

$$C_{r+1} = \sum_{n=0}^r C_n C_{r-n}$$

و لذا  $T_{r+2}$  همان عدد کاتالان  $r$  ام است. در نتیجه

$$T_r = C_{r-2} = \frac{1}{r-1} \binom{2(r-2)}{r-2}. \blacksquare$$

آیا می‌توانید مسأله مثلث‌بندی را مستقیماً به مسأله پرانتزگذاری ربط دهید؟

برای آن که حکم بعدی را ارائه دهیم اجازه دهید ابتدا یک مثال را بررسی کنیم.  
مثال ۳۴.۱.۴. قطاری با ۴ واگن به صورت زیر روی یک ریل ایستاده است:

۱, ۲, ۳, ۴

این قطار می‌خواهد از سمت چپ به سمت راست برود. در بین راه یک تونل وجود دارد که می‌توان چند واگن از قطار را داخل تونل فرستاد و برای مدتی در آنجا نگه داشت. وقتی واگن‌ها از تونل خارج می‌شوند ترتیب آنها عوض می‌شود. بدین ترتیب چه جایگشت‌هایی را می‌توانیم در سمت راست درست کنیم؟

برای واضح شدن صورت سؤال اجازه دهید چند حالت از وضعیت‌های خروجی را بررسی کنیم.

مثلاً اگر واگن‌های ۴ و ۳ را داخل تونل بفرستیم، شکل زیر حاصل می‌شود:

۴

۳

۱، ۲

اکنون می‌توانیم ۲ را مستقیماً روی ریل عبور دهیم تا به سمت راست بیاید، واگن ۳ را از تونل خارج کنیم و در سمت چپ واگن ۲ قرار دهیم، واگن ۱ را به سمت راست انتقال دهیم و پس از آن ۴ را از تونل خارج کنیم. بدین ترتیب وضعیت

۴، ۱، ۳، ۲

حاصل می‌شود.

می‌توانستیم ۴ و ۳ را در تونل نگه داریم، ۲ و پس از آن ۱ را عبور دهیم و سپس ۳ و ۴ را در سمت چپ آنها قرار دهیم. بدین ترتیب به وضعیت

۴، ۳، ۱، ۲

می‌رسیم.

اما برخی از حالت‌ها را نمی‌توان در خروجی ایجاد کرد. مثلاً وضعیت

۲، ۴، ۱، ۳

هیچگاه ایجاد نمی‌شود، چون اگر بخواهیم ۳ را در سمت راست داشته باشیم

توجه کنید که می‌توانیم واگن‌ها را تا هر زمانی که بخواهیم در تونل نگه داریم و در هر لحظه‌ای، هر تعداد از آنها را از تونل خارج کنیم.



باید ۴ را در تونل نگه داریم و ۳ را عبور دهیم. اما از آنجایی که دومین عدد در سمت راست برابر ۱ است پس مسلماً ۲ نیز داخل تونل رفته است و این در حالی است که ۴ از قبل در تونل قرار داده شده بود، بنابراین وضعیتی که اکنون در تونل داریم به این شکل است که ۴ بالای ۲ قرار داد. بدین ترتیب نمی‌توان ۴ را در سمت راست ۲ در خروجی ایجاد کرد.

با کمی تأمل می‌توانیم ببینیم که وضعیت‌های زیر در خروجی ایجاد می‌شود:

|            |               |
|------------|---------------|
| ۱, ۲, ۳, ۴ | ۱, ۲, ۴, ۳    |
| ۱, ۳, ۲, ۴ | ۱, ۴, ۲, ۳    |
| ۱, ۴, ۳, ۲ | ۲, ۱, ۳, ۴    |
| ۲, ۱, ۴, ۳ | ۳, ۱, ۲, ۴    |
| ۳, ۲, ۱, ۴ | ۴, ۱, ۲, ۳    |
| ۴, ۱, ۳, ۲ | ۴, ۲, ۱, ۳    |
| ۴, ۳, ۱, ۲ | ۴, ۳, ۲, ۱. ♠ |

حتماً این تأمل را به خرج دهید و کلیه حالات ممکن را خودتان بیابید.

اگر به محل قرار گرفتن بزرگ‌ترین عدد نگاه کنیم می‌توانیم رابطه‌ای بازگشتی برای تعیین تعداد جایگشت‌های خروجی بیابیم.  
**قضیه ۳۵.۱.۴.** با همان مفروضات مثال بالا اگر تعداد واگن‌ها برابر  $r$  باشد آنگاه تعداد جایگشت‌های خروجی برابر است با  $\frac{1}{r+1} \binom{2r}{r}$ .

**برهان.** تعداد جایگشت‌های مطلوب را با  $S_r$  نمایش می‌دهیم. فرض کنیم  $r+1$  واگن داریم که به صورت  $1, 2, \dots, r, r+1$

قرار گرفته‌اند. در جایگشت خروجی، واگن  $r+1$  می‌تواند در مکان  $n+1$  ام (از سمت راست) قرار گیرد که  $n$  برابر ۰ یا ۱ یا ... یا  $r$  است.

اگر  $r+1$  در مکان  $n+1$  ام باشد آنگاه  $n$  واگن در سمت راست آن و  $r-n$  واگن در سمت چپ قرار دارند. مجموعه شماره‌های  $n$  واگن سمت راست باید  $\{r, r-1, \dots, r-(n-1)\}$  باشد و بقیه اعداد در سمت چپ قرار می‌گیرند. به عبارت دیگر  $n$  واگنی که در سمت راست هستند باید دقیقاً  $n$  عدد قبل از  $r+1$  باشند (البته نه لزوماً به ترتیب). این امر بدان دلیل می‌دهد که وقتی بخواهیم  $r+1$  را در مکان  $n+1$  ام قرار دهیم باید  $r+1$  را در تونل نگه داریم و  $n$  عدد پس از آن را به نوعی از تونل رد کنیم و سپس  $r+1$  را از تونل خارج سازیم. پس مجموعه شماره‌های واگن‌های قبل و بعد از  $r+1$  باید به صورت  $\{1, 2, \dots, r-n\}, r+1, \{r-n+1, \dots, r\}$

باشد که واگن‌های سمت چپ و راست  $r+1$  لزوماً به ترتیب ظاهر نشده‌اند. اما با چه ترتیبی می‌توان این واگن‌ها را قرار داد؟

در حقیقت  $r-n$  واگن سمت چپ می‌توانند به  $S_{r-n}$  طریق قرار گیرند و  $n$  واگن سمت راست نیز می‌توانند به  $S_n$  طریق چیده شوند. لذا با توجه به اصل ضرب داریم

$$S_{r+1} = \sum_{n=0}^r S_n S_{r-n}.$$

این همان رابطه بازگشتی اعداد کاتالان است و چون  $S_0 = C_0 = 1$  پس به ازای هر  $r$  داریم  $S_r = C_r$ . در نتیجه حکم برقرار است. ■

حکم بعدی نیز کاربردی از رابطه بازگشتی قضیه ۳۲.۱.۴ می‌باشد اما بد نیست قبل از آن در قالب یک مثال آن را بررسی کنیم.

**مثال ۳۶.۱.۴.** می‌خواهیم دنباله‌ای ۶ رقمی با استفاده از سه رقم ۱ و سه رقم ۰ بنویسیم به طوری که وقتی از سمت چپ به سمت راست حرکت می‌کنیم همواره تعداد ۱ ها بیشتر یا مساوی تعداد ۰ ها باشد. این کار به چند طریق صورت می‌گیرد؟

منظور سؤال این است که اگر دنباله ما به صورت  $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6$  باشد آنگاه

آیا می‌توانید این مسأله را مستقیماً به مسأله پرانتزگذاری ربط دهید؟

در بین دنباله‌هایی که  $r$  رقم ۱ و  $r$  رقم ۰ دارند و این شرط برای آنها برقرار است  $k$  امین دنباله کدام است؟ (دنباله‌ها را به ترتیب ارزش آنها در مبنای ۲ مرتب می‌کنیم.)

## در دنباله‌های

$$a_1$$

$$a_1, a_2$$

$$a_1, a_2, a_3$$

$$a_1, a_2, a_3, a_4$$

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$$

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$$

همواره باید تعداد ۱ ها بیشتر یا مساوی تعداد ۰ ها باشد. چنین دنباله‌هایی عبارتند از

$$111000, 101100, 101010, 110010, 110100.$$

از سمت چپ حرکت کنید و به اولین جایی که تعداد ۱ ها و ۰ ها با هم برابر می‌شود توجه کنید. این تعداد برای هر یک از دنباله‌های فوق برابر چند است؟

برای دنباله ۱۱۱۰۰۰ اولین جایی که تعداد ۱ ها و ۰ ها با هم برابر می‌شود در آخرین رقم است، یعنی وقتی که تعداد ۱ ها و تعداد ۰ ها برابر ۳ است.

برای دنباله ۱۰۱۱۰۰ نیز اولین جایی که تعداد ۱ ها و ۰ ها با هم برابر می‌شود در آخرین رقم است، یعنی وقتی که تعداد ۱ ها و تعداد ۰ ها برابر ۳ است.

برای دنباله ۱۰۱۰۱۰ اولین جایی که تعداد ۱ ها و ۰ ها با هم برابر می‌شود در دومین رقم است، یعنی وقتی که تعداد ۱ ها و تعداد ۰ ها برابر ۱ است.

برای دنباله ۱۱۰۰۱۰ اولین جایی که تعداد ۱ ها و ۰ ها با هم برابر می‌شود در چهارمین رقم است، یعنی وقتی که تعداد ۱ ها و تعداد ۰ ها برابر ۲ است.

برای دنباله ۱۱۰۱۰۰ اولین جایی که تعداد ۱ ها و ۰ ها با هم برابر می‌شود در آخرین رقم است، یعنی وقتی که تعداد ۱ ها و تعداد ۰ ها برابر ۳ است. ♠

اگر در این مسأله به جای ۱ ها علامت پرانتز باز و به جای ۰ ها علامت پرانتز بسته قرار دهیم آنگاه حالات مختلف نوشتن  $r$  پرانتز باز و  $r$  پرانتز بسته که پرانتزگذاری‌ها با هم جور باشند به دست می‌آید.

این کلید طلایی اثبات حکم بعدی است! کافی است به اولین جایی که تعداد ۱ ها و ۰ ها برابر می شود توجه کنیم.

**قضیه ۳۷.۱.۴.** تعداد دنباله های  $2r$  رقمی با  $r$  رقم ۰ و  $r$  رقم ۱ که در آنها وقتی از سمت چپ به راست حرکت می کنیم همواره تعداد ۱ ها بیشتر یا مساوی تعداد ۰ ها است برابر است با

$$\frac{1}{r+1} \binom{2r}{r}.$$

**برهان.** تعداد مطلوب را با  $W_r$  نمایش می دهیم. فرض کنیم  $r+1$  رقم ۱ و  $r+1$  رقم ۰ داشته باشیم.

از سمت چپ حرکت می کنیم و به اولین مکانی که تعداد ۱ ها و ۰ ها برابر می شوند توجه می کنیم. این تعداد را  $n+1$  می نامیم که  $n$  می تواند برابر ۰ یا ۱ یا ... یا  $r$  باشد.

برای آن که تعداد ۱ ها و ۰ ها برابر با هم و مساوی  $n+1$  باشد باید  $n+1$  بار ۱ و  $n+1$  بار ۰ داشته باشیم. بدیهی است که اولین رقم سمت چپ باید برابر ۱ باشد اما آخرین رقم نیز باید برابر ۰ باشد چون اگر این رقم ۱ باشد آنگاه  $n+1$  نمی تواند اولین مکانی باشد که تعداد ۱ ها و ۰ ها برابر می شود. پس در سمت چپ این مکان دنباله ای  $2(n+1)$  رقمی داریم که رقم سمت چپ آن ۱ و رقم سمت راست آن ۰ است. لذا این دنباله از یک دنباله مطلوب  $2n$  رقمی تشکیل شده است که یک ۱ در سمت چپ آن و یک ۰ در سمت راست آن قرار گرفته است. تعداد چنین دنباله هایی برابر  $W_n$  می باشد.

از سوی دیگر بعد از این مکان باید دنباله ای  $2(r-n)$  رقمی قرار گیرد که چون در مکان حاضر تعداد ۱ ها و ۰ ها برابر است پس از اینجا به بعد هم باید یک دنباله مطلوب داشته باشیم که تعداد آنها برابر  $W_{r-n}$  می باشد.

اکنون بنابر اصل ضرب داریم

$$W_{r+1} = \sum_{n=0}^r W_n W_{r-n}$$

از ریاضیدان معروفی پرسیدند:  
چند سال داری؟ گفت: من در  
سال  $x^2$  در سن  $x$  سالگی هستم.  
این ریاضیدان کیست؟

و چون  $W_0 = C_0 = 1$  پس دنباله  $W_r$  همان دنباله کاتالان است و لذا حکم برقرار می‌باشد. ■

نمونه‌های زیادی از کاربرد اعداد کاتالان وجود دارد که شاید بد نباشد برخی از آنها را در تمرین‌ها ببینیم.

## ۲.۴ حل روابط بازگشتی

در این بخش به ارائه روش‌هایی برای حل چند رابطه بازگشتی بسیار ساده می‌پردازیم. می‌توانستیم بحثی مفصل در مورد روابط بازگشتی همگن و ناهمگن و شیوه‌های مختلف حل آنها را در اینجا ارائه دهیم اما حقیقت امر این است که اکثر روابط بازگشتی زیبا، مسأله‌هایی هستند که با ترفندهایی خاص حل می‌شوند و شیوه‌های متداول در مورد آنها کارساز نیست. گاهی اوقات مسائل مربوط به روابط بازگشتی با مشاهده نمونه‌های آشنا و تبدیل مسأله به مسائل آشنا حل می‌شوند. مثلاً در بخش قبل دیدیم که چگونه می‌توان اثبات کرد که پاسخ مسأله‌ای خاص در رابطه بازگشتی کاتالان صدق می‌کند و پس از آن با توجه به این که پاسخ رابطه بازگشتی کاتالان را می‌دانیم می‌توانیم جواب صریح مسأله را به دست آوریم.

قدرت تحرک ابتکار  
ریاضی در استدلال نیست  
بلکه در تصور است.  
Augustus De Morgan

از آنجایی که هر رابطه بازگشتی با شرط (یا شرط‌های) اولیه، جوابی منحصر به فرد دارد، در صورتی که بتوانیم یک جواب صریح برای آن ارائه دهیم یا روشی را ارائه دهیم که بر اساس آن بتوان به جواب رسید، همین برای مسأله کافی است و لذا لازم نیست استدلال کنیم که این جواب از کجا آورده شده است.

