فصل دوم

حد

۲-۱- مقدمه

برای تعریف حد تابع درحالت کلی به‌سه تعریف زیرنیاز داریم:

الف- می‌گوئیم متغیر x به سمت $x_\circ$ میل می‌کند ومی‌نویسیم: $x \to x_\circ$، در صورتیکه‌فاصلهٔ نقطهٔ x تا نقطهٔ $x_\circ$ یعنی $|x-x_\circ|$ مثبت بوده و از هرعدد مثبت کوچك α (هراندازه کوچك که بخواهیم) کوچکتر شود.

$x \to x_\circ$ یعنی $\circ<|x-x_\circ|<\alpha$

$x \to x_\circ$ یعنی $(x_\circ-\alpha<x<x_\circ+\alpha$ و $x\neq x_\circ)$

$x \to x_\circ$ یعنی $x\in]x_\circ-\alpha$ و $x_\circ+\alpha[-\{x_\circ\}$

(فاصله $]x_\circ-\alpha,x_\circ+\alpha[-\{x_\circ\}$ راهمسایگی بدون مرکز $x_\circ$ به شعاع α می‌نامند.)

ب- اگر مقادیر متغیر x از هرعدد مثبت بزرگی بزرگتر شود، می‌گوئیم x به‌سمت باضافه بینهایت میل می‌کند و این مطلب را به‌اختصارچنین نشان می‌دهیم: $x\to+\infty$.

$$\forall M>\circ \,،\, x>M \Longrightarrow x\longrightarrow+\infty$$

توجه کنید که $+\infty$ یك عدد نیست و $x\to+\infty$ فقط یك نماد بـرای نشان دادن مفهوم فوق است.

ج- اگر مقادیر x ازهرعدد منفی کوچکی کوچکترشود ، می‌گوئیم x به‌سمت منهای بینهایت میل می‌کند و می‌نویسیم: $x\to-\infty$.

$$\forall M>\circ \,،\, x<-M \Longrightarrow x\longrightarrow-\infty$$

توجه کنید که روی محور اعداد حقیقی جائی بنام $-\infty$ نداریم و $x\to-\infty$ فقط‌نمادی برای نشان دادن مفهوم بالا است.

۲-۲- حد تابع

اکنون تابع f و فاصلهٔ باز I و نقطهٔ $x_\circ$ از این فاصله را درنظرمی‌گیریم‌و فرض می‌کنیم که f در I (مگر محتملاً در $x_\circ$) تعریف شده است . می‌گوئیم: حد تابع f وقتی که x به‌سمت $x_\circ$ میل کند عدد (حقیقی) L است و می‌نویسیم :

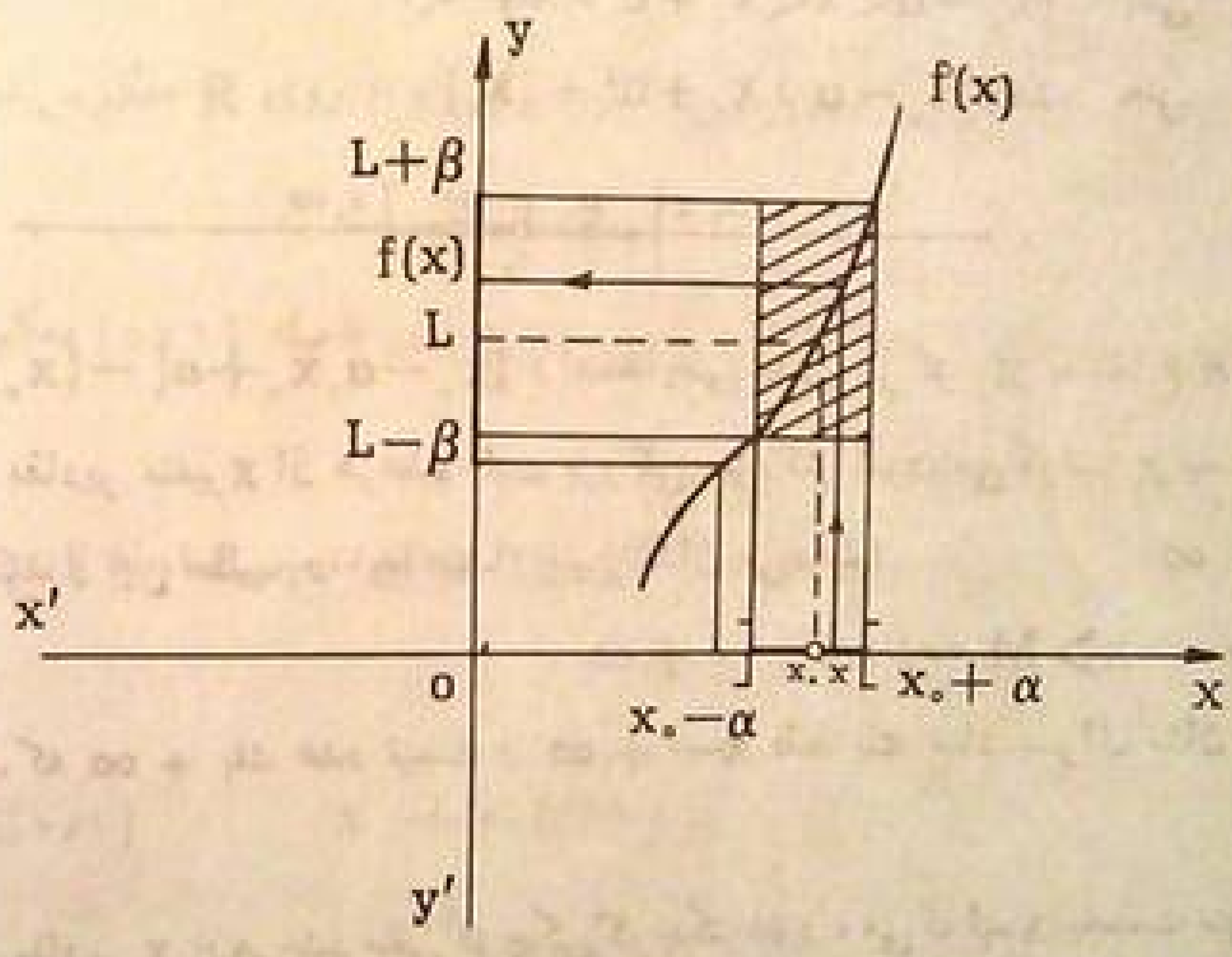
$$\lim_{x\to x_\circ} f(x)=L$$

هرگاه به‌ازای هرعدد مثبت β عدد مثبتی مانند α (معمولا به β بستگی دارد) وجـود داشته باشد به قسمی که داشته باشیم:

$$\text{(I)}\quad 0<|x-x_0|<\alpha \ \text{و}\ x\in D_f \Longrightarrow |f(x)-L|<\beta$$

در تعریف فوق β و α دو عدد مثبت‌اند که هر اندازه بخواهیم می‌توانیم آنها را کوچک اختیار کنیم. ابتدا باید β را اختیار کنیم وسپس ثابت کنیم لااقل یک α که‌معمولا به β بستگی‌دارد پیدا می‌شودکه استلزام بالا صحیح باشد.

D_f دامنهٔ تعریف تابع است وبدیهی است که x باید متعلق به دامنه باشد تا $f(x)$ تعریف شده باشد. از این رو گاهی اوقات در استلزام فوق از نوشتن شرط $x\in D_f$ خودداری می کنیم ولی استنباط چنین خواهدبود که همواره x به D_f متعلق است. علاوه براین همانطورکه درتعریف $x\to x_0$ دیدیم x نباید برابر x_0 اختیار شود.



معمولاً برای مختصر و ساده نویسی، تعریف $\underset{x\to x_0}{\text{حد}}\ f(x)=L$ ، را به‌صورت نمادی زیر می‌نویسند. (نماد «$\ni$» خوانده می‌شود: به‌قسمی که یا به‌طوریکه).

$$\forall\beta>0\ \ \exists\alpha>0\ni\quad 0<|x-x_0|<\alpha\ \text{و}\ x\in D_f \Longrightarrow |f(x)-L|<\beta$$

۲-۳- نکات قابل توجه درحد

اگرتابع f وقتی x به‌سمت x_0 میل کند حد داشته‌باشد،نکات زیر را باید درنظر داشت :

الف ـ اگر L حد f باشد، L عددی است حقیقی و یگانه (یگانگی آنرا در اینجا ثابت نمی‌کنیم).

ب ـ گفتن اینکه $f(x)$ به سمت L میل می‌کند به تنهائی هیچ معنـی ندارد، مگـر اینکه بگوئیم $f(x)$ به سمت L میل می‌کند وقتی که x به‌سمت مثلا x_0 میل کند.

پ ـ تعریف $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ حد، هم‌ارز است با اینکه بگوئیم بـه ازای هر $\beta > 0$ یك $\alpha > 0$ وجود دارد بطوریکه اگر $x \neq x_0$ متعلق به‌فاصلهٔ باز $]x_0 - \alpha , x_0 + \alpha[$ و دامنهٔ تعریف f باشد، آنوقت مقدار f در این x به‌فاصلهٔ باز $]L - \beta , L + \beta[$ متعلق باشد. توجه کنید که حد f به‌مقادیر نزدیك به x_0 بستگی دارد نه‌به‌خود x_0، ممکن است $f(x_0)$ اصلا تعریف نشده باشد و یا در صورت تعریف شدن با L مساوی نباشد. مثلا حد تابـع $f(x) = \frac{x^2}{x}$ وقتی $x \to 0$ مساوی با صفر است در صورتیکه $f(0)$ معنی ندارد.

ت ـ برای آنکه نشان دهیم $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ حد، باید $\beta > 0$ را به دلخواه انتخاب کنیم و یك $\alpha > 0$ به دست آوریم که در تعریف حد صدق کند، α معمولا منحصر به فرد نیست و اگـر α_0 در تعریف صادق باشد هرعدد α، $0 < \alpha \leqslant \alpha_0$ نیز در تعریف صدق خواهد کرد.

مثال ۱ـ می‌خواهیم با استفاده از تعریف حد ثابت کنیم حد تابع :

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{اگر}\ x \neq -1 \\ 2 & \text{اگر}\ x = -1 \end{cases}$$

وقتی x به سمت ۱ ـ میل کند برابر ۵ ـ است.

حل ـ باید ثابت کنیم که به‌ازای هر $\beta > 0$ یك $\alpha > 0$ وجود دارد به‌قسمی که:

$$0 < |x - (-1)| < \alpha \Rightarrow |f(x) - (-5)| < \beta$$

چون $|x + 1| = |x - (-1)| > 0$ بدین معنی است که $x \neq -1$ پس $f(x) = 2x - 3$ و استلزام فوق به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$0 < |x + 1| < \alpha \Rightarrow |(2x - 3) - (-5)| < \beta$$

و یا :

$$0 < |x + 1| < \alpha \Rightarrow 2|x + 1| < \beta$$

و یا :

$$0 < |x + 1| < \alpha \Rightarrow |x + 1| < \frac{\beta}{2}$$

بنابراین کافیست که $\alpha > 0$ را کوچکتر از $\frac{\beta}{2}$ یا مساوی آن اختیار کنیم ، تا استلزام درست

زیر به دست آید.

$$0<|x+1|<\frac{\beta}{2} \Longrightarrow |(2x-3)-(-5)|<\beta$$

توجه کنید که دراین مثال $f(-1)=2$ است در حالیکه $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=-5$، پس بطور کلی لازم نیست که حد تابع در یک نقطه مساوی مقدار تابع در آن نقطه باشد.

مثال ۲ـ تابع $f(x)=ax+b$ را که در آن a و b دو عدد حقیقی و ثابت هستند در نظر می گیریم. با استفاده از تعریف حد ثابت کنید که حد f وقتی که $x\to x_0$ برابر $f(x_0)=ax_0+b$ می باشد. یعنی:

$$\lim_{x\to x_0}(ax+b)=ax_0+b$$

حل ـ حالت اول $a=0$. باید ثابت کنیم:

$$\lim_{x\to x_0}(b)=b$$

بنا به‌تعریف باید نشان دهیم:

$$\forall\beta>0\ \ \exists\alpha>0 \ni 0<|x-x_0|<\alpha \Longrightarrow |f(x)-b|<\beta$$

یا :

$$\forall\beta>0\ \ \exists\alpha>0 \ni 0<|x-x_0|<\alpha \Longrightarrow |b-b|<\beta$$

اما $|b-b|=0$ و از هر $\beta>0$ کوچکتر است پس هر $\alpha>0$ در تعریف صدق می کند.

