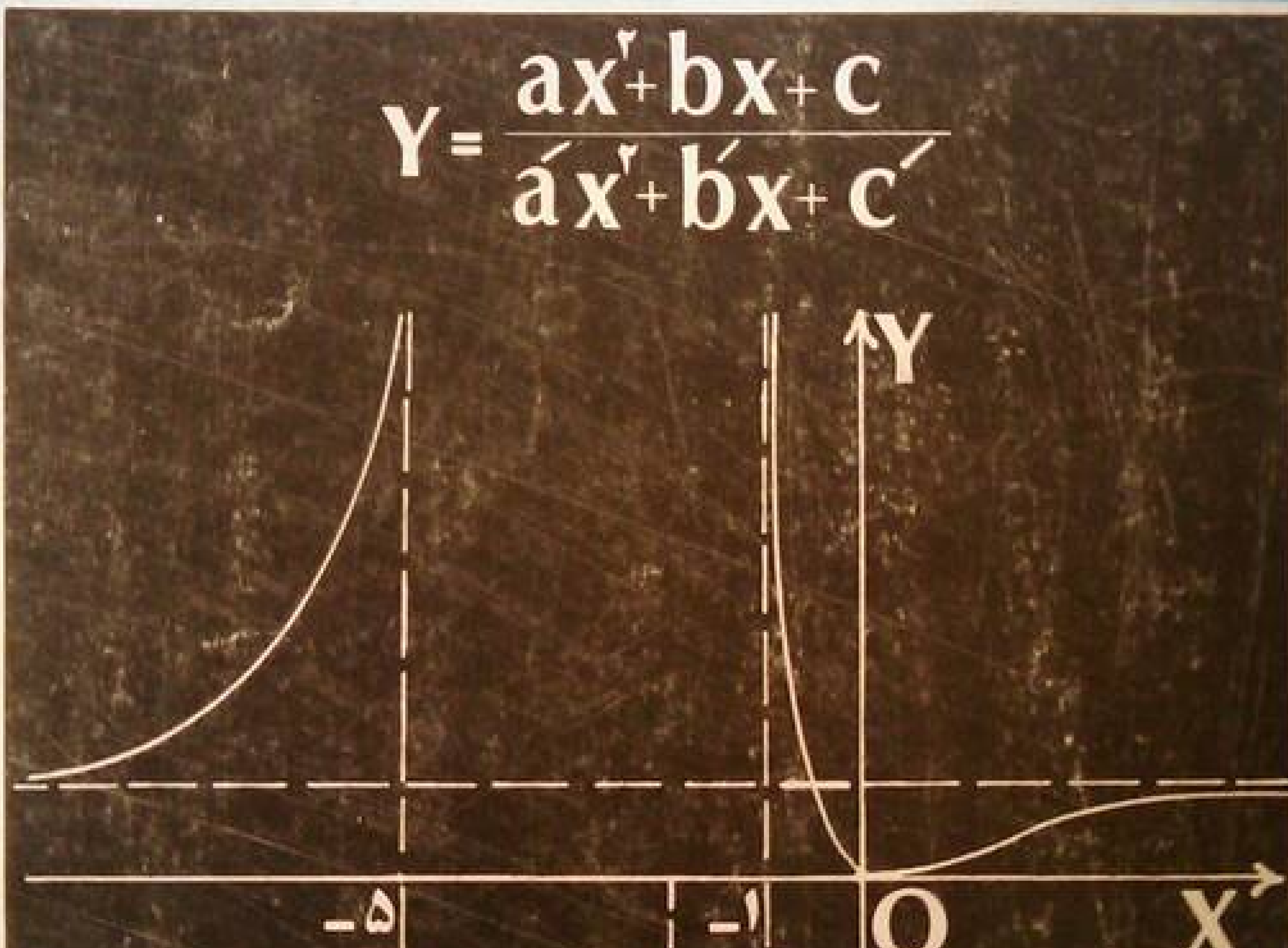
بنام خدا

کتاب جبر و آنالیز چهارم ریاضی – فیزیک (نظام قدیم)

تهیه کننده: فاطمه قزلباش

جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

جبر و آنالیز



سال چهارم

آموزش متوسطهٔ عمومی - ریاضی و فیزیک

۲۹۵

فهرست

بسم الله الرحمن الرحیم

یاد آوری و تکمیل

بیشتر مطالب این فصل و فصل ۲ همان مطالبی است که در کتاب حساب و جبر سال سوم با آنها آشنا شده‌اید. چون این مطالب اهمیت زیادی دارند آنها را یادآوری نموده و در جهت تکمیل آنها مطالبی اضافه می کنیم. چون این مطالب را قبلا خوانده‌اید مسلم است که سرعت فراگیری آنها زیاد خواهد بود.

۱-۱- تعریف تابع

فرض کنید A و B دو مجموعه باشند. f زیر مجموعه از حاصلضرب دکارتی $A \times B$ (یعنی یک رابطه از A به B) را یک تابع گویند هر گاه $(a, b) \in f$ و $(a, b') \in f$، آنگاه $b = b'$. به عبارت دیگر f مجموعه‌ایست از جفت‌های مرتب در $A \times B$ به قسمی که هیچ دو عضو متفاوت f دارای مؤلفه‌های اول مساوی نباشند.

مثال: دو مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ و $B = \{-1, 0, 3, 5\}$ مفروض است حاصلضرب دکارتی $A \times B$ عبارتست از:

$$A \times B = \{(1, -1), (1, 0), \ldots, (2, -1), \ldots, (3, 0), \ldots, (4, 3), \ldots\}$$

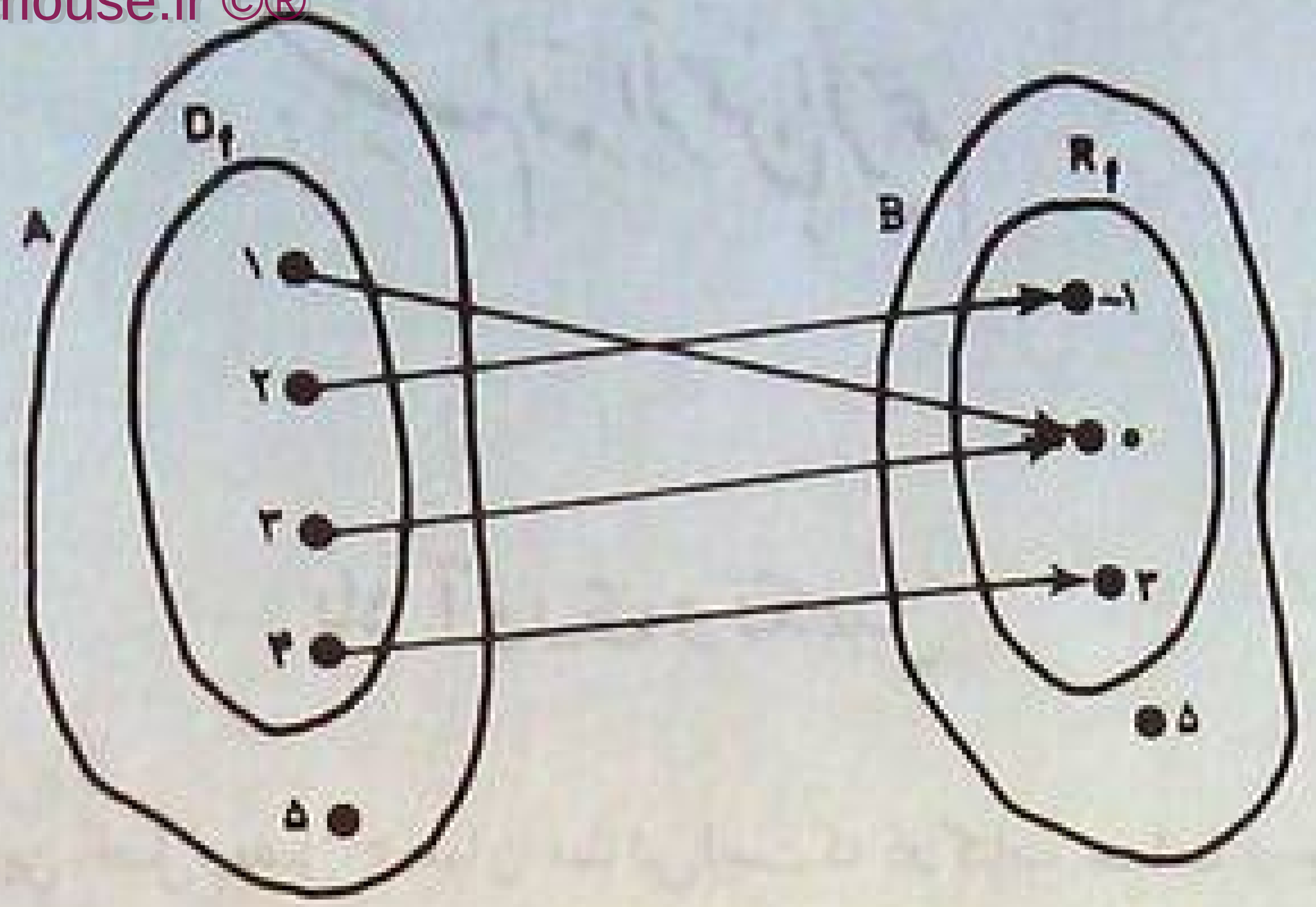
رابطه $f = \{(1, 0), (2, -1), (3, 0), (4, 3)\}$

یك زیرمجموعهٔ $A \times B$ را درنظر می گیریم. رابطه f یک تابع است، زیرا هیچ دو عضو متفاوت f دارای مؤلفه‌های اول مساوی نیستند.

۱-۲- دامنهٔ تعریف و برد تابع

مجموعهٔ مؤلفه‌های اول اعضای تابع f را دامنهٔ (دامنهٔ تعریف) f ومجموعهٔ مؤلفه‌های دوم اعضای f را برد f می‌خوانند و آنها را به‌ترتیب با D_f و R_f نشان می‌دهند.

مثال: فرض کنید $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ و $B = \{-1, 0, 3, 5\}$ و شکل صفحهٔ بعد تابع f را مشخص می کند. دامنه و برد f را مشخص کنید.



D_f = {۱ و ۲ و ۳ و ۴} و R_f = {−۱ و ۰ و ۳}

۱-۳- مقدار تابع

وقتی (x و y) عضو دلخواهی از f باشد y را مقدار تابــع f در x می‌خوانند و معمولاً آن را به‌صورت $y=f(x)$ می‌نویسند. در این مقام مؤلفه اول، یعنی x، را متغیــر مستقل ومؤلفهٔ دوم، یعنی y ، را متغیر تابع میخوانند، توجه کنید که تابع f، که مجموعه‌ای از زوجهای مرتب است، بامقدارآن درx، یعنی $f(x)$، فرق دارد.

هرگاه f یــك تابع باشد ، مؤلفه دوم هر زوج مرتب در f بطور یگانه‌ای از روی مؤلفه اول آن زوج مرتب مشخص می‌شود و بدین‌ترتیب از روی f قــانون یا ضابطه‌ای بدست می‌آیدکه به کمك آن می‌توان به هر عضو x از D_f یك و تنها یك عضو y متعلق بــه R_f متناظر ساخت به‌قسمی که $(x و y)\in f$. به عکس هرگاه ضابطه یا قانونــی داشته باشیم که به هر عضو x از یك زیر مجموعهٔ A یك و تنها یــك عضو $y\in B$ را نسبت دهــد، مجموعــهٔ همهٔ زوجهای مرتب (x و y) که به این ترتیب حاصل می‌شود تابعی از A بــه B نامیده می‌شود از ایــن رو معمولاً برای مشخص کردن تابع،دامنهٔ آن و قانون یا ضابطه را می‌دهند، و اگر دامنه داده نشود باید آن را بزرگترین زیر مجموعه‌ای از مجموعهٔ مرجع (مورد بحث) اختیار کرد که آن قانون برای آن زیر مجموعه با معنی است.

مثال ۱: تابع f به شکل زیر داده شده است:

f = {(x و y) | x∈N و x<۵ و y = x² − ۴x + ۳}

تابع f را به شکل زوجهای مرتب بنویسید (N مجموعهٔ اعداد طبیعی است.)

حل:

f = {(۱ و ۰) و (۲ و −۱) و (۳ و ۰) و (۴ و ۳)}

مثال ۲: دامنهٔ تعریف تابع زیر را مشخص کنید:

f = {(x و y) | y = √(۱ − x²)}

جواب: دامنهٔ تعریف آن چنین است :

$$D_f=\{x|\ 1-x^2\geqslant 0\}$$

$1-x^2\geqslant 0 \qquad x^2\leqslant 1 \qquad -1\leqslant x\leqslant 1$

$$D_f=[-1 \text{ و } 1]$$

مثال ۳ : دامنهٔ تعریف تابع f را که به وسیلهٔ $x \xrightarrow{f} f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-2x}$ مشخص شده است تعیین کنید:

جواب: دامنهٔ تعریف آن چنین است:

$$D_f=R-\{0 \text{ و } 2\}$$

۱-۴- مشخص کردن یك تابع

هر تابع بادامنهٔ تعریف، و مقدار آن بازاء هریك از اعضاء دامنهٔ تعریفش مشخص می‌شود معمولا تابع را به‌شکلهای مختلف مشخص می کنند.

الف- وقتی که عده اعضاء دامنهٔ تعریف کم باشد می‌توان تابع را بوسیله یك جدول تعریف کرد برای این‌کار عضوهای دامنهٔ تعریف را بریك سطر ومقادیر متناظر تابع را زیر آن‌می‌نویسیم، یعنی بازاء هر x از دامنهٔ تعریف،مقدار تابع را در x برسطر زیرین می‌نویسیم.

مثلا جدول

x	5	$\sqrt{2}$	π	e	7
$f(x)=y$		1	2	2	

تابع $f=\{(\sqrt{2} \text{ و } 1) \text{ و } (\pi \text{ و } 2) \text{ و } (e \text{ و } 2)\}$ را مشخص می کنند.

ب- طریقه کلی مشخص کردن تابع اینست‌که:

اولا: دامنهٔ تعریف تابع را معلوم می کنند.

ثانیاً : ضابطه‌ای برای تعیین مقدار تابع بازاء هرعضو دامنهٔ تعریفش به دست می‌دهند. (البته باید این ضابطه چنان باشدکه بازاء هرعضو دامنهٔ تعریف یك وتنها یك مقدار برای تابع بدست دهد) بنابراین ضابطهٔ تعریف تابع فرمولی است‌که مقدارتابع را برحسب x به دست می‌دهد، ومعمولاآنرا به‌صورت $y=f(x)$ نمایش می‌دهند.

مثلا : ضابطهٔ $y=3x+2$ و $x\in R$ تابعی در R تعریف می کند و اگر این تابع را f بنامیم مقدار تابع $f(x)=3x+2$ بوده و تابع به صورت زیرمشخص می‌گردد.

$$f=\{(x \text{ و } y)|x\in R \text{ و } y=3x+2\}$$

گاهی تابع f بر R با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x}{\sqrt{۱+x^۲}}$ را به صورت زیر هم نمایش می‌دهند:

$$x \xrightarrow{f} f(x)=\frac{x}{\sqrt{۱+x^۲}} \quad \text{و} \quad x\in R$$

ج- بسیاری از توابع هستند که ضابطهٔ آنها با فرمول قابل بیان نیست و ناچار آنها را بوسیله جدول نمایش می‌دهند.

مثلا: اگر $A=\{۲ \text{ و } ۰/۴ \text{ و } ۱/۵ \text{ و } ۴/۳\}$ باشد، تابع f بر A با ضابطهٔ (y جزء صحیح x) به صورت زیر مشخص می‌شود.

x	۴/۳	۱/۵	۰/۴	۲
f(x) = y	۴	۱	۰	۲

د- گاهی مقدار یك تابع در سراسر دامنهٔ تعریفش با یك ضابطه مشخص نمی‌شود ناچار باید آنرا با چند ضابطه مشخص نمود (به اینگونه توابع، تابع باچند ضابطه می‌گویند).

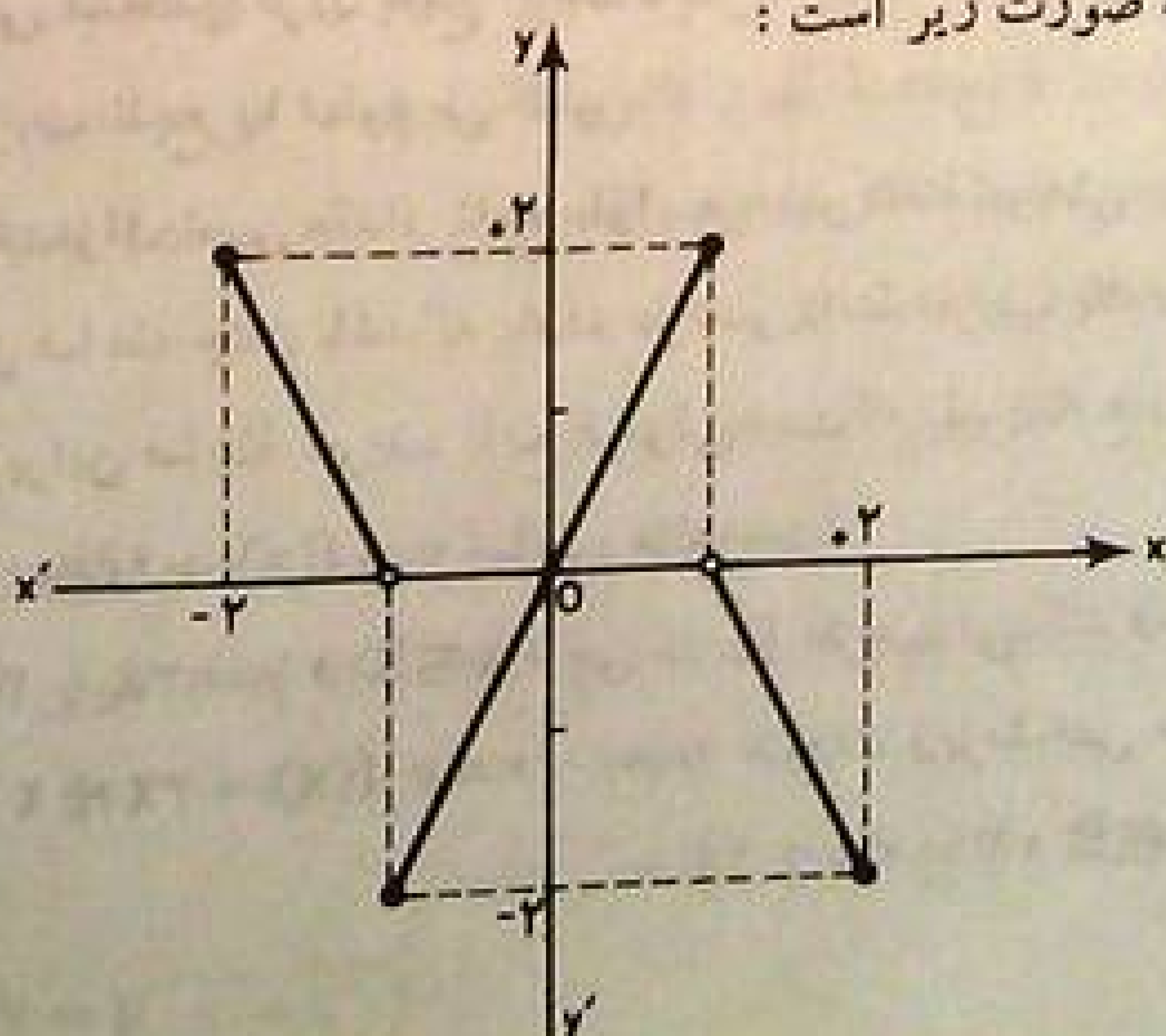
مثلا اگر A دامنهٔ تعریف تابع f دارای دو زیر مجموعهٔ جدا از هم $A_۱$ و $A_۲$ باشد به طوری‌که $A=A_۱\cup A_۲$ و مقادیر تابع بر $A_۱$ بایك ضابطه وبر $A_۲$ با ضابطهٔ دیگر مشخص شوند آن را به صورت زیر عرضه می‌کنند.

$$f(x)=\begin{cases} f_۱(x) & \text{و} \quad x\in A_۱ \\ f_۲(x) & \text{و} \quad x\in A_۲ \end{cases}$$

مانند تابع f در $A=[-۲ \text{ و } ۲]$ که به‌صورت زیر تعریف شده است.

$$f(x)=\begin{cases} -۲x-۲ & ، \quad x\in[-۲ \text{ و } -۱[\\ ۲x & ، \quad x\in[-۱ \text{ و } ۱] \\ -۲x+۲ & ، \quad x\in]۱ \text{ و } ۲] \end{cases}$$

که شکل آن به صورت زیر است:



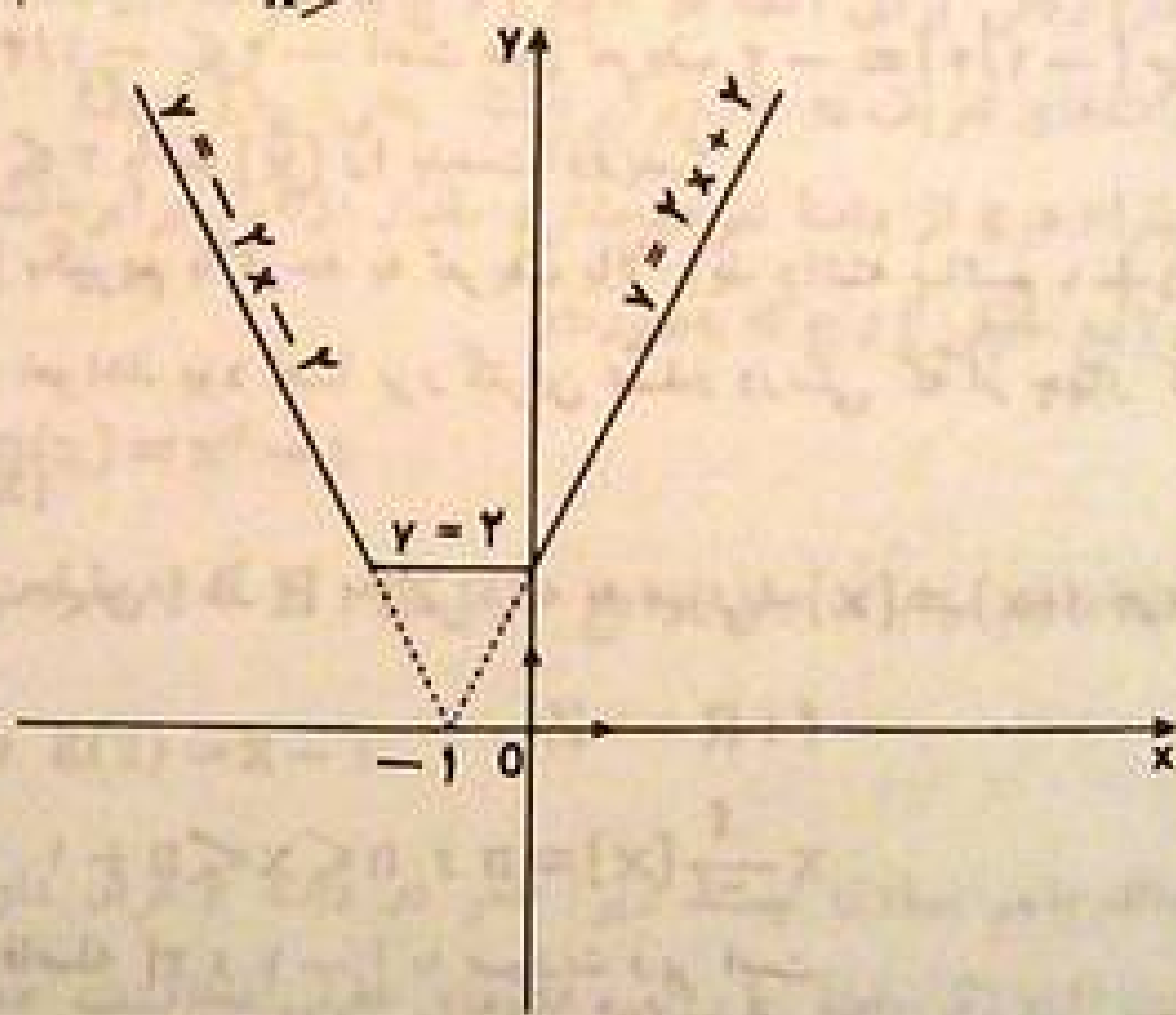
مثال: تابع f بر R با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{x^2}+\sqrt{(x+2)^2}$ تعـریف شده است . ایـن تابع را به صورت تابع با چند ضابطه بنویسید.