ساده‌ترین نوع معادلات بازگشتی معادلاتی به شکل  $a_n = a_{n-1} + f(n)$  می‌باشد که در آن  $f$  تابع دلخواهی بر حسب  $n$  است. مثلاً بیشترین تعداد نواحی ایجاد شده توسط رسم کردن  $n$  خط در یک صفحه در رابطه بازگشتی  $a_n = a_{n-1} + n$  صدق می‌کند.

مثال ۱.۲.۴. رابطه بازگشتی

$$a_n = a_{n-1} + 2n - 1$$

را با شرط اولیه  $a_0 = 5$  حل کنید.

داریم

$$a_0 = 5$$

$$a_1 = a_0 + 1$$

$$a_2 = a_1 + 3$$

$$a_3 = a_2 + 5$$

...

$$a_{n-1} = a_{n-2} + 2(n-1) - 1$$

$$a_n = a_{n-1} + 2n - 1.$$

اکنون اگر عبارات سمت راست را با هم و عبارات سمت چپ را با هم جمع کنیم داریم

$$\begin{aligned} & a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n \\ = & a_0 + a_1 + a_2 + a_{n-2} + a_{n-1} \\ & + 5 + 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-3) + (2n-1) \end{aligned}$$

و با حذف کردن  $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1}$  از طرفین تساوی بالا داریم

$$a_n = 5 + 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-3) + (2n-1).$$

گرچه این پاسخی صریح برای رابطه بازگشتی ما است با این حال با توجه به آن که  $(1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1))$  برابر  $n^2$  است می‌توان آن را به صورت ساده‌تر

این مطلب را به استقرا اثبات کنید.



$a_n = n^2 + 5$  نیز نوشت.

این روش را می‌توان برای حل چنین معادله‌هایی در حالت کلی به کار برد.  
**قضیه ۲.۲.۴.** فرض کنیم دنباله  $\{a_n\}$  در رابطه بازگشتی

$$a_n = a_{n-1} + f(n)$$

صدق کند که در آن  $f$  تابعی است که بر اعداد طبیعی تعریف شده است. در این صورت

$$a_n = a_0 + \sum_{k=1}^n f(k).$$

**برهان.** داریم

$$a_n - a_{n-1} = f(n).$$

بنابراین

$$a_n - a_0 = \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1}) = \sum_{k=1}^n f(k).$$



در نتیجه حکم برقرار است.

اگر  $a_n$  برابر با  $a_{n-2} + f(n)$  باشد، پاسخ صریح چیست؟

با ترفندی مشابه می‌توان معادله بازگشتی  $a_n = a_{n-1} f(n)$  را حل کرد.  
**مثال ۳.۲.۴.** رابطه بازگشتی

$$a_n = 2^n a_{n-1}$$

را با شرط اولیه  $a_0 = 3$  حل کنید.

داریم

$$a_0 = 3$$

$$a_1 = 2a_0$$

$$a_2 = 2^2 a_1$$

$$\begin{aligned}
 a_3 &= 2^3 a_2 \\
 &\dots \\
 a_{n-1} &= 2^{n-1} a_{n-2} \\
 a_n &= 2^n a_{n-1}.
 \end{aligned}$$

اکنون اگر عبارات سمت راست را در هم و عبارات سمت چپ را در هم ضرب کنیم داریم

$$\begin{aligned}
 &a_0 a_1 a_2 a_3 \dots a_{n-1} a_n \\
 = &a_0 a_1 a_2 a_3 \dots a_{n-2} a_{n-1} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^{n-1} \cdot 2^n
 \end{aligned}$$

و با حذف کردن  $a_0 a_1 a_2 a_3 \dots a_{n-1}$  از طرفین تساوی داریم

$$a_n = 3 \cdot 2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^{n-1} \cdot 2^n.$$

گرچه این پاسخی صریح برای رابطه بازگشتی ما است با این حال می توان آن را به صورت ساده تر

$$a_n = 3 \cdot 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$$



نیز نوشت.

این روش را می توان برای حل چنین معادله هایی در حالت کلی به کار برد.

**قضیه ۴.۲.۴.** فرض کنیم دنباله  $\{a_n\}$  در رابطه بازگشتی

$$a_n = f(n) a_{n-1}$$

اگر  $a_n$  برابر با  $f(n) a_{n-1}$  باشد،  
پاسخ صریح چیست؟

صدق کند که در آن  $f$  تابعی است که بر اعداد طبیعی تعریف شده است. در این صورت

$$a_n = a_0 \prod_{k=1}^n f(k).$$

برهان. داریم

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = f(n).$$

بنابراین

$$\frac{a_n}{a_0} = \prod_{k=1}^n \frac{a_k}{a_{k-1}} = \prod_{k=1}^n f(k).$$

در نتیجه حکم برقرار است. ■

اما اگر رابطه بازگشتی ما به صورت  $a_n = f(n)a_{n-1} + g(n)$  باشد چه باید کرد؟  
مثال زیر را ببینید.

مثال ۵.۲.۴. رابطه بازگشتی

$$a_n = 2^n a_{n-1} + (2n - 1)$$

را با شرط اولیه  $a_0 = 1$  حل کنید.

ابتدا رابطه بازگشتی

$$b_n = 2^n b_{n-1}$$

را حل می‌کنیم. با توجه به مثال قبل می‌دانیم که پاسخ آن

$$b_n = b_0 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

چرا  $a_n$  باید برابر  $b_n c_n$  باشد؟ است. حال  $a_n = b_n c_n$  را در رابطه بازگشتی اصلی قرار می‌دهیم. داریم

$$\begin{aligned} b_0 2^{\frac{n(n+1)}{2}} c_n &= b_n c_n \\ &= a_n \\ &= 2^n a_{n-1} + (2n - 1) \\ &= 2^n b_{n-1} c_{n-1} + (2n - 1) \\ &= 2^n b_0 2^{\frac{(n-1)(n-1+1)}{2}} c_{n-1} + (2n - 1) \\ &= b_0 2^{\frac{n(n+1)}{2}} c_{n-1} + (2n - 1). \end{aligned}$$

بنابراین

$$b_n 2^{\frac{n(n+1)}{2}} (c_n - c_{n-1}) = 2n - 1$$

و لذا

$$c_n = c_{n-1} + \frac{2n - 1}{b_n 2^{\frac{n(n+1)}{2}}}.$$

اما با توجه به قضیه ۲.۲.۴ داریم

$$c_n = c_0 + \sum_{k=1}^n \frac{2k - 1}{b_k 2^{\frac{k(k+1)}{2}}}.$$

بنابراین

$$\begin{aligned} a_n &= b_n c_n \\ &= b_n 2^{\frac{n(n+1)}{2}} c_0 + b_n 2^{\frac{n(n+1)}{2}} \sum_{k=1}^n \frac{2k - 1}{b_k 2^{\frac{k(k+1)}{2}}} \\ &= a_0 2^{\frac{n(n+1)}{2}} + 2^{\frac{n(n+1)}{2}} \sum_{k=1}^n \frac{2k - 1}{2^{\frac{k(k+1)}{2}}} \\ &= 2^{\frac{n(n+1)}{2}} \left( 1 + \sum_{k=1}^n \frac{2k - 1}{2^{\frac{k(k+1)}{2}}} \right). \spadesuit \end{aligned}$$

این روش برای حل این نوع معادله‌های بازگشتی کلی است. قضیه زیر این حکم را در حالت کلی بیان می‌کند. یادآوری می‌کنیم که انتخاب  $a_n = b_n c_n$  می‌تواند ما را به جواب صریح این معادله برساند و چون پاسخ منحصر به فرد است، به طور منطقی نیازی نیست بگوییم که این جواب از کجا آمده است.

**قضیه ۶.۲.۴.** فرض کنیم دنباله  $\{a_n\}$  در رابطه بازگشتی

$$a_n = f(n)a_{n-1} + g(n)$$

صدق کند که در آن  $f$  و  $g$  توابعی هستند که بر اعداد طبیعی تعریف شده‌اند. در

این صورت  $a_n = b_n c_n$  که  $b_n$  در رابطه بازگشتی

$$b_n = f(n)b_{n-1}$$

با توجه به آن که  $f(n)$  هیچگاه صفر نیست (چرا؟) می‌توانیم بگوییم که  $b_n$  هیچگاه صفر نیست و لذا اگر دنباله  $c_n$  را برابر  $\frac{a_n}{b_n}$  تعریف کنیم خوشتعریف است.

و  $c_n$  در رابطه بازگشتی

$$c_n = c_{n-1} + \frac{g(n)}{b_n}$$

صدق می کنند.

برهان. با مفروضات قضیه داریم

$$\begin{aligned} a_n &= b_n c_n \\ &= f(n) b_{n-1} c_n \\ &= f(n) b_{n-1} \left( c_{n-1} + \frac{g(n)}{b_n} \right) \\ &= f(n) b_{n-1} c_{n-1} + \frac{f(n) b_{n-1} g(n)}{b_n} \\ &= f(n) b_{n-1} c_{n-1} + g(n) \\ &= f(n) a_{n-1} + g(n). \end{aligned}$$

پس  $a_n$  ی که ارائه شد در معادله بازگشتی صورت قضیه صدق می کند و از آنجایی که پاسخ این معادله بازگشتی منحصر به فرد است حکم برقرار می باشد. ■  
مثال ۷.۲.۴. معادله بازگشتی برج. هانوی را حل کنید.

داریم

$$a_n = 2a_{n-1} + 1$$

که  $a_0 = 0$ . ابتدا معادله

$$b_n = 2b_{n-1}$$

را حل می کنیم. با توجه به قضیه ۴.۲.۴ داریم

$$b_n = b_0 \prod_{k=1}^n 2 = 2^n b_0.$$

بنابراین با توجه به قضیه ۶.۲.۴ داریم  $a_n = b_n c_n$  که  $c_n$  در رابطه بازگشتی

$$c_n = c_{n-1} + \frac{1}{2^n b_0}$$

البته این مسئله بسیار ساده‌ای است که در آن  $f(n)$  و  $g(n)$  توابع ثابتی هستند. با فرض  $f(n) = c$  و  $g(n) = d$  پاسخ را در حالت کلی بیابید

صدق می‌کند. بنابراین با توجه به قضیه ۲.۲.۴ داریم

$$c_n = c_0 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k b_0}.$$

لذا

$$\begin{aligned} a_n &= b_n c_n \\ &= 2^n b_0 c_0 + 2^n \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \\ &= 2^n a_0 + \sum_{k=1}^n 2^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} 2^k \\ &= 2^n - 1. \end{aligned}$$

بنابراین  $a_n = 2^n - 1$ .

اما گاهی اوقات راه‌های ابتکاری بسیار ساده‌تری نیز وجود دارد. همین مسأله را به یک روش دیگر حل می‌کنیم.

روش دیگری نیز وجود دارد که در بخش بعد ارائه می‌شود.

فرض کنیم  $x_n = a_n + 1$  در این صورت داریم

$$x_n = a_n + 1 = 2a_{n-1} + 1 + 1 = 2(x_{n-1} - 1) + 2 = 2x_{n-1}.$$

لذا  $x_n$  در رابطه بازگشتی  $x_n = 2x_{n-1}$  صدق می‌کند و چون  $x_0 = 1$  بنابراین با توجه به قضیه ۴.۲.۴ داریم

$$x_n = x_0 \prod_{k=1}^n 2 = 2^n x_0 = 2^n.$$

در نتیجه

$$a_n = x_n - 1 = 2^n - 1. \spadesuit$$

در حقیقت روش دوم برای حل معادله بازگشتی بالا با توجه به این حقیقت

به دست آمد که می‌دانستیم پاسخ این معادله  $a_n = 2^n - 1$  است و در نتیجه می‌توانستیم حدس بزنیم که دنباله  $a_n + 1$  رفتار بهتری نسبت به دنباله  $a_n$  دارد و در معادله بازگشتی ساده‌تری صدق می‌کند.

گاهی اوقات می‌توان با حدس زدن، پاسخ یک معادله بازگشتی را به دست آورد و از آنجایی که جواب یک معادله بازگشتی منحصر به فرد است، اگر پاسخی که حدس زده‌ایم در معادله صدق کند نتیجه می‌گیریم که واقعاً پاسخ را به دست آورده‌ایم.

مثال ۸.۲.۴. پاسخ صریح معادله فیبوناچی، یعنی

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

را با شرایط  $a_0 = 0$  و  $a_1 = 1$  به دست آورید.

حدس می‌زنیم که این پاسخ به شکل  $a_n = \lambda^n$  است. این پاسخ را می‌آزماییم. اگر قرار باشد که  $\lambda^n$  پاسخی برای این معادله باشد آنگاه باید داشته باشیم

$$\lambda^n = a_n = a_{n-1} + a_{n-2} = \lambda^{n-1} + \lambda^{n-2}.$$

پس

$$\lambda^2 = \lambda + 1$$

و لذا

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

بنابراین

$$a_n = \alpha \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \beta \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

که با توجه به شرایط  $a_0 = 0$  و  $a_1 = 1$  می‌توانیم  $\alpha$  و  $\beta$  را به دست آوریم. داریم

$$0 = a_0 = \alpha + \beta,$$

$$1 = a_1 = \alpha \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) + \beta \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right).$$

چگونه چنین حدسی زدیم؟



پس چرا حدس‌مان درست نبود؟ جواب به شکل  $\lambda_1^n + \lambda_2^n$  است!



درستی این پاسخ را برای چند مقدار اولیه  $n$  تحقیق کنید.

در نتیجه  $\alpha = -\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$  و لذا

$$a_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}. \spadesuit$$

آنچه در مثال فوق آمد را می‌توان به صورت زیر تعمیم داد.  
قضیه ۹.۲.۴. فرض کنیم دنباله  $\{a_n\}$  در رابطه بازگشتی

$$c_0 a_n + c_1 a_{n-1} + \dots + c_m a_{n-m} = 0$$

صدق کند که  $c_0$  و  $c_m$  مخالف صفر هستند و  $1 \leq m \leq n$ . در این صورت اگر  
ریشه‌های متمایز معادله

$$c_0 x^m + c_1 x^{m-1} + \dots + c_{m-1} x + c_m = 0$$

باشند که درجه تکرار  $\lambda_i$  برابر  $m_i$  است، آنگاه

$$\begin{aligned} a_n = & (\alpha_{11} + \alpha_{12}n + \dots + \alpha_{1m_1}n^{m_1-1})\lambda_1^n \\ & + (\alpha_{21} + \alpha_{22}n + \dots + \alpha_{2m_2}n^{m_2-1})\lambda_2^n \\ & + \dots \\ & + (\alpha_{k1} + \alpha_{k2}n + \dots + \alpha_{km_k}n^{m_k-1})\lambda_k^n, \end{aligned}$$

که در آن  $\alpha_{ij}$  ها مقادیر ثابتی هستند و با توجه به شرایط اولیه رابطه بازگشتی تعیین می‌گردند.