حالت دوم $a\neq 0$. بنابه تعریف باید نشان دهیم:

$$\forall\beta>0\ \exists\alpha>0 \ni 0<|x-x_0|<\alpha \Longrightarrow |(ax+b)-(ax_0+b)|<\beta$$

یا :

$$\forall\beta>0\ \ \exists\alpha>0 \ni 0<|x-x_0|<\alpha \Longrightarrow |a(x-x_0)|<\beta$$

یا :

$$\forall\beta>0\ \ \exists\alpha>0 \ni 0<|x-x_0|<\alpha \Longrightarrow |x-x_0|<\frac{\beta}{|a|}$$

بنابراین کافیست α را مثبت و کوچکتر از $\frac{\beta}{|a|}$ یا مساوی آن اختیار کنیم تا تعریف برقرار شود، در حقیقت اگر $0<|x-x_0|<\frac{\beta}{|a|}$ آنوقت $|a|\,|x-x_0|<\beta$ ویا $|a(x-x_0)|<\beta$ ویا $|(ax-b)-(ax_0-b)|<\beta$ که حکم مورد نظراست.

۲-۴- حد در بینهایت و حدهای بینهایت

تاکنون درمورد $\underset{x\to x_۰}{\text{حد}}\, f(x)=L$ حد، که درآن نه $x_۰$ و نه L بینهایت بودند بحث کرده‌ایم.

ولی حالتهائی وجود دارد که در آنها $x_۰$ یا L یا هر دو متفقاً $+\infty$ یا $-\infty$ و یا ∞ هستند. حالتی راکه‌هم $x_۰$ وهم L اعداد حقیقی هستند دیده‌اید. اکنون یکی ازحالتها راطرح وبرای آن مثالی می‌زنیم، سپس همهٔ حالتها را درجدولی خلاصه‌می‌کنیم تا مراجعه به آن‌آسان باشد.

تعریف- فرض کنید که تابع f برای هر $x>a$ تعریف شده باشد،که درآن a عددی است حقیقی. گوئیم وقتی x به‌سمت $+\infty$ میل کند حد f عدد حقیقی L است و می‌نویسیم:

$$\underset{x\to+\infty}{\text{حد}}\, f(x)=L$$

هرگاه به ازای هر $\beta>۰$ لااقل‌یک $M>۰$ وجود داشته باشد به‌قسمی که:

$$x\in D_f \text{ و } x>M \Longrightarrow |f(x)-L|<\beta$$

یا بطور نمادی:

$$\forall\beta>۰ \ \exists M>۰ \ni x>M \text{ و } x\in D_f \Longrightarrow |f(x)-L|<\beta$$

مثال- ثابت کنید که:

$$\underset{x\to+\infty}{\text{حد}}\ \frac{۳x+۲}{۲x-۴}=\frac{۳}{۲}$$

حل- باید نشان دهیم که:

$$\forall\beta>۰ \ \exists M>۰ \ni x>M \Longrightarrow \left|\frac{۳x+۲}{۲x-۴}-\frac{۳}{۲}\right|<\beta$$

فرض می‌کنیم طرف دوم گزاره فوق درست باشد. اکنون سعی می‌کنیم به‌کمک‌آن M را حدس بزنیم و سپس حدس خود را امتحان خواهیم کرد. اما نامساوی طرف دوم‌گزاره فوق را می‌توان چنین نوشت:

$$\left|\frac{۳x+۲}{۲x-۴}-\frac{۳}{۲}\right| = \left|\frac{۸}{(۲x-۴)}\right| = \frac{۸}{|۲x-۴|}<\beta$$

و از آنجا خواهیم داشت:

$$|۲x-۴|>\frac{۸}{\beta} \quad \text{یا} \quad x-۲>\frac{۴}{\beta} \quad \text{یا} \quad x>۲+\frac{۴}{\beta}$$

بنابراین‌کافی است‌که M را بزرگتر یا مساوی $۲+\frac{۴}{\beta}$ اختیار کنیم. یعنی اگر $M\geqslant ۲+\frac{۴}{\beta}$ باشد خواهیم‌داشت:

$$x>\left(۲+\frac{۴}{\beta}\right) \Longrightarrow \left|\frac{۳x+۲}{۲x-۴}-\frac{۳}{۲}\right|<\beta$$

بنابراین اگر $x>2+\frac{4}{\beta}$ باشد می‌توان نوشت :

$$x>2+\frac{4}{\beta}$$

$$x-2>\frac{4}{\beta}$$

$$\frac{x-2}{4}>\frac{1}{\beta}$$

چون $\frac{1}{\beta}>0$ است ، $\frac{x-2}{4}>0$ بوده:

$$\left|\frac{x-2}{4}\right|>\frac{1}{\beta}$$

$$\left|\frac{4}{x-2}\right|<\beta$$

$$\left|\frac{3}{2}+\frac{4}{x-2}-\frac{3}{2}\right|<\beta$$

$$\left|\frac{3x-6+8}{2x-4}-\frac{3}{2}\right|<\beta$$

پس:

$$\left|\frac{3x+2}{2x-4}-\frac{3}{2}\right|<\beta$$

$$x>2+\frac{4}{\beta}\Longrightarrow\left|\frac{3x+2}{2x-4}-\frac{3}{2}\right|<\beta$$

۲-۵- جدول حد درحالتهای مختلف

تمام حالتهای مختلف حد در بینهایت و حد های بینهایت در جدول صفحه بعد تنظیم شده که برای خواندن هر سطر نمادهای آن سطر را به ترتیب به جای سه نقطه‌های ابتدای جدول (ازبالا) قرار داده وعبارت حاصل راازچپ به‌راست می‌خوانیم. مثلاسطرهفتم‌راچنین‌می‌خوانیم:

وقتی x به‌سمت $+\infty$ میل کند $f(x)$ به‌سمت $-\infty$ میل خواهد کرد هرگاه برای هر $N>0$ یك $M>0$ وجود داشته باشد به‌قسمی که ازنامساوی $x>M$ نامساوی $f(x)<-N$ نتیجه شود.

تذکر: وقتی x به‌سمت x_0^+ میل می کندحد $f(x)$ برابر $+\infty$ یا $(-\infty)$ است به‌صورت $(-\infty)$ یا $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=+\infty$ حد، و همچنین وقتی x به‌سمت x_0^- میل کندحد $f(x)$ برابر $(+\infty)$

یا $-\infty$ است به‌صورت $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$ (یا $+\infty$) حد، بعضی ازمؤلفین این دو مسئله را یک جا به صورت $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)| = +\infty$ حد، می‌نویسند و می‌گویند وقتی x به سمت x_0 میل می‌کند حد $|f(x)|$ برابر $+\infty$ است (سطر چهارم جدول).

تذکر: وقتی x به‌سمت $+\infty$ میل می‌کند حد $f(x)$ برابر L است به‌صورت $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = L$ حد و همچنین وقتی x به‌سمت $-\infty$ میل می‌کند حد $f(x)$ برابر L است به‌صورت $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = L$ حد، بعضی از مؤلفین این دومسئله را یک‌جا به‌صورت $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = L$ حد، می‌نویسند ومی‌گویند وقتی x به سمت ∞ میل می‌کند حد $f(x)$ برابر L است (سطر یازده جدول).

جدول تعریف حدتابع $f: x\to f(x)$

نامساوی ... نتیجه شود	به قسمی که از نامساوی...	یک...وجود داشته باشد	هر گاه برای هر...	$f(x)$ به سمت ... میل خواهد کرد	وقتی x به‌سمت ... میل کند
$\lvert f(x)-L\rvert<\beta$	$0<\lvert x-x_0\rvert<\alpha$	$\alpha>0$	$\beta>0$	L	x_0
$f(x)>N$	$0<\lvert x-x_0\rvert<\alpha$	$\alpha>0$	$N>0$	$+\infty$	x_0
$f(x)<-N$	$0<\lvert x-x_0\rvert<\alpha$	$\alpha>0$	$N>0$	$-\infty$	x_0
$\lvert f(x)-L\rvert<\beta$	$x>M$	$M>0$	$\beta>0$	L	$+\infty$
$f(x)>N$	$x>M$	$M>0$	$N>0$	$+\infty$	$+\infty$
$f(x)<-N$	$x>M$	$M>0$	$N>0$	$-\infty$	$+\infty$
$\lvert f(x)-L\rvert<\beta$	$x<-M$	$M>0$	$\beta>0$	L	$-\infty$
$f(x)>N$	$x<-M$	$M>0$	$N>0$	$+\infty$	$-\infty$
$f(x)<-N$	$x<-M$	$M>0$	$N>0$	$-\infty$	$-\infty$
$\lvert f(x)-L\rvert<\beta$	$\lvert x\rvert>M$	$M>0$	$\beta>0$	L	∞
$f(x)>N$	$\lvert x\rvert>M$	$M>0$	$N>0$	$+\infty$	∞
$f(x)<-N$	$\lvert x\rvert>M$	$M>0$	$N>0$	$-\infty$	∞

مثال- تابع f بوسیله دستور $f(x)=\dfrac{-1}{(x-3)^2}$ داده شده است. ثابت کنید که اگر x به سمت ۳ میل کند f(x) به‌سمت $-\infty$ میل خواهد کرد.

حل- بنا به سطر سوم جدول باید برای هر $N>0$ لااقل یك $\alpha>0$ بیابیم به‌قسمی که:

$$0<|x-3|<\alpha \Rightarrow \frac{-1}{(x-3)^2}<-N$$

فرض می‌کنیم که طرف دوم گزاره فوق درست باشد حال سعی می‌کنیم به کمك آن α را حدس بزنیم و سپس حدس خود را امتحان خواهیم کرد. اما:

$$\frac{-1}{(x-3)^2}<-N \Rightarrow \frac{1}{(x-3)^2}>N \Rightarrow (x-3)^2<\frac{1}{N} \Rightarrow |x-3|<\frac{1}{\sqrt{N}}$$

بنابراین دیده میشود که هرعدد مثبت کوچکتر یا مساوی $\dfrac{1}{\sqrt{N}}$ رامی‌توان به‌عنوان α اختیار کرد. حال فرض کنید داشته باشیم $0<\alpha\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{N}}$، در نتیجه:

$$0<|x-3|<\frac{1}{\sqrt{N}} \Rightarrow 0<(x-3)^2<\frac{1}{N} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{(x-3)^2}>N \Rightarrow \frac{-1}{(x-3)^2}<-N$$

یعنی جوابی که‌برای α حدس‌زده بودیم گزارهٔ شرطی فوق را به‌یك استلزام تبدیل می کند. اثبات‌کامل‌است امتحان‌جواب α به‌منظورروشن شدن‌مفهوم‌درس است‌وانجام‌آن‌همیشه ضرورت‌ندارد.

توجه- همانطور که مشاهده کرده‌اید سعی شده است که مثالهای ساده‌ای در مورد تعیین‌حد توابع بااستفاده از تعریف‌داده شود واین بدان سبب‌بوده است که بیشتر بامفهوم حدآشنا شوید. اصولا محاسبهٔ حد با استفاده از تعریف‌کار ساده‌ای نیست ومعمولا برای این محاسبات ازقضایای حد که بعداً درمورد آنها صحبت خواهیم کرد استفاده می‌شود بهمین سبب درزیر سعی شده است که تعریفهای ساده‌ای‌گنجانده شود.

تمرین:

تساویهای زیر را بااستفاده از تعریف حد ثابت کنید.