حل:

$$f(x)=\sqrt{x^2}+\sqrt{(x+2)^2}=|x|+|x+2|$$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$\|x\|$		$-x$		$-x$	0	x	
$\|x+2\|$		$-x-2$	0	$x+2$		$x+2$	
$f(x)$		$-2x-2$	2	2	2	$2x+2$	

$$f(x)=\begin{cases}-2x-2 & ، \quad x<-2\\ 2 & ، \quad -2\leqslant x\leqslant 0\\ 2x+2 & ، \quad x>0\end{cases}$$



۱-۵- تابع عددی با متغیر حقیقی یا تابع حقیقی

هرگاه دامنه و برد تابعی زیر مجموعه‌هائی از R یعنی مجموعهٔ اعداد حقیقی، باشندآنگاه آن تابع را یك تابع عددی با متغیر حقیقی یا تابع حقیقی می‌نامند دراین کتاب اغلب سروکارمان با توابع حقیقی‌است، وهرجا عبارت، تابع $y=f(x)$ بکاررفته ، منظور تابع f به R با ضابطهٔ تعریف $y=f(x)$ می‌باشد.

۱-۶- تابع جزء صحیح

هر عدد حقیقی را می‌توان مجموع یك عدد درست n ویکعدد حقیقی مثبت p که بین صفر ویك می‌باشد فرض گرفت (درحالت خاص ممکن است p مساوی صفر باشد).

مثلا: در عدد $۲/۷۵$ داریم $n=۲$ و $p=۰/۷۵$

ودرعدد $-۲/۳$ داریم $n=-۳$ و $p=۰/۷$

و در عدد $۵\frac{۲}{۳}$ داریم $n=۵$ و $p=\frac{۲}{۳}$

بطورکلی برای هر عدد حقیقی x داریم:

$$\forall x\in R \quad و \quad \exists n\in Z ، x=n+P \quad و \quad ۰\leqslant P<۱ \qquad (۱)$$

n، بزرگترین عدد درست نابزرگتر از x، را جزء صحیح x نامیده و آن را با نماد $[x]$ یا $E(x)$ نمایش می‌دهند با توجه به (۱) داریم:

$$\forall x\in R \quad و \quad \exists n\in Z \quad P=x-n \quad و \quad ۰\leqslant x-n<۱$$

$$\boxed{\forall x\in R \quad و \quad \exists n\in Z \quad n\leqslant x<n+۱ \Longleftrightarrow [x]=n}$$

مثال: اگر $x=-۱/۴$ باشد $[x]$ را بدست آورید.

حل: چون $-۲\leqslant -۱/۴<-۱$ است طبق تعریف $[-۱/۴]=-۲$ میگردد.

مثال: اگر $۳\leqslant x<۴$ باشد $[x]$ را بدست آورید.

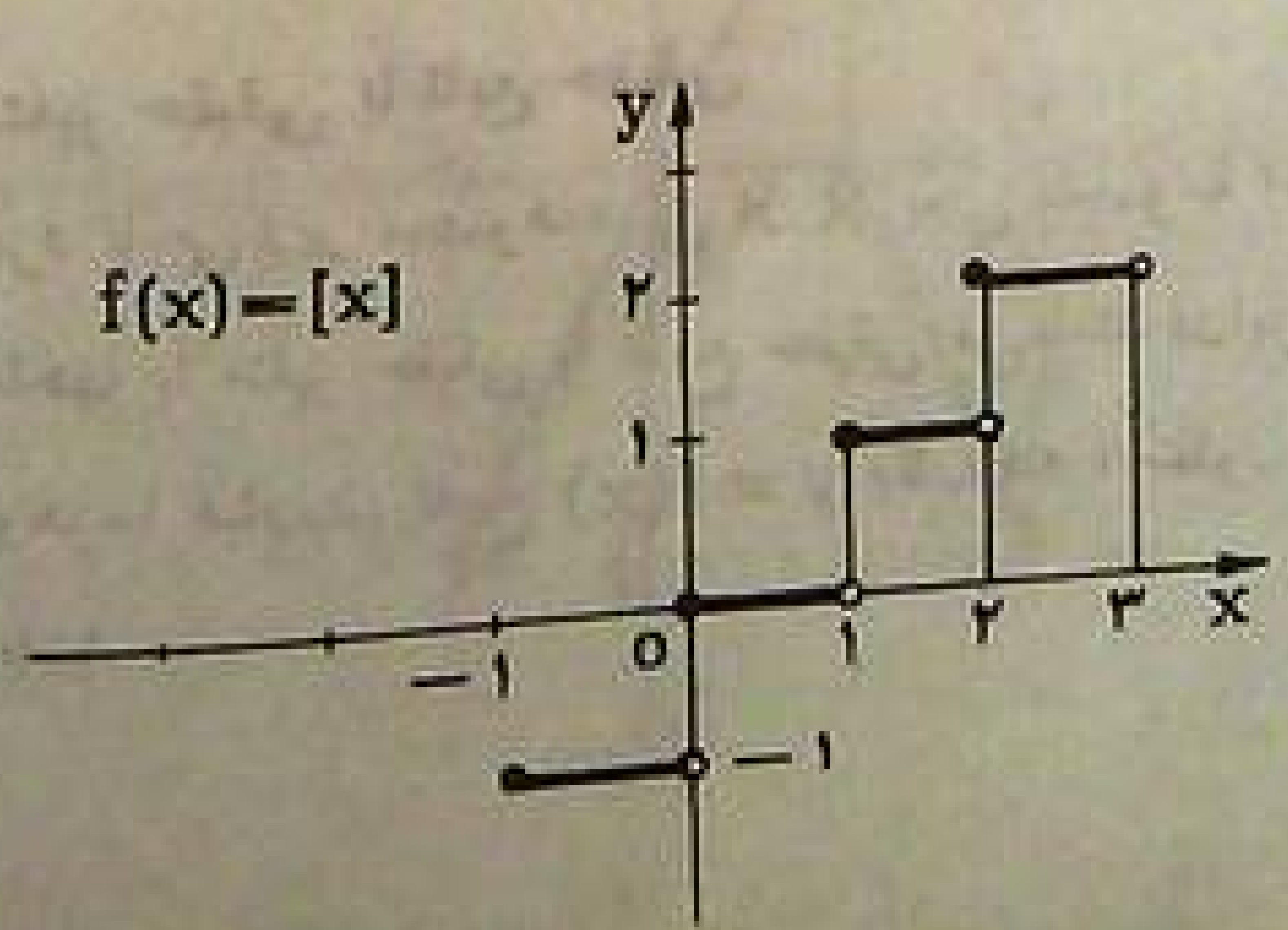
حل: اگر $[x]=n$ بگیریم با توجه به تعریف بالا باید داشته باشیم $n\leqslant x<n+۱$ و چون $x<۴$ است $n<۴$ خواهد بود اما بزرگترین عدد درستی که از چهار کوچکتر باشد $n=۳$ است یعنی $[x]=۳$

از نظر تابعی، تابع حقیقی f از R به Z راکه به صورت $f(x)=[x]$ تعریف شده است تابع جزء صحیح می‌نامند

$$f: R\longrightarrow Z$$

$$x\xrightarrow{f}[x]=n \quad و \quad n\leqslant x<n+۱$$

نمودار این تابع درفاصله $[-۱ و ۳[$ به صورت زیر است.



نتایج بدست آمده از تعریف عبارتست:

۱- $\forall x \in R \quad [x] \leq x < [x]+1$

۲- $\forall x \in R \quad 0 \leq x-[x] < 1$

۳- $\forall x \in R \quad x-1 < [x] \leq x$

۴- الف : $x \notin Z \Rightarrow [-x] = -[x]-1$

ب : $x \in Z \Rightarrow [-x] = -[x]$

در نتیجه ج : $[x]+[-x] = \begin{cases} 0 & \text{اگر } x \in Z \\ -1 & \text{اگر } x \notin Z \end{cases}$

۵- اگر n عدد صحیح و m عدد حقیقی باشد داریم:

$$n \leq mx < n+1 \Leftrightarrow [mx] = n$$

۶- برای هرعدد حقیقی x و هر عدد درست n داریم:

$$[x+n] = [x]+n$$

۱-۷- تساوی دو تابع

شرط لازم وکافی برای آنکه دو تابع f و g با هم مساوی باشند آن است که:

اولا: دامنه‌های تعریف دو تابع برابرباشند. یعنی: $D_f = D_g$

ثانیاً: بازاء هر x از دامنهٔ تعریف‌مشترک مقدار دوتابع برابرباشند. یعنی: $f(x) = g(x)$.

مثلا دوتابع حقیقی f و g که به‌صورت:

$$f(x) = \frac{x^4-1}{x^2+1} \qquad g(x) = x^2-1$$

تعریف شده‌اند با هم برابرند ولی توابع حقیقی h و k که به صورت:

$$h(x) = \frac{x^2-x}{x} \quad \text{و} \quad k(x) = x-1$$

تعریف شده‌اند باهم مساوی نیستند زیرا صفر در دامنهٔ k قرار دارد در حالی که متعلق به دامنهٔ h نیست. البته اگر دامنهٔ k را همه عددهای حقیقی مخالف صفر فرض کنیم، آن وقت $h = k$.

تمرین

۱- رابطه f در R باگزاره‌نمای $y = x^2 - 3x + 2$ تعریف شده است. آیا این رابطه تابع است؟

۲ـ رابطه f در R با گزاره نمای $x^2 - y^2 = 1$ تعریف شده است. آیا این رابطه تابع است؟

۳ـ آیا رابطه زیر یك تابع است؟ با چه تغییراتی می‌توان آنرا به‌یک تابع تبدیل نمود.

$$x \in [-2, +2] \text{ و } x \xrightarrow{f} f(x) = \frac{1}{2}(x \pm \sqrt{12 - 3x^2})$$

۴ـ آیا رابطهٔ زیر یك‌تابع است ؟

$$x \in R \text{ و } x \xrightarrow{f} f(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{x-2}$$

۵ـ تساوی $y^2 - 2xy + 2x^2 - 1 = 0$ ضابطه‌هائی برای دو تابع به دست می‌دهد. آنها را از هم جدا کنید و دامنهٔ تعریف و برد هریك را معین کنید.

۶ـ تابع f بر R با ضابطهٔ $f(x) = |x| + |x+1| + |x-1|$ تعریف شده این تابع را به صورت تابع با چند ضابطه بنویسید. سپس نمودار تابع را رسم کنید.

۷ـ دامنهٔ تعریف هریك از توابع زیر را معین کنید.

$$x \in R \text{ و } x \xmapsto{f} f(x) = \frac{x+2}{x^2 - x}$$

$$x \in R \text{ و } x \xmapsto{f} f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - x - 2}}$$

$$x \in R \text{ و } x \xmapsto{f} f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 3x}$$

$$x \in R \text{ و } x \xmapsto{f} f(x) = \frac{|x-1|}{\sqrt{(x-1)^2}}$$

$$x \in R \text{ و } x \xmapsto{f} f(x) = \frac{x}{1 - [x]}$$

$$x \in R \text{ و } x \xmapsto{f} f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2} - \sqrt{x^2 + 2x - 3}$$

$$x \in R \text{ و } x \xmapsto{f} f(x) = \sqrt{(x+2)x} + \sqrt{x(x-1)}$$

$$x \in R \text{ و } x \xmapsto{f} f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x+2}}$$

۸ـ مجموعهٔ $A=\left\{-\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{\pi}{2}, 0\right\}$ و تابعهای f و g بر A با ضابطه‌های $f(x)=\sin x\cos x$ و $g(x)=x(x^2-\frac{\pi^2}{4})(x-\pi)$ مفروضند آیا دو تابع f و g مساویند؟

۹ـ توابع f و g بر R با ضابطه‌های زیر مفروضند تعیین کنید کدامیك از این دو تابع با هم برابرند.

(۱) $f(x)=\frac{x}{x}$ $\qquad g(x)=1$

(۲) $f(x)=\sqrt{x}\times\sqrt{x-1}$ $\qquad g(x)=\sqrt{x(x-1)}$

(۳) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-|x|}}$ $\qquad g(x)=\frac{1}{\sqrt{|x|-x}}$

(۴) $f(x)=[\frac{x^2}{x^2+1}]$ و $\qquad g(x)=0$

۱۰ـ نمودار توابع زیر را رسم کنید. $(x\in R)$

الف : $f(x)=\begin{cases} 2x+2 & \text{اگر } x\notin z \\ 0 & \text{اگر } x\in z \end{cases}$

ب : $f(x)=\begin{cases} -x+2 & \text{اگر } x<0 \\ x^2-2x & \text{اگر } x\geqslant 0 \end{cases}$

۱۱ـ تابع f از R به Z باضابطهٔ $f(x)=2[x]-1$ تعریف شده است نمودار آنرا در فاصله $[-2, 2]$ رسم کنید.

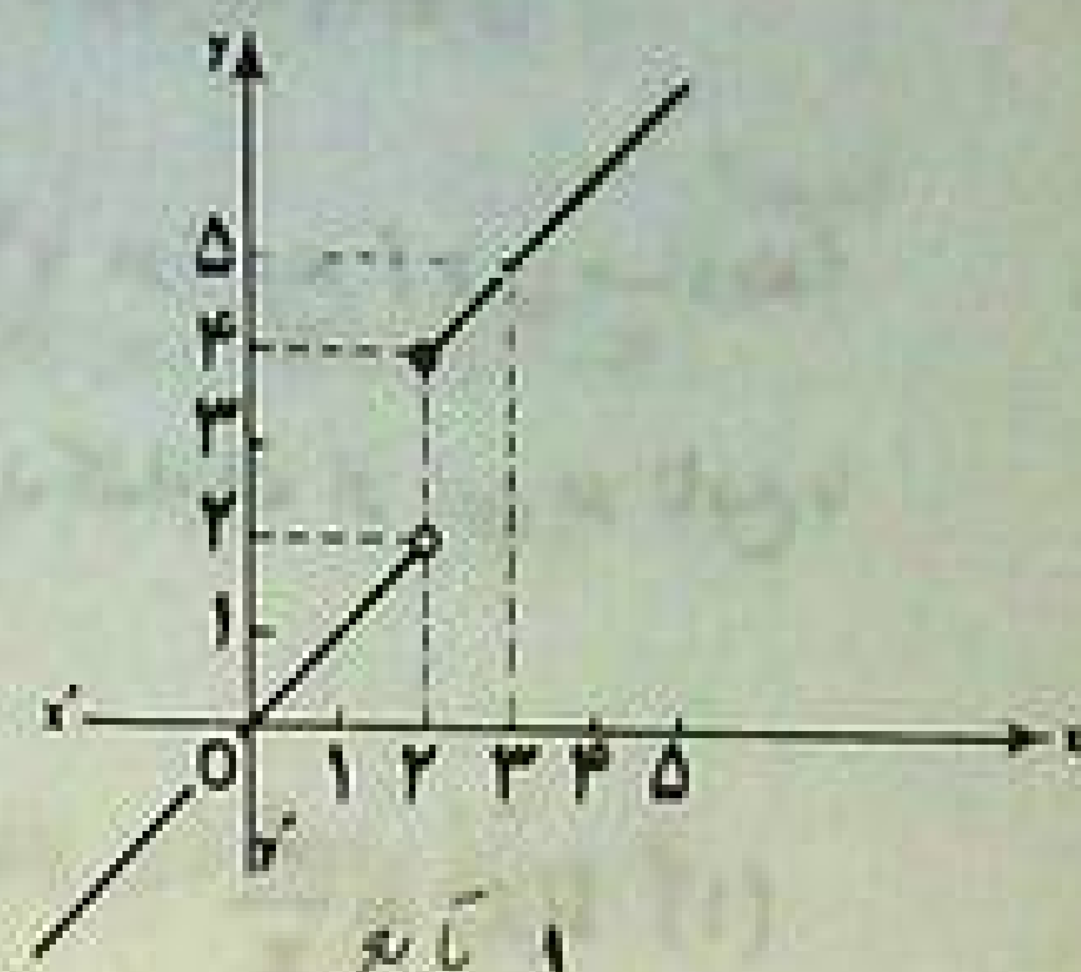
۱۲ـ تابع f در R با ضابطهٔ $f(x)=2x-[x]$ تعریف شده است نمودار هندسی آنرا در فاصله $[-2, 2]$ رسم کنید.

۱۳ـ تابع f از R به Z باضابطهٔ $f(x)=[x+2]$ را درفاصله $[-2, 2]$ رسم کنید.

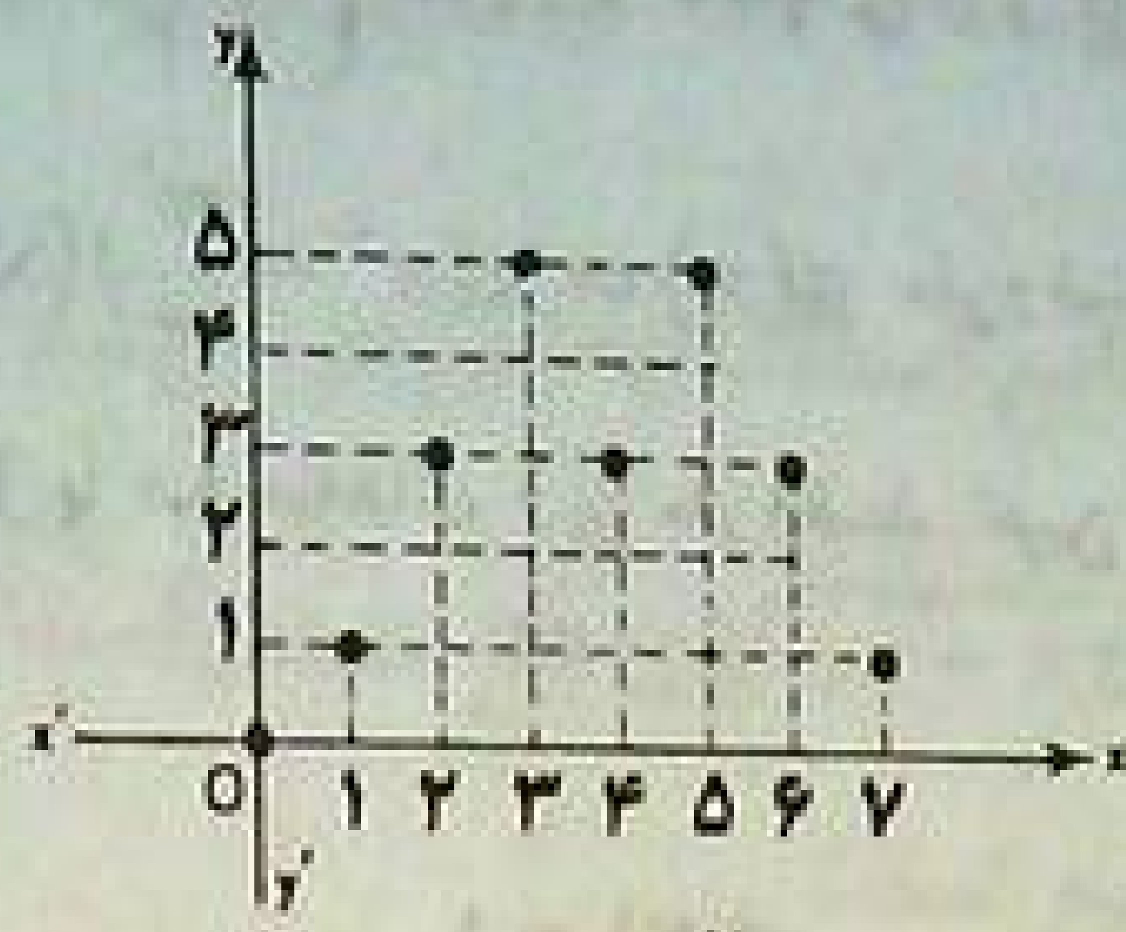
۱۴ـ تابع f از R به Z با ضابطهٔ $f(x)=[2x]$ را درفاصله $[-1, 1]$ رسم کنید.