**برهان.** فرض کنیم  $a_n = \lambda^n$ . در این صورت

$$c_0 \lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + \dots + c_m \lambda^{n-m} = 0.$$

بنابراین  $\lambda$  در معادله

$$c_0 x^m + c_1 x^{m-1} + \dots + c_{m-1} x + c_m = 0$$

صدق می‌کند. اما اگر  $\lambda$  ریشه این معادله با درجه تکرار  $t$  باشد آنگاه چند جمله‌ای  
 $p(x) = c_0 x^m + c_1 x^{m-1} + \dots + c_{m-1} x + c_m$  بر  $(x - \lambda)^t$  بخشپذیر است و لذا  
می‌توان نوشت  $p(x) = (x - \lambda)^t q(x)$  که در آن  $q$  یک چند جمله‌ای است. اگر

مشتقات متوالی  $p$  را محاسبه کنیم داریم

$$\begin{aligned} p'(x) &= t(x - \lambda)^{t-1} q(x) + (x - \lambda)^t q'(x) \\ &= (x - \lambda)^{t-1} (tq(x) + (x - \lambda)q'(x)), \\ p''(x) &= (t-1)(x - \lambda)^{t-2} (tq(x) + (x - \lambda)q'(x)) \\ &\quad + (x - \lambda)^{t-1} (tq'(x) + q'(x) + (x - \lambda)q''(x)). \end{aligned}$$

بدین ترتیب مشاهده می‌شود که  $\lambda$  ریشه مشتقات متوالی  $p$  از اول تا  $t-1$  ام نیز می‌باشد. به عبارت دیگر داریم

$$p(\lambda) = p'(\lambda) = p''(\lambda) = \dots = p^{(t-1)}(\lambda) = 0.$$

اما داریم

$$\begin{aligned} p(x) &= c_0 x^m + c_1 x^{m-1} + \dots + c_{m-1} x + c_m \\ p'(x) &= c_0 m x^{m-1} + c_1 (m-1) x^{m-2} + \dots + c_{m-1} \\ p''(x) &= c_0 m(m-1) x^{m-2} + c_1 (m-1)(m-2) x^{m-3} + \dots + c_{m-2}. \end{aligned}$$

بنابراین  $a_n = n^{t-1} \lambda^n, \dots, a_n = n^2 \lambda^n, a_n = n \lambda^n$  نیز در رابطه بازگشتی ما صدق می‌کنند و لذا هر ترکیب خطی آنها نیز در این معادله صدق می‌کند.

در نتیجه اگر  $\lambda_i$  ریشه  $p(x)$  با درجه تکرار  $m_i$  باشد آنگاه

$$(\alpha_{i1} + \alpha_{i2} n + \dots + \alpha_{im_i} n^{m_i-1}) \lambda_i^n$$

اما چرا هر جوابی برای این معادله باید لزوماً به شکل ترکیب خطی این چند جواب باشد؟

در رابطه بازگشتی صدق می‌کند و چون این مطلب برای هر  $1 \leq i \leq k$  درست است پس حکم برقرار می‌باشد. ■

در مثال بعد کاربردی از این روش را می‌بینیم.

**مثال ۱۰.۲.۴.** فرض کنیم  $r$  و  $s$  دو عدد حقیقی متمایز باشند و  $A_n$  ماتریس  $n \times n$  ی باشد که درایه‌های روی قطر اصلی آن برابر  $r$ ، درایه‌های بالای قطر اصلی آن برابر  $r-s$  و درایه‌های زیر قطر اصلی آن برابر  $s$  باشد. رابطه بازگشتی

برای محاسبه دترمینان  $A_n$  بیایید و آن را حل کنید.

اگر برای محاسبه دترمینان  $A_n$  از بسط دادن روی سطر اول استفاده کنیم داریم

$$\det(A_n) = r \det(A_{n-1}) - (r-s) \det(B_{n-1})$$

که در آن  $B_{n-1}$  ماتریسی  $(n-1) \times (n-1)$  است که درایه اول سطر اول آن برابر  $r$  و درایه دوم سطر اول آن برابر  $r-s$  است و اگر سطر اول و ستون اول آن را کنار بگذاریم آنگاه ماتریس  $(n-2) \times (n-2)$  بی که باقی می ماند همان  $A_{n-2}$  می باشد. بنابراین برای محاسبه دترمینان ماتریس  $B_{n-1}$  می توانیم روی ستون اول بسط دهیم و لذا داریم

$$\det(A_n) = r \det(A_{n-1}) - (r-s)s \det(A_{n-2}).$$

در نتیجه اگر  $a_n = \det(A_n)$  آنگاه

$$a_n = r a_{n-1} - (r-s)s a_{n-2},$$

$$\text{که } a_1 = r \text{ و } a_2 = r^2 - s(r-s) = r^2 + s^2 - rs.$$

برای حل این رابطه بازگشتی بنابر قضیه فوق باید ابتدا معادله

$$x^2 - rx + (r-s)s = 0$$

را حل کنیم. ریشه های این معادله  $r-s$  و  $s$  هستند. اکنون دو حالت به وجود می آید:

**حالت اول.**  $r \neq 2s$ .

در این حالت ریشه های معادله  $r-s$  و  $s$  هستند که درجه تکرار هر کدام برابر ۱ است. بنابراین جواب رابطه بازگشتی به صورت

$$a_n = \alpha(r-s)^n + \beta s^n$$

می باشد که با توجه به شرایط

$$a_1 = r,$$

$$a_2 = r^2 + s^2 - rs$$

فرض کنیم  $n$  عددی طبیعی باشد. چند جایگشت مانند  $\alpha$  روی  $n$  عدد ۱ تا  $n$  وجود دارد که مقدار  $\alpha(1)$  برابر ۱ یا ۲، مقدار  $\alpha(n)$  برابر  $n-1$  یا  $n$  و مقدار  $\alpha(i)$  برای  $i$  های از ۲ تا  $n-1$  برابر  $i-1$  یا  $i$  یا  $i+1$  باشد؟

می‌توان  $\alpha$  و  $\beta$  را محاسبه کرد. در حقیقت داریم

$$\begin{aligned} r &= a_1 = \alpha(r-s) + \beta s, \\ r^2 + s^2 - rs &= a_2 = \alpha(r-s)^2 + \beta s^2. \end{aligned}$$

با حل این دستگاه داریم

$$\alpha = \frac{r-s}{r-2s}, \quad \beta = \frac{-s}{r-2s}.$$

بنابراین

$$a_n = \frac{(r-s)^{n+1} - s^{n+1}}{r-2s}.$$

حالت دوم.  $r = 2s$ .

در این حالت، معادله دارای ریشه مضاعف  $r-s=s$  می‌باشد و لذا

$$a_n = (\alpha + \beta n)s^n$$

که با توجه به شرایط اولیه داریم  $\alpha = \beta = 1$  و در نتیجه

$$a_n = (1+n)s^n.$$

بنابراین می‌توان گفت

$$\det(A_n) = \begin{cases} \frac{(r-s)^{n+1} - s^{n+1}}{r-2s} & r \neq 2s, \\ (1+n)s^n & r = 2s. \spadesuit \end{cases}$$

رابطه بازگشتی

$$c_0 a_n + c_1 a_{n-1} + \dots + c_m a_{n-m} = 0$$

را که در قضیه فوق مورد بررسی قرار گرفت همگن<sup>۱۳</sup> می‌نامیم. در حالت

$$c_0 a_n + c_1 a_{n-1} + \dots + c_m a_{n-m} = f(n)$$

که  $f$  تابع دلخواهی است که بر اعداد طبیعی تعریف شده است، این معادله

<sup>۱۳</sup>homogeneous

سؤال حاشیه صفحه قبل چه ارتباطی به این مثال دارد؟

ناهمگن<sup>۱۴</sup> نامیده می‌شود. در صورتی که شرط اولیه‌ای روی معادله همگن نداشته باشیم جوابی که برای آن به دست می‌آید یک جواب عمومی این معادله نامیده می‌شود. اگر بتوانیم جواب عمومی معادله همگن را به دست آوریم و تنها یک جواب برای معادله ناهمگن نظیر آن را حدس بزنیم آنگاه می‌توانیم جواب عمومی معادله ناهمگن را به دست آوریم. جوابی که حدس زده می‌شود یک جواب خصوصی معادله ناهمگن نامیده می‌شود.

**قضیه ۱۱.۲.۴.** فرض کنیم دنباله  $\{a_n\}$  در رابطه بازگشتی

$$c_0 a_n + c_1 a_{n-1} + \dots + c_m a_{n-m} = f(n)$$

صدق کند که  $c_0$  و  $c_m$  مخالف صفر هستند و  $1 \leq m \leq n$ . در این صورت اگر  $a_n^{(h)}$  جواب عمومی معادله همگن نظیر آن و  $a_n^{(p)}$  یک جواب خصوصی برای معادله ناهمگن باشد آنگاه

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$$

جواب عمومی معادله ناهمگن خواهد بود.

**برهان.** کافی است نشان دهیم که جواب ارائه شده در معادله ناهمگن صدق می‌کند. با توجه به مفروضات قضیه داریم

$$c_0 a_n^{(h)} + c_1 a_{n-1}^{(h)} + \dots + c_m a_{n-m}^{(h)} = 0$$

و

$$c_0 a_n^{(p)} + c_1 a_{n-1}^{(p)} + \dots + c_m a_{n-m}^{(p)} = f(n).$$

بنابراین

$$c_0 (a_n^{(h)} + a_n^{(p)}) + c_1 (a_{n-1}^{(h)} + a_{n-1}^{(p)}) + \dots + c_m (a_{n-m}^{(h)} + a_{n-m}^{(p)}) = f(n).$$

در نتیجه حکم برقرار است. ■

**مثال ۱۲.۲.۴.** یک دایره را به  $n$  قطاع مساوی تقسیم کرده‌ایم و این قطعه‌ها را در جهت حرکت عقربه‌های ساعت از ۱ تا  $n$  شماره‌گذاری کرده‌ایم. می‌خواهیم

<sup>۱۴</sup>inhomogeneous

معمولاً بهترین حدسی که می‌توان زد این است که جواب را از جنس  $f$  در نظر بگیریم. مثلاً اگر  $f$  چندجمله‌ای باشد می‌توان جوابی را آزمود که به صورت چندجمله‌ای است.

قطعه‌های ایجاد شده را با  $k$  رنگ، رنگ‌آمیزی کنیم به طوری که هیچ دو قطعه کنار هم هم‌رنگ نباشد. این کار به چند طریق صورت می‌گیرد؟

پاسخ مسأله را با  $a_n$  نمایش می‌دهیم. داریم

$$a_1 = k,$$

$$a_2 = k(k-1),$$

$$a_3 = k(k-1)(k-2);$$

زیرا اگر یک قطعه داشته باشیم این یک قطعه را می‌توانیم به  $k$  طریق رنگ کنیم، اگر دو قطعه داشته باشیم آنگاه قطعه اول به  $k$  طریق و قطعه دوم به  $k-1$  طریق رنگ می‌شود (چون نباید با قطعه اول هم‌رنگ باشد) و اگر سه قطعه داشته باشیم آنگاه قطعه اول به  $k$  طریق و قطعه دوم به  $k-1$  طریق رنگ می‌شوند و از آنجایی که رنگ قطعه سوم، هم باید متفاوت با قطعه اول و هم متفاوت با قطعه دوم باشد، بنابراین به  $k-2$  طریق رنگ می‌شود.

اما مسأله برای حالتی که چهار قطعه داشته باشیم اندکی سخت‌تر است، زیرا در این حالت رنگ قطعه سوم می‌تواند با رنگ قطعه اول یکی باشد یا نباشد. بنابراین در حالت  $n=4$ ، رنگ قطعه اول و سوم یکی است یا نیست. اگر یکی باشد آنگاه قطعه اول به  $k$  طریق و دومی به  $k-1$  طریق و سومی به  $1$  طریق و چهارمی به  $k-1$  طریق رنگ می‌شود. اما اگر رنگ قطعات اول و سوم یکی نباشد آنگاه اولی به  $k$  طریق و دومی به  $k-1$  طریق و سومی به  $k-2$  طریق و چهارمی نیز به  $k-2$  طریق رنگ می‌شوند. در نتیجه

$$a_4 = k(k-1)^2 + k(k-1)(k-2)^2.$$

حال سعی می‌کنیم که رابطه‌ای بازگشتی برای تعیین  $a_n$  به دست آوریم. ابتدا مسأله دیگری را حل می‌کنیم.

فرض کنیم هم‌رنگ بودن قطعات شماره ۱ و  $n$  مهم نباشد. یعنی می‌خواهیم تعداد حالاتی را بشماریم که می‌توان  $n$  قطعه را رنگ کرد به طوری که شماره‌های ۱

مثلاً فرض کنید می‌خواهیم قطعات یک پیتزا را رنگ‌آمیزی کنیم.

بد نیست قبل از خواندن ادامه حل، حالت  $n=5$  را نیز برای خودتان بررسی کنید.

و ۲ هم‌رنگ نباشند و شماره‌های ۲ و ۳ هم‌رنگ نباشند و ... و شماره‌های  $n-1$  و  $n$  هم‌رنگ نباشند. واضح است که با توجه به اصل ضرب این کار به  $k(k-1)^{n-1}$  طریق انجام می‌شود. اکنون مشاهده می‌کنیم که دو قطعه ۱ و  $n$  هم‌رنگ نیستند یا هم‌رنگ هستند.

اگر ۱ و  $n$  هم‌رنگ نباشند بنابراین ما مسئله خودمان را رنگ‌آمیزی کرده‌ایم که این کار به  $a_n$  طریق انجام می‌شود. اما اگر ۱ و  $n$  هم‌رنگ باشند آنگاه می‌توان گفت که این دو قطعه یکی بوده‌اند و ما مسئله خودمان را برای  $n-1$  قطعه رنگ‌آمیزی کرده‌ایم که این کار به  $a_{n-1}$  طریق صورت می‌پذیرد.