۱- $\lim\limits_{x\to 1}(-3x-1)=-4$

۲- $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{4}$

۳- $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-2x)=-1$

۴- $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2}=+\infty$

۵- $\lim\limits_{x\to 2}\frac{-1}{(x-2)^2}=-\infty$

۶- $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{(x^2-1)^2}=+\infty$

۷- $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{5x-4}{x-1}=5$

۸- $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{4x^2-1}=+\infty$

۹- $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(-\sqrt{x^2-2x}\right)=-\infty$

۱۰- $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{2x^2+1}{x^2+1}=2$

۱۱- $\lim\limits_{x\to -\infty}\sqrt{x^2-4}=+\infty$

۱۲- $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt[3]{x^2+1} = -\infty$

۱۳- $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{2x^2+4}{x^2} = 2$

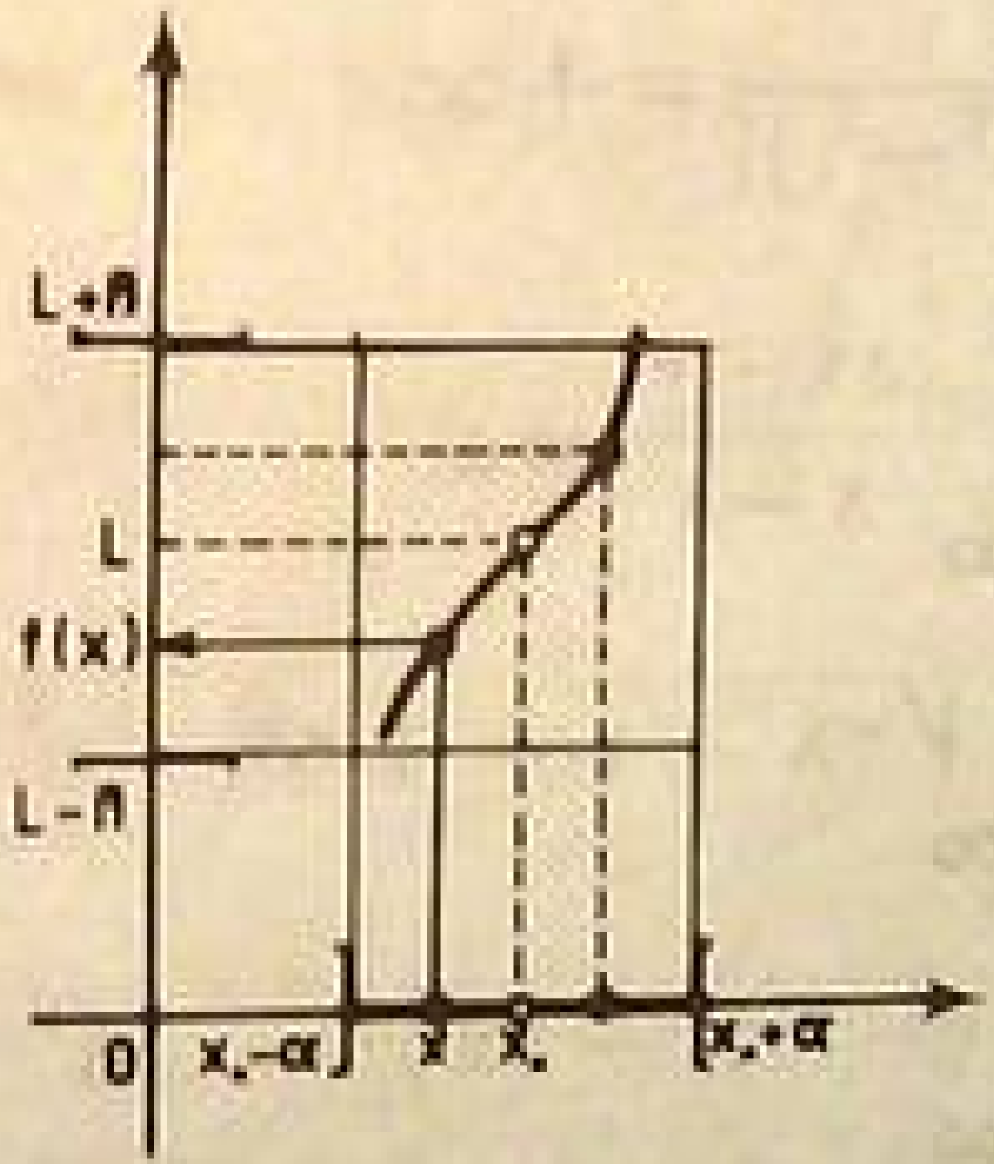
۱۴- $\lim\limits_{x\to \infty} \sqrt{x^2-2x-1} = +\infty$

۱۵- $\lim\limits_{x\to \infty} -\sqrt{x^2-4x+3} = -\infty$

۲-۶- حد چپ و راست یک تابع

فرض کنید که تابع f درنقطهٔ x_0 دارای حدی برابرعدد L باشد. درنتیجه به‌ازای هر $\beta>0$ یک $\alpha>0$ موجود است به‌قسمی که:

$$0<|x-x_0|<\alpha \text{ و } x\in D_f \Longrightarrow |f(x)-L|<\beta$$



از این تعریف چنین برمی‌آید که وقتی x به‌سمت x_0 میل کند، خواه از آن بزرگتر باشد خواه از آن کوچکتر، f(x) درهر دوحالت به‌سمت L میل‌خواهدکرد پس داریم:

$$(1) \quad x_0<x<x_0+\alpha \text{ و } x\in D_f \Longrightarrow |f(x)-L|<\beta$$

و

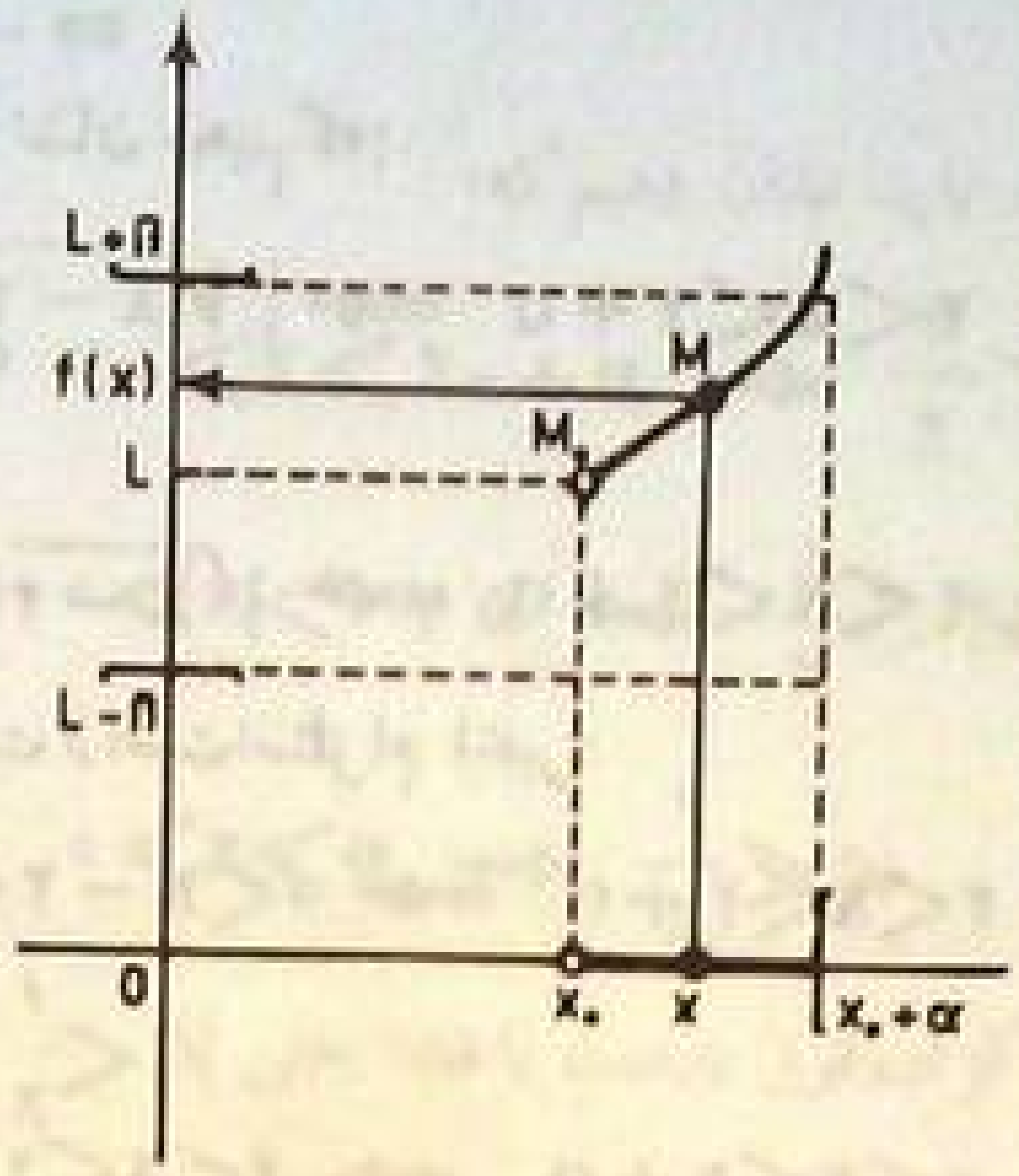
$$(2) \quad x_0-\alpha<x<x_0 \text{ و } x\in D_f \Longrightarrow |f(x)-L|<\beta$$

مطالب فوق ما را به تعریف زیرهدایت می‌کند.

تعریف- تابع f و نقطهٔ x_0 مفروضند.

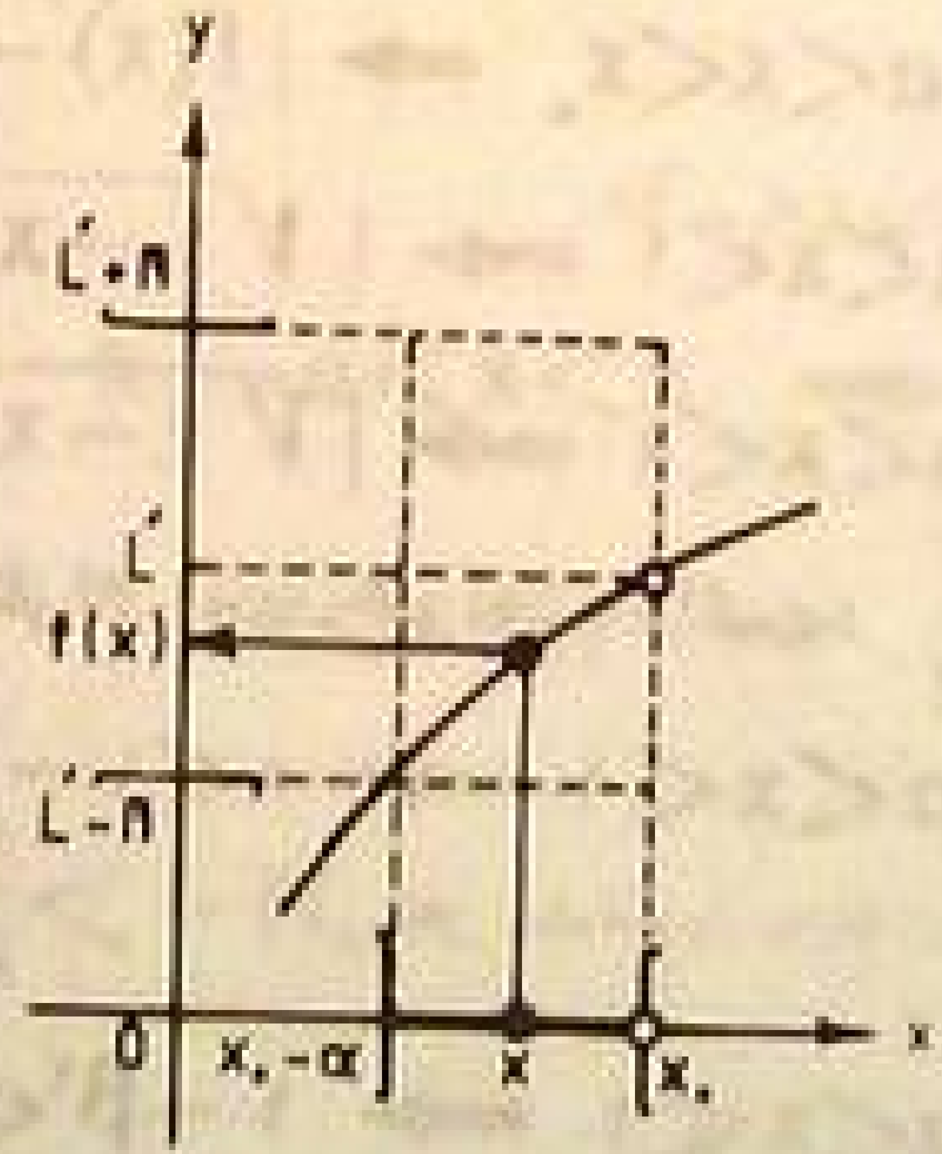
الف- فرض کنیدکه $a>x_0$ و f در فاصلهٔ $]x_0, a[$ تعریف شده باشد. گوئیم تابع f

در نقطهٔ x_0 دارای حد راست L است و می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = L$ حد، هر گاه به ازای هر $\beta>0$ یك $\alpha>0$ موجود باشد به‌قسمی که:



$$x_0<x<x_0+\alpha \text{ و } x\in D_f \Rightarrow |f(x)-L|<\beta$$

ب- فرض کنید که $a<x_0$ و f درفاصلهٔ باز $]a, x_0[$ تعریف شده باشد، گوئیم تابع f در نقطهٔ x_0 دارای حد چپ L' است و می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = L'$ حد، هرگاه به‌ازای هر $\beta>0$ یك $\alpha>0$ موجود باشد به‌قسمی که:



$$x_0-\alpha<x<x_0 \text{ و } x\in D_f \Rightarrow |f(x)-L'|<\beta$$

اگر تابع f درنقطهٔ x_0 دارای حد L باشدآنوقت استلزامهای (۱) و (۲) بالانشان‌می‌دهند که f در x_0 دارای حد راست وچپ بوده و این دوحد باهم مساوی و مساوی همان L می‌باشند. به‌عکس می‌توان دید (که ما دراینجا ازاثبات آن‌خودداری می کنیم) که اگر تابع f در x_0 دارای حد راست و حدچپ بوده واین دوحد بایکدیگر مساوی وبرابر L باشند آنوقت f در x_0 دارای حد L است. پس می‌توان گفت:

قضیه- تابع f در x_0 دارای حد L است اگر و تنها اگر f در x_0 دارای حد چپ و حد راست مساوی L باشد.