۱۵ـ تابع f از R به R باضابطه $f(x)=x+[x]$ را درفاصله $[-1, 2]$ رسم کنید.

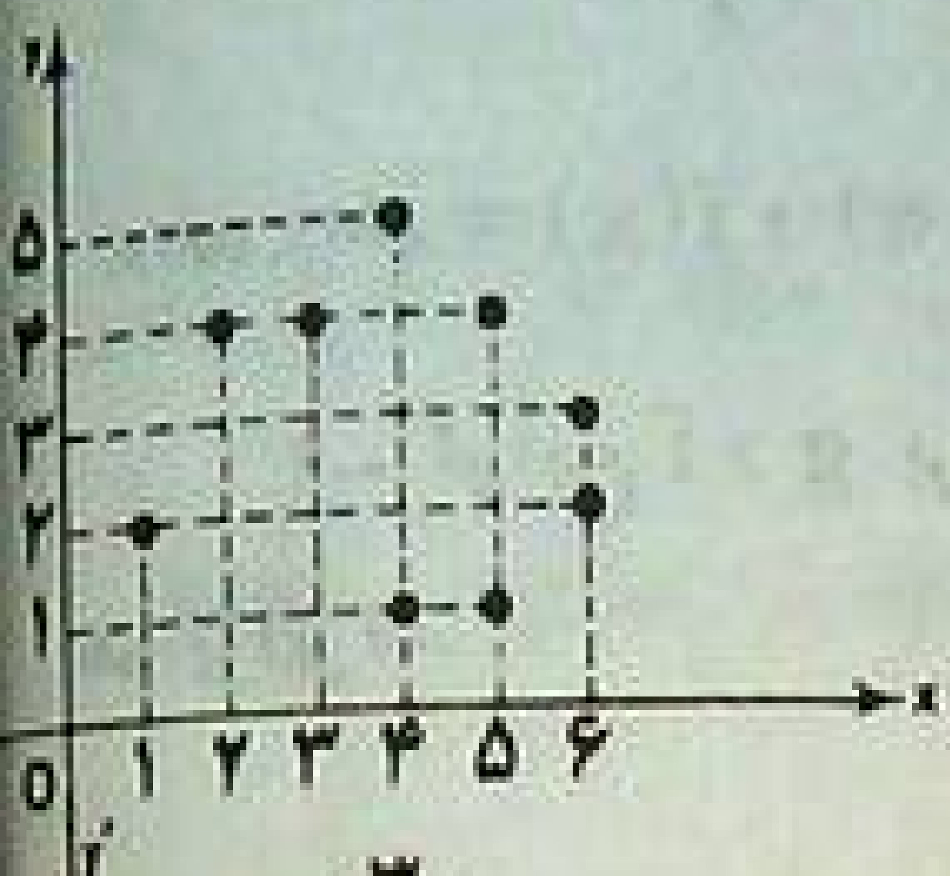
۱۶ ـ تعیین کنید کدامیك از نمودارهای صفحهٔ بعد نمودار یك تابع و کدامیك نمودار یك رابطه است.



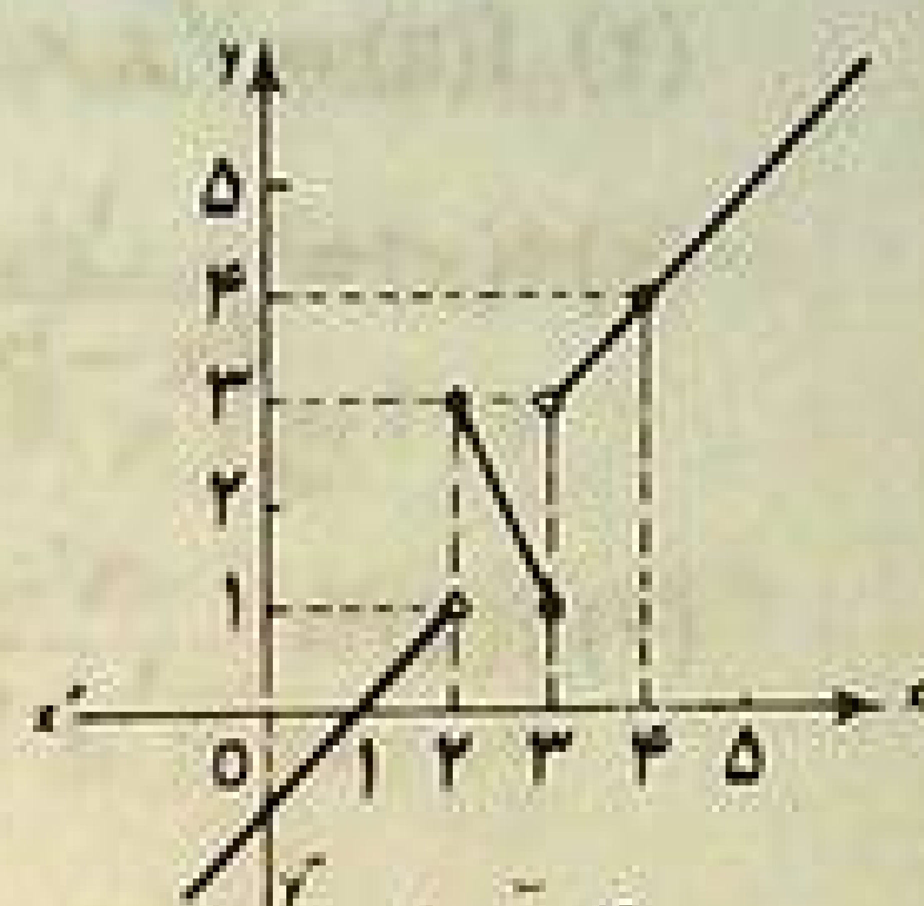
۱ تابع



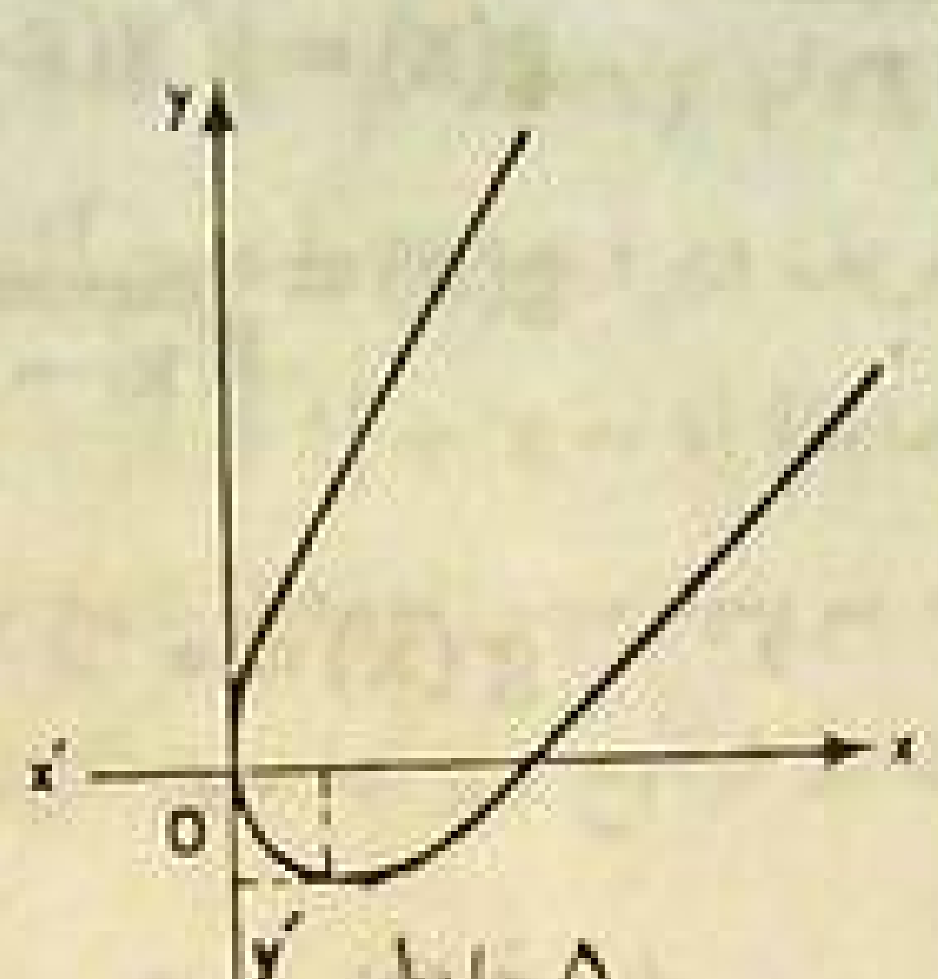
تابع ۲



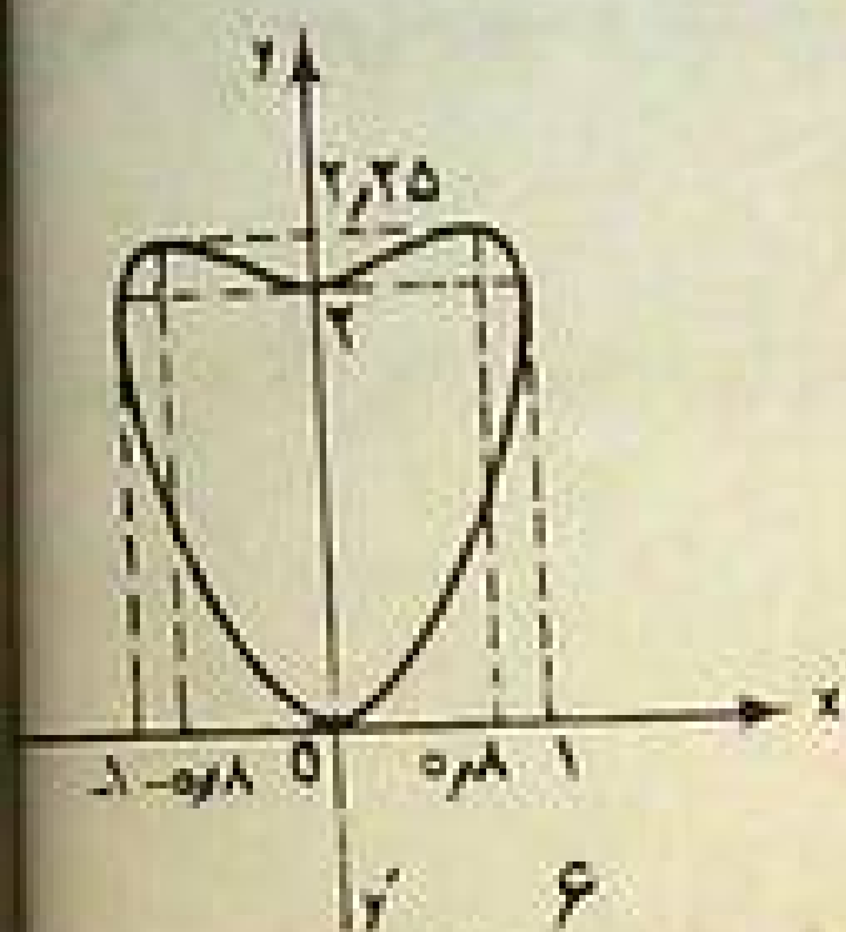
رابطه ۳



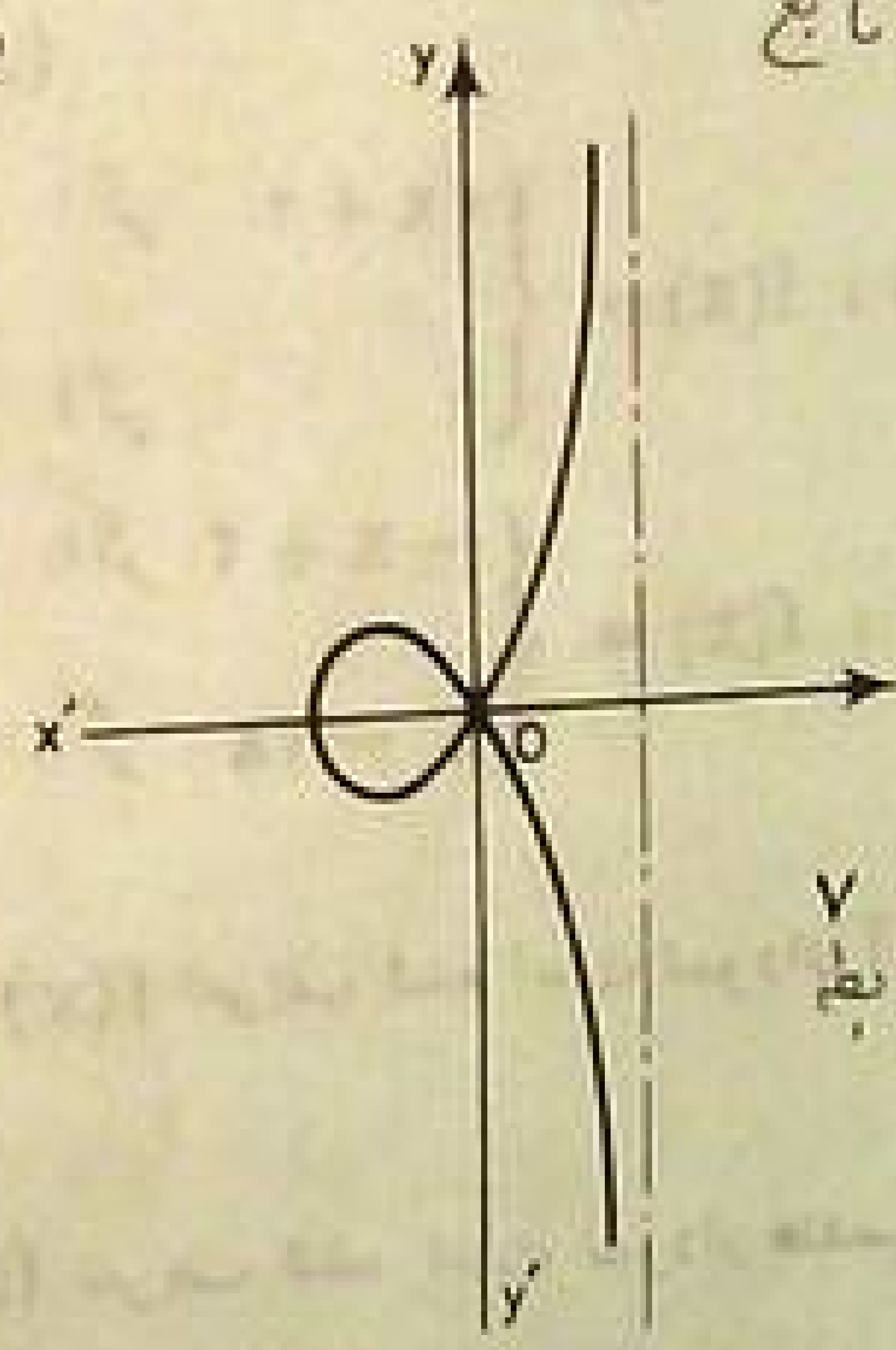
۴ تابع



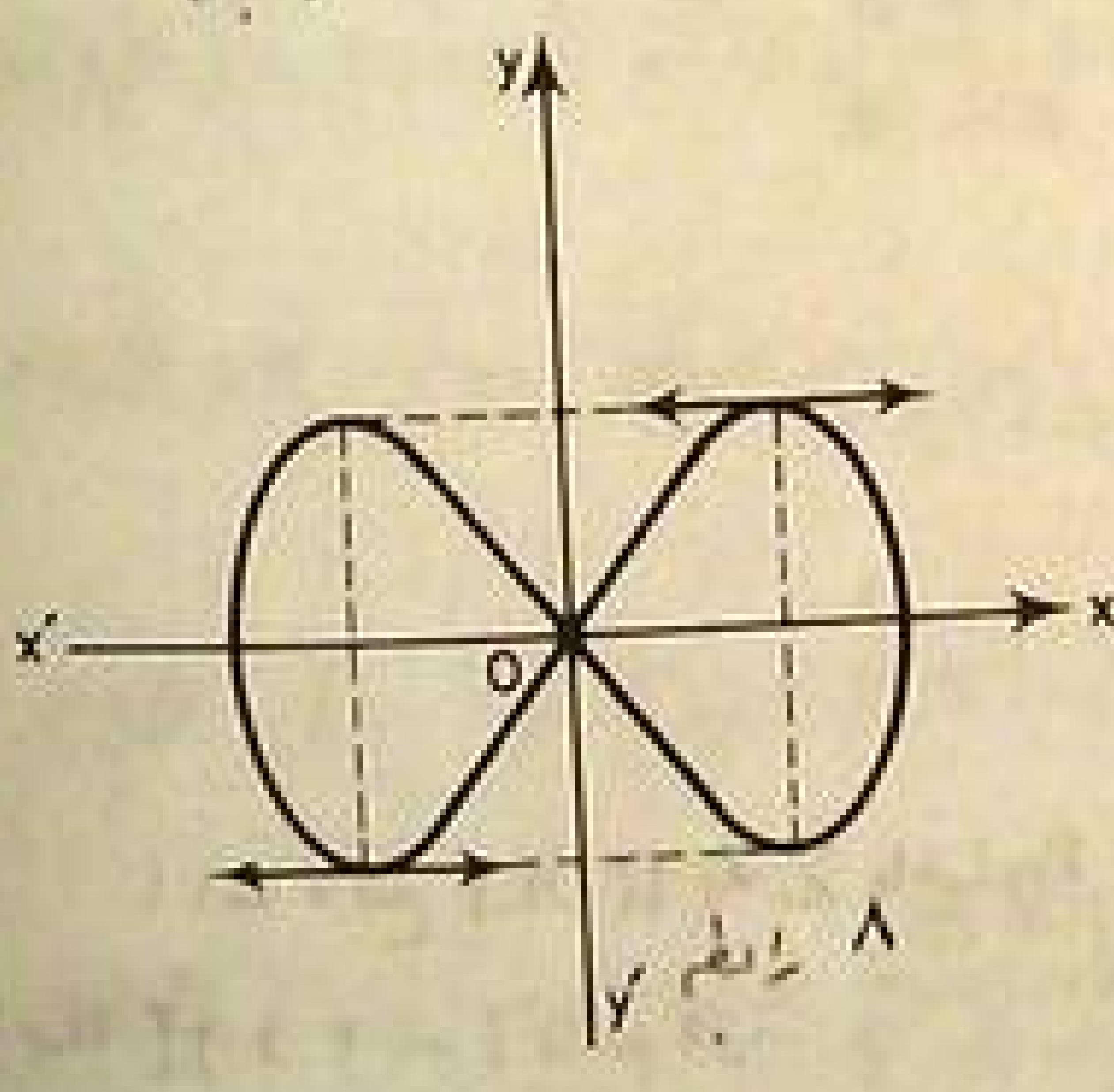
رابطه ۵



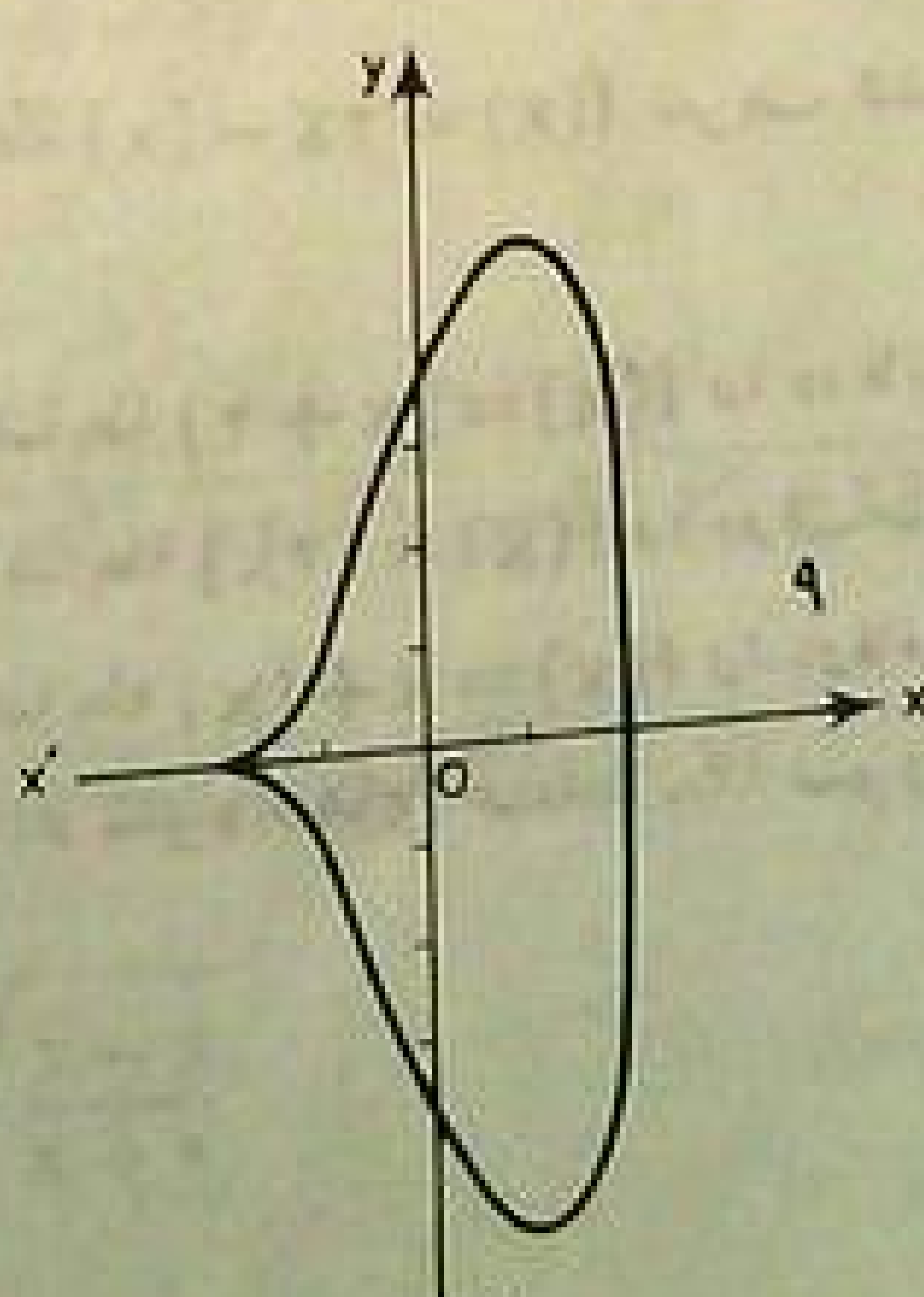
۶ رابطه



۷ رابطه



رابطه ۸



رابطه ۹

۱-۸- چند نوع تابع

I ـ تابع یک به یک ـ فرض کنید که f تابعی از A به B باشد. f را یک به یک (یا ۱ـ۱) گوییم اگر:

$\forall x_1$ و $x_2 \in D_f$ ، $f(x_1)=f(x_2) \Longrightarrow x_1=x_2$

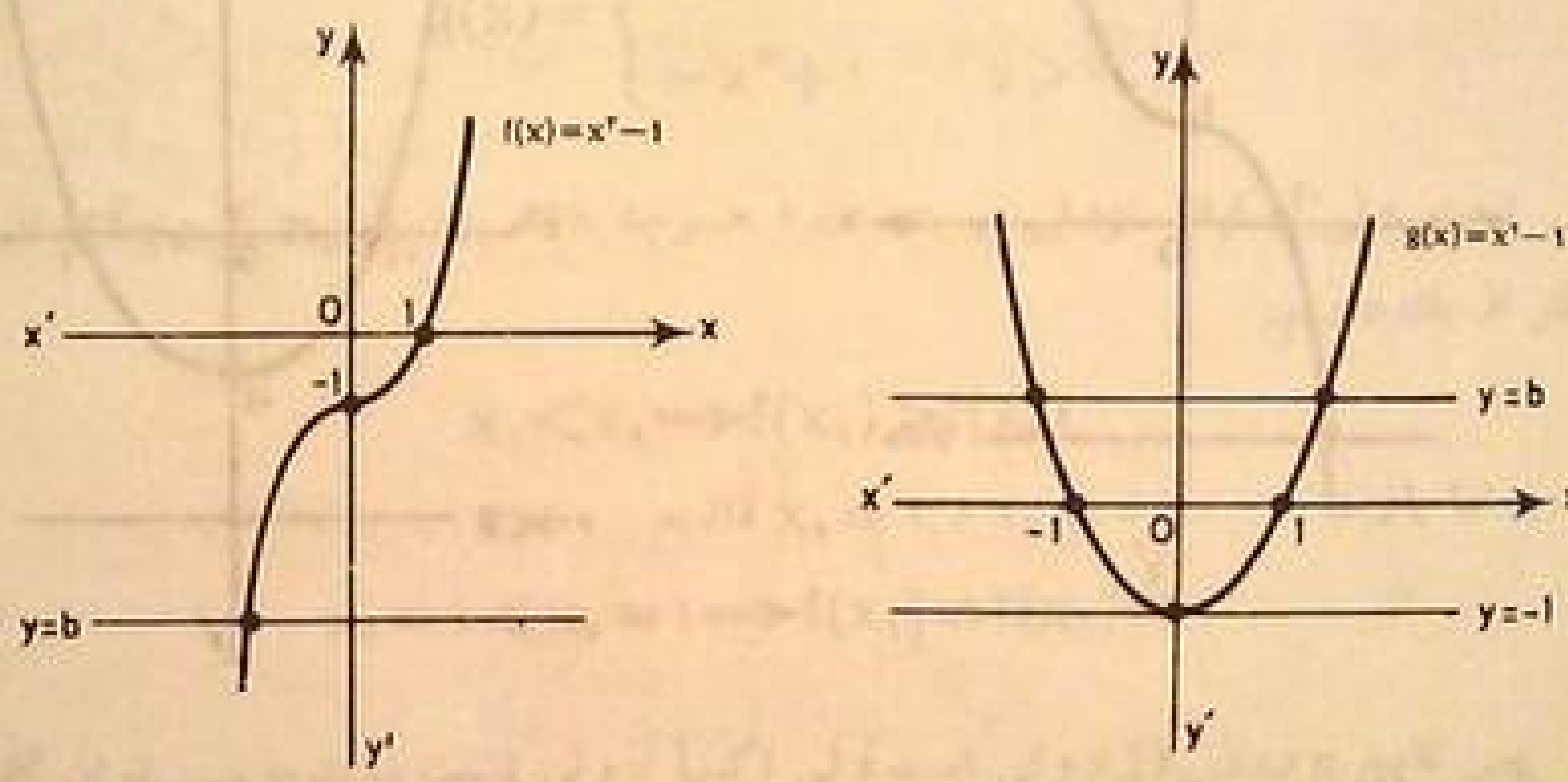
مثلا تابع f در R که با ضابطهٔ $f(x)=x^3-1$ تعریف شده است. یک به یک است زیرا:

$\forall x_1$ و $x_2 \in D_f$ ، $f(x_1)=f(x_2) \Longrightarrow x_1^3-1=x_2^3-1 \Longrightarrow x_1=x_2$

ولی تابع g در R که با ضابطهٔ $g(x)=x^2-1$ تعریف شده است یک به یک نیست زیرا:

$\forall x_1$ و $x_2 \in D_g$ و $g(x_1)=g(x_2) \Longrightarrow x_1^2-1=x_2^2-1 \Longrightarrow x_1=\pm x_2 \not\Longrightarrow x_1=x_2$

از روی نمودار تابع می‌توان یک به یک بودن آن را بررسی کرد بدین طریق که اگر خط افقی به‌معادله $y=b$ به ازاء جمیع مقادیر $b\in R_f$ نمودار تابع را فقط دریک نقطه قطع کند تابع یک به یک است درغیر این صورت یک‌به‌یک نیست.



دربالا، نمودار تابع f نشان می‌دهد که تابع f یک به یک است و نمودار تابع g نشان می‌دهد که تابع g یک به یک نیست.

تابع یک به یک را می‌توان به صورت:

$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$ $\forall x_1, x_2 \in D_f$ نیز تعریف کرد. (چرا؟)

II ـ تابع پوششی ـ تابع f از A به B راپوششی گویند هر گاه $R_f=B$ باشد. به‌عبارت دیگر به ازای هر $y\in B$ عضوی مانند $x\in D_f$ وجود داشته باشد به قسمی که $y=f(x)$.

مثلا تابع f از R به R با ضابطهٔ $y=x^3+1$ پوششی است. زیرا دامنهٔ تعریف $D_f=R$ و برد تابع $R_f=R$ بوده و داریم: $x=\sqrt[3]{y-1}$ که بازاء هر y ی متعلق به‌برد تابع‌یعنی $y\in R$

لااقل یک xی متعلق به‌دامنه تعریف تابع یعنی $x\in R$ به دست می‌آید که $y=x^3+1$ باشد.

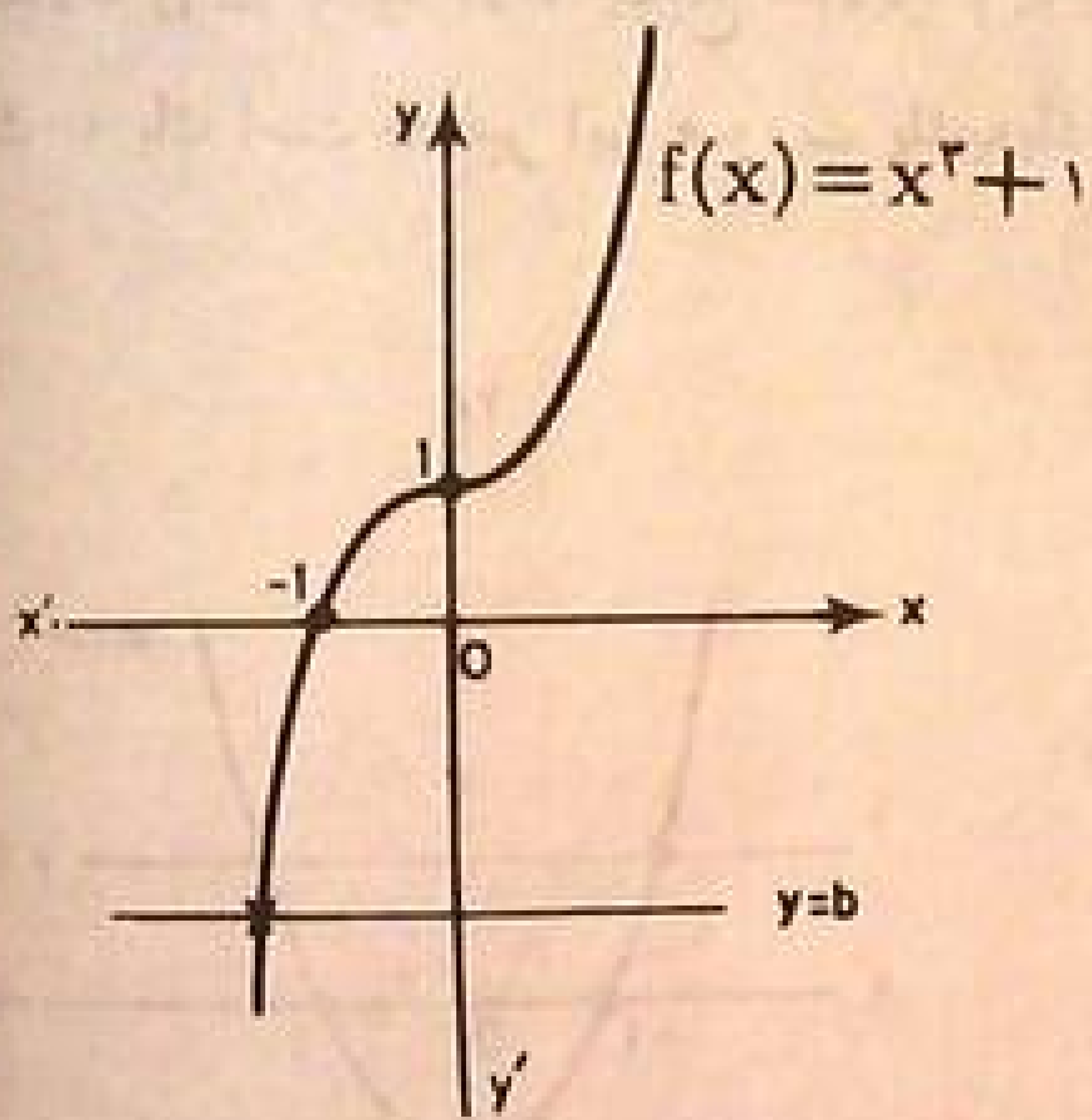
ولی تابع g از R به R با ضابطه $g(x)=x^2-1$ پوششی نیست. زیرا دامنهٔ تعریف تابع $D_g=R$ و برد تابع مجموعهٔ $R_g=[-1 \text{ و } +\infty[$ است که با مجموعهٔ اعداد حقیقی R برابر نیست و از طرفی $x=\pm\sqrt{y+1}$ است. و به ازاء $y=-2\in R$ ، xی متعلق به دامنهٔ تعریف پیدا نمی‌شود که در $y=x^2-1$ صدق کند. چنانچه تابع f از A به B پوششی باشد. از هر نقطه بعرض $y=b\in B$ خط افقی رسم کنیم این خط نمودار تابع را لااقل در یک نقطه قطع می کند.

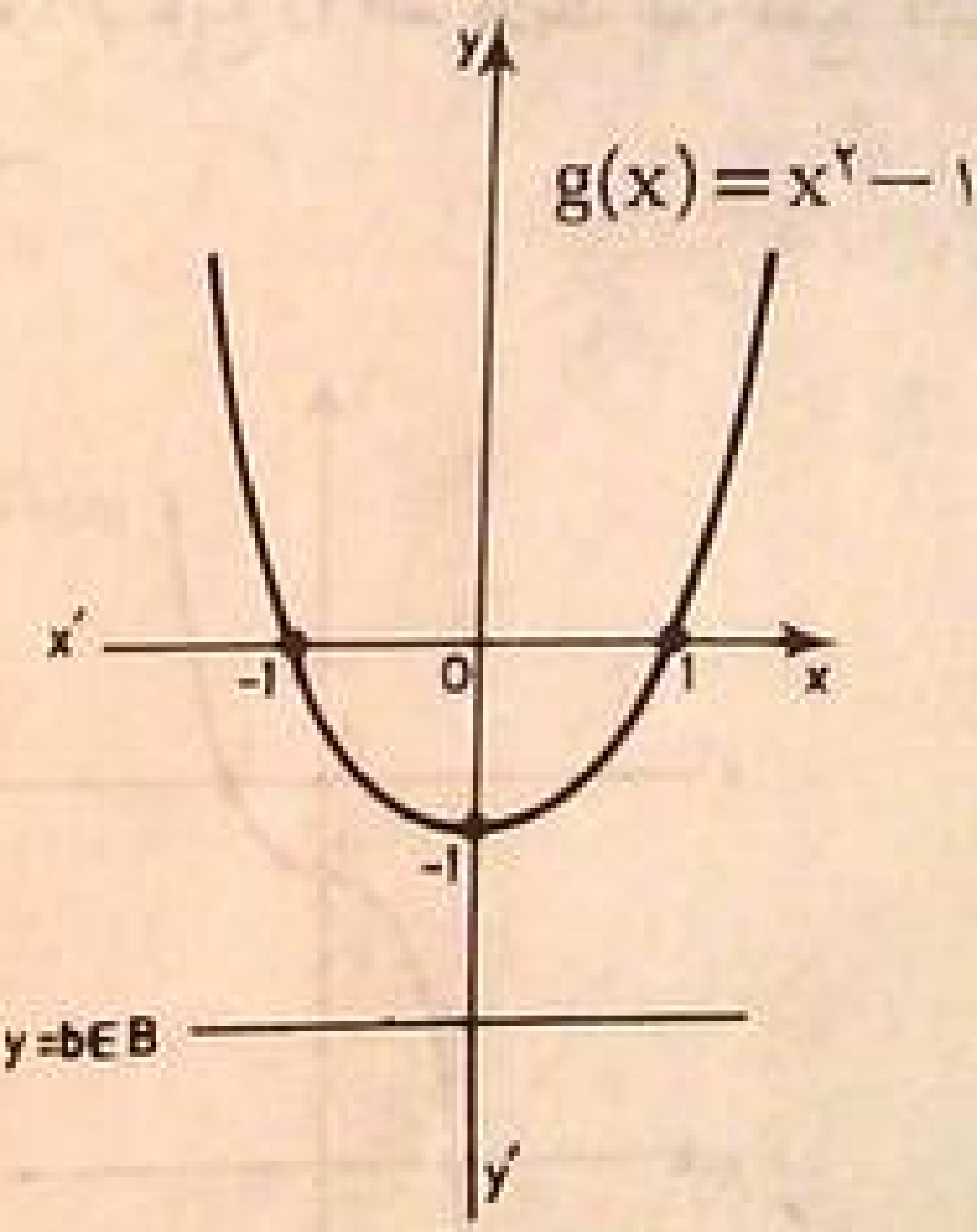
$f: R \longmapsto R$

$f: x \longmapsto y=x^3+1$

$g: R \longmapsto R$

$g: x \longmapsto y=x^2-1$





نمودار تابع f نشان می‌دهد که تابع f پوششی است و نمودار تابع g نشان می‌دهد که تابع g پوششی نیست. ولی تابع g از R به $[-1 \text{ و } +\infty[$ با ضابطهٔ $g(x)=x^2-1$ پوششی است زیرا برد تابع $R_g=[-1 \text{ و } +\infty[$ است.

III– تابع یکنوا – اگر A زیرمجموعهٔ R و f تابعی از A به R باشد گوئیم.

الف– تابع f روی A اکیداً صعودی است اگر:

$$\forall x_1, x_2\in A \quad ، \quad x_1<x_2 \Longrightarrow f(x_1)<f(x_2)$$

ب– تابع f روی A اکیداً نزولی است اگر:

$$\forall x_1, x_2\in A \quad ، \quad x_1<x_2 \Longrightarrow f(x_1)>f(x_2)$$

ج– تابع f روی A اکیداً یکنواست هرگاه: اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد.

مثلاً: تابع f در R باضابطهٔ $f(x)=x^3$ اکیداً صعودی است.

زیرا:

$$\forall x_1, x_2 \in D_f \quad ، \quad x_1 < x_2 \Longrightarrow x_1^3 < x_2^3$$

درنتیجه می‌توان گفت تابع f در R اکیداً یکنواست.

د ــ تابع f روی A صعودی است اگر:

$$\forall x_1 , x_2 \in A \quad ، \quad x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$$

هـ ــ تابع f روی A نزولی است اگر:

$$\forall x_1 , x_2 \in A \quad ، \quad x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2)$$

و ــ تابع f روی A یکنواست هرگاه: f روی A صعودی یا نزولی باشد.

مثلاً: تابع g در R با ضابطهٔ

$$g(x)=\begin{cases} x^2 & x \leqslant 0 \\ -x^2+1 & x \geqslant 1 \end{cases}$$

نزولی است ولی اکیداً نزولی نیست. زیرا هرچه باشد x_1 و x_2 کوچکتر از صفر یا بزرگتر از یک داریم:

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

و اما بازاء $x_1 = 0$ و $x_2 = 1$ داریم

$$x_1 = 0 < x_2 = 1 \Longrightarrow f(x_1) = f(x_2) = 0$$

پس تابع g روی D_g نزولی است ولی اکیداً نزولی نیست درنتیجه می‌توان گفت تابع g روی D_g یکنواست ولی اکیداً یکنوا نیست برای تعیین فواصل یکنوائی تابع ازقضیه زیر استفاده می کنند.

قضیه ــ تابع f درهر فاصله‌ای که مشتق آن یعنی f' مثبت باشد (مگر احیاناً درتعداد باپایانی نقطه صفرشود) اکیداً صعودی و درهر فاصله‌ای که مشتق آن منفی باشد(مگر درتعداد باپایانی نقطه صفر شود) اکیداً نزولی و درهر فاصله‌ای که مشتق آن برابر صفر باشد، مقداری ثابت است.

قضیه ــ اگر تابع f اکیداً صعودی (یا اکیداً نزولی) باشدآنگاه f، ۱ــ۱ است.

IV ــ تابع ثابت ــ فرض کنید که c عدد حقیقی و ثابت باشد تابع f از R به R را که به صورت $f(x)=c$ تعریف شده است، تابع ثابت می‌نامند. واضح است که f نه یك به یك است و نه پوششی، نمودار این تابع خطی موازی محور x هاست.

V_ تابع همانی – تابعی مانند f از A به A را که برای هر $x\in A$ به‌صورت $f(x)=x$ تعریف شده است، تابع همانی روی A می‌نامند مثلا تابع

$$f=\{(۰ و ۰) و (۱ و ۱) و (۲ و ۲)\}$$

یک تابع همانی روی مجموعهٔ $A=\{۰ و ۱ و ۲\}$ است.

معمولا تابع همانی روی مجموعه‌ای مانند A را به I_A نشان می‌دهند. تابع همانی روی R تابعی است مانند f از R به R که برای هر $x\in R$ بـه صورت $f(x)=x$ تعریف شده است نمودار این تابع، نیمساز ناحیه اول وسوم است.

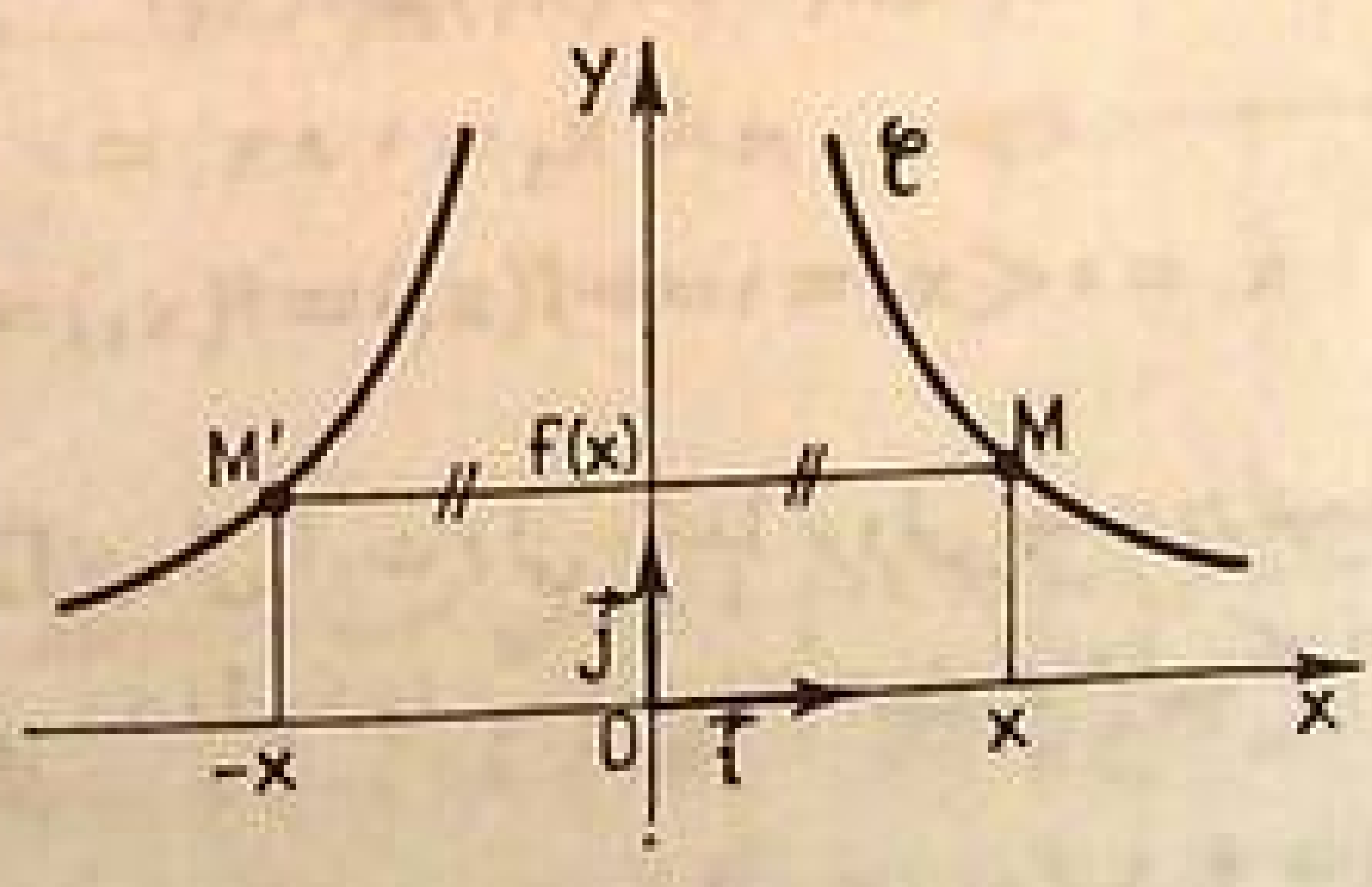
VI_ تابع زوج و تابع فرد _ الف_ تابع f را زوج گویند، هرگاه:

اولا: برای هر $x\in D_f$ داشته‌باشیم: $-x\in D_f$

ثانیاً: برای هر $x\in D_f$ داشته‌باشیم: $f(-x)=f(x)$.