در نتیجه

$$a_n + a_{n-1} = k(k-1)^{n-1}, \quad n \geq 3.$$

حال به حل این رابطه بازگشتی می‌پردازیم. طبق قضیه فوق ابتدا باید معادله همگن نظیر آن یعنی

$$a_n + a_{n-1} = 0$$

را حل کنیم. با توجه به قضیه ۹.۲.۴ جواب عمومی این معادله به صورت  $\alpha \lambda^n$  است که  $\lambda$  ریشه معادله  $x + 1 = 0$  می‌باشد. بنابراین

$$a_n^{(h)} = \alpha(-1)^n.$$

از طرف دیگر می‌توان دید که

$$a_n^{(p)} = (k-1)^n$$

جوابی خصوصی برای معادله ناهمگن است. در نتیجه

$$a_n = \alpha(-1)^n + (k-1)^n$$

و با توجه به این که  $a_3 = k(k-1)(k-2)$  می‌توانیم  $\alpha$  را به دست بیاوریم. داریم

$$k(k-1)(k-2) = a_3 = \alpha(-1)^3 + (k-1)^3.$$

چون در این معادله ناهمگن، تابع  $f$  مسئله به صورت مضربی از  $(k-1)^{n-1}$  است حدس می‌زنیم که جواب خصوصی به شکل مضربی از  $(k-1)^{n-1}$  باشد. با قرار دادن این جواب در معادله مشاهده می‌کنیم که این مضرب برابر  $(k-1)$  است.

در نتیجه

$$\begin{aligned}
 \alpha &= (k-1)^3 - k(k-1)(k-2) \\
 &= (k-1)(k^2 - 2k + 1 - k^2 + 2k) \\
 &= (k-1).
 \end{aligned}$$

بنابراین

$$a_n = (k-1)^n + (-1)^n(k-1). \spadesuit$$

در بخش بعد روش دیگری را برای حل معادله‌های بازگشتی مورد بررسی قرار می‌دهیم.

## ۳.۴ تابع مولد

فرض کنیم  $\{a_n\}_{n=0,1,\dots}$  یک دنباله باشد. با استفاده از این دنباله می‌توان تابعی به صورت زیر تعریف کرد:

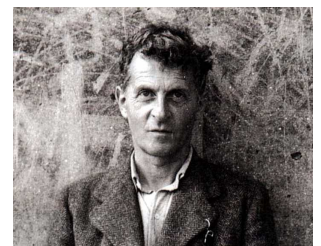
$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$$

این تابع را **تابع مولد**<sup>۱۵</sup> دنباله  $\{a_n\}$  می‌نامیم. شناخت این تابع و بررسی خواص آن می‌تواند در شناسایی دنباله  $\{a_n\}$  مؤثر باشد. وقتی تابع مولد یک دنباله را می‌نویسیم با مجموعه نامتناهی سر و کار داریم که ممکن است برای  $x$  خاص، موجود باشد یا نباشد. ما در این بحث فرض را بر این می‌گذاریم که این نمایش برای تابع مولد، صرفاً صورتی نمادین است که بیشتر تعیین ضرایب در این نمایش برای ما اهمیت دارد تا محاسبه مقدار  $f(x)$  برای  $x$  خاص. از این رو هنگامی که در این بخش با نمایشی نامتناهی مانند  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  مواجه می‌شویم، سری مورد بحث را همگرا و این نمایش را معتبر تلقی می‌کنیم.

هر چیزی را که بتوان گفت،  
می‌توان به روشنی گفت.

**Ludwig Josef Johann  
Wittgenstein**

26 April 1889 - 29 April 1951



<sup>۱۵</sup>generating function

اجازه دهید برای روشن شدن بحث مثالی بیاوریم. دنباله  $a_n = 1$  را در نظر می‌گیریم. تابع مولد این دنباله عبارت است از

$$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

اگر  $|x| < 1$  آنگاه مقدار این سری موجود و برابر  $\frac{1}{1-x}$  است. بنابراین مقدار  $f(x)$  فقط برای  $x$  هایی که  $|x| < 1$  موجود است و تنها در این صورت است که مجموع بالا اعتبار دارد. اما از آنجایی که در بحث بخش حاضر ما صرفاً در پی پیدا کردن پاسخی صریح برای روابط بازگشتی هستیم، در این گونه موارد بدون ذکر شرط  $|x| < 1$  می‌گوییم که تابع مولد دنباله  $a_n = 1$  برابر  $\frac{1}{1-x}$  است.

**مثال ۱.۳.۴. تابع مولد دنباله فیبوناچی را بیابید.**

داریم

$$F_0 = 1, \quad F_1 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n \geq 2.$$

بنابراین

آیا تابع مولد هر دنباله بازگشتی را می‌توان صریحاً تعیین کرد؟

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n \\ &= 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} (F_{n-1} + F_{n-2}) x^n \\ &= 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2} x^n \\ &= 1 + x + \sum_{n=1}^{\infty} F_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^{n+2} \\ &= 1 + x + x \sum_{n=1}^{\infty} F_n x^n + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n \\ &= 1 + x + x \left( \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n - 1 \right) + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n \\ &= 1 + x + x(f(x) - 1) + x^2 f(x). \end{aligned}$$

در نتیجه

$$f(x) = \frac{-1}{x^2 + x - 1}. \spadesuit$$

بد نیست تابع مولد چند دنباله معروف دیگر را هم به دست آوریم.  
**مثال ۲.۳.۴.** تابع مولد دنباله مذکور در مسأله برج هانوی را بیابید.

داریم

$$a_0 = 0, \quad a_n = 2a_{n-1} + 1, \quad n \geq 1.$$

بنابراین

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (2a_{n-1} + 1) x^n \\ &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} x^n \\ &= 2xf(x) + \frac{x}{1-x}. \end{aligned}$$

در نتیجه

$$f(x) = \frac{x}{(1-x)(1-2x)} = \frac{1}{1-2x} - \frac{1}{1-x}. \spadesuit$$

گاهی اوقات ممکن است با مشتقات  $f$  نیز مواجه شویم. مثال بعد را ببینید.  
**مثال ۳.۳.۴.** فرض کنیم  $D_n$  تعداد جایگشت‌های پریش روی  $n$  عدد باشد.  
 معادله دیفرانسیلی بیابید که تابع مولد دنباله  $\{D_n\}$  در آن صدق کند.

داریم

$$D_0 = 1, \quad D_n = nD_{n-1} + (-1)^n, \quad n \geq 1.$$

یک معادله دیفرانسیل،  
 معادله‌ای است که مجهول آن  
 یک تابع است و خود تابع و  
 مشتقاتش در آن ظاهر شده‌اند.

بنابراین

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} D_n x^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (nD_{n-1} + (-1)^n) x^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} nD_{n-1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} (-x)^n \end{aligned}$$

اما با توجه به این که  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n x^n$  داریم  $xf(x) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n x^{n+1}$  و لذا

$$(xf(x))' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)D_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} nD_{n-1} x^{n-1}.$$

در نتیجه

$$\sum_{n=1}^{\infty} nD_{n-1} x^n = x(xf(x))'.$$

بنابراین

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} nD_{n-1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} (-x)^n \\ &= 1 + x(xf(x))' + \frac{-x}{1+x} \\ &= 1 + x(f(x) + xf'(x)) + \frac{-x}{1+x} \\ &= 1 + xf(x) + x^2 f'(x) + \frac{-x}{1+x}. \end{aligned}$$

لذا

$$x^2 f'(x) + (x-1)f(x) + \frac{1}{1+x} = 0. \spadesuit$$

اما در صورتی می‌توانیم تابع مولد این دنباله را دقیقاً تعیین کنیم که قادر باشیم معادله دیفرانسیل به دست آمده را حل کنیم.

آیا می‌توانید این معادله دیفرانسیل را حل کنید؟

گاهی اوقات پیش می‌آید که برای تعیین تابع مولد یک دنباله مجبوریم دو مجموع نامتناهی به شکل  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  و  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$  را در یکدیگر ضرب کنیم و حاصل را به صورت  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  بنویسیم.

**قضیه ۴.۳.۴.** فرض کنیم

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n.$$

در این صورت

$$f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

که در آن

$$c_n = \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i}.$$

**برهان.** فرض کنیم  $h(x) = f(x)g(x)$ . در این صورت

$$c_0 = h(0) = f(0)g(0) = a_0 b_0.$$

برهانی ترکیبیاتی برای این حکم ارائه دهید.

همچنین

$$c_1 = h'(0) = f'(0)g(0) + f(0)g'(0) = a_1 b_0 + a_0 b_1.$$

و نیز

$$\begin{aligned} 2!c_2 &= h''(0) \\ &= f''(0)g(0) + 2f'(0)g'(0) + f(0)g''(0) \\ &= 2!(a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2). \end{aligned}$$

■ به همین ترتیب می‌توان به استقرا روی  $n$  حکم را اثبات کرد.

**تعریف ۵.۳.۴.** فرض کنیم  $\{a_n\}$  و  $\{b_n\}$  دو دنباله باشند و به ازای هر  $n$ ,

$$c_n = \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i}.$$

دنباله  $\{2^n n!\}$  حاصلضرب  
کوشی چه دنباله‌هایی است؟

در این صورت  $\{c_n\}$  را حاصلضرب کوشی<sup>۱۶</sup> دو دنباله  $\{a_n\}$  و  $\{b_n\}$  می‌نامیم. ♣  
مثال ۶.۳.۴. تابع مولد دنباله کاتالان را به دست آورید.

داریم

$$C_0 = 1, \quad C_{n+1} = \sum_{i=0}^n C_i C_{n-i}, \quad n \geq 1.$$

اکنون اگر  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$  آنگاه

$$\begin{aligned} f(x)^2 &= \left( \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{i=0}^n C_i C_{n-i} \right) x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1} x^n \\ &= \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1} x^{n+1} \\ &= \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n \\ &= \frac{1}{x} (f(x) - 1). \end{aligned}$$

بنابراین

$$x f(x)^2 - f(x) + 1 = 0.$$

در نتیجه

$$f(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}. \spadesuit$$

اما کدام یک از دو جوابی که برای  $f(x)$  در مثال بالا به دست آمد قابل قبول است؟ از آنجایی که اعتبار تابع مولد به صورت نمادین برای ما مورد توجه است مجبوریم که جواب  $f(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$  را برای آن بپذیریم. بعداً در این مورد

<sup>۱۶</sup>Cauchy product

بحث خواهیم کرد.

سؤالی که اکنون پیش می‌آید این است که چگونه می‌توانیم با دانستن تابع مولد یک دنباله بازگشتی، دنباله را صریحاً تعیین کنیم.

**تعریف ۷.۳.۴.** فرض کنیم  $f$  تابعی باشد که در یک همسایگی از ۰ تعریف شده است. اگر بتوانیم  $f(x)$  را به صورت  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  بنویسیم می‌گوییم که این سری، بسط مکلورن<sup>۱۷</sup> تابع  $f$  حول ۰ است. ♣

بسط مکلورن  $f'$  و  $f$  را بر حسب بسط مکلورن  $f$  به دست آورید.

فرض کنیم  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  در این صورت

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots,$$

$$f'(x) = a_1 + 2!a_2 x + \dots + n a_n x^{n-1} + \dots,$$

$$f''(x) = 2!a_2 + 3 \times 2!a_3 x + \dots + n(n-1)a_n x^{n-2} + \dots,$$

...

$$f^{(n)}(x) = n!a_n + n \times (n-1) \times \dots \times 2x + \dots$$

بنابراین  $f^{(n)}(0) = n!a_n$  و لذا  $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ . در نتیجه می‌توان گفت اگر  $f$  تابعی باشد که بی‌نهایت بار حول ۰ مشتق‌پذیر باشد آنگاه می‌توان با مشتق‌گیری متوالی، بسط مکلورن آن را به شکل

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

به دست آورد.

این مطلب کمک می‌کند تا بتوانیم با استفاده از تابع مولد یک دنباله بازگشتی، دنباله را صریحاً تعیین کنیم. مثال‌های زیر را ببینید.

**مثال ۸.۳.۴.** با استفاده از تابع مولد دنباله فیبوناچی، این دنباله را صریحاً مشخص کنید.

بسط مکلورن تابع  $\ln(1-x)$  را بیابید.

<sup>۱۷</sup>Maclaurin expansion

در مثال ۱.۳.۴ دیدیم که تابع مولد دنباله فیبوناچی عبارت است از

$$f(x) = \frac{-1}{x^2 + x - 1}.$$

اگر  $\alpha = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$  و  $\beta = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$  آنگاه  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های  $x^2 + x - 1 = 0$  هستند و لذا می‌توان نوشت

$$f(x) = \frac{-1}{(\alpha - x)(\beta - x)} = \frac{1}{\alpha - \beta} \left( \frac{1}{\alpha - x} - \frac{1}{\beta - x} \right).$$

اکنون با توجه به این که  $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$  داریم

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\alpha - \beta} \left( \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{\alpha}} - \frac{1}{\beta} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{\beta}} \right) \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} \left( \frac{1}{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^n - \frac{1}{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{\beta}\right)^n \right) \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{\alpha^{n+1}} - \frac{1}{\beta^{n+1}} \right) x^n. \end{aligned}$$

اما داریم  $\alpha\beta = -1$  و لذا  $\frac{1}{\alpha} = -\beta$  و  $\frac{1}{\beta} = -\alpha$ . همچنین  $\alpha - \beta = -\sqrt{5}$ . بنابراین

توجه کنید که چون مقادیر اولیه دیگری را در بخش قبل در نظر گرفته بودیم پاسخی که به دست آوردیم متفاوت با پاسخ حاضر می‌باشد.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{-\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{\infty} ((-\beta)^{n+1} - (-\alpha)^{n+1}) x^n \\ &= \frac{1}{-\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right) x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}}{\sqrt{5}} x^n. \end{aligned}$$

از سوی دیگر داشتیم  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n$ . بنابراین

$$F_n = \frac{\left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}}{\sqrt{5}}. \spadesuit$$

گرچه به دست آوردن مقدار صریح دنباله فیبوناچی به روشی که در بخش قبل معرفی کردیم بسیار ساده‌تر است اما این روش نیز خالی از لطف نیست.

**مثال ۹.۳.۴.** پاسخی صریح برای مسئله برج هانوی با استفاده از تابع مولد ارائه دهید.

در مثال ۲.۳.۴ دیدیم که تابع مولد دنباله پاسخ این سؤال عبارت است از

$$f(x) = \frac{1}{1-2x} - \frac{1}{1-x}.$$

بنابراین

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n - \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (2^n - 1)x^n. \end{aligned}$$

از سوی دیگر داشتیم  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ . بنابراین

$$a_n = 2^n - 1.$$

و این همان چیزی است که قبلاً به دو روش به دست آورده بودیم. ♠

**مثال ۱۰.۳.۴.** با استفاده از روش تابع مولد، دنباله کاتالان را صریحاً تعیین کنید.

در مثال ۶.۳.۴ دیدیم که

$$f(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}.$$

از آنجایی که تابع  $\frac{1+\sqrt{1-4x}}{2x}$  حول ۰ دارای بسط مکلورن نیست، تابع  $\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$  را به عنوان تابع مولد دنباله کاتالان در نظر می‌گیریم.