مثال۱- با استفاده از تعریف حد راست ثابت کنید که $\lim\limits_{x \to 2^+} \sqrt{x-2} = 0$

حل- برای اثبات باید نشان دهیم که:

$$\forall \beta > 0 \ \exists \alpha > 0 \ \ni \ 2 < x < 2 + \alpha \Longrightarrow \left| \sqrt{x-2} - 0 \right| < \beta$$

ویا:

$$\forall \beta > 0 \ \exists \alpha > 0 \ \ni \ 2 < x < 2 + \alpha \Longrightarrow \sqrt{x-2} < \beta$$

ویا با مجذور کردن سمت راست استلزام اخیر:

$$\forall \beta > 0 \ \exists \alpha > 0 \ \ni \ 2 < x < 2 + \alpha \Longrightarrow 0 < x - 2 < \beta^2$$

ویا:

$$\forall \beta > 0 \ \exists \alpha > 0 \ \ni \ 2 < x < 2 + \alpha \Longrightarrow 2 < x < 2 + \beta^2$$

بنابراین دیده می‌شود که اگر $0 < \alpha \leqslant \beta^2$ اختیار شود استلزام فوق برقرار است.

مثال۲- با استفاده از تعریف حد چپ ثابت کنید که:

$$\lim_{x \to 1^-} \sqrt{1-x} = 0$$

حل: برای اثبات باید نشان دهیم که:

$$\forall \beta > 0 \ \exists \alpha > 0 \ \ni \ x_0 - \alpha < x < x_0 \Longrightarrow \left| f(x) - L \right| < \beta$$

$$\forall \beta > 0 \ \exists \alpha > 0 \ \ni \ 1 - \alpha < x < 1 \Longrightarrow \left| \sqrt{1-x} - 0 \right| < \beta$$

$$\forall \beta > 0 \ \exists \alpha > 0 \ \ni \ 1 - \alpha < x < 1 \Longrightarrow \left| \sqrt{1-x} \right| < \beta$$

با مجذور کردن سمت راست استلزام اخیر خواهیم داشت:

$$\forall \beta > 0 \ \exists \alpha > 0 \ \ni \ 1 - \alpha < x < 1 \Longrightarrow 0 < 1 - x < \beta^2$$

ویا:

$$\forall \beta > 0 \ \exists \alpha > 0 \ \ni \ 1 - \alpha < x < 1 \Longrightarrow 1 - \beta^2 < x < 1$$

بنابراین دیده میشود اگر $0 < \alpha \leqslant \beta^2$ اختیار شود استلزام فوق برقرار است.

$$1 - \beta^2 < x < 1 \Longrightarrow \left| \sqrt{1-x} - 0 \right| < \beta$$

قبل از پرداختن به مثال۳ توجه شمارا به این نکته جلب می کنیم که می‌توان تعاریفی شبیه به‌آنچه که‌درمورد‌حد چپ وحد راست در x_0 بیان کردیم درمورد‌حالت‌های ∞ و $-\infty$ و $L = +\infty$ نیز بیان کرد تعریف $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$، به‌طور نمادی چنین است:

$$\forall N > 0 \ \exists \alpha > 0 \ \ni \ x_0 - \alpha < x < x_0 \Longrightarrow f(x) > N$$

مثال ۳: در تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ با استفاده از تعریف حد راست و حد چپ، ثابت کنید که:

الف : $\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$

ب : $\lim_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$

حل ـ الف: برای اثبات باید نشان دهیم که:

$$\forall N>0 \;\exists \alpha>0 \ni x_0<x<x_0+\alpha \Rightarrow \frac{1}{x}>N$$

$$\forall N>0 \;\exists \alpha>0 \ni 0<x<0+\alpha \Rightarrow \frac{1}{x}>N$$

$$0<x<\alpha \Rightarrow \frac{1}{x}>N$$

فرض می کنیم طرف دوم گزاره فوق درست باشد. یعنی $\frac{1}{x}>N$ (چون N مثبت است x هم مثبت خواهد بود) طرفین نامساوی را معکوس می کنیم نتیجه می‌شود $0<x<\frac{1}{N}$ پس اگر هر عدد مثبت کوچکتر یا مساوی $\frac{1}{N}$ را به عنوان α اختیار کنیم $0<\alpha\leqslant\frac{1}{N}$ استلزام فوق برقرار است.

$$0<x<\frac{1}{N} \Rightarrow \frac{1}{x}>N$$

حل ـ ب: برای اثبات باید نشان دهیم که:

$$\forall N>0 \;\exists \alpha>0 \qquad x_0-\alpha<x<x_0 \Rightarrow f(x)<-N$$

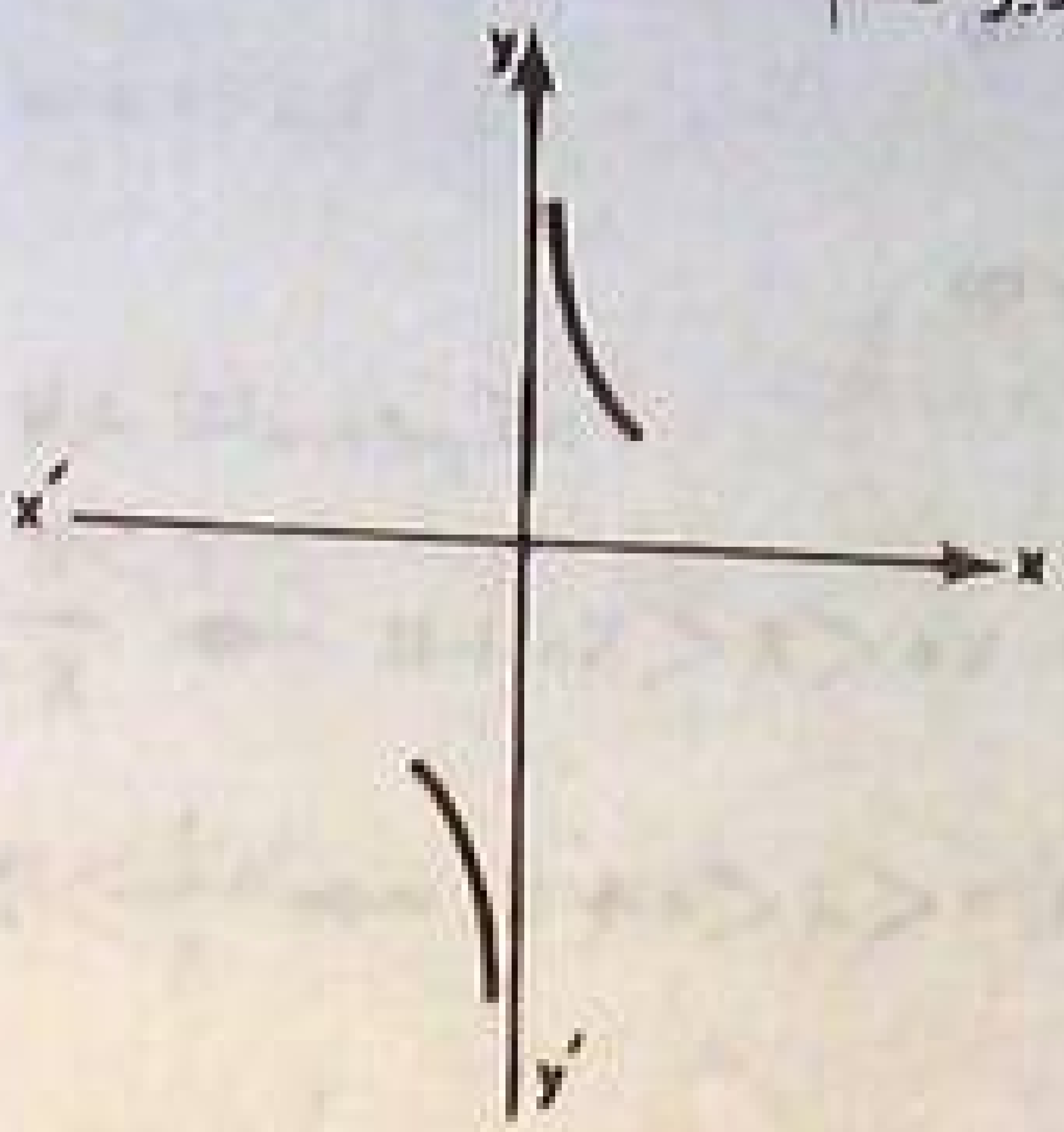
$$0-\alpha<x<0 \Rightarrow \frac{1}{x}<-N$$

فرض می کنیم طرف دوم گزارهٔ فوق درست باشد. یعنی $\frac{1}{x}<-N$ (چون $-N$ منفی است، x هم منفی خواهد بود.) طرفین نامساوی را معکوس می کنیم نتیجه می‌شود $-\frac{1}{N}<x<0$ پس اگر هر عدد مثبت کوچکتر یا مساوی $\frac{1}{N}$ را به عنوان α اختیار کنیم $0<\alpha\leqslant\frac{1}{N}$ و استلزام فوق برقرار است.

$$-\frac{1}{N}<x<0 \Rightarrow \frac{1}{x}<-N$$

تذکر: توجه دارید تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ وقتی که x به‌سمت صفر میل می کند حد ندارد زیرا حد چپ و حد راست آن باهم مساوی نیستند.

وقتی x به‌سمت صفر میل می‌کند $|f(x)|$ به‌سمت $+\infty$ میل می‌کند. منحنی نمایش این تابع در نزدیکی نقطهٔ صفر درزیر رسم شده است.



مثال ۴ـ درتابع $f(x)=\frac{1}{x^2}$. بااستفاده ازتعریف حدثابت‌کنید:

الف ـ $\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ ‏ ‏ ‏ ب ـ $\lim_{x\to 0^-} f(x)=+\infty$

حل ـ الف: برای اثبات حد راست باید نشان دهیم که:

$$\forall N>0 \qquad \exists \alpha>0 \qquad x_0<x<x_0+\alpha \Rightarrow f(x)>N$$

$$0<x<0+\alpha \Rightarrow \frac{1}{x^2}>N$$

فرض می‌کنیم طرف دوم گزارهٔ فوق درست باشد یعنی $\frac{1}{x^2}>N$ (چون N مثبت است)

طرفین نامساوی را معکوس می‌کنیم $0<x^2<\frac{1}{N}$ و از طرفین جذر می‌گیریم نتیجه میشود:

$$0<x<\frac{1}{\sqrt{N}} \qquad \text{یا} \qquad |x|<\frac{1}{\sqrt{N}}$$

پس اگر هر عدد مثبت کوچکتر یا مساوی $\frac{1}{\sqrt{N}}$ را به‌عنوان α اختیارکنیم $0<\alpha\leqslant\frac{1}{\sqrt{N}}$ استلزام فوق برقرار است.

$$0<x<\frac{1}{\sqrt{N}} \Rightarrow \frac{1}{x^2}>N$$

حل ـ ب: برای اثبات حد چپ باید نشان دهیم که:

$$\forall N>0 \qquad \exists \alpha>0 \qquad x_0-\alpha<x<x_0 \Rightarrow f(x)>N$$

$$0-\alpha<x<0 \Rightarrow \frac{1}{x^2}>N$$

فرض می‌کنیم طرف دوم گزارهٔ فوق درست باشد یعنی $\frac{1}{x^2}>N$ (چون N مثبت است) طرفین

نامساوی را معکوس می کنیم $0<x^2<\frac{1}{N}$ و از طرفین جذر می گیریم نتیجه‌میشود $|x|<\frac{1}{\sqrt{N}}$

و یا می‌توانیم بنویسیم : $x<\frac{1}{\sqrt{N}}$ یا $x>-\frac{1}{\sqrt{N}}$

و یا $-\frac{1}{\sqrt{N}}<x<0$ پس اگرهرعدد مثبت کوچکتر یامساوی $\frac{1}{\sqrt{N}}$ را به‌عنوان α اختیار کنیم

$0<\alpha\leqslant\frac{1}{\sqrt{N}}$ استلزام فوق برقرار است.