تابعهائی که بوسیله‌دستورهای $y=x^۲-۱$ و $y=\cos x$ و $y=x\sin x$ تعریف شده‌اند نمونه‌هائی ازتابع زوج هستند.

نمودار هندسی تابع‌زوج نسبت به‌محور yها تقارن‌دارد.



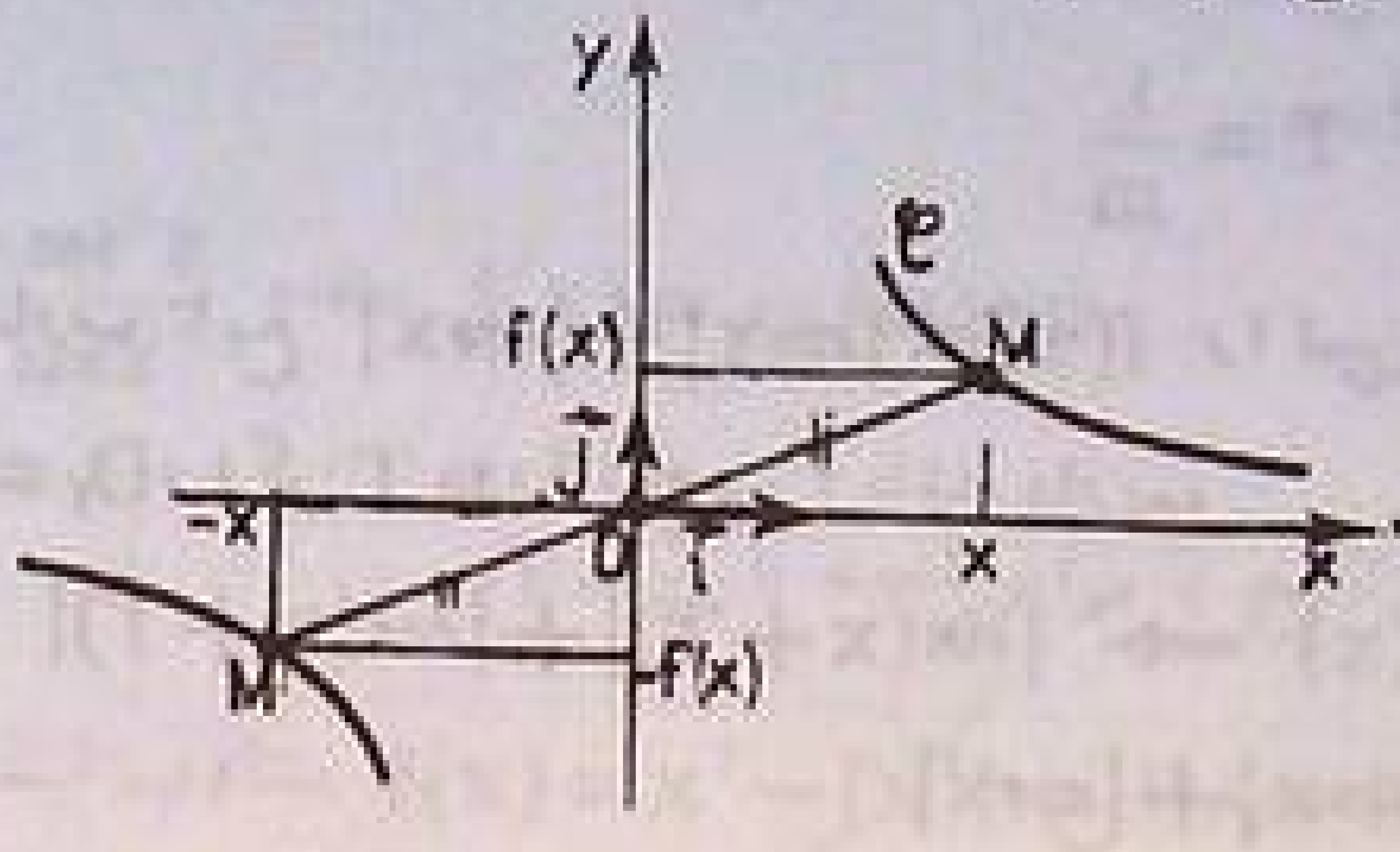
ب_ تابع f را فردگویند هرگاه:

اولا: برای هر $x\in D_f$ داشته باشیم: $-x\in D_f$

ثانیاً: برای‌هر $x\in D_f$ داشته‌باشیم: $f(x)=-f(-x)$

تابعهای $y=x^۳-x$ و $y=x+\sin x$ و $y=\dfrac{x}{x^۲+۱}$، نمونه‌هائی‌ازتابعهای فردهستند.

نمودار هندسی تابع فرد نسبت به مبداء مختصات تقارن دارد.



مورد استفاده: معمولاً در رسم نمودار یک تابع، از زوج وفرد بودن تابع وخاصیت تقارن استفاده نموده ابتدا قسمتی از نمودار تابع را می‌کشند وبعد قرینه آن را نسبت به محورyها یا مبداء مختصات رسم می‌کنند.

VII- تابع متناوب ـ تابع f در R با دامنهٔ تعریف D_f رایک تابع متناوب بادورهٔ تناوب T $(T\neq 0)$ می‌نامیم درصورتیکه:

اولاً: اگر $x\in D_f$ آنگاه $x\pm T\in D_f$

ثانیاً: $\forall x\in D_f$ ، $f(x\pm T)=f(x)$

کوچکترین T ی مثبت را دورهٔ تناوب اصلی تابع می گویند.

مثال ۱- دورهٔ تناوب تابع $f(x)=\sin 3x$ را تعیین کنید.

حل: $D_f=\mathbb{R}$، فرض کنید T دورهٔ تناوب f باشد داریم،

$$f(x+T)=f(x) \Longrightarrow \sin(3x+3T)=\sin 3x$$

$$3x+3T=3x+2K\pi \Longrightarrow T=\frac{2}{3}K\pi$$

کوچکترین مقدار مثبت T به ازای $K=1$ بدست می‌آید $T=\frac{2}{3}\pi$. بدیهی است که اگر $x\in D_f$ سپس $x+T\in D_f$.

مثال ۲- دورهٔ تناوب تابع $f(x)=mx-[mx]$ را بدست آورید $(m\in N)$.

حل: فرض کنید T دورهٔ تناوب تابع باشد، داریم:

$$f(x+T)=f(x)$$
$$m(x+T)-[m(x+T)]=mx-[mx]$$
$$[mx+mT]-mT=[mx] \qquad (1)$$

بدیهی است اگر mT عدد صحیح باشد خواهیم داشت، $[mx+mT]=[mx]+mT$ در نتیجه، رابطهٔ (۱) برقرار است. بنابراین برای تعیین دورهٔ تناوب باید mT را کوچکترین

عدد صحیح مثبت بگیریم. پس داریم:

$$mT=1 \Rightarrow T=\frac{1}{m}$$

مثال ۳- دورهٔ تناوب تابع $f(x)=|\sin x|+|\cos x|$ را تعیین کنید.

حل: داریم $D_f=\mathbb{R}$، اگر T دورهٔ تناوب f باشد داریم،

$$f(x+T)=f(x) \Rightarrow |\sin(x+T)|+|\cos(x+T)| =|\sin x|+|\cos x| \qquad (1)$$

رابطهٔ (۱) وقتی برقرار است که $T=\frac{k\pi}{2}$ و به‌ازای $k=1$ دورهٔ تناوب $T=\frac{\pi}{2}$ بدست می‌آید.

بطور کلی: دورهٔ تناوب توابع $f_1(x)=\sin ax$ و $f_2(x)=\cos ax$ برابر $T=\frac{2\pi}{a}$ و دورهٔ تناوب $f_3(x)=\operatorname{tg} ax$ و $f_4(x)=\operatorname{cotg} ax$ برابر با $T=\frac{\pi}{a}$ است.

مثال ۴- دورهٔ تناوب تابع $y=\sin 4x+\cos 6x$ را تعیین کنید.

T_1 دورهٔ تناوب $\sin 4x$ عبارتست از: $T_1=2\pi : 4=\frac{\pi}{2}$

T_2 دورهٔ تناوب $\cos 6x$ عبارتست از: $T_2=2\pi : 6=\frac{\pi}{3}$

اگر T_1 و T_2 را متحدالمخرج کنیم می‌شود $T_1=\frac{3\pi}{6}$ و $T_2=\frac{2\pi}{6}$ و چون کوچکترین مضرب مشترك ۳ و ۲ برابر ۶ است وداشتیم $T_1=3\times\frac{\pi}{6}$ و $T_2=2\times\frac{\pi}{6}$ پس $T=6\times\frac{\pi}{6}$ یعنی دورهٔ تناوب تابع فوق $T=\pi$ می‌باشد.

مثال ۵- دورهٔ تناوب تابع $y=\sin\frac{2}{3}x+\cos\frac{1}{6}x$ را تعیین کنید. دورهٔ تناوب تابع $\cos\frac{1}{6}x$ برابر است با: $T_1=2\pi : \frac{1}{6}=12\pi$ و دورهٔ تناوب تابع $\sin\frac{2}{3}x$ برابراست با:

$T_2=2\pi : \frac{2}{3}=3\pi$ چون کوچکترین مضرب مشترك بین ۱۲ و ۳ عبارت است از ۱۲ پس $T=12\times\pi=12\pi$

تذکر: قبل از تعیین دورهٔ تناوب یك تابع لازم است در صورت امکان تابع را ساده کنیم و سپس دورهٔ تناوب را برای آن تابع تعیین کنیم.

مثال ۶- دورهٔ تناوب تابع $f(x)=\operatorname{tg}x-\operatorname{cotg}x$ را تعیین کنید.

حل : اگر تابع فوق را ساده نکنیم، $T=\pi$ بدست می‌آید که دورهٔ تناوب نیست. بعد از خلاصه کردن داریم:

$$f(x)=\frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin x\cdot\cos x} \implies f(x)=-2\cot g\,2x$$

بنابراین دورهٔ تناوب تابع f برابر است با $T=\frac{\pi}{2}$.

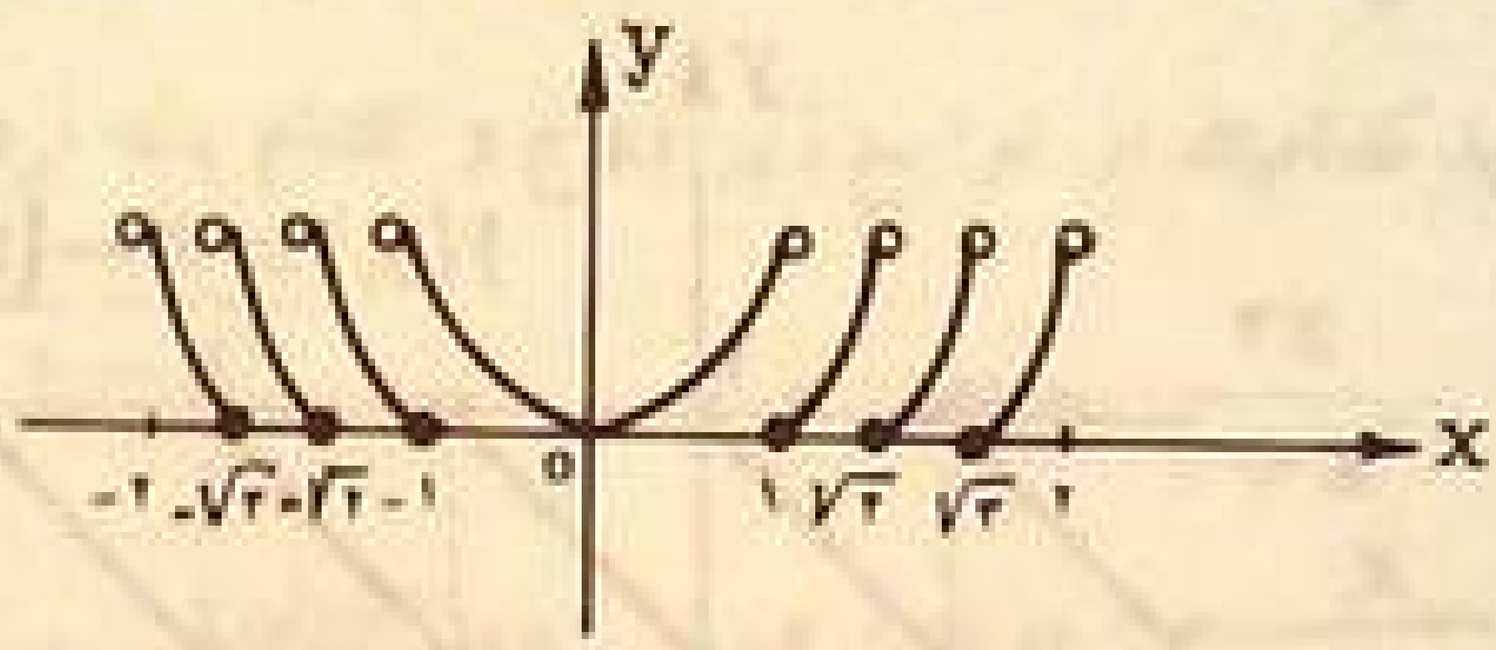
مثال ۷- نشان دهید تابع $f(x)=x^2-[x^2]$ متناوب نیست:

حل : فرض کنیم تابع f متناوب باشد و T_0 دورهٔ تناوب آن باشد داریم:

$$f(x+T_0)=f(x) \implies (x+T_0)^2-[(x_0+T)^2]=x^2-[x^2]$$

$$T_0^2+2xT_0=[x^2+T_0^2+2xT_0]-[x^2] \qquad (1)$$

طرف راست تساوی(۱) همواره عدد صحیح است. بنابراین به‌ازای هر $x\in R$ ، $T_0^2+2xT_0$ باید عدد صحیح باشد و این غیر ممکن است. نمودار تابع در زیر رسم شده است.



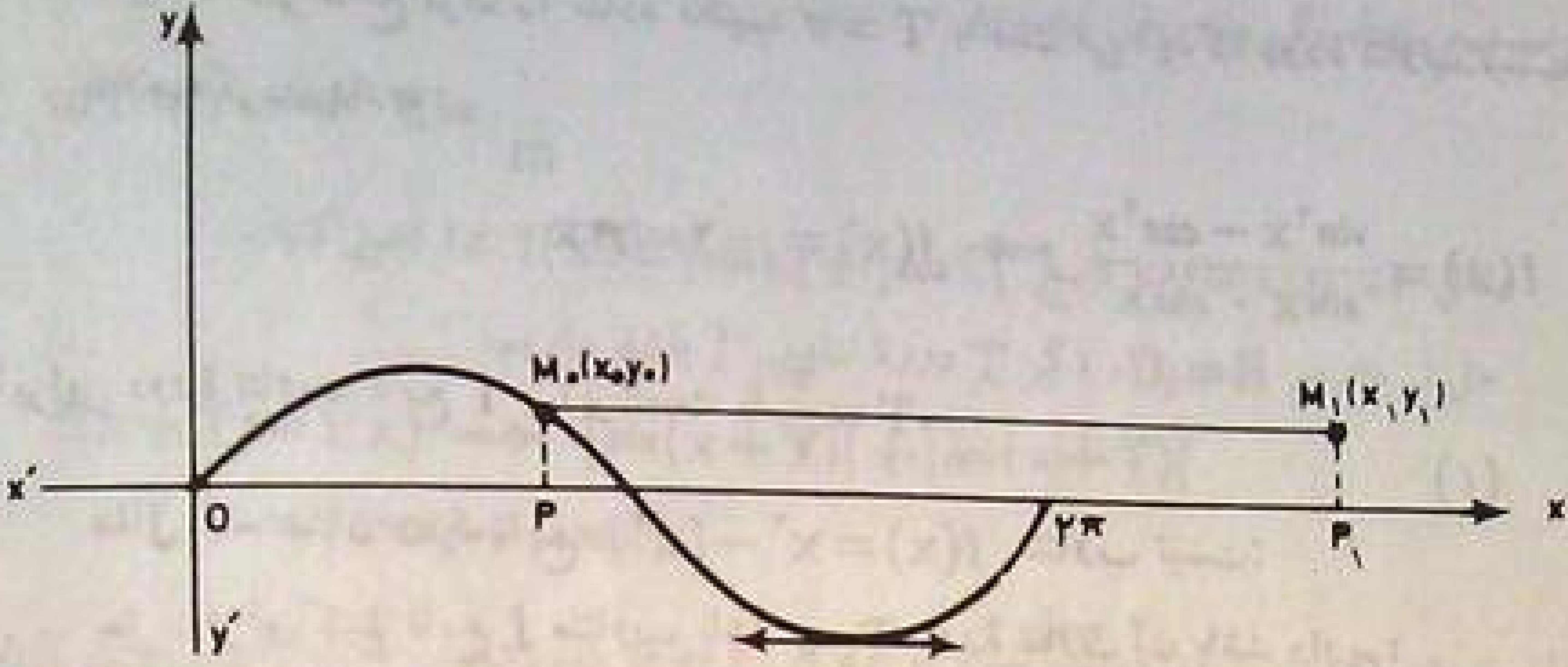
مورد استفاده : برای رسم منحنی(C) نمایش تابع مثلثاتی متناوب $y=f(x)$ ابتدا منحنی (C_0) نمایش مذکور را بوسیله جدول تغییرات آن در یکی از فاصله‌های تناوب مثلا $(a , a+T)$ رسم نموده سپس منحنی حاصل را به‌اندازه بردار $\vec{V}$ موازی محورxها که اندازه جبری آن روی محورxها kT (k عددی درست است) می‌باشد انتقال می‌دهیم هرگاه به k اعداد درست بدهیم و عمل را ادامه دهیم منحنی (C) نمایش تابع رسم می‌شود.

مثلا اگر (C_0) نمایش تابع $y=\sin x$ در فاصلهٔ $[0 \text{ و } 2\pi]$ (شکل بعد) و M_0 نقطه‌ای از آن به مختصات $(x_0 , \sin x_0)$ باشد هرگاه نقطهٔ M_0 را به‌اندازهٔ بردار $\vec{V}$ موازی محور $x'x$ که اندازهٔ جبری آن $2k\pi$ (درشکل اندازهٔ جبری بردار $2k\pi$ را 2π اختیار کرده‌ایم) می‌باشد انتقال دهیم نقطهٔ $M_1(x_1 , y_1)$ بدست می‌آید.

داریم:

$$x_1=x_0+k\cdot 2\pi$$

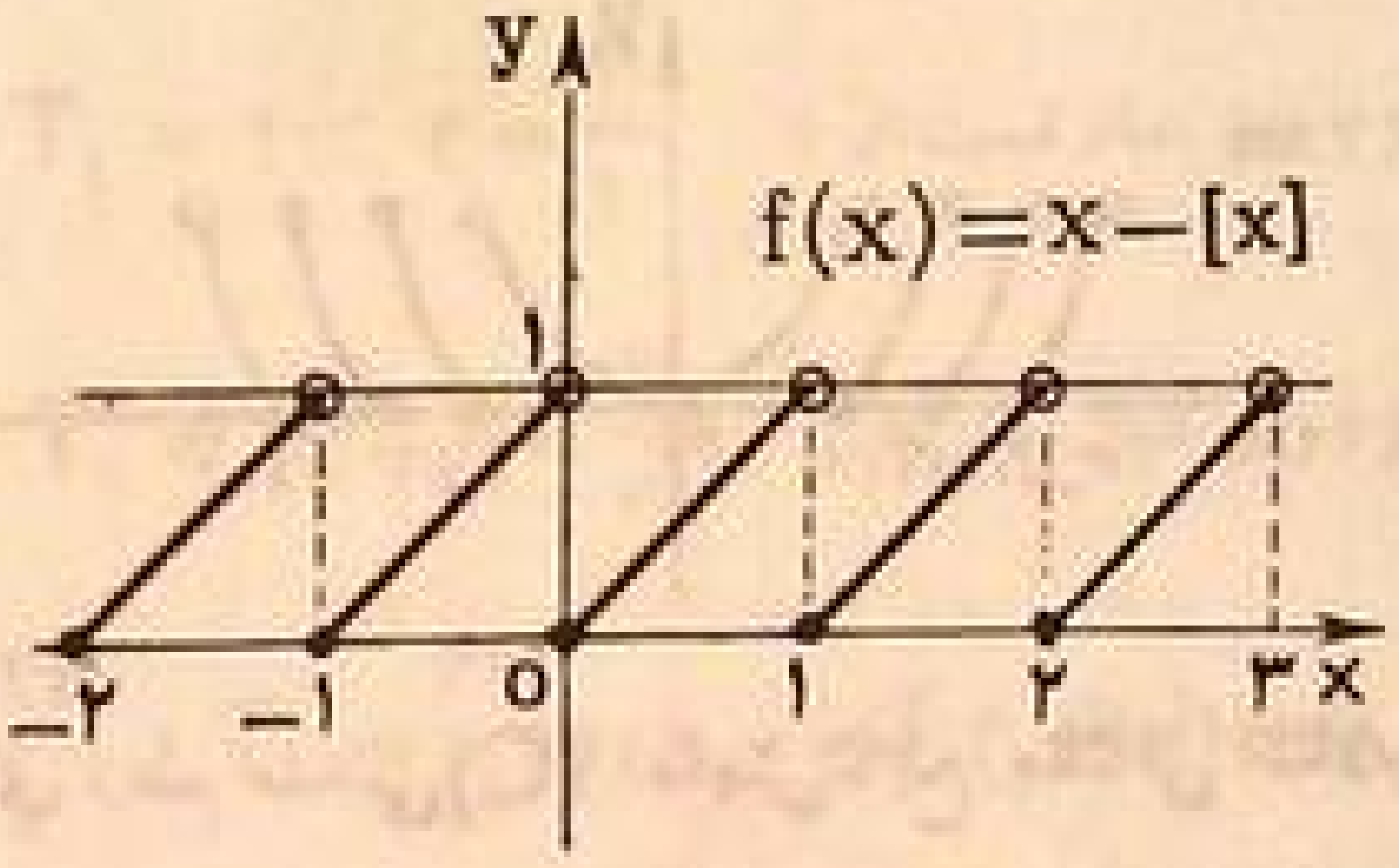
$$y_1=y_0=\sin x_0=\sin(x_0+2k\pi)=\sin x_1$$



و چون مختصات M_1 در معادلهٔ $y=\sin x$ صدق می‌کند پس M_1 متعلق به نمودار است.