چرا این تابع بسط مکلورن ندارد؟

با مشتقگیری متوالی از تابع  $\sqrt{1+y}$  می‌توانیم بسط مکلورن این تابع را به صورت

$$\sqrt{1+y} = 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n-2}{n-1} \left(\frac{-1}{4}\right)^n \frac{y^n}{n}$$

به دست آوریم. بنابراین

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x} \\
 &= \frac{1}{2x} \left( 1 - 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n-2}{n-1} \left(\frac{-1}{4}\right)^n \frac{(-4x)^n}{n} \right) \\
 &= \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n-2}{n-1} \frac{x^n}{n} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n-2}{n-1} \frac{x^{n-1}}{n} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2(n+1)-2}{(n+1)-1} \frac{x^{(n+1)-1}}{n+1} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} x^n.
 \end{aligned}$$

از سوی دیگر داشتیم  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$ . بنابراین

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}. \spadesuit$$

برای برخی از دنباله‌ها پیدا کردن تابع مولد به شکلی که تا کنون گفته شد کار سختی است. در این گونه موارد شاید بتوان تابع مولد نمایی<sup>۱۸</sup> چنین دنباله‌ای را به دست آورد. برای یک دنباله مانند  $\{a_n\}$ ، تابع مولد نمایی آن به صورت

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$$

تعریف می‌شود. از آنجایی که ممکن است بین اصطلاحات تابع مولد و تابع مولد نمایی ابهام ایجاد شود، گاهی اوقات تابع مولد  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  برای این دنباله را تابع مولد معمولی<sup>۱۹</sup> می‌نامند.

تابع مولد نمایی دنباله‌های مذکور در مثال‌های قبلی را به دست آورید.

<sup>۱۸</sup>exponential generating function

<sup>۱۹</sup>ordinary generating function

با توجه به آن که بسط مکلوین تابع نمایی  $e^x$  به صورت

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

است، می‌توان گفت که تابع مولد نمایی دنباله ثابت ۱ برابر  $e^x$  می‌باشد و از این روست که  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$  را تابع مولد نمایی دنباله  $\{a_n\}$  نام نهاده‌اند.

با توجه به توضیحاتی که در مورد بسط مکلوین داده شد می‌توان گفت که اگر  $f$  حول  $\circ$  بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر باشد آنگاه

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(\circ) \frac{x^n}{n!}.$$

از این مطلب در روش حل معادله‌های بازگشتی با استفاده از تابع مولد نمایی استفاده می‌کنیم.

**مثال ۱۱.۳.۴.** با استفاده از روش تابع مولد نمایی، پاسخی صریح برای مسئله تعداد جایگشت‌های پیرش روی  $n$  عدد بیابید.

آیا می‌توانید مسئله کاتالان را به همین روش حل کنید؟

داریم

$$D_0 = 1, \quad D_n = nD_{n-1} + (-1)^n, \quad n \geq 1.$$

بنابراین

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} D_n \frac{x^n}{n!} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (nD_{n-1} + (-1)^n) \frac{x^n}{n!} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} nD_{n-1} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} \\ &= 1 + x \sum_{n=1}^{\infty} D_{n-1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + e^{-x} - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= x \sum_{n=0}^{\infty} D_n \frac{x^n}{n!} + e^{-x} \\
 &= x f(x) + e^{-x}.
 \end{aligned}$$

در نتیجه

$$(1-x)f(x) = e^{-x}$$

و لذا

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{e^{-x}}{1-x} \\
 &= \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} x^n \right) \\
 &= \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} x^n \right) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!} \right) x^n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i n!}{i!} \right) \frac{x^n}{n!}.
 \end{aligned}$$

از سوی دیگر داشتیم  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \frac{x^n}{n!}$ . بنابراین

$$D_n = \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i n!}{i!} = n! \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!}. \spadesuit$$

همان گونه که دیدیم استدلال‌های ترکیبیاتی و استفاده از دوبار شمار می‌تواند اتحادهای ترکیبیاتی زیبایی را به دست دهد. استفاده از روش تابع مولد نیز می‌تواند موجب به دست آوردن اتحادهای جالبی شود که چند نمونه از آنها را در اینجا مورد بررسی قرار می‌دهیم. آنچه تاکنون دیدیم استفاده از رابطه بازگشتی یک دنباله به منظور تعیین تابع مولد بود، اما این همه قدرت تابع مولد نیست. گاهی اوقات با مشخص بودن تابع مولد یک دنباله می‌توان حکمی را در مورد دنباله اثبات کرد. در مثال‌هایی که خواهد آمد با این ترفند آشنا خواهید شد.

تابع  $\frac{(e^x-1)^3}{3!}$  تابع مولد چه دنباله‌ای است؟

مثال ۱۲.۳.۴. با استفاده از روش تابع مولد نمایی و بدون استفاده از رابطه بازگشتی

$$D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$$

مقدار صریح دنباله  $\{D_n\}$  را به دست آورید.

فرض کنیم  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \frac{x^n}{n!}$  که  $D_0 = 1$ . با فرض  $F(x) = e^x f(x)$  داریم

$$\begin{aligned} F(x) &= \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D_n}{n!} x^n \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} \cdot \frac{D_{n-i}}{(n-i)!} \right) x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{i=0}^n \frac{n!}{i!} \cdot \frac{D_{n-i}}{(n-i)!} \right) \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} D_{n-i} \right) \frac{x^n}{n!}. \end{aligned}$$

اما می‌دانیم

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} D_{n-i} = n!.$$

برای اثبات این امر می‌توان از دوبار شمار استفاده کرد. می‌دانیم که تعداد کل جایگشت‌های روی  $n$  عدد برابر  $n!$  می‌باشد. در هر جایگشتی دقیقاً  $i$  عدد در جای خود آمده‌اند که  $i$  می‌تواند برابر  $0$  یا  $1$  یا  $\dots$  یا  $n$  باشد. تعداد جایگشت‌هایی که دقیقاً  $i$  عدد در جای خود قرار گرفته‌اند برابر است با  $\binom{n}{i}$  (تعداد انتخاب  $i$  عدد از بین  $n$  عدد) ضربدر  $D_{n-i}$  (تعداد حالاتی که بقیه اعداد می‌توانند به صورت پیریش قرار بگیرند). بنابراین تساوی فوق برقرار است و لذا

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n! \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

در نتیجه  $f(x) = F(x)e^{-x} = \frac{e^{-x}}{1-x}$  و مشابه مثال قبل می‌توان  $D_n$  را تعیین کرد. ♠

این حکم را با استفاده از فرمول صریح  $D_n$  اثبات کنید.

حکم زیر همان قضیه ۸.۲.۳ است که این بار با استفاده از روش تابع مولد آن را اثبات می‌کنیم.

قضیه ۱۳.۳.۴. فرض کنیم  $m, n$  و  $r$  اعدادی طبیعی باشند که  $r \leq m$ . در این صورت

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \binom{m+n-k}{r-k} = \binom{m}{r}.$$

به علاوه اگر  $m < r$  آنگاه این مجموع برابر صفر خواهد بود.

برهان. با مشتقگیری متوالی از تابع  $\frac{1}{(1-x)^{a+1}}$  مشاهده می‌کنیم که

$$\frac{1}{(1-x)^{a+1}} = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{a+j}{j} x^j.$$

اما با توجه به بسط مکلورن بالا، ضریب  $x^{r-k}$  در بسط  $\frac{1}{(1-x)^{m+n-r+1}}$  برابر است با  $\binom{m+n-k}{r-k}$ . لذا

$$\frac{1}{(1-x)^{m+n-r+1}} = \sum_{k=-\infty}^r \binom{m+n-k}{r-k} x^{r-k}.$$

در نتیجه داریم

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-x)^{m-r+1}} &= (1-x)^n \cdot \frac{1}{(1-x)^{m+n-r+1}} \\ &= \left( \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} x^k \right) \left( \sum_{k=-\infty}^r \binom{m+n-k}{r-k} x^{r-k} \right) \end{aligned}$$

اکنون اگر بخواهیم ضریب  $x^r$  را در عبارت سطر آخر بالا محاسبه کنیم باید ضریب  $x^k$  از مجموع اول را در ضریب  $x^{r-k}$  در مجموع دوم ضرب کنیم که  $k$  می‌تواند برابر ۰ یا ۱ یا ... یا  $n$  باشد. بنابراین ضریب  $x^r$  در بسط  $\frac{1}{(1-x)^{m-r+1}}$  برابر است با

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \binom{m+n-k}{r-k}.$$

مشتقات متوالی را محاسبه کنید و این بسط را به دست آورید.

از سوی دیگر اگر  $m \geq r$  آنگاه داریم

$$\frac{1}{(1-x)^{m-r+1}} = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{m-r+j}{j} x^j$$

که ضریب  $x^r$  برابر  $\binom{m}{r}$  است و اگر  $m \leq r-1$  آنگاه

$$\frac{1}{(1-x)^{m-r+1}} = (1-x)^{r-1-m} = \sum_{i=0}^{r-1-m} (-1)^i \binom{r-1-m}{i} x^i$$

■ که ضریب  $x^r$  در این بسط برابر ۰ می‌باشد. در نتیجه حکم برقرار است.  
مثال ۱۴.۳.۴. فرض کنیم  $\{a_n\}$  دنباله‌ای باشد که  $a_0 = 1$  و در رابطه بازگشتی

$$\sum_{k=0}^n a_k a_{n-k} = 1$$

صدق می‌کند. مقدار  $a_n$  را به طور صریح مشخص نمایید.

فرض کنیم  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  تابع مولد این دنباله باشد. داریم

$$\begin{aligned} f(x)^2 &= \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k} \right) x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\ &= \frac{1}{1-x}. \end{aligned}$$

بنابراین

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} x^n$$

و لذا  $a_n = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!}$ .

با استفاده از استقرا ثابت کنید که مقدار ارائه شده برای  $a_n$  در رابطه بازگشتی بالا صدق می‌کند.



حکم بعدی همان قضیه ۱۱.۱.۲ است که با استفاده از تابع مولد نمایی آن را اثبات می‌کنیم.

**قضیه ۱۵.۳.۴.** فرض کنیم  $X = \{1, 2, \dots, n\}$ . در این صورت تعداد  $(A_1, A_2, \dots, A_k)$  هایی که  $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k = X$  و  $A_j$  ها دو به دو مجزا هستند برابر است با  $k^n$ .

اگر شرط ناتهی بودن را روی  $A_j$  ها بگذاریم چه پاسخی دارید؟

**برهان.** تعداد مطلوب را با  $a_{n,k}$  نمایش می‌دهیم. مجموعه  $A_1$  می‌تواند دارای  $i$  عضو باشد که  $i$  برابر ۰ یا ۱ یا ... یا  $n$  است. اگر  $A_1$  دارای  $i$  عضو باشد آنگاه باید  $n-i$  عضو دیگر را در  $k-1$  مجموعه دیگر قرار دهیم که این کار به  $a_{n-i,k-1}$  طریق صورت می‌پذیرد. بنابراین

$$a_{n,k} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a_{n-i,k-1}.$$

حال اگر  $f_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,k} \frac{x^n}{n!}$  تابع مولد نمایی دنباله  $\{a_{n,k}\}_n$  باشد آنگاه

$$\begin{aligned} f_k(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,k} \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a_{n-i,k-1} \right) \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{i=0}^n \frac{n!}{i!(n-i)!} a_{n-i,k-1} \right) \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{i=0}^n \frac{a_{n-i,k-1}}{i!(n-i)!} \right) x^n \\ &= \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n,k-1}}{n!} x^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \right) \\ &= f_{k-1}(x) e^x. \end{aligned}$$

در نتیجه

$$f_k(x) = f_{k-1}(x) e^x$$

و چون

$$f_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,1} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x,$$

با استدلالی استقرایی داریم

$$f_k(x) = e^{kx}.$$

بنابراین

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n,k} \frac{x^n}{n!} = f_k(x) = e^{kx} = \sum_{n=0}^{\infty} k^n \frac{x^n}{n!}.$$

■ بدین ترتیب نتیجه می شود که  $a_{n,k} = k^n$  و لذا حکم برقرار است.

حکم زیر که همان قضیه ۱۰.۱.۲ است کمی سخت تر اثبات می شود.

قضیه ۱۶.۳.۴. فرض کنیم  $X = \{1, 2, \dots, n\}$ . در این صورت تعداد  $(A_1, A_2, \dots, A_k)$  هایی که  $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k = X$  برابر است با  $(2^k - 1)^n$ .

**برهان.** تعداد مطلوب را با  $a_{n,k}$  نمایش می دهیم. تعداد اعضای  $A_1 \setminus \bigcup_{j=2}^k A_j$  را برابر  $i$  در نظر می گیریم که  $i$  می تواند برابر ۰ یا ۱ یا ... یا  $n$  باشد. بنابراین ابتدا  $i$  عضو انتخاب می کنیم (به  $\binom{n}{i}$  طریق) و آنها را در  $A_1$  قرار می دهیم. این  $i$  عضو در  $A_1$  می آیند ولی در هیچ یک از مجموعه های  $A_2$  تا  $A_k$  ظاهر نمی شوند. سپس  $n - i$  عضو باقیمانده را در  $k - 1$  مجموعه باقیمانده قرار می دهیم (به  $a_{n-i, k-1}$  طریق). اکنون هر یک از این  $n - i$  عضو می توانند در  $A_1$  باشند یا نباشند (به  $2^{n-i}$  طریق). بنابراین

$$a_{n,k} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a_{n-i, k-1} 2^{n-i}.$$

حال اگر  $f_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,k} \frac{x^n}{n!}$  تابع مولد نمایی دنباله  $\{a_{n,k}\}_n$  باشد آنگاه

$$f_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,k} \frac{x^n}{n!}$$

اگر  $X$  و  $Y$  دو مجموعه باشند،  $X \setminus Y$  مجموعه همه اعضای از  $X$  است که در  $Y$  نیستند.

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a_{n-i, k-1} 2^{n-i} \right) \frac{x^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{i=0}^n \frac{n!}{i!(n-i)!} a_{n-i, k-1} 2^{n-i} \right) \frac{x^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{i=0}^n \frac{a_{n-i, k-1} 2^{n-i}}{i!(n-i)!} \right) x^n \\
&= \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n, k-1} 2^n}{n!} x^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \right) \\
&= f_{k-1}(2x) e^x.
\end{aligned}$$

در نتیجه

$$f_k(x) = f_{k-1}(2x) e^x$$

و چون

$$f_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,1} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x,$$

با استفاده از استقرا این مطلب را اثبات کنید.