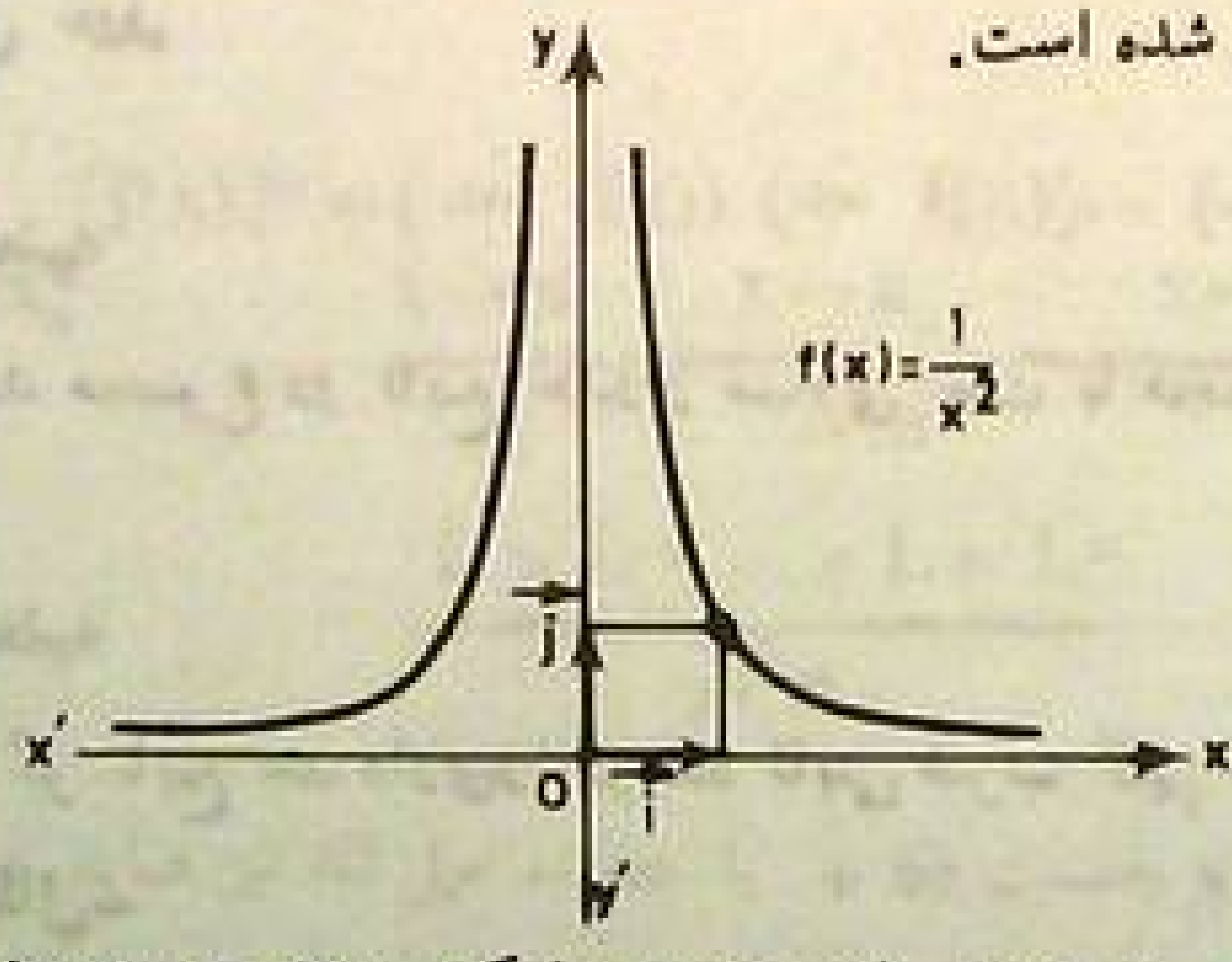
$$-\frac{1}{\sqrt{N}}<x<0 \Longrightarrow \frac{1}{x^2}>N$$

تذکر_ در اینجا نیز f درصفر تعریف نشده است و دامنهٔ تعریف تابع مجموعهٔ $R-\{0\}$ می‌باشد. خواه x مثبت باشد و خواه منفی و به‌سمت صفر میل کند، $f(x)$ به‌سمت $+\infty$ میل خواهد کرد یعنی:

$$\text{حد}_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$$

$$\text{حد}_{x\to 0^-} f(x)=+\infty$$

چون‌حدسمت‌چپ و حدسمت‌راست تابع مساوی‌هستند،پس‌تابع $\frac{1}{x^2}$ حد دارد ولی این حد با پایان نیست. به این سبب گاهی گفته می‌شود تابع حد ندارد یعنی حدباپایانی مانند L را ندارد درشکل نمودار تابع در نزدیکی نقطهٔ صفر رسم شده است.



نتیجه: در توابع گویا وقتی x به‌سمت ریشه ساده مخرج میل کند. حد چپ و حد راست تابع مساوی نیستند اگر یکی $+\infty$ باشد دیگری $-\infty$ خواهد بود و برعکس. و وقتی x به‌سمت ریشه مضاعف مخرج میل کند حد چپ و حد راست تابع مساویند. (یا هر دو $+\infty$ ویا هر دو $-\infty$ اند.)

۲-۷- دوتابع هم‌ارز

دو تابع f و g را در نظر می‌گیریم، اگر این دو تابع در x_0 حدشان صفر بوده و بعلاوه

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=1$$ آن دو تابع را وقتی x به سمت x_0 میل کند هم‌ارز گویند و می‌نویسند

$f\sim g$. در تعریف فوق x_0 می‌تواند هرعدد حقیقی، $+\infty$ یا $-\infty$ باشد.

مثال۱- تابع‌های $\sin x$ و x وقتی x به‌سمت صفر میل می کند هم‌ارز می‌باشند. (اثبات این مطلب را درسال سوم دیده‌اید):

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1$$

در محاسبهٔ حد حاصلضرب یا خارج قسمت دو تابع، در نقطهٔ x_0 می‌توان به جای هر تابع شرکت کننده درآن عبارت یك تابع هم‌ارز آن (وقتی x به‌سمت x_0 میل کند) را قرار داد.

مثال۲- می‌توانیم از این خاصیت مثلاً در مورد پیدا کردن حد تابع $\frac{\sin 5x}{\sin 3x}$ استفاده کنیم، یعنی به‌جای هرتابع هم‌ارز آنرا قرار بدهیم، پس خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{3x}=\frac{5}{3}$$

در قضایای زیرمنظور ازیك تابع‌حددار تابعی است که دریك نقطه‌حدداشته و حدش با پایان (محدود) باشد.

قضایای حد

۲-۸- قضیه

حد مجموع دو تابع حددار مساوی است با مجموع حدود آنها.

۲-۹- قضیه

اگر تابع حد داری‌را درعدد ثابتی ضرب کنیم حد آن درهمان عدد ضرب‌خواهد شد.

مثال-

$$\lim_{x\to 0}\left(-2\frac{\sin x}{x}\right)=-2\times\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=-2\times 1=-2$$

۲-۱۰- قضیه

حد تفاضل دو تابع حددار مساوی است با تفاضل حدود آنها.

۲-۱۱- قضیه

حد حاصل ضرب دو تابع حددار مساوی است با حاصلضرب حدود آنها.

مثال-

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\sin x\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right)=$$

$$\left(\lim_{x\to 0}\sin x\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)=0\times 1=0$$

تبصره- قضایای ۲-۸ و ۲-۱۱ را می‌توان درمورد چند تابع نیز بیان کرد.

۲-۱۲- قضیه

حد خارج قسمت دوتابع حددار مساوی است با خارج قسمت حدهای آنها به‌شرطی که حد مخرج صفر نباشد.

این قضیه را نیز بدون اثبات می‌پذیریم.

۲-۱۳- قضیه

حد ریشهٔ n ام یا توان n ام یك تابع حددار مساوی با ریشهٔ n ام یاتوان n ام حد همان تابع است.

اثبات- برای حالت توان n ام قضیه را ثابت می کنیم. فرض کنید که $\lim_{x\to x_0} f(x)=L$.

بنا به تبصرهٔ فوق داریم:

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)]^n=\underbrace{\left(\lim_{x\to x_0}f(x)\right)\left(\lim_{x\to x_0}f(x)\right)\cdots\left(\lim_{x\to x_0}f(x)\right)}_{\text{بار } n}=$$

$$\underbrace{L\times L\times\cdots\times L}_{\text{بار } n}=L^n$$

تبصره- این قضایا در حالتی که x به‌سمت $+\infty$ یا $-\infty$ میل کند نیز صادق می‌باشند. البته توجه دارید که در این قضایا فرض شده است که حدود توابع مورد بحث با پایان هستند و بینهایت نمی‌باشند. درغیر این صورت می‌توانیم نتایج زیررا اضافه کنیم:

I- اگر f به‌سمت $+\infty$ یا $-\infty$ و g به‌سمت مقدار باپایانی میل کند مجموع $f+g$ به‌ترتیب به‌سمت $+\infty$ یا $-\infty$ میل خواهد کرد.

II- اگر f به‌سمت $+\infty$ یا $-\infty$ و g به سمت مقدار با پایان مثبتی میل کند حاصل ضرب f.g به ترتیب به سمت $+\infty$ یا $-\infty$ یا ∞ میل خواهد کرد اگر حد g به سمت مقدار با پایان منفی میل کند حاصلضرب به‌سمت $-\infty$ یا $+\infty$ میل خواهد کرد.

III- اگر f به‌سمت $+\infty$ یا $-\infty$ و g به‌سمت یك حد با پایان میل کند خارج قسمت $\frac{f}{g}$ به سمت $+\infty$ یا $-\infty$ میل خواهد کرد.

IV- اگر g به‌سمت صفر و f به‌سمت یك حد با پایان غیرصفر میل کند خارج قسمت $\frac{f}{g}$ به‌سمت $+\infty$ یا $-\infty$ میل خواهد کرد.

V- اگر g به‌سمت $-\infty$ یا $+\infty$ و f به‌سمت یك‌حد با پایان میل کند خارج قسمت $\frac{f}{g}$ به‌سمت صفر میل خواهد کرد.

۲-۱۴- قضیه

اگر x به‌سمت صفر میل کند هرچند جمله‌ای از x هم‌ارز جمله‌ای از آن‌چند جمله‌ای خواهد بود که دارای کوچکترین توان است.

اثبات- فرض کنیم چند جمله‌ای P(x) به‌صورت زیر باشد:

$$P(x)=a_nx^n+a_{n+1}x^{n+1}+\dots+a_mx^m \quad ، \quad 0\leqslant n<m \text{ و } a_n\neq 0 \text{ و } a_m\neq 0$$

از جملهٔ اول که دارای کوچکترین توان است فاکتور می‌گیریم، خواهیم داشت:

$$P(x)=a_nx^n\left(1+\frac{a_{n+1}}{a_n}x+\dots+\frac{a_m}{a_n}x^{m-n}\right)$$

حال اگر x به‌سمت صفر میل کند داخل پرانتز به‌سمت ۱ میل می‌کند و درنتیجه خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to 0}\frac{P(x)}{a_nx^n}=1 \qquad\qquad \underset{x\to 0}{P(x)}\sim\underset{x\to 0}{a_nx^n}$$

۲-۱۵- قضیه

اگر x به‌سمت $+\infty$ یا $-\infty$ میل کند هر چند جمله‌ای از x هم ارز آن جمله‌ای از چند جمله‌ای خواهد بود که دارای بزرگترین توان است.

اثبات- فرض کنیم چند جمله‌ای P(x) به شکل زیر باشد:

$$P(x)=a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\dots+a_0 \quad ، \quad a_m\neq 0$$

از جملهٔ اول که دارای بزرگترین توان است فاکتور می‌گیریم خواهیم داشت:

$$P(x)=a_m x^m\left(1+\frac{a_{m-1}}{a_m x}+\dots+\frac{a_n}{a_m x^m}\right)$$

اگر x به سمت $+\infty$ یا $-\infty$ میل کند داخل پرانتز به‌سمت ۱ میل خواهد کرد و در نتیجه:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{P(x)}{a_m x^m}=1 \Rightarrow \underset{x\to\pm\infty}{P(x)} \sim \underset{x\to\pm\infty}{a_m x^m}$$

۲-۱۶- قضیه

حد تابع $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{a_m x^m+a_{m-1}x^{m-1}+\dots+a_0}{b_n x^n+b_{n-1}x^{n-1}+\dots+b_0}$ وقتی که x میل می‌کند به‌سمت $+\infty$ یا $-\infty$ برابراست با حد نسبت جملهٔ بزرگترین درجه صورت به جملهٔ بزرگترین درجهٔ مخرج وقتی که $x\to+\infty$ یا $x\to-\infty$ یعنی:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_m x^m}{b_n x^n}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_m}{b_n}x^{m-n}$$

تذکر:

۱- حد تابع ثابت $f(x)=c$ وقتی که $x\to x_0$ برابر مقدار ثابت است یعنی:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=c$$

۲- اگر f تابع با ضابطهٔ $n\in N$ و $f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_0$ باشد. حد تابع f وقتی که $x\to x_0$ برابر $f(x_0)$ است یعنی:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$$

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$$

۳- اگر f تابع با ضابطهٔ

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_m x^m+a_{m-1}x^{m-1}+\dots+a_0}{b_n x^n+b_{n-1}x^{n-1}+\dots+b_0}$$

باشد. حد تابع $f(x)$ وقتی $x\to x_0$ در صورتیکه $Q(x_0)\neq 0$ باشد. برابر است با: $f(x_0)=\dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}$ یعنی:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} P(x)}{\lim_{x\to x_0} Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)} \quad \text{و} \quad Q(x_0)\neq 0$$

۴ـ ثابت می‌کنند که توابع $\sin x$ و $\cos x$ درهر نقطه $x_0\in R$ دارای حد هستند و حدهر یك از آنها برابر مقدار آن تابع در x_0 است یعنی:

$$\lim_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0$$

$$\lim_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0$$

۲-۱۷ـ مسئله اصلی

اینك یك مسئله اساسی را که عبارت از پیدا کردن حد یك تابع است مطرح می کنیم . در خیلی از توابع به صورت $f:x\to y=f(x)$ وقتی که x به‌سمت مقدار ثابت x_0 میل می کند حد تابع f همان مقدار $f(x_0)$ می‌شود

یعنی:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

ولی این مطلب عمومیت ندارد زیرا ممکن است.