همچنین تابع $f(x)=x-[x]$ یك تـابع متناوب با دورهٔ تناوب $T=1$ است زیـرا $[x+1]=[x]+1$ از این روکافی است که آن را در فاصله $[0,1[$ بررسی کنیم.

برای $x\in[0,1[$ داریم $f(x)=x$ و ازآنجا نمودارنمایش تابع مطابق شکل زیراست.



تمرین

۱ــ دورهٔ تناوب هریک از توابع زیر را بدست آورید.

الف : $f(x) = \sin\frac{2}{3}x + \cos\frac{3}{2}x$

ب : $f(x) = tg\frac{1}{3}x + cotg\frac{1}{4}x$

ج : $f(x) = tg2x - cotg2x$

د : $f(x) = 2\cos 3\pi(x + \frac{1}{6})$

ه : $f(x) = 2x - [2x]$

۲ــ تعیین کنید کدامیک از توابع زیر زوج و کدام یک فردند.

الف: $y = 1 + x^2 + \sqrt{1 - x^2}$

ه : $y = \frac{2x}{1 + x^2}$

ب : $y = \frac{a^x + 1}{a^x - 1}$ $\quad 1 \neq a > 0$

و : $y = \frac{x}{[-x] + [x]}$

ج : $y = x^3 - 3x$

ز : $y = \sqrt[3]{5 - x} - \sqrt[3]{x + 5}$

د : $y = x[x^2]$

ح : $y = \log(2x + \sqrt{4x^2 + 1})$

۳ــ تابع $(x - [x])^{[x]}(-1) \rightarrow f: x|$ مفروض است: ثابت کنید دوره تناوب تابع $T = 2$ است.

۴ــ تابع f از $[-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ باضابطهٔ $f(x) = \sin^4\frac{x}{2} - \cos^4\frac{x}{2}$ مفروض است یک به یک و پوششی بودن آن را مشخص کنید.

۵ــ توابع f از R به R با ضابطه‌های زیر مفروضند. یک به یک و پوششی بودن هر یک را مشخص کنید.

الف : $f(x) = 3x + 2 + |x - 2|$

ب : $f(x) = x - 1 - |x - 2|$

ج : $f(x) = x - [x]$

۱-۹- چند عمل روی توابع حقیقی

I- مجموع ، تفاضل ، حاصلضرب ، خارج قسمت دوتابع فرض کنید f وg توابعی حقیقی با دامنه‌های D_f و D_g باشند به‌کمك آنها می‌توان توابع‌جدیدی که با :

$$f+g \text{ و } f-g \text{ و } f.g \text{ و } \frac{f}{g}$$

نشان داده میشوند ساخت که آنها را بــه ترتیب مجموع ، تفاضل، حاصلضرب و خــارج قسمت f و g می‌نامند. دامنهٔ توابع $f+g$ و $f-g$ و $f.g$ مقطع دامنه‌های f و g یعنی $D_f \cap D_g$ است

ودامنه $\frac{f}{g}$ عبارت است از:

$$D_f \cap D_g - \{x \in D_g | \; g(x) = ۰\}$$

این توابع توسط دستورهای زیر تعریف میشوند:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad \forall x \in D_f \cap D_g$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) \qquad \forall x \in D_f \cap D_g$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \qquad \forall x \in D_f \cap D_g$$

$$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad \forall x \in D_f \cap D_g - \{x \in D_g \,|\, g(x) = ۰\}$$

مثال: فرض‌کنید $f(x) = \sqrt{x-۱}$ و $g(x) = \sqrt{۲-x}$ باشد ، تـوابع $f \pm g$ و $f.g$ و $\frac{f}{g}$ را بسازید.

حل:

$$D_f = \{x | x-۱ \geqslant ۰ \text{ و } x \in R\} = [۱ \text{ و } +\infty[$$

$$D_g = \{x | ۲-x \geqslant ۰\} =]-\infty \text{ و } ۲]$$

بنابراین دامنهٔ تعریف $f+g$ و $f-g$ و $f.g$ عبارتست از:

$$D_f \cap D_g = [۱ \text{ و } +\infty[\; \cap \;]-\infty \text{ و } ۲] = [۱ \text{ و } ۲]$$

ودامنه تعریف $\frac{f}{g}$ برابر است با:

$$D_f \cap D_g - \{x \in D_g \,|\, g(x) = ۰\} = [۱ \text{ و } ۲] - \{۲\} = [۱ \text{ و } ۲[$$

درنتیجه:

$$(f \pm g)(x) = \sqrt{x-۱} \pm \sqrt{۲-x} \qquad x \in [۱ \text{ و } ۲]$$

$$(f.g)(x) = \sqrt{(x-۱)(۲-x)} \qquad x \in [۱ \text{ و } ۲]$$

$$(\frac{f}{g})(x) = \sqrt{\frac{x-۱}{۲-x}} \qquad x \in [۱ \text{ و } ۲[$$

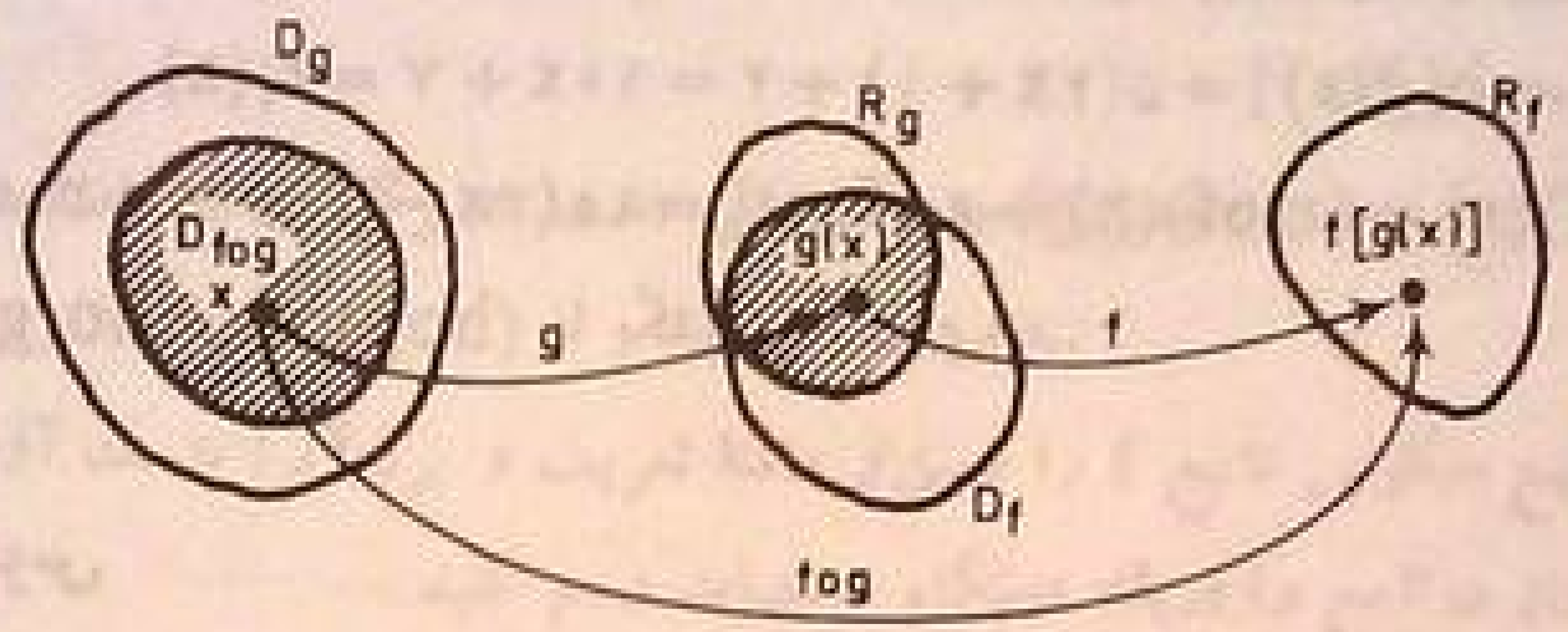
II- ترکیب دو تابع فرض کنید f و g توابعی حقیقی با دامنه‌های D_f و D_g و بردهای R_f و R_g باشند. منظوراز ترکیب f و g که‌آن را با fog (بخوانید f اُ g یا f دایــره g) نشان میدهند تابعی است که‌دامنه تعریف آن:

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$$

و بصورت زیر تعریف میشود:

$$(fog)(x)=f[g(x)] \quad \text{و} \quad x\in D_{fog}$$

تابع fog را یك تابع مرکب یا **تابع تابع** نیز می‌نامند شکل زیر ترکیب دو تابع f و g را در حالت کلی توصیف می کند:



مثال ۱: توابع f و g در R به‌صورت $f(x)=\sqrt{x+1}$ و $g(x)=2-x$ تعریف شده‌اند. بدون محاسبه fog و gof دامنهٔ تعریف آنها را بدست‌آورید سپس fog و gof رامحاسبه کنید.

حل: داریم:

$$D_f=\{x|x\geqslant -1 \text{ و } x\in R\}=[-1 \text{ و } +\infty) \quad D_g=R$$

$$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}$$

بنابراین:

$$D_{gof}=\{x\geqslant -1 \mid \sqrt{x+1}\in R\}=[-1 \text{ و } +\infty)$$

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$$

$$D_{fog}=\{x\in R \mid 2-x\geqslant -1\}=(-\infty \text{ و } 3]$$

وهمچنین:

$$gof(x)=g[f(x)]=2-f(x)=2-\sqrt{x+1} \qquad \forall x\in[-1 \text{ و } +\infty)$$

$$fog(x)=f[g(x)]=\sqrt{g(x)+1}=\sqrt{(2-x)+1}=\sqrt{3-x}$$

$$\forall x\in(-\infty \text{ و } 3]$$

توجه: از این‌مثال دیده میشود که درحالت‌کلی لازم نیست داشته باشیم: $fog = gof$.
در این مثال نه تنها دامنه‌های fog و gof برابر نیستند، بلکه حتی مقادیر fog و gof روی مقطع دامنه‌هایشان یعنی [۳ و ۱ −] نیز مساوی نیستند. این نشان میدهد که عمل ترکیب‌دو تابع روی مجموعهٔ توابع یك‌عمل جابجائی نیست.

مثال۲: تابعهای $f(x) = ۳x - ۱$ و $g(x) = ۲x + ۱$ و $h(x) = ۵x + ۲$ داده‌شده‌اند مطلوب است تعیین‌تابع‌های مرکب: $ho(gof)$ و $(hog)of$ آیا این‌دوتابع مساوی‌اند؟

حل- دامنه‌های همهٔ توابع مجموعهٔ R است و داریم:

$$(gof)(x) = g[f(x)] = ۲(۳x - ۱) + ۱ = ۶x - ۱ = z(x)$$

$$(ho(gof))(x) = h[z(x)] = ۵(۶x - ۱) + ۲ = ۳۰x - ۳$$

$$(hog)(x) = h[g(x)] = ۵(۲x + ۱) + ۲ = ۱۰x + ۷ = z_۱(x)$$

$$((hog)of)(x) = (z_۱ of)(x) = z_۱[f(x)] = ۱۰(۳x - ۱) + ۷ = ۳۰x - ۳$$

پس $ho(gof)$ و $(hog)of$ با یکدیگر مساوی‌اند.

۱-۱۰-تابع معکوس

اگر تابع f با دامنهٔ تعریف D_f و بُرد R_f یك به یك باشد.

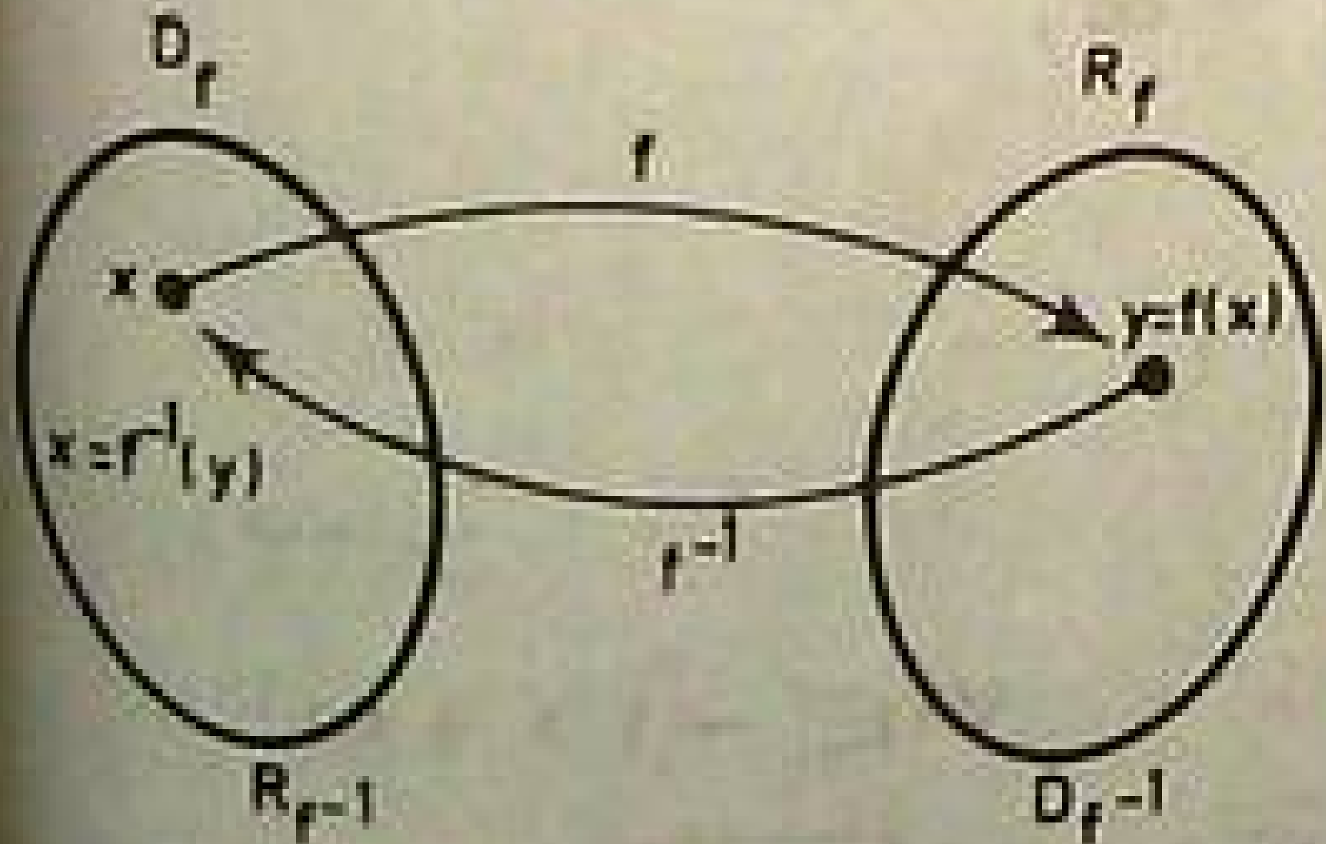
اولاً: بازاء هر $x \in D_f$ یك و تنها یك $y \in R_f$ وجود دارد بقسمی که $(x و y) \in f$ است.

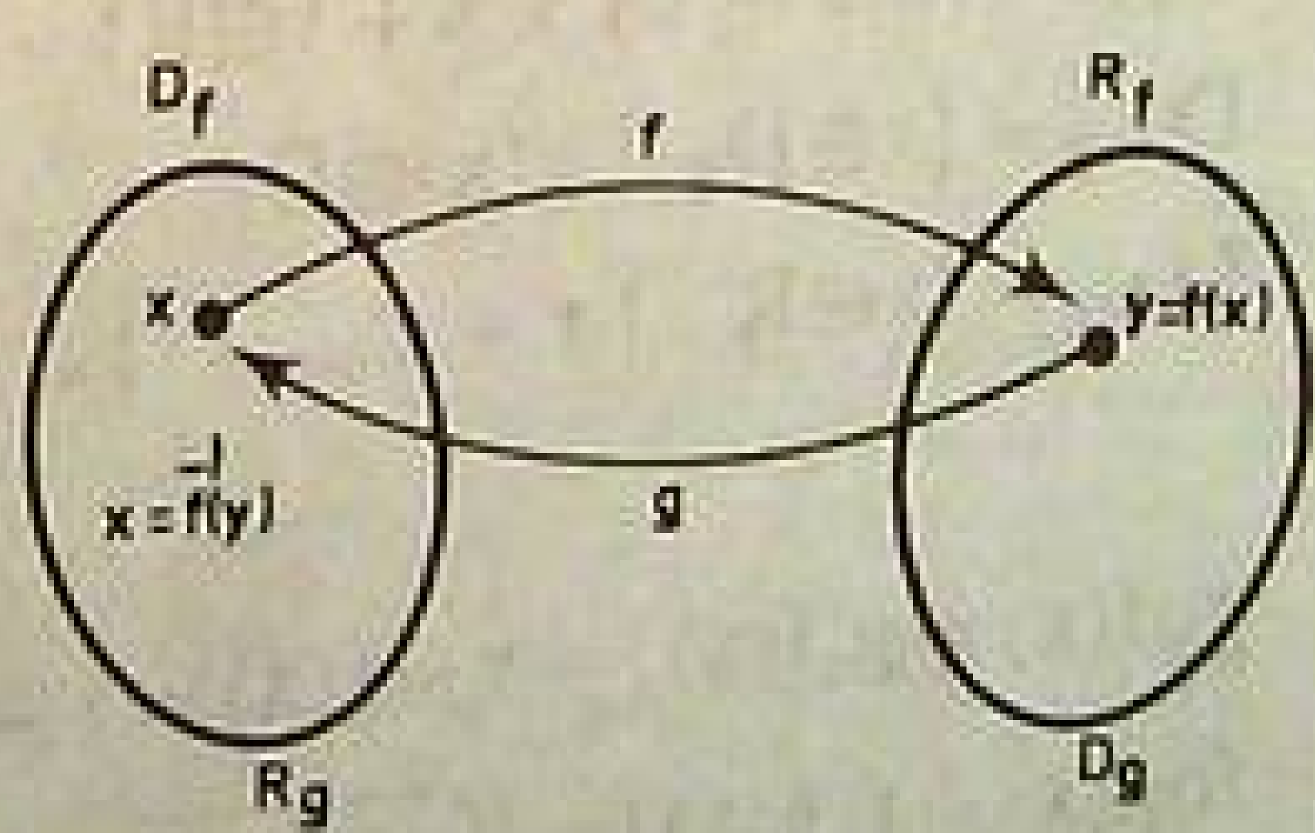
ثانیاً: بازاء هر $y \in R_f$ یك و تنها یك $x \in D_f$ وجود دارد بقسمی که $(x و y) \in f$ است.

حال اگر رابطهٔ:

$$g = \{(y و x) | (x, y) \in f\} \subseteq R_f \times D_f$$

را درنظر بگیریم این رابطه بنابرقسمت ثانیاً تابع g را تعریف می کند که دامنهٔ تعریف‌آن برد f و برد آن دامنهٔ تعریف f است این تابع g را تابع معکوس f می‌خوانند و آنرا به $f^{-۱}$ نمایش می‌دهند. بنابراین:





$$y = f(x) \Longleftrightarrow x = f^{-۱}(y)$$

توجه:

۱ــ اگر f^{-1} معکوس f باشد f هم معکوس f^{-1} خواهد بود.

۲ــ معکوس تابعی که یك به‌یك نباشد تعریف نشده است.

قضیه اساسی ــ هرگاه f در فاصلهٔ بستهٔ [b و a] اکیداً صعودی و پیوسته باشد، f^{-1} در [f(b) و f(a)] اکیداً صعودی و پیوسته‌است. چنانچه f در [b و a] اکیداً نزولی و پیوسته باشد، f^{-1} در [f(a) و f(b)] اکیداً نزولی و پیوسته است.

برای بدست‌آوردن دستور f^{-1} (معکوس تابع f)، ازدستور $y = f(x)$ مقدار x را برحسب y تعیین می‌کنیم تا $x = f^{-1}(y)$ به دست‌آید در تابع اخیر y متغیر مستقل و x متغیر وابسته است وچون معمولا x را متغیر مستقل و y را متغیر وابسته می‌گیرند جای y و x را عوض می‌کنیم تا $y = f^{-1}(x)$ به‌دست آید.