با استدلالی استقرایی داریم

$$f_k(x) = e^{(2^k - 1)x}.$$

بنابراین

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n,k} \frac{x^n}{n!} = f_k(x) = e^{(2^k - 1)x} = \sum_{n=0}^{\infty} (2^k - 1)^n \frac{x^n}{n!}.$$

بدین ترتیب نتیجه می شود که  $a_{n,k} = (2^k - 1)^n$  و لذا حکم برقرار است. ■

حکم زیر نیز همان قضیه ۴.۳.۲ است که این بار به روش تابع مولد آن را اثبات می کنیم.

قضیه ۱۷.۳.۴. فرض کنیم  $s, r$  و  $n$  اعداد طبیعی دلخواهی باشند که  $n \leq r+s$ .

در این صورت ضرایب دوجمله ای در روابط

$$\binom{r+s}{n} = \sum_{i=0}^n \binom{r}{i} \binom{s}{n-i}$$

صدق می‌کنند.

**برهان.** می‌دانیم تابع مولد دنباله  $\{(a_n)\}_{n=0,1,\dots,a}$  عبارت است از

$$\sum_{n=0}^a \binom{a}{n} x^n = (1+x)^a.$$

بنابراین داریم

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{r+s} \binom{r+s}{n} x^n &= (1+x)^{r+s} \\ &= (1+x)^r (1+x)^s \\ &= \left( \sum_{n=0}^r \binom{r}{n} x^n \right) \left( \sum_{n=0}^s \binom{s}{n} x^n \right) \\ &= \sum_{n=0}^{r+s} \left( \sum_{i=0}^n \binom{r}{i} \binom{s}{n-i} \right) x^n. \end{aligned}$$

و لذا حکم برقرار است. ■

دو حکم زیر نیز همان قضایای ۱۴.۴.۲ و ۱۶.۴.۲ هستند که این بار با استفاده از تابع مولد آنها را اثبات می‌کنیم.

**قضیه ۱۸.۳.۴.** فرض کنیم  $n$  و  $k$  اعدادی طبیعی باشند. در این صورت تعداد جواب‌های طبیعی معادله  $n = x_1 + \dots + x_k$  برابر است با  $\binom{n-1}{k-1}$ .

**برهان.** عبارت

$$(x + x^2 + x^3 + \dots)^k$$

را در نظر می‌گیریم. اگر بخواهیم این  $k$  پرانتز را در یکدیگر ضرب کنیم باید هر جمله‌ای از هر پرانتزی در هر جمله از هر پرانتز دیگر ضرب شود. اگر  $x^{x_1}$  را از پرانتز اول،  $x^{x_2}$  را از پرانتز دوم، ...، و  $x^{x_k}$  را از پرانتز  $k$  ام انتخاب کنیم که  $x_1 + \dots + x_k = n$  آنگاه  $x^n$  حاصل می‌شود. اما ضریب  $x^n$  برابر چند خواهد شد؟ در حقیقت ضریب  $x^n$  برابر است با تعداد جواب‌های طبیعی معادله  $x_1 + \dots + x_k = n$ . بنابراین اگر تعداد جواب‌ها را با  $a_n$  نمایش دهیم آنگاه تابع

اگر مثلاً شرط  $x_3 \leq 5$  را اضافه کنیم، تعداد مطلوب برابر چند است؟

مولد دنباله  $\{a_n\}$  عبارت است از

$$f(x) = (x + x^2 + x^3 + \dots)^k = x^k (1 + x + x^2 + \dots)^k = x^k \cdot \frac{1}{(1-x)^k}.$$

اما با مشتقگیری متوالی از تابع  $(1-x)^{-k}$  می‌توانیم بسط مکلورن این تابع را به صورت

$$\frac{1}{(1-x)^k} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k-1} x^n$$

بنویسیم. در نتیجه

$$\begin{aligned} f(x) &= x^k \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k-1} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k-1} x^{n+k} \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n-1}{k-1} x^n. \end{aligned}$$

بنابراین  $a_n = \binom{n-1}{k-1}$  و لذا حکم برقرار است. ■  
**قضیه ۱۹.۳.۴.** فرض کنیم  $n$  و  $k$  اعدادی طبیعی باشند. در این صورت تعداد

جواب‌های حسابی معادله  $n = x_1 + \dots + x_k$  برابر است با

$$\binom{n+k-1}{n} = \binom{n+k-1}{k-1}.$$

اگر مثلاً شرط فرد بودن  $x_i$  ها را اضافه کنیم، تعداد مطلوب برابر چند است؟

**برهان.** عبارت

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \dots)^k$$

را در نظر می‌گیریم. اگر بخواهیم این  $k$  پرانتز را در یکدیگر ضرب کنیم باید هر جمله‌ای از هر پرانتزی در هر جمله از هر پرانتز دیگر ضرب شود. اگر  $x^{x_1}$  را از پرانتز اول،  $x^{x_2}$  را از پرانتز دوم، ...، و  $x^{x_k}$  را از پرانتز  $k$  ام انتخاب کنیم که  $x_1 + \dots + x_k = n$  آنگاه  $x^n$  حاصل می‌شود. اما ضریب  $x^n$  برابر چند خواهد شد؟ در حقیقت ضریب  $x^n$  برابر است با تعداد جواب‌های حسابی معادله

$x_1 + \dots + x_k = n$ . بنابراین اگر تعداد جواب‌ها را با  $a_n$  نمایش دهیم آنگاه تابع مولد دنباله  $\{a_n\}$  عبارت است از

$$f(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + \dots)^k = \frac{1}{(1-x)^k}.$$

در نتیجه

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k-1} x^n.$$

بنابراین  $a_n = \binom{n+k-1}{k-1}$  و لذا حکم برقرار است. ■

ممکن است تصور شود که استفاده از تابع مولد تنها می‌تواند در دوباره حل کردن مسائلی که قبلاً روش حل دیگری برای آنها یافته بودیم مؤثر باشد. اما مسائلی را سراغ داریم که واقعاً روشی بهتر از تابع مولد برای آنها وجود ندارد.

**مثال ۲۰.۳.۴.** مجموعه اعداد طبیعی را به  $n$  تصاعد حسابی افراز کرده‌ایم. به عبارت دیگر

$$\{1, 2, 3, \dots\} = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$$

که در آن

$$A_i = \{a_i, a_i + d_i, a_i + 2d_i, a_i + 3d_i, \dots\}$$

$A_i$  ها دو به دو مجزا هستند. ثابت کنید حداقل دو تا از قدرنسبت‌ها (یعنی  $d_i$  ها) با هم برابرند و

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i} = 1.$$

فرض کنیم

$$f_i(x) = x^{a_i} + x^{a_i+d_i} + x^{a_i+2d_i} + x^{a_i+3d_i} + \dots$$

در این صورت

$$\sum_{i=1}^n f_i(x) = x + x^2 + x^3 + \dots$$

مثالی ارائه دهید که در آن، مجموعه اعداد طبیعی به تعدادی نامتناهی تصاعد حسابی افراز شده باشد و قدرنسبت‌ها با هم برابر نباشند.

زیرا در سمت چپ در حقیقت توان‌ها از مجموعه‌های  $A_1$  تا  $A_n$  می‌آیند و چون این مجموعه‌ها افزایی برای  $\mathbb{N}$  هستند بنابراین هر عدد طبیعی دقیقاً یک بار در توان‌ها آمده است.

اما داریم

$$f_i(x) = x^{a_i}(1 + x^{d_i} + (x^{d_i})^2 + (x^{d_i})^3 + \dots) = x^{a_i} \cdot \frac{1}{1 - x^{d_i}}.$$

همچنین

$$x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{x}{1 - x}.$$

بنابراین

$$\sum_{i=1}^n \frac{x^{a_i}}{1 - x^{d_i}} = \frac{x}{1 - x}.$$

آیا می‌توانید حکم قوی‌تری را در مورد  $d_i$ ‌ها حدس بزنید و آن را اثبات کنید؟

اکنون اگر  $d_i$ ‌ها دو به دو متمایز باشند و مثلاً  $d_1 < \dots < d_n$  آنگاه عددی مختلط مانند  $z$  وجود دارد که  $z^{d_n} = 1$  ولی  $z^{d_i} \neq 1$  برای  $i = 1, 2, \dots, n-1$  برابر ۱ نیست. در نتیجه  $z$  فقط مخرج یکی از کسرهای سمت چپ عبارت فوق را صفر می‌کند و مخرج سمت راست را صفر نمی‌کند. بدین ترتیب با قرار دادن  $z$  به جای  $x$ ، سمت چپ بی‌نهایت می‌شود در حالی که سمت راست چنین نیست. این تناقض نشان می‌دهد که دو تا از  $d_i$ ‌ها با هم برابرند.

حال با توجه به آن که

$$1 - x^{d_i} = (1 - x)(1 + x + x^2 + \dots + x^{d_i-1})$$

داریم

$$\sum_{i=1}^n \frac{x^{a_i}}{(1 - x)(1 + x + x^2 + \dots + x^{d_i-1})} = \frac{x}{1 - x}$$

و لذا

$$\sum_{i=1}^n \frac{x^{a_i}}{1 + x + x^2 + \dots + x^{d_i-1}} = x.$$

چرا حق داریم  $x$  را برابر ۱ قرار دهیم؟ مگر با شرط  $x \neq 1$  عبارت  $x-1$  را از طرفین ساده نکرده بودیم؟

عبارت فوق یک اتحاد است و به ازای هر  $x$  برقرار می‌باشد. از جمله برای

۱ داریم  $x = 1$

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i} = \sum_{i=1}^n \frac{1^{a_i}}{1 + 1 + 1^2 + \dots + 1^{d_i-1}} = 1.$$



در نتیجه حکم برقرار است.

مثال ۳.۴.۲۱. تعداد جواب‌های معادله

$$a + 2b + 3c = n$$

را که در آن  $a, b$  و  $c$  اعدادی حسابی هستند با  $a_n$  نمایش می‌دهیم. تابع مولد دنباله  $\{a_n\}$  را تعیین کنید.

عبارت

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \dots)(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots)(1 + x^3 + x^6 + x^9 + \dots)$$

را در نظر می‌گیریم. اگر بخواهیم این سه پرانتز را در یکدیگر ضرب کنیم باید هر جمله‌ای از هر پرانتزی در هر جمله از هر پرانتز دیگر ضرب شود. اگر  $x^a$  را از پرانتز اول،  $x^{2b}$  را از پرانتز دوم و  $x^{3c}$  را از پرانتز سوم انتخاب کنیم که  $a + 2b + 3c = n$  آنگاه  $x^n$  حاصل می‌شود. اما ضریب  $x^n$  برابر چند خواهد شد؟ در حقیقت ضریب  $x^n$  برابر است با تعداد جواب‌های حسابی معادله  $a + 2b + 3c = n$ .

از سوی دیگر داریم

$$\begin{aligned} & (1 + x + x^2 + x^3 + \dots) \\ & \times (1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots) \\ & \times (1 + x^3 + x^6 + x^9 + \dots) \\ = & \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1-x^3} \\ = & \frac{1}{(1-x)(1-x)(1+x)(1-x)(1+x+x^2)} \\ = & \frac{1}{(1-x)^3(1+x)(1+x+x^2)} \end{aligned}$$



$$= \frac{\frac{17}{72}}{1-x} + \frac{\frac{1}{4}}{(1-x)^2} + \frac{\frac{1}{6}}{(1-x)^3} + \frac{\frac{1}{8}}{1+x} + \frac{\frac{x}{9} + \frac{2}{9}}{1+x+x^2}. \spadesuit$$

گرچه شکل  $\frac{1}{(1-x)^3(1+x)(1+x+x^2)}$  در مثال بالا ساده‌تر است با این حال نمایش آن به صورت مجموع چند کسر این امکان را فراهم می‌آورد که بتوانیم ضریب  $a_n$  را در بسط تابع مولد، صریحاً محاسبه کنیم.

این کار را انجام دهید و مقدار  $a_n$  را صریحاً به دست آورید.

ترفند استفاده از تابع مولد می‌تواند به دو صورت در مسائل ظاهر شود؛ ممکن است با استفاده از رابطه‌ای بازگشتی در مورد دنباله  $\{a_n\}$ ، تابع مولد آن را مشخص کنیم و بسط مکملون تابع را به دست آوریم تا پاسخی صریح برای  $\{a_n\}$  بیابیم، یا این که با استفاده از استدلالی ترکیبیاتی تابع مولد را مشخص سازیم و پس از آن رابطه‌ای بازگشتی برای دنباله  $\{a_n\}$  بیابیم.

قضیه بعد کاربرد زیبایی از تابع مولد را ارائه می‌دهد و می‌تواند حسن ختامی برای این بحث باشد.

**قضیه ۲۲.۳.۴.** فرض کنیم  $n$  عددی طبیعی باشد. در این صورت تعداد افزازهایی از  $n$  به اعداد طبیعی که در آنها هر عددی حداکثر دو بار ظاهر شده است برابر است با تعداد افزازهایی از  $n$  به اعدادی طبیعی که مضرب ۳ نیستند.<sup>۲۰</sup>

**برهان.** عبارت

$$(1+x+x^2)(1+x^2+x^4)(1+x^3+x^6)(1+x^4+x^8)\dots$$

را در نظر می‌گیریم. اگر بخواهیم این پرانتزها را در یکدیگر ضرب کنیم باید هر جمله‌ای از هر پرانتزی در هر جمله از هر پرانتز دیگر ضرب شود. اما ضریب  $x^n$  برابر چند خواهد شد؟ در حقیقت ضریب  $x^n$  برابر است با تعداد حالاتی که می‌توان  $n$  را به صورت مجموعی به شکل  $\varepsilon_1 \times 1 + \varepsilon_2 \times 2 + \varepsilon_3 \times 3 + \dots$  نوشت که در آن  $\varepsilon_i$  برابر ۰، ۱ یا ۲ است. بدین ترتیب هر عددی حداکثر دو بار ظاهر

<sup>۲۰</sup>مثلاً برای  $n=6$  افزازهای از نوع اول عبارتند از ۶، ۵+۱، ۴+۲، ۴+۱+۱، ۳+۳، ۳+۲+۱ و ۲+۲+۱+۱ و افزازهای از نوع دوم عبارتند از ۵+۱، ۴+۲، ۴+۱+۱، ۲+۲+۱+۱، ۲+۲+۱+۱، ۲+۱+۱+۱+۱ و ۱+۱+۱+۱+۱+۱.