الف ـ تابع حد نداشته باشد ولی $f(x_0)$ وجود داشته باشد.

ب ـ تابع حد داشته‌باشد ولی $f(x_0)$ وجود نداشته باشد .

ج ـ تابع حد داشته باشد و $f(x_0)$ هم وجود داشته باشد ولی با هم مساوی نباشند.

مثال۱ـ تابع $f(x)=x+2+\sqrt{x}$ داده شده است. اگر x به‌سمت صفر میـل کند حد تابع و همچنین $f(0)$ را حساب کنید.

حل ـ ملاحظه می‌شود که $f(0)=2$ است ولی اگر x به‌سمت صفرمیل بکند تابع حدندارد زیرا که حد چپ ندارد یعنی مقدار «$\lim_{x\to 0^-}(x+2+\sqrt{x})$» موجود نیست.

مثال۲ـ تابع f به وسیله دستور $f(x)=3x+2$ $(x\notin z)$ تعـریف شده است وقتی x به سمت ۲ میل کند حد این تابع را حساب کنید.

حل ـ چون ۲ عددی درست است بنابراین $f(2)$ وجود ندارد. ولی تابع حد دارد زیرا وقتی x به‌سمت ۲ میل‌می کند x مخالف ۲ است ودرنتیجه $f(x)=3x+2$ و از این روی‌حدش همان حد تابع $3x+2$ است که برابر ۸ می‌باشد.

مثال۳ـ تابع $g(x)=\begin{cases} x^2+1 & (x\notin z) \\ 0 & (x\in z)\end{cases}$ داده شده است

$\lim\limits_{x\to 2} g(x)$ حد، و مقدار $g(2)$ را محاسبه کنید. آیا این دو مساوی‌اند؟

حل ـ وقتی x عددی صحیح نباشد $g(x)=x^2+1$ است از طرفی می‌دانیم که حد یک تابع در یک نقطه به مقدار خود تابع در آن نقطه بستگی ندارد پس حد g وقتی x به‌سمت ۲ میل کند برابر ۵ است زیرا: $\lim\limits_{x\to 2} g(x)=\lim\limits_{x\to 2}(x^2+1)=5$ حد، اما مقدار g درنقطه $x=2$ برابرصفر است:

پس داریم: $\lim\limits_{x\to 2} g(x)=5\neq 0=g(2)$

از این مقدمه چنین نتیجه می‌شود که وجود $f(x_0)$ برای موجود بودن حد وقتی که x به‌سمت x_0 میل می‌کند نه شرط لازم است و نه‌شرط کافی، وفقط در توابع پیوسته است که حد تابع با مقدار $f(x_0)$ مساوی می‌شود.

به هرحال درصورتی‌که x به سمت x_0 میل می‌کند برای تعیین حد تابع $f(x)$ باید به‌نکات زیر توجه داشت:

۱ـ آیا تابع درهمسایگی x_0 تعریف شده است یا خیر؟ درصورتیکه تابع در همسایگی x_0 تعریف نشده باشد حد در آن نقطه مفهومی ندارد.

مثال ـ حد تابع $f(x)=\sqrt{x(x+1)}+\sqrt{x(x-1)}$ را وقتی که $x\to 0$ بدست آورید

حل: $f(0)=0$ وجود دارد ولی تابع درنقطه $x_0=0$ حد ندارد زیرا درهمسایگی $x=0$ تابع تعریف نشده است.

۲ـ اگر x ازطرف راست یا چپ به سمت x_0 میل بکند، این دومیل بایکدیگر فرق‌دارند یا خیر؟ برای این منظور اغلب ازروش زیر استفاده می کنند. ابتدا درعبارت $f(x)$ به جای x مقدار $x=x_0+\varepsilon$ را قرار داده تا $f(x)$ تبدیل به $f(x_0+\varepsilon)$ می‌شود، درعبارت اخیر یک دفعه $\varepsilon>0$ فرض کرده و به‌سمت صفر میل می‌دهیم و یك دفعه $\varepsilon<0$ فرض کرده به‌سمت صفر میل می‌دهیم اگر دو حد برابر بودند تابع حد خواهد داشت.

به‌طور کلی اگر $f(x_0+\varepsilon)=l+\varepsilon'$ در آید به‌قسمی که $|\varepsilon|<\alpha \Longrightarrow |\varepsilon'|<\beta$ دراین‌صورت حد تابع l خواهد بود.

و اگر $f(x+\varepsilon)=\dfrac{k}{\varepsilon'}$ با همان‌شرط درآید دراین‌صورت حد تابع $\infty +$ یا $\infty -$ خواهد

بود برای صفر کردن ε درعبارت $f(x_0+\varepsilon)$ نباید عجله کرد زیرا که با این عمل ممکن است اشتباهی رخ بدهد و به علاوه ε بینهایت کوچک است وصفر نیست.

۳ـ اگر $f(x_0)$ بی‌معنی یا مبهم باشد، دراین صورت نقطهٔ x_0 ومقدار $f(x_0)$ را از مسئله جدا می‌کنیم و درآنچه باقی می‌ماند حد تابع را معلوم می‌کنیم.

مثال۱ـ حد چپ وحد راست تابع $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & x>1 \\ 2 & x=1 \\ 2x+1 & x<1 \end{cases}$ را وقتی‌که $x\to 1$ حساب کنید.

حل:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(x^2-1)=0$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(2x+1)=3$$

مثال۲ـ حد چپ وراست تابع $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+3}}{x-1}$ را وقتی که $x\to 1$ پیدا کنید.

حل: می‌توانیم $x=1+\varepsilon$ اختیار کنیم که ε مثبت یا منفی به سمت‌صفر میل می‌کند خواهیم داشت:

$$f(1+\varepsilon)=\frac{\sqrt{(1+\varepsilon)^2+3}}{1+\varepsilon-1}=\frac{\sqrt{4+\varepsilon^2+2\varepsilon}}{\varepsilon}$$

اگر $\varepsilon>0$ باشد:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x^2+3}}{x-1}=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{\sqrt{4+\varepsilon^2+2\varepsilon}}{\varepsilon}=+\infty$$

اگر $\varepsilon<0$ باشد:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{x^2+3}}{x-1}=\lim_{\varepsilon\to 0^-}\frac{\sqrt{4+\varepsilon^2+2\varepsilon}}{\varepsilon}=-\infty$$

مثال۳ـ حدتابع $f(x)=x+\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$ راوقتی که x به‌سمت‌صفر میل می‌کنددرصورت وجود تعیین کنید.

حل: می‌توانیم بنویسیم $f(x)=x+\dfrac{|x|}{x}$

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{اگر} \quad x>0 \\ \text{تعریف‌نشده} & \text{اگر} \quad x=0 \\ x-1 & \text{اگر} \quad x<0 \end{cases}$$

اگر حالت $x=0$ و $f(0)$ را کنار بگذاریم

$$\underset{x\to 0^+}{\text{حد}} f(x)=\underset{x\to 0^+}{\text{حد}}(x+1)=1$$

$$\underset{x\to 0^-}{\text{حد}} f(x)=\underset{x\to 0^-}{\text{حد}}(x-1)=-1$$

حد چپ برابر ۱ − و حد راست برابر یك است پس تابع در $x_0=0$ حد ندارد زیرا حد چپ و راست آن باهم برابر نیستند.

مثال۴- حد تابع $f(x)=\dfrac{5x+2}{x-1}$ را وقتی‌که x به سمت ۲ میل می‌کند پیدا کنید.

حل:

$$\underset{x\to 2}{\text{حد}} f(x)=\underset{x\to 2}{\text{حد}}\frac{5x+2}{x-1}=\frac{5\times 2+2}{2-1}=12$$

$$\underset{x\to 2}{\text{حد}} f(x)=f(2)=12$$

۲-۱۸- حد چپ و حد راست در تابع هموگرافیك

تابع $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ به نام تابع هموگرافیك موسوم است و دامنهٔ تعریف آن $D_f=R-\left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$ است حد چپ و حد راست تابع در موقعی که x به سمت $-\dfrac{d}{c}$ میل می‌کند با یکدیگر مساوی نیستند اگر تابع صعودی باشد حد چپ $+\infty$ و حد راست $-\infty$ است و اگر تابع نزولی باشد حد چپ $-\infty$ و حدراست $+\infty$ خواهد بود.

مثال - حد تابع $y=\dfrac{2x-6}{x-1}$ را وقتی‌که $x\to 1$ میل می‌کند (ریشهٔ مخرج) معین کنید.

چون مشتق تابع $y'=\dfrac{4}{(x-1)^2}>0$ است داریم.

$$\underset{x\to 1^+}{\text{حد}} f(x)=-\infty$$

$$\underset{x\to 1^-}{\text{حد}} f(x)=+\infty$$

یعنی تابع بازاء $x\to 1$ حد ندارد و بعلاوه در این مثال $f(1)$ بی‌معنی است.

۲-۱۹- حد چپ و راست در تابع پله‌ای

طبق تعریف تابع پله‌ای داریم:

$\forall x\in R$ و $\exists n\in Z$ ، $n\leqslant x<n+1 \Longrightarrow [x]=n$

در نتیجه: $\forall n\in Z$ و $x\to n^-$ یعنی $n-1\leqslant x<n \Longrightarrow [x]=n-1$

پس در نقاط به‌طول عدد صحیح n خواهیم داشت:

حد چپ: $\lim\limits_{x\to n^-}[x]=n-1$

$\forall n\in z$ و $x\to n^+$ یعنی $n\leqslant x<n+1 \Longrightarrow [x]=n$

حد راست: $\lim\limits_{x\to n^+}[x]=n$

مقدار تابع: $f(n)=n$

چون در نقاط به طول عدد صحیح، حد چپ و راست تابع با یکدیگر مساوی نیستند پس این تابع در آن نقاط حد ندارد.

تمرین - حد چپ و راست تابع $f(x)=x\,[x]$ را وقتی که $x\to 2$ حساب کنید.

۲-۲۰- تعیین حد چندتابع

مثال۱- حد تابع $f(x)=\dfrac{x^2-2x-1}{x-1}$ را وقتی $x\to 1$ پیدا کنید.

حل: چون x به‌سمت ریشه مخرج یعنی ۱ میل می کند نمی‌توان از دستور زیر استفاده‌نمود

$$\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)$$

در نتیجه باید حد چپ وحد راست تابع را حساب نمود. و می‌توان نوشت:

$$x=1+\varepsilon$$

$$f(1+\varepsilon)=\frac{(1+\varepsilon)^2-2(1+\varepsilon)-1}{(1+\varepsilon)-1}=\varepsilon-\frac{2}{\varepsilon}$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\varepsilon-\frac{2}{\varepsilon}\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{\varepsilon\to 0^-}\left(\varepsilon-\frac{2}{\varepsilon}\right)=+\infty$$

مثال۲ـ حد تابع $f(x)=\sqrt{x^2-3x+3}$ را وقتی که x به‌سمت یك میل می‌کندبدست آورید.

حل:

$$\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)=1$$

مثال۳ـ حد تابع $f(x)=-2x^3+3x+1$ را وقتی که $x\to\pm\infty$ بدست آورید.

حل:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(-2x^3+3x+1)=\lim_{x\to+\infty}(-2x^3)=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(-2x^3+3x+1)=\lim_{x\to-\infty}(-2x^3)=+\infty$$

مثال۴ـ حد تابع $f(x)=\sqrt{x^2-3x+2}$ را وقتی که $x\to\pm\infty$ حساب کنید.

حل:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-3x+2}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}|x|=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}|x|=+\infty$$

۲-۲۱ـ صورتهای مبهم

حتماً تاکنون دربررسی مسائل حد به‌صورتهای

$$\frac{0}{0}\ ،\ \frac{\infty}{\infty}\ ،\ 0\times\infty \text{ و } \infty-\infty$$

برخورده‌اید . این صورتها را صورتهای مبهم می‌گویند ، زیرا مقادیری که سرانجام برای هر يك ازآنها بدست خواهیم آورد معمولا از مسئله‌ای به مسئله دیگر فرق می‌کند. سه صورت $\frac{\infty}{\infty}$ و $\infty\times 0$ و $\infty-\infty$ قابل تبدیل به صورت $\frac{0}{0}$ می‌باشند. در زیر با ذکر چند مثال روش رفع ابهام‌ازاین صور رابیان خواهیم کرد.