مثال۱ــ تابع $y = f(x) = 2x - 4$ مفروض است. هرگاه x در فاصله [۳ و ۰] تغییر کند:

الف: تابع معکوس تابع f را تعیین و دامنهٔ تعریف و برد آنرا بدست آورید.

ب: نمودار دوتابع را دریك دستگاه مختصات رسم کنید.

حل: چون $y' = f'(x) = 2 > 0$ مثبت است f تابعی است اکیداً صعودی و پیوسته، پس معکوس دارد.

و چون،

$$D_f = [0 \text{ و } 3]$$

پس داریم:

$$R_f = [f(0) \text{ و } f(3)] = [-4 \text{ و } 2]$$

از $y = 2x - 4$ ، x را برحسب y حساب می‌کنیم.

(y متغیر مستقل و x متغیر وابسته)

$$x = \frac{y}{2} + 2$$

و با تعویض x و y،

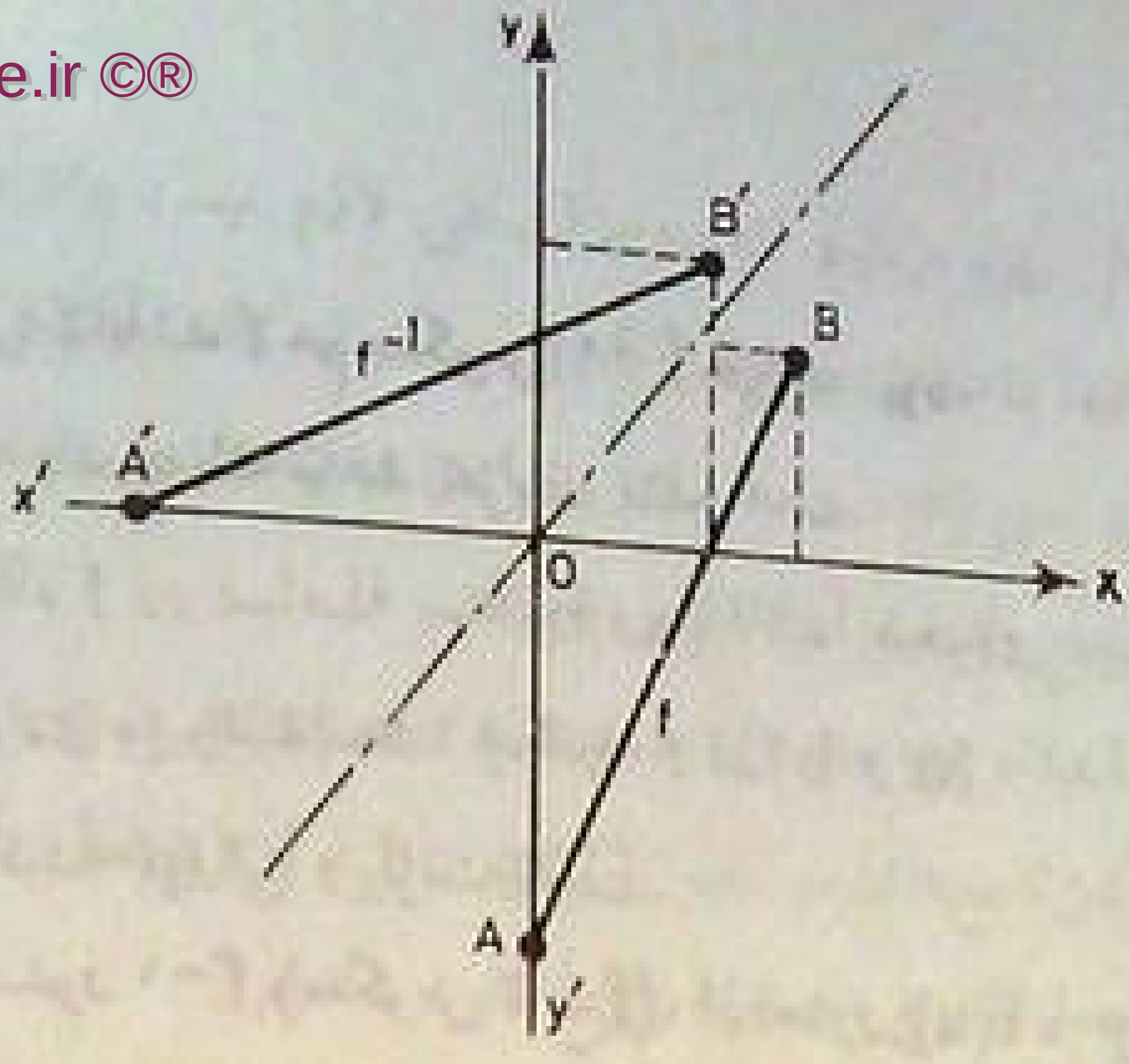
$$y = f^{-1}(x) = \frac{x}{2} + 2$$

معکوس تابع f بدست می‌آید. دامنه وبرد f^{-1} برابر است با:

$$D_{f^{-1}} = R_f = [-4 \text{ و } 2]$$

$$R_{f^{-1}} = D_f = [0 \text{ و } 3]$$

در نمودار زیر دونقطه $B(3 \text{ و } 2)$ و $A(0 \text{ و } -4)$ از خط اول و دو نقطه متناظر آنها $B'(2 \text{ و } 3)$ و $A'(-4 \text{ و } 0)$ از خط دوم اختیار شده‌اند.



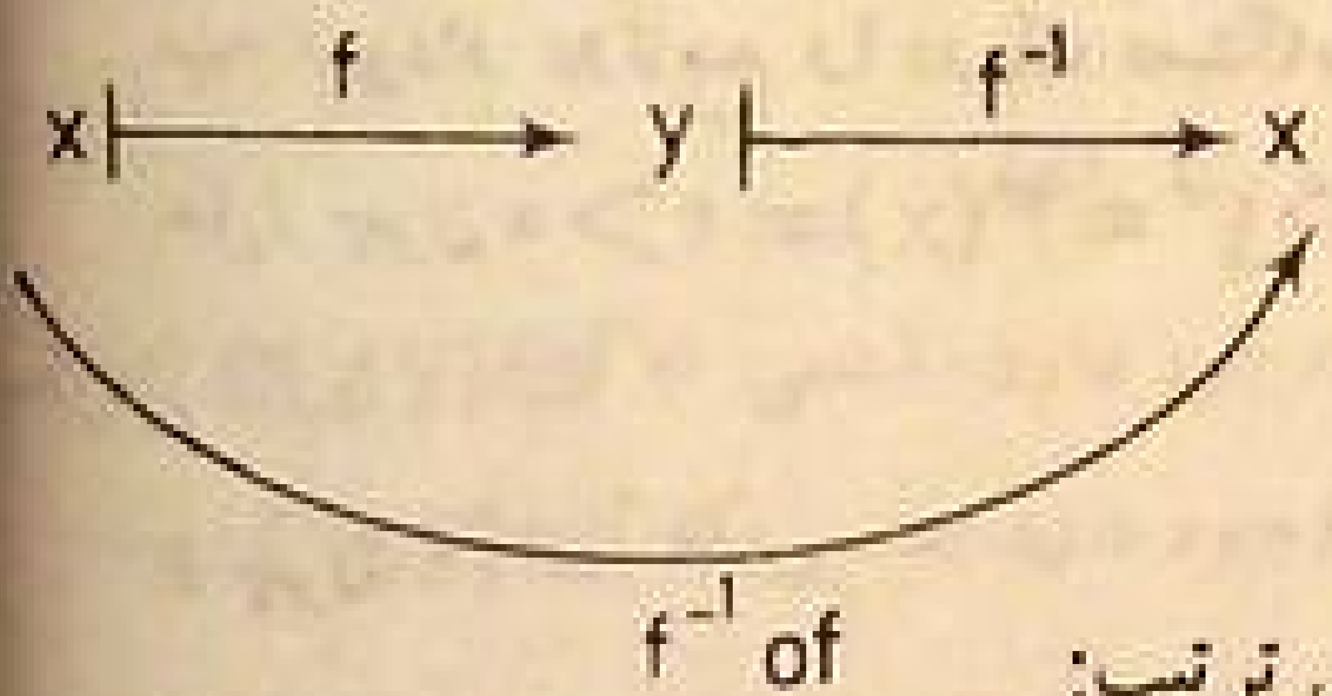
I- خواص تابع معکوس

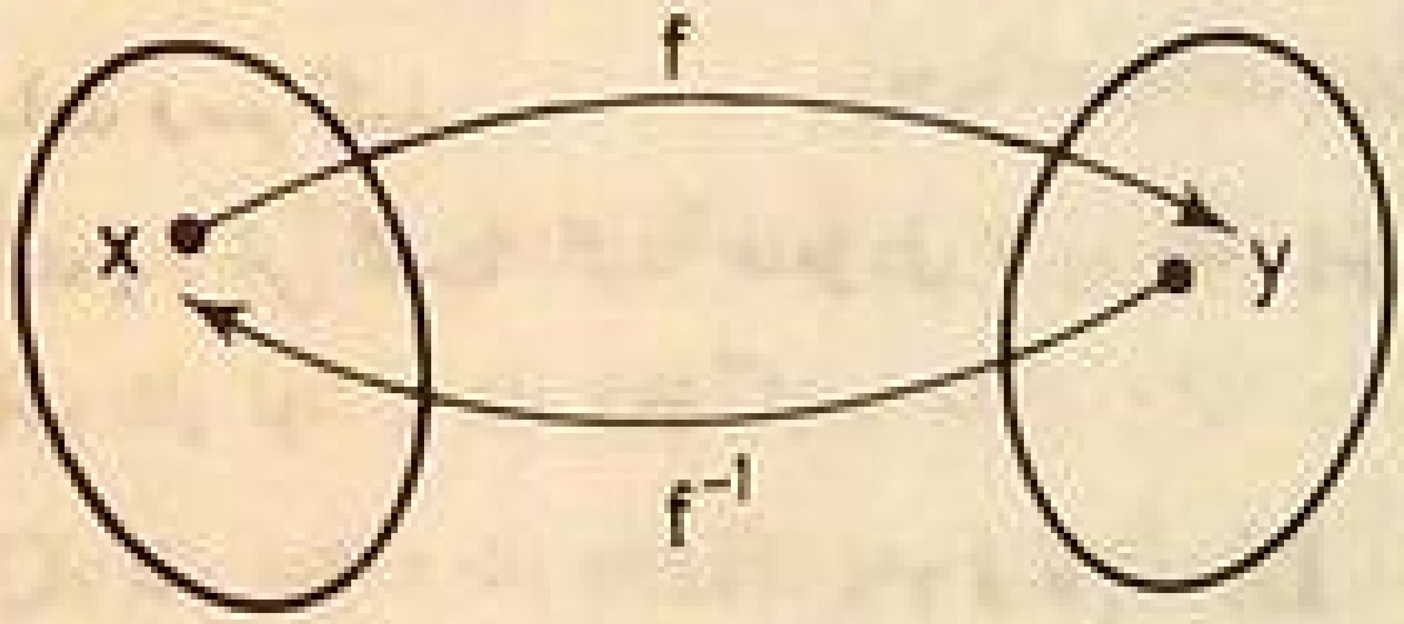
الف: f^{-1} یکنوا است. یعنی اگر f صعودی باشد f^{-1} هم صعودی است و اگر f نزولی باشد f^{-1} هم نزولی است. بطور کلی جهت تغییرات f^{-1} همان جهت تغییرات f است.

ب: اگر f پیوسته باشد f^{-1} نیز پیوسته است.

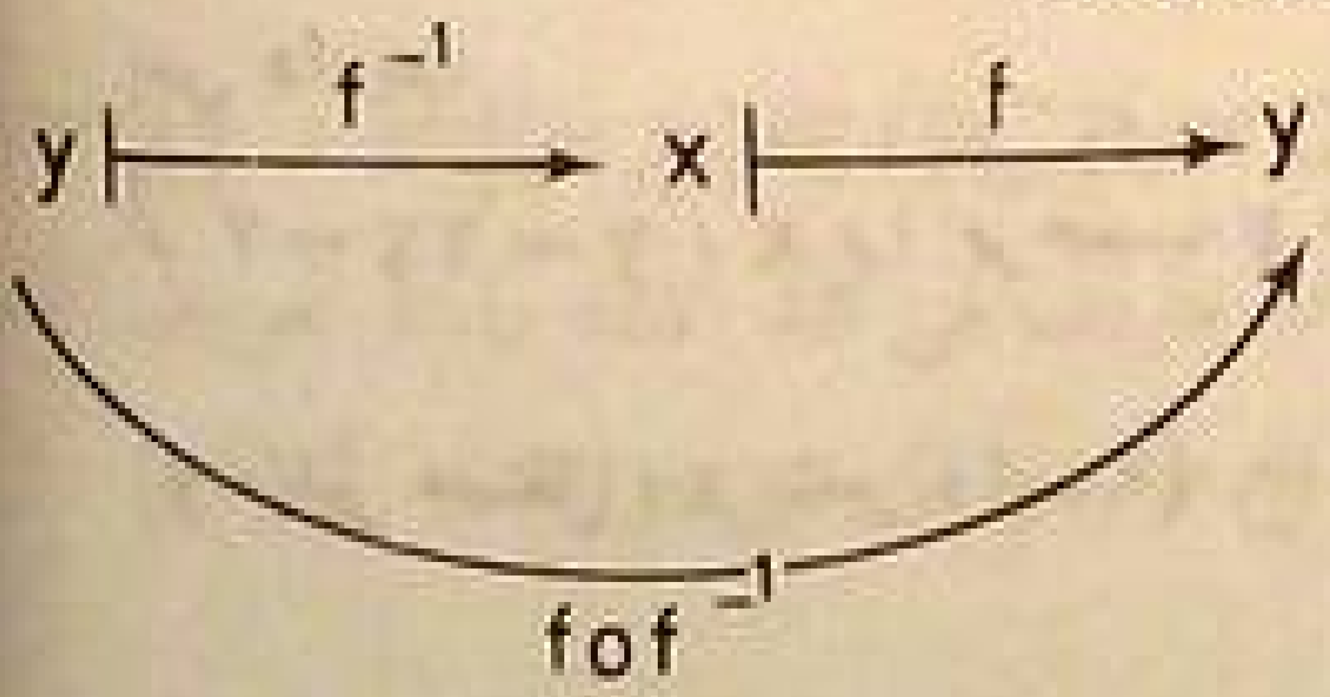
ج: ترکیب دو تابع f و f^{-1} یك تابع همانی است:

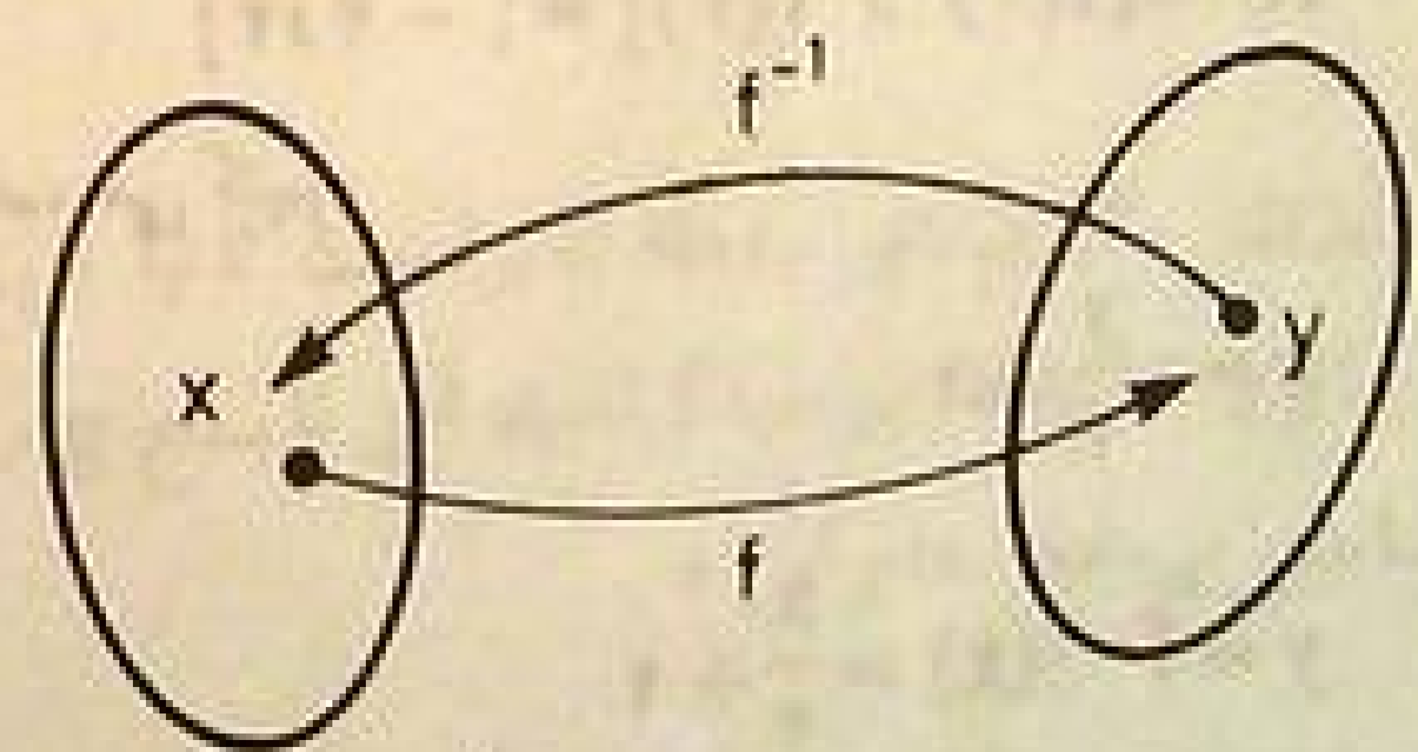
با توجه به طرح زیر داریم: $f^{-1}of(x)=f^{-1}[f(x)]=f^{-1}(y)=x=I_{[a,b]}(x)$





($I_{[a و b]}$ تابع همانی فاصله [a و b] است) و بهمین ترتیب:





$$fof^{-1}(y)=f[f^{-1}(y)]=f(x)=y=I_{[F(a),F(b)]}(y)$$

($I_{[f(a) و f(b)]}$ تابع همانی فاصله [f(a) و f(b)] است)

دیده میشود که این دو تابع بایکدیگر مساوی نیستند.

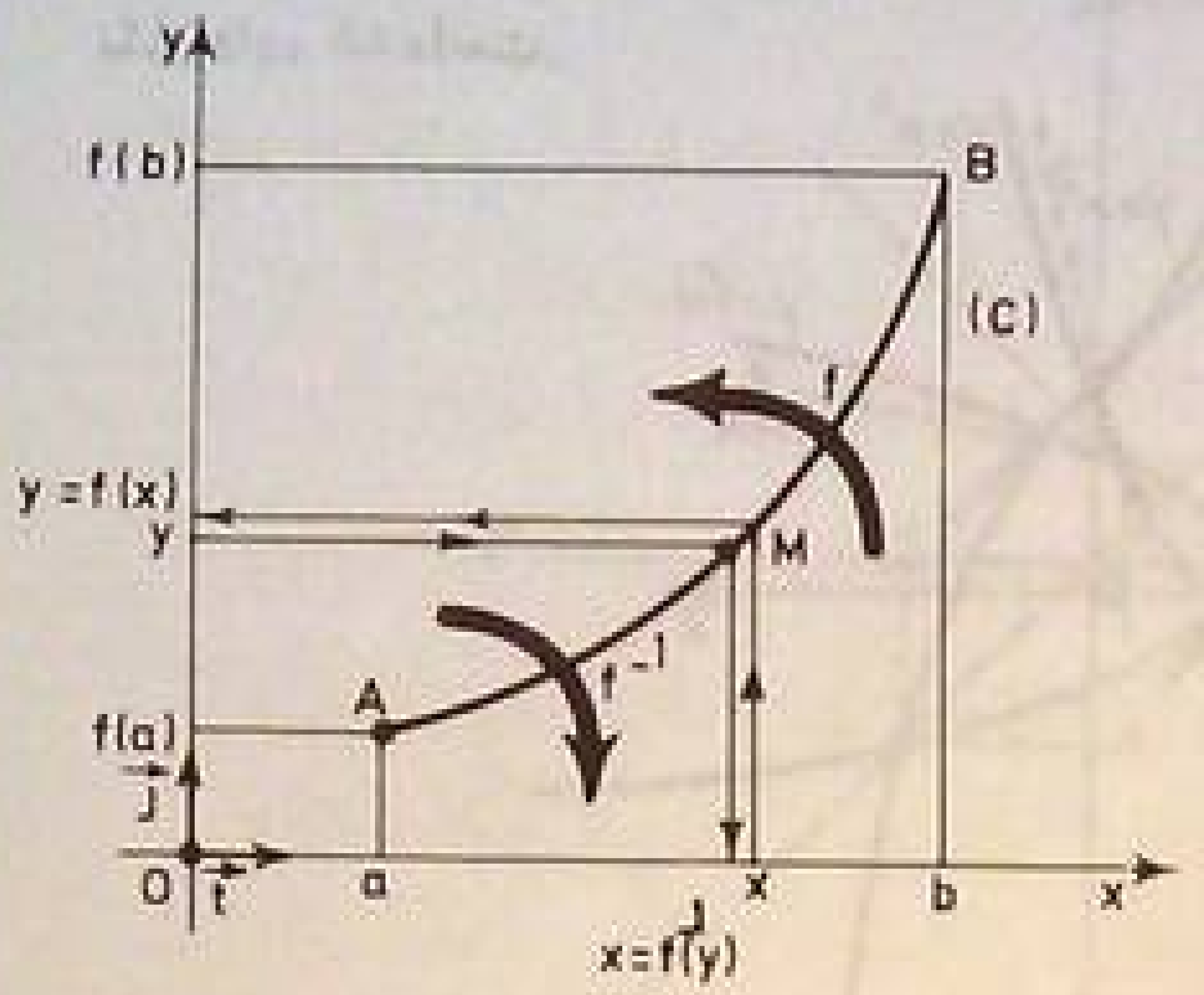
II- نمودار تابع معکوس - اگر (C) منحنی نمایش تابع حقیقی f در دستگاه محورهای مختصات متعامد باشد. بنابرهم ارزی:

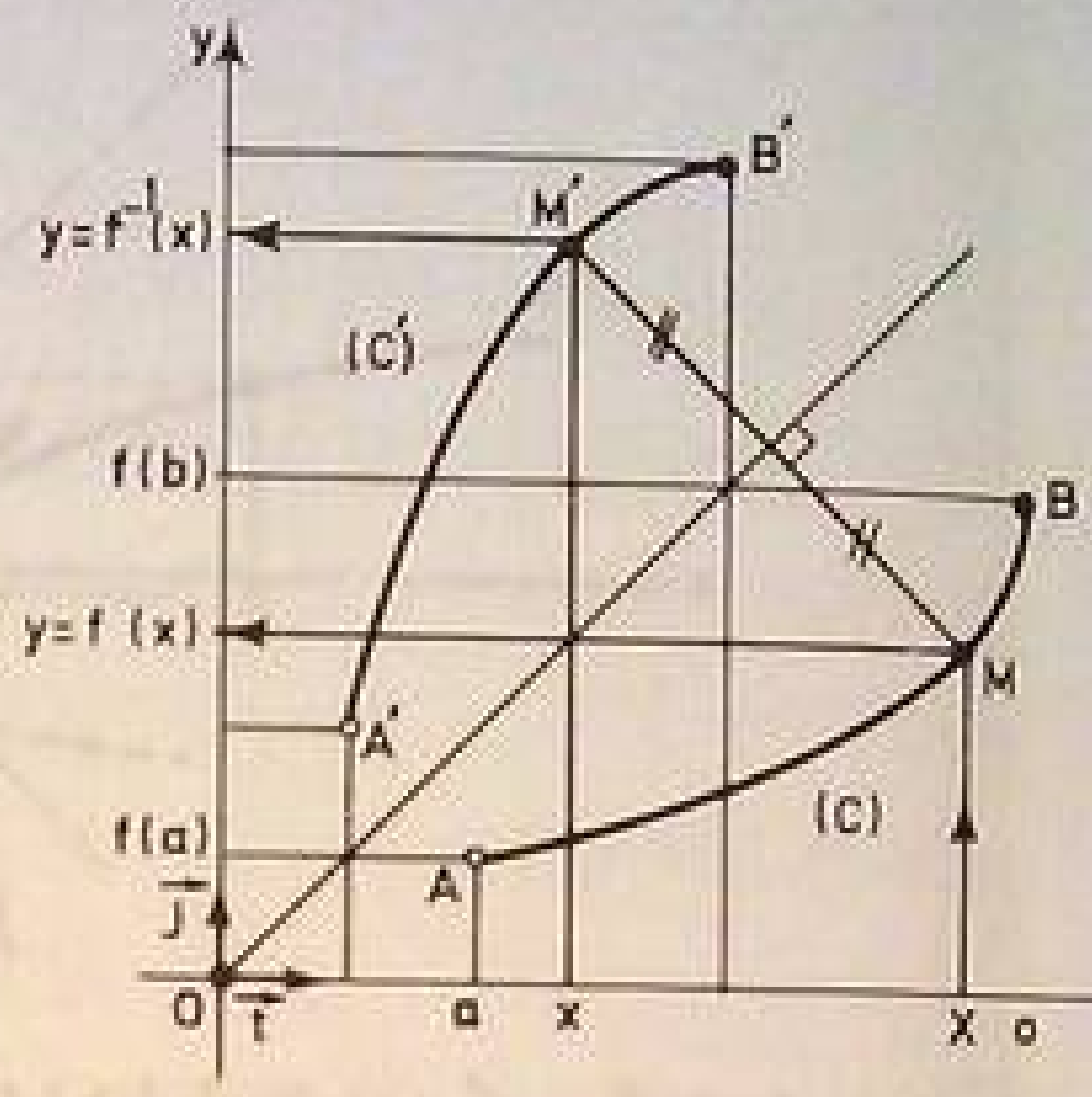
$$y=f(x) \Longleftrightarrow x=f^{-1}(y)$$

منحنی (C) باتعویض نقش x و y (y متغیر و x تابع آن) نمودار هندسی تابع f^{-1} نیز هست برای آنکه بطرز نمایش معمولی برگردیم کافی است، x و y را بحالت اول برگردانیم طوری

که در f^{-1}، x متغیر و y نمایش مقادیری باشد که این تابع اختیار می‌کند.

در این‌صورت (C') نمایش تابع $y=f^{-1}(x)$ قرینه (C) نسبت به نیمساز زوایای ربع اول وسوم‌است. زیرا نقاط $M(x \text{ و } y)$ و $M'(y \text{ و } x)$ نسبت به نیمساز زوایای ربع اول وسوم قرینه‌اند.

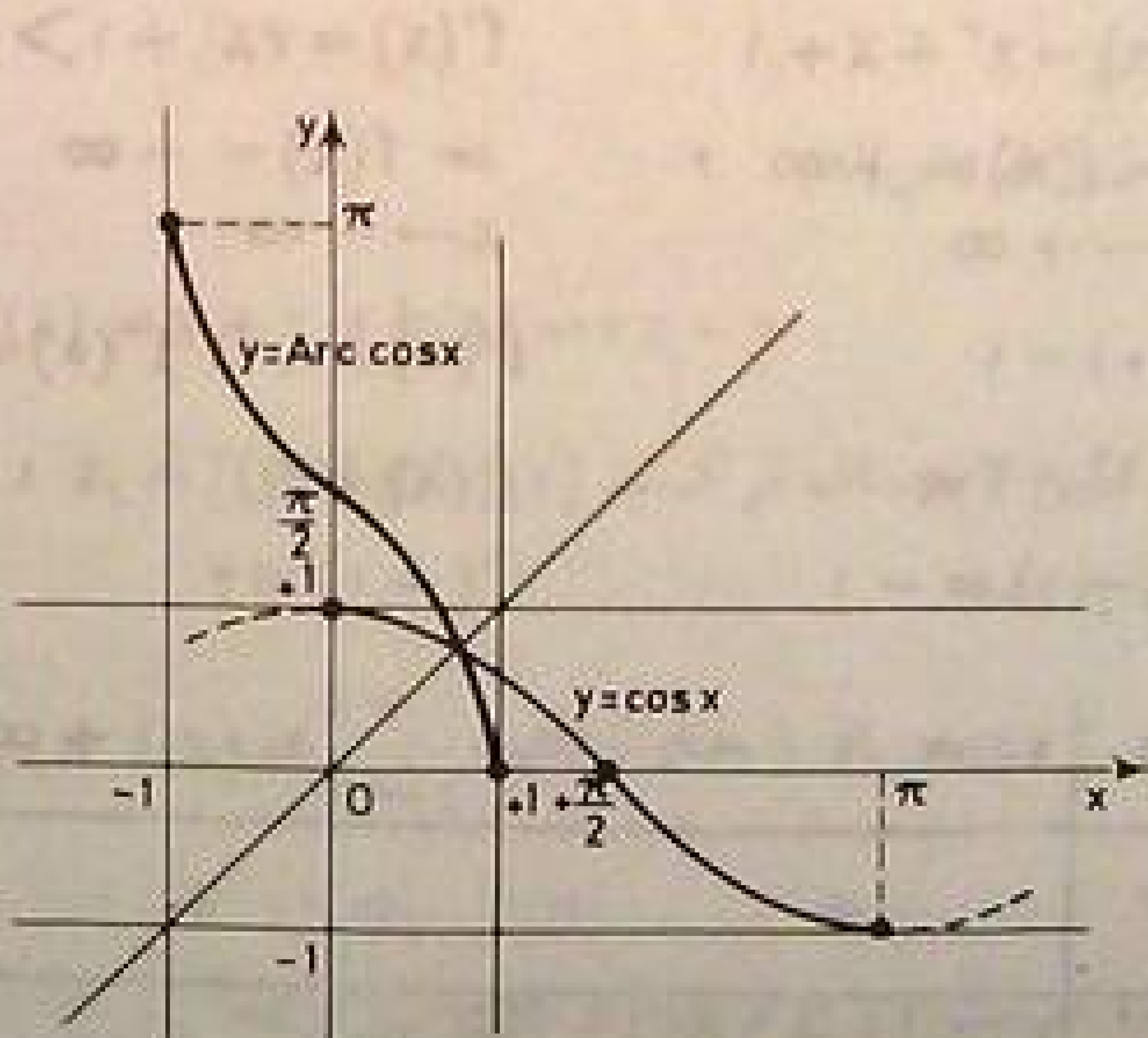




مثلا: تابع $y=\cos x$ روی R پیوسته و روی $[\pi \text{ و } 0]$ اکیداً نزولی‌است. بنابراین دارای یك تابع معکوس می‌باشد که به $y=\text{Arc}\cos x$ نشان داده می‌شود.

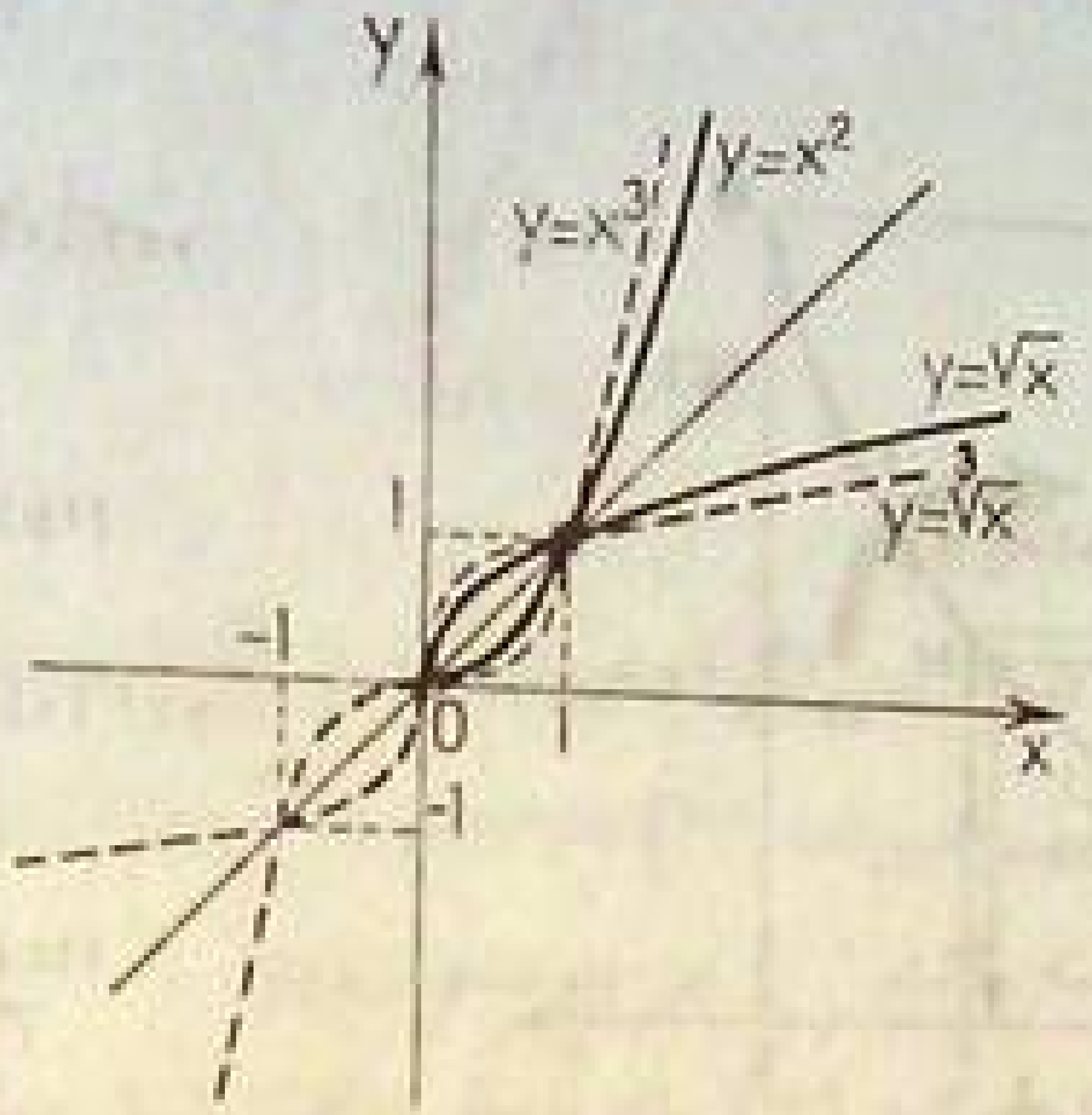
$$\begin{cases} y=\cos x \\ x\in[0 \text{ و } \pi] \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=\text{Arc}\cos y \\ y\in[-1 \text{ و } 1] \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} y=\text{Arc}\cos x \\ x\in[-1 \text{ و } +1] \end{cases}$$

منحنی نمایش تابع $x\in[-1 \text{ و } +1]$ و $y=\text{Arc}\cos x$ قرینه نمایش تابع $x\in[0 \text{ و } \pi]$ و $y=\cos x$ نسبت به‌نیمساز ربع اول است.



منحنی‌های نمایش تابع‌های $y=\sqrt[n]{x}$

منحنی نمایش تابع‌های (ریشه n ام) همان قرینه های منحنی‌های مربوط به توابع تو $y=x^n$ نسبت به‌نیمساز زاویه ربع اول می‌باشند. درشکل زیرمنحنی‌نمایش $y=\sqrt{x}$ و $y=\sqrt[3]{x}$ نشان‌داده شده‌است.



توجه: بعضی ازتوابع هستند که معکوس‌پذیرند اما ضابطه تابع معکوس‌آنها را نمی‌توان بدست آورد. ولی با استفاده از این خاصیت می‌توان نمودار تابع معکوس آنها را رسم‌نمود.

مثال ۱: تابع f در R باضابطه $f(x)=x^۳+x+۱$ مفروض است. بدون به‌دست‌آوردن ضابطه تابع معکوس، نمودار هندسی تابع معکوس آن رارسم کنید.

حل: دامنه تعریف تابع f مجموعه اعداد حقیقی R است وچون $f'(x)=۳x^۲+۱>۰$ همواره مثبت و تابع f هم پیوسته است تابع f در دامنه تعریفش اکیداً صعودی بوده ومعکوس‌پذیر است، نمودار تابع معکوس قرینه نمودار تابع f نسبت به نیمساز ربع اول است.

$$f(x)=x^۳+x+۱ \qquad f'(x)=۳x^۲+۱>۰$$

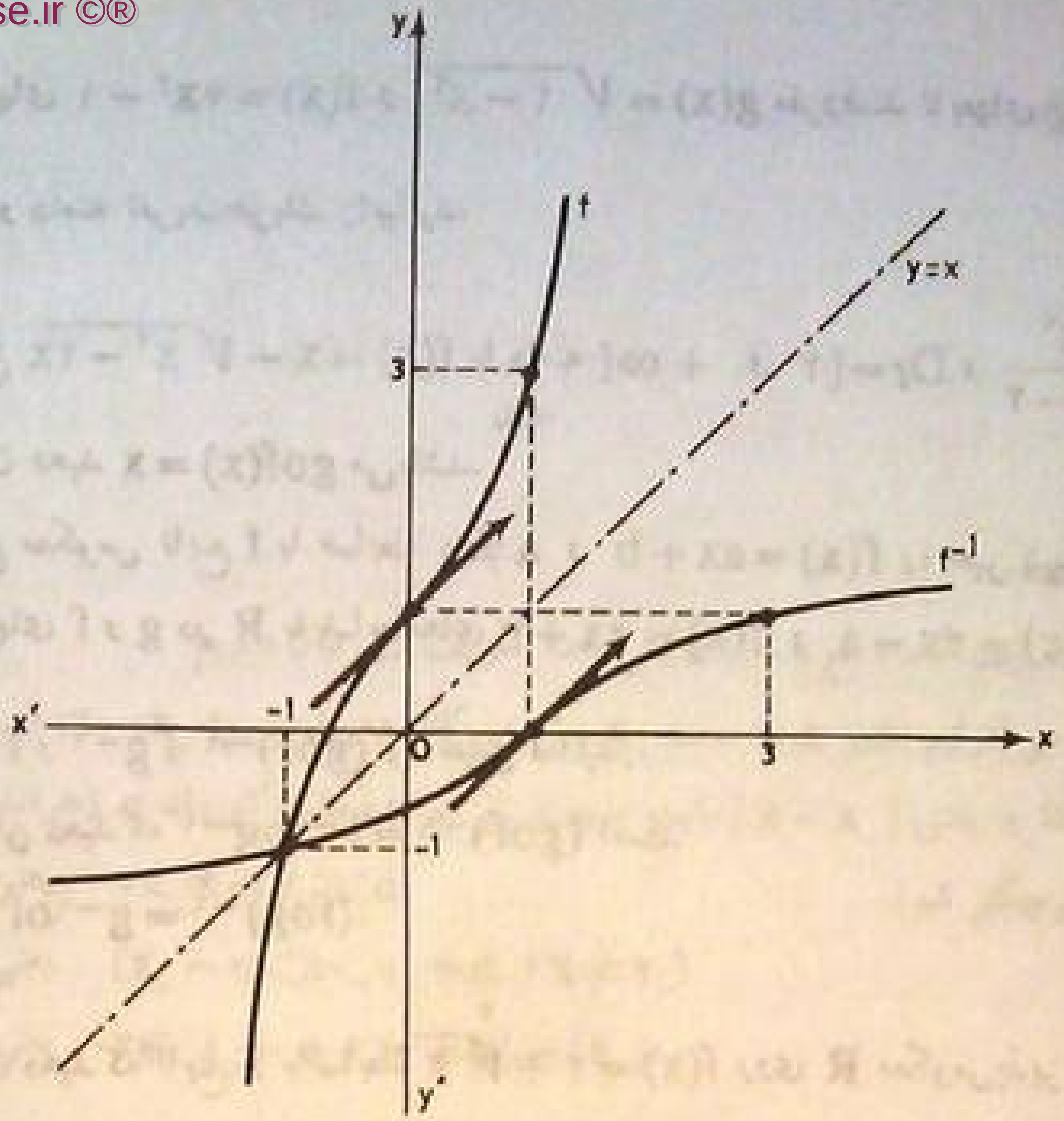
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \quad و \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$$

$$f(۰)=۱ \qquad f'(۰)=۱ \quad و \quad f''(۰)=۰$$

$$f(۱)=۳ \qquad f'(۱)=۴$$

$$f(-۱)=-۱ \qquad f'(-۱)=۴$$

x	$-\infty$		-۱		۰		۱		$+\infty$
y'		+		+		+		+	
y	$-\infty$	↗	-۱	↗	۱	↗	۳	↗	$+\infty$



تمرین

۱ــ فرض کنید $f(x)=x^{۲}$ و $g(x)=\frac{۱}{x+۱}$ باشد، fog و gof را تعیین و آنها را با هم مقایسه کنید.

۲ــ توابع زیر مفروض‌اند:

$$f(x)=\frac{۲x}{x+۱} \text{ و } g(x)=x+۲ \text{ و } h(x)=۴x-۱$$

مطلوبست تعیین تابعهای مرکب $z_{۱}=[(gof)oh](x)$ و $z_{۲}=[go(foh)](x)$ و تحقیق اینکه $z_{۱}=z_{۲}$ است.

۳ــ تابعهای f و g در R با ضابطه‌های $f(x)=\frac{x+۱}{x-۲}$ و $g(x)=\frac{۳}{x+۴}$ تعریف شده‌اند.

الف ــ دامنه تعریف f و g و fog و gof را بیابید.

ب ــ gof و fog را محاسبه کنید.

۴ـ تابعهای $f(x)=4x^2-1$ و $g(x)=\sqrt{1-x^2}$ مفروضند تابعهای $f\pm g$ و $f.g$ و $\frac{f}{g}$ را بسازید و دامنه تعریف‌هریک را بیابید.

۵ـ تابع $f(x)=x-\sqrt{x^2-2x}$ با دامنه $D_f=[2 , +\infty[$ و $g(x)=\frac{x^2}{2x-2}$ مفروض‌اند نشان دهید $gof(x)=x$ می‌باشد.

۶ـ تابع معکوس تابع f با ضابطه $a\neq 0$ و $f(x)=ax+b$ را معین کنید.

۷ـ تابعهای f و g در R با ضابطه‌های $f(x)=2x+3$ و $g(x)=3x-5$ مفروضند.

اولا: f^{-1} و g^{-1} و $(gof)^{-1}$ را تعیین نمائید.

ثانیاً: نشان دهید که $(gof)^{-1}=f^{-1}og^{-1}$ است.

ثالثاً: $(fog)^{-1}=g^{-1}of^{-1}$.

۸ـ نشان دهید که تابع f باضابطهٔ $f(x)=2+\sqrt[3]{x}$ روی R معکوس‌پذیر است ضابطهٔ تابع معکوس آنرا بیابید.

۹ـ نشان دهیدتابع f با ضابطهٔ $f(x)=\frac{2x+1}{x+1}$ در فاصله $[0 , 1]$ معکوس پذیر است. ضابطهٔ تابع معکوس آنرا بیابید.

۱۰ـ معکوس پذیری هریک از توابع زیر را بررسی، سپس ضابطهٔ تابع معکوس آنها را بیابید.

الف : $x\in[0 , 1] \qquad x\xrightarrow{f} f(x)=x^4-2x^2$

ب : $x\in[1 , +\infty[\qquad x\xrightarrow{f} f(x)=|x-1|$

ج : $x\in[1 , +\infty[\qquad x\xrightarrow{f} f(x)=x^2-2x$

د : $x\in[0 , +\infty[\qquad x\xrightarrow{f} f(x)=3x+|x|$

۱۱ـ دامنهٔ تعریف وبرد تابع $y\geqslant 0$ و $x\geqslant 0$ ، $4x^2+y^2=16$ رابدست آورده وتابع معکوس آنرا تعیین کنید.

۱۲ـ تابع $x>1$ و $f(x)=\sqrt{x^2-1}$ مفروض است f^{-1} را تعیین و سپس $f^{-1}of$ و fof^{-1} را باهم مقایسه کنید.