می‌شود و لذا اگر  $a_n$  برابر تعداد افرازهایی از  $n$  به اعداد طبیعی باشد که در آنها هر عددی حداکثر دو بار ظاهر شده است، آنگاه می‌توان گفت که عبارت بالا تابع مولد دنباله  $\{a_n\}$  است. در نتیجه

$$\begin{aligned}
 f(x) &= (1+x+x^2)(1+x^2+x^4)(1+x^3+x^6)(1+x^4+x^8)\dots \\
 &= \frac{(1-x)(1+x+x^2)}{1-x} \cdot \frac{(1-x^2)(1+x^2+x^4)}{1-x^2} \\
 &\quad \cdot \frac{(1-x^3)(1+x^3+x^6)}{1-x^3} \cdot \frac{(1-x^4)(1+x^4+x^8)}{1-x^4} \dots \\
 &= \frac{1-x^3}{1-x} \cdot \frac{1-x^6}{1-x^2} \cdot \frac{1-x^9}{1-x^3} \cdot \frac{1-x^{12}}{1-x^4} \dots \\
 &= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdot \frac{1}{1-x^4} \cdot \frac{1}{1-x^5} \cdot \frac{1}{1-x^6} \dots \\
 &= \prod_{3 \nmid k} \frac{1}{1-x^k} \\
 &= \prod_{3 \nmid k} (1+x^k+x^{2k}+x^{3k}+\dots) \\
 &= (1+x+x^2+x^3+\dots)(1+x^2+x^4+x^6+\dots) \\
 &\quad (1+x^4+x^8+x^{12}+\dots)(1+x^5+x^{10}+x^{15}+\dots) \\
 &\quad (1+x^7+x^{14}+x^{21}+\dots)(1+x^8+x^{16}+x^{24}+\dots)\dots
 \end{aligned}$$

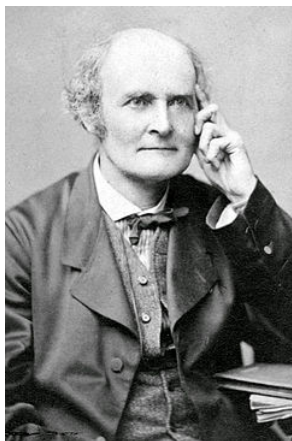
اکنون اگر بخواهیم این پرانتزها را در یکدیگر ضرب کنیم باید هر جمله‌ای از هر پرانتزی در هر جمله از هر پرانتز دیگر ضرب شود. اما ضریب  $x^n$  برابر چند خواهد شد؟ در حقیقت ضریب  $x^n$  برابر است با تعداد حالاتی که می‌توان  $n$  را به صورت مجموعی به شکل  $\varepsilon_1 \times 1 + \varepsilon_2 \times 2 + \varepsilon_4 \times 4 + \dots$  نوشت که در آن  $\varepsilon_i$  برابر است با تعداد ظاهر شدن  $i$  در افراز  $n$ . بدین ترتیب اعدادی که مضرب ۳ هستند در افراز ظاهر نمی‌شوند و لذا اگر  $b_n$  برابر تعداد افرازهایی از  $n$  به اعداد طبیعی باشد که مضرب ۳ نیستند، آنگاه می‌توان گفت که عبارت بالا تابع مولد دنباله  $\{b_n\}$  است. بنابراین دو دنباله  $\{a_n\}$  و  $\{b_n\}$  توابع مولد یکسانی دارند و لذا با هم برابرند. ■

ثابت کنید تعداد افرازهایی  $n$  به اعداد طبیعی که بزرگ‌ترین آنها برابر  $k$  است برابر است با  $\Pi(n, k)$ .

برای یک نظریه ریاضی،  
همانند هر چیز دیگر،  
زیبایی را می‌توان درک کرد  
اما نمی‌توان توصیف نمود.

Arthur Cayley

16 Aug 1821 - 26 Jan 1895



فراموش نمی‌کنیم که همه آنچه در این کتاب آموختیم برای آن بود که بتوانیم قدم‌های اولیه برای شمردن شمردنی‌ها را برداریم. مسلماً این تمام ماجرا نیست. هنوز هم مسائل شمارشی بسیاری وجود دارد که با شیوه‌های مطرح شده در این کتاب قابل حل نیستند. این شاید اولین قدم در این مسیر استقرایی باشد. بدون تردید باید به فکر گام‌های بعدی باشید تا فرآیند استقرایی یادگیری را ادامه دهید.

## ۴.۴ تمرین

در برخی از تمرین‌هایی که خواهد آمد از شما خواسته می‌شود که رابطه‌ای بازگشتی برای تعیین تعداد حالات انجام یک کار را به دست آورید. ممکن است بتوانید پاسخی صریح را بدون استدلالی استقرایی به دست آورید اما بد نیست رابطه بازگشتی مورد نظر را اثبات کنید و پس از آن پاسخ صریح را به دست آورید. برای به دست آوردن پاسخ صریح از همه روش‌هایی که در این فصل آموختید استفاده کنید و راه حل‌ها را با یکدیگر مقایسه نمایید.

۱.۴.۴. یک مستطیل  $1 \times n$  داریم که می‌خواهیم آن را به وسیله مربع‌های  $1 \times 1$  و مستطیل‌های  $1 \times 2$  بپوشانیم. فرض کنیم تعداد حالات انجام این کار برابر  $a_n$  باشد. ثابت کنید که  $a_n$  در رابطه بازگشتی

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \quad n \geq 3$$

با شرایط اولیه  $a_1 = 1$  و  $a_2 = 2$  صدق می‌کند.

۲.۴.۴. به چند طریق می‌توان یک مستطیل  $2 \times n$  را به وسیله مربع‌های  $2 \times 2$  و مستطیل‌های  $1 \times 2$  پوشاند؟

۳.۴.۴. چند تابع صعودی مانند  $f$  از  $\{1, 2, \dots, n\}$  به  $\{0, 1, \dots, n-1\}$  وجود دارد که  $f(i) < i$  به ازای هر  $1 \leq i \leq n$ ؟

۴.۴.۴. فرض کنیم  $n$  عددی طبیعی باشد. چند عدد  $n$  رقمی با ارقام  $1, 2, 3, 4$  وجود دارد که  $1$  و  $2$  در کنار هم نیامده باشند؟

۵.۴.۴. چند تایی مرتب مانند  $(a_1, \dots, a_n)$  از اعداد صحیح نامنفی داریم

که  $\sum_{i=1}^n a_i = n$  و به ازای هر  $1 \leq i \leq n$  داشته باشیم  $a_1 + \dots + a_i \geq i$ ؟

۶.۴.۴. چند  $n$  تایی مرتب مانند  $(a_1, \dots, a_n)$  داریم که

$$1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq n$$

و دقیقاً برای یک  $i$  داشته باشیم  $a_i = i$ ؟

۷.۴.۴. چند  $2n$  تایی مرتب مانند  $(a_1, \dots, a_{2n})$  از اعداد صحیح نامنفی داریم

$$\text{که } a_1 = 1, a_{2n} = 1 \text{ و } a_i - a_{i-1} = \pm 1 \text{؟}$$

۸.۴.۴. عبارت  $\prod_{i=1}^n (x_1 + \dots + x_i)$  شامل چند جمله است؟

۹.۴.۴. سکه‌ای را  $n$  بار می‌اندازیم. به چند طریق ممکن است حداقل دو بار

رو بیاید؟

۱۰.۴.۴. فرض کنیم  $f$  تابع مولد دنباله  $\{a_n\}$  باشد. تابع مولد دنباله  $\{n^2 a_n\}$

را بر حسب  $f$  به دست آورید.

۱۱.۴.۴. فرض کنیم  $f$  تابع مولد دنباله  $\{a_n\}$  باشد. تابع مولد دنباله  $\{\frac{a_n}{n^2}\}$  را

بر حسب  $f$  به دست آورید.

۱۲.۴.۴. فرض کنیم  $f$  تابع مولد دنباله  $\{a_n\}$  و  $c$  عددی ثابت باشد. تابع مولد

دنباله  $\{c^n a_n\}$  را بر حسب  $f$  به دست آورید.

۱۳.۴.۴. تابع  $f(x) = \frac{1}{(1-x)^k}$  تابع مولد چه دنباله‌ای است؟

۱۴.۴.۴. بسط مکلورن توابع  $\ln(1+x)$  و  $\ln(1-x)$  را به دست آورید.

۱۵.۴.۴. فرض کنیم  $f$  تابع مولد دنباله  $\{a_n\}$  باشد. توابع مولد دنباله‌های

$\{a_{2n}\}$  و  $\{a_{2n-1}\}$  را بر حسب  $f$  به دست آورید.

۱۶.۴.۴. فرض کنیم  $m$  عدد طبیعی ثابتی باشد. ثابت کنید تابع

$$f(x) = \frac{x^m}{(1-x)(1-2x)\dots(1-mx)}$$

تابع مولد دنباله  $\{a_n = \binom{n}{m}\}$  است.

۱۷.۴.۴. فرض کنیم  $m$  عدد طبیعی ثابتی باشد. ثابت کنید تابع

$$f(x) = \frac{(e^x - 1)^m}{m!}$$

تابع مولد نمایی دنباله  $\{a_n = \binom{n}{m}\}$  است.

در حالتی که شرط  $a_i = i$  برای  
دقیقاً یک  $i$  را نداشته باشیم  
چند  $n$  تایی وجود دارد؟

بین تابع مولد معمولی و تابع  
مولد نمایی یک دنباله چه  
ارتباطی وجود دارد؟

۱۸.۴.۴. فرض کنیم  $m$  عدد طبیعی ثابتی باشد. ثابت کنید تابع

$$f(x) = x(x+1)(x+2)\dots(x+m-1)$$

تابع مولد دنباله  $a_n = \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}$  است.

۱۹.۴.۴. فرض کنیم  $m$  عدد طبیعی ثابتی باشد. ثابت کنید تابع

$$f(x) = \left( \ln \frac{1}{1-x} \right)^m$$

تابع مولد نمایی دنباله  $a_n = \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}$  است.

۲۰.۴.۴. فرض کنیم  $m$  عدد طبیعی ثابتی باشد. ثابت کنید

$$\left( \frac{x}{\ln(1+x)} \right)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\begin{Bmatrix} m \\ m-n \end{Bmatrix} x^n}{\binom{m-1}{n} n!}.$$

همچنین نشان دهید که

$$\left( \frac{x}{1-e^{-x}} \right)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\begin{bmatrix} m \\ m-n \end{bmatrix} x^n}{\binom{m-1}{n} n!}.$$

۲۱.۴.۴. ثابت کنید

اگر  $x$  یا  $y$  را برابر ۱ قرار دهید  
چه اتفاقی می‌افتد؟

$$e^{x(y+1)} = \sum_{m,n=0}^{\infty} \binom{n}{m} \frac{x^n}{n!} y^m,$$

$$e^{(e^x-1)y} = \sum_{m,n=0}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\} \frac{x^n}{n!} y^m,$$

$$\frac{1}{(1-x)^y} = \sum_{m,n=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} \frac{x^n}{n!} y^m,$$

$$\frac{1-y}{e^{x(y-1)}-y} = \sum_{m,n=0}^{\infty} \left\langle \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \right\rangle \frac{x^n}{n!} y^m.$$

این توابع را می‌توان توابع مولد معمولی-نمایی دو متغیره نامید.

۲۲.۴.۴. فرض کنیم  $\{a_n\}_{n=1,2,\dots}$  یک دنباله باشد. تابع

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$$

را تابع مولد دیریکله<sup>۲۱</sup> دنباله  $\{a_n\}$  می‌نامیم. در حالتی که دنباله  $\{a_n\}$  ضربی باشد، یعنی به ازای هر  $m$  و  $n$  متباین داشته باشیم  $a_{nm} = a_n a_m$ ، تابع مولد دیریکله می‌تواند خیلی مفید واقع شود. ثابت کنید که در این حالت داریم

$$f(x) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left( 1 + \frac{a_p}{p^x} + \frac{a_{p^2}}{p^{2x}} + \frac{a_{p^3}}{p^{3x}} + \dots \right),$$

که در آن  $\mathbb{P}$  مجموعه اعداد اول است.

۲۳.۴.۴. تابع مولد دیریکله دنباله ثابت  $a_n = 1$  را به دست آورید و نشان دهید که

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} = \prod_p \left( \frac{1}{1 - p^{-x}} \right).$$

تساوی فوق را اتحاد/ویلر<sup>۲۲</sup> می‌نامند. تابع  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$  تابع زتای ریمان<sup>۲۳</sup> نامیده می‌شود و با  $\zeta(x)$  نمایش داده می‌شود.

۲۴.۴.۴. فرض کنیم  $\mu$  تابع موبیوس باشد. تابع مولد دیریکله دنباله  $a_n = \mu(n)$  را به دست آورید و نشان دهید که

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^x} = \prod_p (1 - p^{-x}).$$

۲۵.۴.۴. فرض کنیم  $\varphi$  تابع اویلر باشد. تابع مولد دیریکله دنباله  $a_n = \varphi(n)$  را به دست آورید و نشان دهید که

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^x} = \prod_p \frac{1 - p^{-x}}{1 - p^{1-x}}.$$

نتیجه بگیرید که تابع مولد دیریکله دنباله  $a_n = \varphi(n)$  برابر  $\frac{\zeta(x-1)}{\zeta(x)}$  است. ۲۶.۴.۴. فرض کنیم

$$f(x) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n)^{-\frac{\mu(n)}{n}}.$$

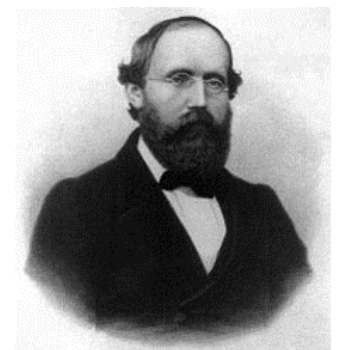
### Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet

13 Feb 1805 - 5 May 1859



### Georg Friedrich Bernhard Riemann

17 Sept 1826 - 20 July 1866



<sup>۲۱</sup>Dirichlet generating function

<sup>۲۲</sup>Euler's identity

<sup>۲۳</sup>Riemann zeta function

ثابت کنید  $\ln f(x) = x$  و نتیجه بگیرید که  $f(x) = e^x$ .  
 ۲۷.۴.۴. توابع مولد معمولی و نمایی دنباله  $a_n = 2^n + 3^n$  را به دست آورید.  
 ۲۸.۴.۴. رابطه بازگشتی

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \\ a_n = -2na_{n-1} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k a_{n-k}, \quad n \geq 2$$

آیا می‌توانید مسائلی را طرح کنید که پاسخ آنها این دنباله‌های بازگشتی باشد؟

را با استفاده از تابع مولد نمایی حل کنید.  
 ۲۹.۴.۴. رابطه بازگشتی

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1, \\ a_n = a_{n-1} + (n-1)a_{n-2}, \quad n \geq 2$$

را با استفاده از تابع مولد نمایی حل کنید.  
 ۳۰.۴.۴. فرض کنیم  $\{B_n\}$  دنباله اعداد بل باشد. تابع مولد نمایی این دنباله را بیابید.  
 ۳۱.۴.۴. توابع مولد دیریکله دنباله‌های  $\{\sqrt{n}\}$  و  $\{\ln n\}$  را بیابید و بر حسب تابع  $\zeta$  بیان کنید.  
 ۳۲.۴.۴. ثابت کنید تعداد افرازهای  $n$  به صورت مجموعی از اعداد متمایز برابر است با تعداد افرازهای  $n$  به صورت مجموعی از اعداد فرد.  
 ۳۳.۴.۴. با استفاده از رابطه بازگشتی

$$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$$

تابع مولد نمایی دنباله  $\{D_n\}$  را به دست آورید و جواب صریح آن را با شرط  $D_0 = 1$  و  $D_1 = 0$  تعیین کنید.