مثال۱ـ حد تابع $f(x)=\frac{5x+2}{2x-1}$ را وقتیکهx به‌سمت $\pm\infty$ میل می کند تعیین کنید.

حل ـ این کسر به صورت $\frac{\infty}{\infty}$ در می‌آید که با استفاده از قضیهٔ ۲ـ۱۵ و آنچه که در زیر مثال شماره ۲ـ۷ گفتیم خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{5x+2}{2x-1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{5x+2}{2x-1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{5x}{2x}=\frac{5}{2}$$

البته حد فوق را می‌توان به کمک قاعدهٔ هوپیتال (که در سال سوم دیده‌اید) نیز بدست آورد.

مثال۲- حد تابع $f(x)=\frac{2x^2-3}{5x^2+5x+1}$ را وقتی که x به‌سمت $\pm\infty$ میل می‌کند تعیین کنید.

حل این کسر نیز به‌صورت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ درمی‌آید که مانند مثال قبل می‌توان عمل کرد.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2-3}{5x^2+5x+1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2}{5x^2}=\frac{2}{5}$$

مثال۳- حد تابع $f(x)=\frac{4x^3-3x^2+1}{1-x^2}$ را وقتی که x به‌سمت $\pm\infty$ میل می‌کند تعیین کنید.

حل:

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4x^3-3x^2+1}{1-x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{4x^3}{-x^2}\right)$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}(-4x)\quad\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty\\[2ex]\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty\end{cases}$$

مثال۴- حد تابع $f(x)=\frac{x}{x-1+\sqrt{x^2+x+1}}$ را وقتی که $x\to+\infty$ معین کنید.

حل:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x-1+\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+|x|}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+x}=\frac{1}{2}$$

مثال۵- حد تابع $f(x)=\frac{3x-\sqrt{x^2+1}}{2x-\sqrt{x^2-1}}$ را وقتی که $x\to\pm\infty$ حساب کنید.

حل:
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-\sqrt{x^2+1}}{2x-\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-|x|}{2x-|x|}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-x}{2x-x}=2$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x-\sqrt{x^2+1}}{2x-\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x-|x|}{2x-|x|}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x+x}{2x+x}=\frac{4}{3}$$

مثال۶- حد تابع $f(x)=\sqrt{x^2+2x+5}-x$ را وقتی که x به‌سمت $+\infty$ میل می کند پیدا کنید.

حل- ملاحظه می کنیم که تابع در این صورت مبهم است و به‌حالت $\infty-\infty$ درمی‌آید. برای رفع ابهام تابع وپیدا کردن حد آن به‌روش زیر عمل می کنیم:

صورت و مخرج کسر را درمزدوج صورت ضرب می کنیم، خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+2x+5}-x}{1}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{[\sqrt{x^2+2x+5}-x][\sqrt{x^2+2x+5}+x]}{[\sqrt{x^2+2x+5}+x]}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x+5-x^2}{x\left[\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}+1\right]}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+5}{x\left[\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}+1\right]}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{2x}=1$$

در تساوی ماقبل آخر، از این مطلب که $2x\sim(2x+5)$ و $x(\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}+1)\sim 2x$ وقتی $x\to+\infty$ استفاده شده است.

مثال۷- حد تابع $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x(x+1)}$ را وقتی که x به‌سمت‌صفرمیل می کندحساب کنید.

حل:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\infty-\infty$$

$$f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x(x+1)}=\frac{x}{x(x+1)}=\frac{1}{x+1}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x+1}=1$$

مثال ۸ـ حد تابع $f(x)=\frac{x^3-1}{x^2-1}$ را وقتی که x به‌سمت ۱ میل می کند پیدا کنید.

حل ـ این کسر به‌صورت مبهم $\frac{0}{0}$ در می‌آید، برای رفع ابهام، صورت ومخرج کسر راتجزیه می کنیم، خواهیم‌داشت :

$$\frac{x^3-1}{x^2-1}=\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)}$$

عامل مشترک $x-1$ راکه درصورت ومخرج باعث حالت ابهـام مـی‌شود حذف می‌کنیم خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1}{x+1}=\frac{3}{2}$$

مثال ۹ـ حد تابع $f(x)=\frac{\sin 3x}{5x}$ را وقتی که x به‌سمت صفر میل می کند تعیین کنید.

حل ـ وقتی x به‌سمت صفرمیل می کند تابع به‌صورت مبهم $\frac{0}{0}$ درمی‌آید. برای رفع ابهام دو روش‌داریم:

روش اول ـ استفاده از قانون هوپیتال.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{5x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{3\cos 3x}{5}\right)=\frac{3}{5}$$

روش دوم ـ استفاده از توابع هم‌ارز ـ داریم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{5x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{5x}=\frac{3}{5}$$

مثال ۱۰ـ حد تابع $f(x)=x\cot g x$ را وقتی x به‌سمت صفر میل می کند تعیین کنید.

حل ـ وقتی x به‌سمت صفر میل کند این تابع به‌صورت مبهم $\infty \times 0$ درمی‌آید. برای رفع ابهام چنین عمل می کنیم:

$$\lim_{x\to 0} x\cot g x = \lim_{x\to 0} \frac{x\cos x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x}\cos x =$$

$$\left(\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\right)\left(\lim_{x\to 0}\cos x\right) = ۱ \times ۱ = ۱$$

تمرین:

حد تابعهای زیر را درنقاط داده شده درصورت وجود پیدا کنید.

۱– $f: x \longmapsto \dfrac{x^۳ + ۳x^۲ - ۴}{x^۲ - ۱}$ ، $x \to ۱$

۲– $f: x \longmapsto \dfrac{x^۴ - ۲x^۲ + ۱}{x^۲ - ۵x + ۴}$ ، $x \to ۱$

۳– $f: x \longmapsto \dfrac{\sqrt{x} - ۲}{x^۲ - ۵x + ۴}$ ، $x \to ۴$

۴– $f: x \longmapsto \dfrac{۱}{\sqrt{x}} - \dfrac{x + ۱}{\sqrt{x}}$ ، $x \to ۰^+$

۵– $f: x \longmapsto \dfrac{۱}{x(x + ۱)} - \dfrac{۱}{x}$ ، $x \to ۰$

۶– $f: x \longmapsto \dfrac{x^n - a^n}{a^p - x^p}$ $n, p \in N$ ، $x \to a$ $(n \text{ و } p \in N)$

۷– $f: x \longmapsto \dfrac{x}{\sqrt{۱ + x^۲} - ۱}$ ، $x \to ۰$

۸– $f: x \longmapsto \dfrac{\sqrt{x + ۵} - ۳}{x - ۴}$ ، $x \to ۴$

۹– $f: x \longmapsto \dfrac{\sqrt{x + ۲} - ۲}{\sqrt{x + ۷} - ۳}$ ، $x \to ۲$

۱۰– $f: x \longmapsto \dfrac{\sqrt[۳]{x} - ۱}{x - ۱}$ ، $x \to ۱$

۱۱– $f: x \longmapsto \dfrac{\sqrt{x + ۴} - \sqrt{۳x + ۴}}{\sqrt{x + ۱} - ۱}$ ، $x \to ۰$

۱۲- $f: x \longmapsto \dfrac{2}{x^2-1} - \dfrac{1}{x-1}$ ، $x \to 1$

۱۳- $f: x \longmapsto \dfrac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3}$ ، $x \to 2$

۱۴- $f: x \longmapsto \dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$ ، ، $x \to a \quad (a > 0)$

۱۵- $f: x \longmapsto \dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}$ ، $x \to 0$

۱۶- $f: x \longmapsto \dfrac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 5x}$ ، $x \to 0$

۱۷- $f: x \longmapsto \dfrac{\sin^2 x}{1-\cos x}$ ، $x \to 0$

۱۸- $f: x \longmapsto \dfrac{\sin^2 x}{\operatorname{tg}^2 x}$ ، $x \to 0$

۱۹- $f: x \longmapsto (1+\cos x)\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$ ، $x \to \pi$

۲۰- $f: x \longmapsto \dfrac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos x}}$ ، $x \to 0$

۲۱- $f: x \longmapsto (\sin x - 1)\operatorname{tg}^2 x$ ، $x \to \dfrac{\pi}{2}$

۲۲- $f: x \longmapsto (2x^2-3x+1)\operatorname{tg}\pi x$ ، $x \to \dfrac{1}{2}$

۲۳- $f: x \longmapsto (x^2-1)\operatorname{cotg}(x^2-1)$ ، $x \to 1$

۲۴- $f: x \longmapsto \dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x}$ ، $x \to 0$

۲۵- $f: x \longmapsto \dfrac{x(1-x)\sin \lambda x}{1-\cos 2x}$ ، $\lambda \neq 0$ ، $x \to 0$

۲۶- a را چنان معین کنید که حد $\dfrac{(x-a)^2}{\left(1+\cos\dfrac{\pi}{a}x\right)}$ وقتی که x بسمت a میل می کند برابر $\dfrac{2}{\pi^2}$ باشد.

حد توابع زیر را در صورتی که x به‌سمت $+\infty$ یا $-\infty$ میل کند در صورت وجود

ت آورید.

۲۷- $f: x \longmapsto \dfrac{x^4-5x+1}{x^2+2}$

۲۸- $f: x \longmapsto \dfrac{x^8+2x-5}{x^8-7}$

۲۹- $f: x \longmapsto \dfrac{x^3-7x+1}{3x^2-4}$

۳۰- $f: x \longmapsto \sqrt{x+1}-\sqrt{x}$

۳۱- $f: x \longmapsto \sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}$

۳۲- $f: x \longmapsto \sqrt{x^2+x}-x$

۳۳- $f: x \longmapsto \sqrt{x^2+ax+b}-x$

۳۴- $f: x \longmapsto \sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+4}$

۳۵- $f: x \longmapsto \dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2-5x+1}}$

۳۶- $f: x \longmapsto \dfrac{x-\sqrt{x^2+x+1}}{2x-\sqrt{4x^2+x}}$

۳۷- $f: x \longmapsto \sqrt{x^4+x-2}-(x^2-1)$

۳۸- a و b را چنان معین کنید که $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b\right)=0$ باشد

حد راست یا چپ: توابع زیررا از روی تعریف ثابت کنید.

۳۹- $\lim\limits_{x\to 1^+}\sqrt{x-1}=0$

۴۰- $\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{x^3+8}{|x+2|}=12$

۴۱- $\lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{x^3+8}{|x+2|}=-12$

۴۲- $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2}{x-1}=+\infty$

۴۳- $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{-x}{x-1}=+\infty$

پیوستگی تابع

۲-۲۲- پیوستگی تابع در یک نقطه

موضوع پیوستگی تابع را در سال سوم دیده‌اید. اینک آن را یادآوری می‌کنیم.

تعریف- تابع f را در نقطهٔ $x_\circ$ پیوسته گویند هرگاه سه شرط زیر برقرار باشد:

۱- f در $x_\circ$ تعریف شده باشد یا به‌عبارت دیگر $x_\circ \in D_f$

۲- وقتی x به سمت $x_\circ$ میل کند تابع f حد داشته باشد.