شاید بهترین تمرین این باشد که هر چیز شمردنی را بشمارید؛ البته اگر اکنون توانایی انجام این کار را در خود یافته باشید!

# منابع

- [۱] علی رضا علیپور، ترکیبیات، جلد اول، انتشارات فاطمی، ۱۳۸۴.
- [2] M. Aigner, *Combinatorial Theory*, Springer-Verlag, 1997.
- [3] C. C. Chong, K. K. Meng, *Principles and Techniques in Combinatorics*, World Scientific, 1992.
- [4] A. Engel, *Problem-Solving Strategies*, Springer-Verlag, 1998.
- [5] R. L. Graham, D. E. Knuth, O. Patashnik, *Concrete Mathematics*, Addison-Wesley, 1992.
- [6] L. C. Larson, *Problem-Solving Through Problems*, Springer-Verlag, 1992.
- [7] J. H. van Lint, R. M. Wilson, *A Course in Combinatorics*, Cambridge University Press, 2002.
- [8] G. E. Martin, *Counting: The Art of Enumerative Combinatorics*, Springer-Verlag, 2001.
- [9] [WIKIPEDIA, Brahmagupta-Fibonacci Identity](#)
- [10] [WIKIPEDIA, Catalan Conjecture](#)



- [11] [WIKIPEDIA, Catalan Number](#)
- [12] [WIKIPEDIA, Fermat](#)
- [13] [WIKIPEDIA, Generating Function](#)
- [14] [WIKIPEDIA, Hanoi Tower](#)
- [15] [WIKIPEDIA, Infinite Descent](#)
- [16] [WIKIPEDIA, Josephus Problem](#)
- [17] [WIKIPEDIA, Möbius Inversion Formula](#)
- [18] [WIKIPEDIA, Reimann Zeta Function](#)
- [19] [WIKIPEDIA, Tetris](#)
- [20] [WOLFRAM MATHWORLD, Catalan Number](#)
- [21] [WOLFRAM MATHWORLD, Catalan's Problem](#)
- [22] [WOLFRAM MATHWORLD, Dirichlet Series Generating Function](#)
- [23] [WOLFRAM MATHWORLD, Josephus Problem](#)
- [24] [PLANETMATH, Catalan Numbers](#)
- [25] [THE MAC TUTOR HISTORY OF MATHEMATICS ARCHIVE, BIOGRAPHIES, Al-Karaji](#)
- [26] [THE MAC TUTOR HISTORY OF MATHEMATICS ARCHIVE, BIOGRAPHIES, Bacon](#)
- [27] [THE MAC TUTOR HISTORY OF MATHEMATICS ARCHIVE, BIOGRAPHIES, Bolyai](#)





- [28] THE MAC TUTOR HISTORY OF MATHEMATICS ARCHIVE, BIOGRAPHIES, Brahmagupta
- [29] THE MAC TUTOR HISTORY OF MATHEMATICS ARCHIVE, BIOGRAPHIES, Brouwer
- [30] THE MAC TUTOR HISTORY OF MATHEMATICS ARCHIVE, BIOGRAPHIES, Catalan
- [31] THE MAC TUTOR HISTORY OF MATHEMATICS ARCHIVE, BIOGRAPHIES, Cayley
- [32] THE MAC TUTOR HISTORY OF MATHEMATICS ARCHIVE, BIOGRAPHIES, De Morgan
- [33] THE MAC TUTOR HISTORY OF MATHEMATICS ARCHIVE, BIOGRAPHIES, Dirichlet
- [34] THE MAC TUTOR HISTORY OF MATHEMATICS ARCHIVE, BIOGRAPHIES, Erdos
- [35] THE MAC TUTOR HISTORY OF MATHEMATICS ARCHIVE, BIOGRAPHIES, Euler
- [36] THE MAC TUTOR HISTORY OF MATHEMATICS ARCHIVE, BIOGRAPHIES, Fermat
- [37] THE MAC TUTOR HISTORY OF MATHEMATICS ARCHIVE, BIOGRAPHIES, Fibonacci
- [38] THE MAC TUTOR HISTORY OF MATHEMATICS ARCHIVE, BIOGRAPHIES, Fontenelle
- [39] THE MAC TUTOR HISTORY OF MATHEMATICS ARCHIVE, BIOGRAPHIES, Gauss

- [40] THE MAC TUTOR HISTORY OF MATHEMATICS ARCHIVE, BIOGRAPHIES, Godel
- [41] THE MAC TUTOR HISTORY OF MATHEMATICS ARCHIVE, BIOGRAPHIES, Halmos
- [42] THE MAC TUTOR HISTORY OF MATHEMATICS ARCHIVE, BIOGRAPHIES, Khayyam
- [43] THE MAC TUTOR HISTORY OF MATHEMATICS ARCHIVE, BIOGRAPHIES, Knuth
- [44] THE MAC TUTOR HISTORY OF MATHEMATICS ARCHIVE, BIOGRAPHIES, Littlewood
- [45] THE MAC TUTOR HISTORY OF MATHEMATICS ARCHIVE, BIOGRAPHIES, Lucas
- [46] THE MAC TUTOR HISTORY OF MATHEMATICS ARCHIVE, BIOGRAPHIES, Möbius
- [47] THE MAC TUTOR HISTORY OF MATHEMATICS ARCHIVE, BIOGRAPHIES, Pascal
- [48] THE MAC TUTOR HISTORY OF MATHEMATICS ARCHIVE, BIOGRAPHIES, Poincare
- [49] THE MAC TUTOR HISTORY OF MATHEMATICS ARCHIVE, BIOGRAPHIES, Polya
- [50] THE MAC TUTOR HISTORY OF MATHEMATICS ARCHIVE, BIOGRAPHIES, Riemann
- [51] THE MAC TUTOR HISTORY OF MATHEMATICS ARCHIVE, BIOGRAPHIES, Stirling



- [52] THE MAC TUTOR HISTORY OF MATHEMATICS ARCHIVE, BIOGRAPHIES, Ulam
- [53] THE MAC TUTOR HISTORY OF MATHEMATICS ARCHIVE, BIOGRAPHIES, Norbert Wiener
- [54] THE MAC TUTOR HISTORY OF MATHEMATICS ARCHIVE, BIOGRAPHIES, Wiles
- [55] THE MAC TUTOR HISTORY OF MATHEMATICS ARCHIVE, BIOGRAPHIES, Wittgenstein
- [56] THE MAC TUTOR HISTORY OF MATHEMATICS ARCHIVE, QUOTATIONS, Bacon
- [57] THE MAC TUTOR HISTORY OF MATHEMATICS ARCHIVE, QUOTATIONS, Bolyai
- [58] THE MAC TUTOR HISTORY OF MATHEMATICS ARCHIVE, QUOTATIONS, Brouwer
- [59] THE MAC TUTOR HISTORY OF MATHEMATICS ARCHIVE, QUOTATIONS, Cayley
- [60] THE MAC TUTOR HISTORY OF MATHEMATICS ARCHIVE, QUOTATIONS, De Morgan
- [61] THE MAC TUTOR HISTORY OF MATHEMATICS ARCHIVE, QUOTATIONS, Erdos
- [62] THE MAC TUTOR HISTORY OF MATHEMATICS ARCHIVE, QUOTATIONS, Euler
- [63] THE MAC TUTOR HISTORY OF MATHEMATICS ARCHIVE, QUOTATIONS, Fermat



- [64] [THE MACTUTOR HISTORY OF MATHEMATICS ARCHIVE, QUOTATIONS, Fontenelle](#)
- [65] [THE MACTUTOR HISTORY OF MATHEMATICS ARCHIVE, QUOTATIONS, Gauss](#)
- [66] [THE MACTUTOR HISTORY OF MATHEMATICS ARCHIVE, QUOTATIONS, Godel](#)
- [67] [THE MACTUTOR HISTORY OF MATHEMATICS ARCHIVE, QUOTATIONS, Halmos](#)
- [68] [THE MACTUTOR HISTORY OF MATHEMATICS ARCHIVE, QUOTATIONS, Knuth](#)
- [69] [THE MACTUTOR HISTORY OF MATHEMATICS ARCHIVE, QUOTATIONS, Littlewood](#)
- [70] [THE MACTUTOR HISTORY OF MATHEMATICS ARCHIVE, QUOTATIONS, Pascal](#)
- [71] [THE MACTUTOR HISTORY OF MATHEMATICS ARCHIVE, QUOTATIONS, Poincare](#)
- [72] [THE MACTUTOR HISTORY OF MATHEMATICS ARCHIVE, QUOTATIONS, Polya](#)
- [73] [THE MACTUTOR HISTORY OF MATHEMATICS ARCHIVE, QUOTATIONS, Ulam](#)
- [74] [THE MACTUTOR HISTORY OF MATHEMATICS ARCHIVE, QUOTATIONS, Norbert Wiener](#)
- [75] [THE MACTUTOR HISTORY OF MATHEMATICS ARCHIVE, QUOTATIONS, Wiles](#)



- [76] [THE MAC TUTOR HISTORY OF MATHEMATICS ARCHIVE, QUOTATIONS, Wittgenstein](#)



# نمایه



- اتحاد اوایلر، ۲۵۶  
استرلینگ  
نوع اول، ۱۶۰  
نوع دوم، ۱۵۳  
اصل  
استقرا، ۱۲  
ابتدا از  $m$ ، ۲۹  
ضربی، ۴۶  
قوی، ۳۵  
جمع، ۵۴  
خوشرتیبی، ۴۴  
ضرب، ۵۴  
نزول نامتناهی، ۴۱  
افراز  
دور، ۱۵۹  
صف، ۱۹۲  
مجموعه، ۱۵۳  
مرتب، ۱۰۳  
نامرتب عدد، ۱۵۷  
الگوریتم، ۱۲  
بازتاب جایگشت، ۱۹۶
- برج هانوی، ۱۲  
با شرط اضافی، ۴۶  
دوگانه، ۴۶  
برهان خلف، ۲  
بسط مکلورن، ۲۳۴  
بل، ۱۸۳  
تابع  
اوایلر، ۱۳۶  
حسابی، ۱۳۶  
ضربی، ۱۳۶  
زتای ریمان، ۲۵۶  
موبیوس، ۱۳۶  
تابع مولد، ۲۲۸  
دیریکله، ۲۵۶  
معمولی، ۲۳۷  
معمولی - نمایی، ۲۵۵  
نمایی، ۲۳۷  
ترکیب، ۶۶  
تناقض، ۳  
توان برای مجموعه‌ها، ۱۲۶  
توان فاکتوریلی، ۱۶۵

- جایگشت، ۶۳  
 بازتاب، ۱۹۶  
 پریش، ۹۷  
 خودمعکوس، ۱۱۳  
 شکافتن یک مجموعه، ۱۱۰  
 متناوب، ۱۹۷  
 نمایش دوری، ۶۴  
 همانی، ۶۳  
 جزء صحیح، ۱۳۵  
 چندمجموعه، ۱۹۹  
 حاصلضرب کوشی، ۲۳۳  
 حکم، ۲  
 دترمینان، ۹۱  
 درجه تکرار، ۱۹۹  
 دوبار شمار، ۶۷  
 دور، ۶۴  
 دومینو، ۱۶  
 رابطه بازگشتی، ۱۷۸  
 ناهمگن، ۲۲۵  
 همگن، ۲۲۴  
 رابطه هم‌ارزی، ۱۸۳  
 زیرفاکتوریل، ۱۸۲  
 سقف، ۱۳۵  
 ضریب
- $m$  - جمله‌ای، ۶۹  
 دوجمله‌ای، ۶۸  
 عاد کردن، ۴۰  
 عدد  
 استرلینگ  
 نوع اول، ۱۶۰  
 نوع دوم، ۱۵۳  
 افراز نامرتب، ۱۵۷  
 اویلری  
 مرتبه اول، ۱۹۴  
 مرتبه دوم، ۲۰۲  
 بل، ۱۸۳  
 کاتالان، ۱۰۶  
 فاکتوریل، ۲۷  
 فرض، ۲  
 فیبوناچی  
 دنباله، ۳۹  
 مبنا، ۱۱۴  
 قضیه  
 آخر فرما، ۴۲  
 برتراند، ۴۹  
 کف، ۱۳۵  
 گراف، ۴۹  
 خودمکمل، ۵۰  
 مکمل، ۴۹



کامل، ۴۹

ماتریس، ۹۱

جایگشتی، ۱۰۹

دترمینان، ۹۱

مثال نقض، ۳۴

مثلث خیام، ۷۲

مجموعه چندگانه، ۱۹۹

مسأله زوج‌های ازدواج کرده، ۱۱۸،

۱۳۲

معادله بازگشتی، ۱۷۸

ناهمگن، ۲۲۵

همگن، ۲۲۴

نمایش دوری، ۶۴

$(P \Rightarrow Q) \sim (\neg P \vee Q)$   
 $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$   
 $\rho(\frac{\partial v}{\partial t} - v \nabla v) = -\nabla p - \nabla T \cdot f$   
 $D_A = \langle r, s \mid r^n = s^2, rsrs = 1 \rangle$   
 $Q = \{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \}$   
 $\int \eta(x) dx \cdot f(b) - f(a), \eta(x) = f(x)$   
 $G \xrightarrow{\sigma} G/H$   
 $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$   
 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$   
 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$   
 $1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\ddots}}}$