۳- این حد برابر مقدار تابع در $x_\circ$ باشد یعنی $\lim\limits_{x \to x_\circ} f(x) = f(x_\circ)$

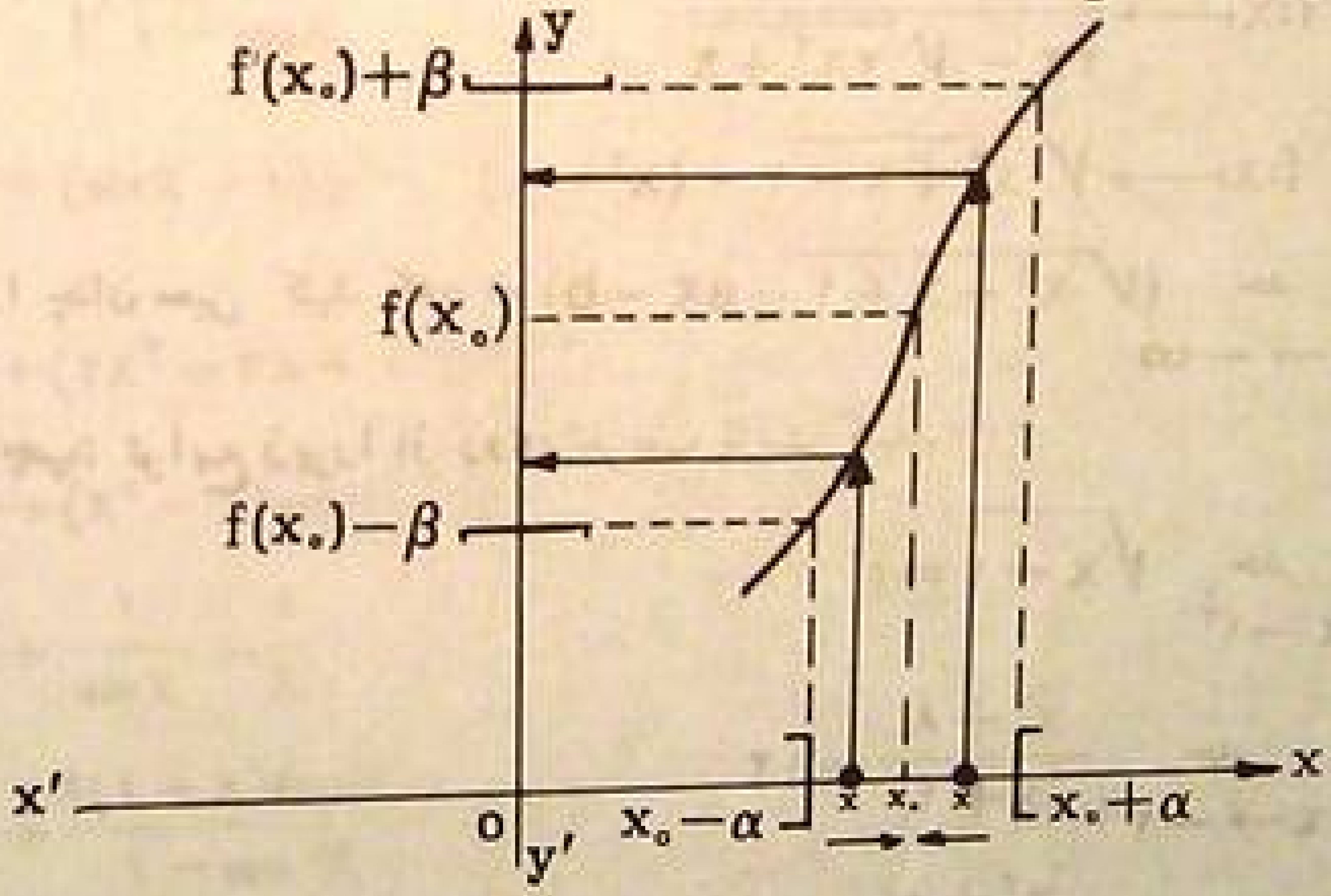
تذکر: با توجه به تعریف حد می‌توان تعریف پیوستگی را برحسب نمادهای α و β چنین بیان داشت:

$$\forall \beta > \circ \; \exists \alpha > \circ ، |x - x_\circ| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(x_\circ)| < \beta$$

توجه کنید که در اینجا شرط $\circ < |x - x_\circ|$ حذف شده است زیرا:

اولاً: f در $x_\circ$ تعریف شده است.

ثانیاً: طرف دوم استلزام فوق به ازای $x = x_\circ$ به صورت $|f(x_\circ) - f(x_\circ)| < \beta$ در می‌آید که یک نامساوی درست است.



مثال ۱ - پیوستگی تابع $x \xrightarrow{f} f(x) = x^۲ - ۲x + ۳$ را در نقطه $x_\circ = ۲$ بررسی کنید.

حل: اولاً- دامنه تعریف $D_f = R$ و $x_\circ = ۲ \in D_f$

ثانیاً- $f(x_\circ) = f(۲) = ۳$

ثالثاً- $\lim\limits_{x \to ۲} f(x) = \lim\limits_{x \to ۲} (x^۲ - ۲x + ۳) = ۲^۲ - ۲ \times ۲ + ۳ = ۳$

چون $\lim\limits_{x \to ۲} f(x) = f(۲) = ۳$ ، می‌باشد تابع در نقطهٔ $x_\circ = ۲$ پیوسته است.

مثال۲- پیوستگی تابع $x \xmapsto{f} f(x)=\begin{cases} x^2+1 & x\leqslant 0\\ 1+x & x>0\end{cases}$ را در نقطه $x_0=0$ بررسی کنید.

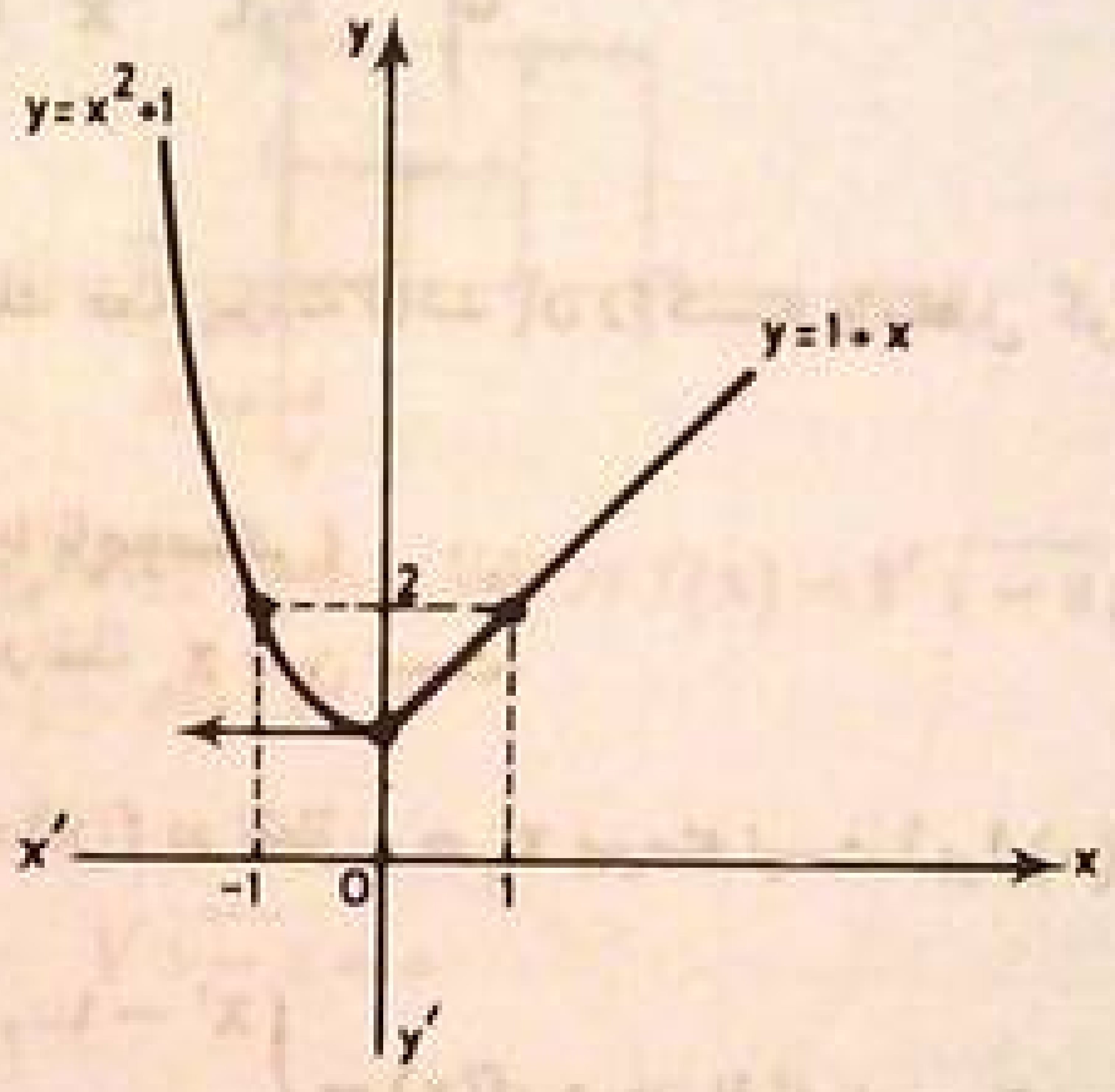
حل: اولاً- دامنهٔ تعریف $D_f=R$ و $x_0=0\in D_f$

ثانیاً- $f(x_0)=f(0)=0^2+1=1$

ثالثاً- $\underset{x\to 0^+}{\text{حد}} f(x)=\underset{x\to 0^+}{\text{حد}}(1+x)=1$

$\underset{x\to 0^-}{\text{حد}} f(x)=\underset{x\to 0^-}{\text{حد}}(x^2+1)=1$

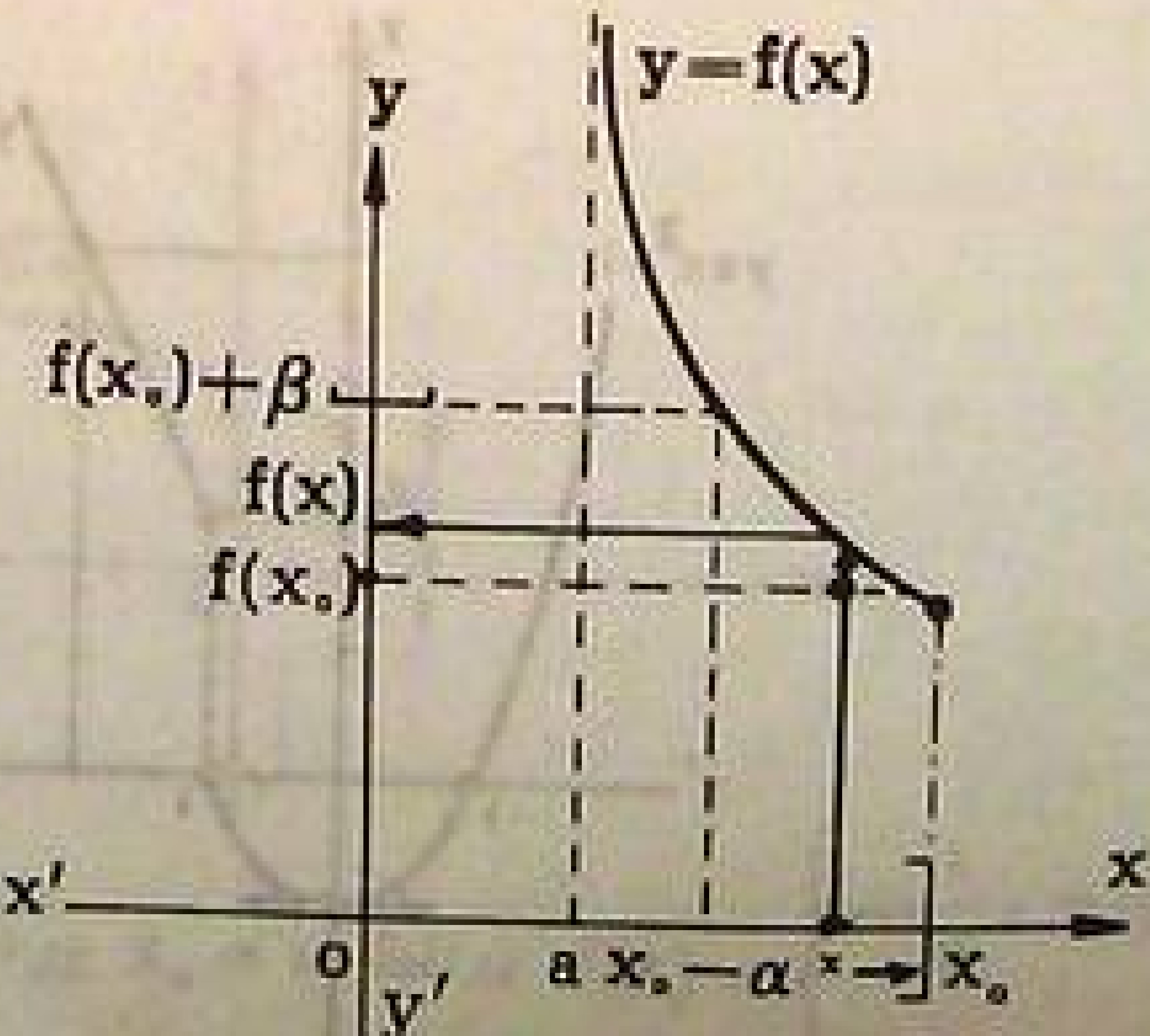
چون $f(x)=f(0)=1$ $\underset{x\to 0^-}{\text{حد}}$ $=f(x)$ $\underset{x\to 0^+}{\text{حد}}$ ، است تابع درنقطهٔ $x_0=0$ پیوسته است.



I- پیوستگی چپ

تعریف- تابع f که روی $a<x_0$ و $[x_0$ و $a]$ معین است. درنقطهٔ x_0 پیوستگی چپ‌دارد هرگاه، وقتی که x ازسمت چپ به سمت x_0 میل می کند. حدتابع برابر $f(x_0)$ باشد، یعنی :

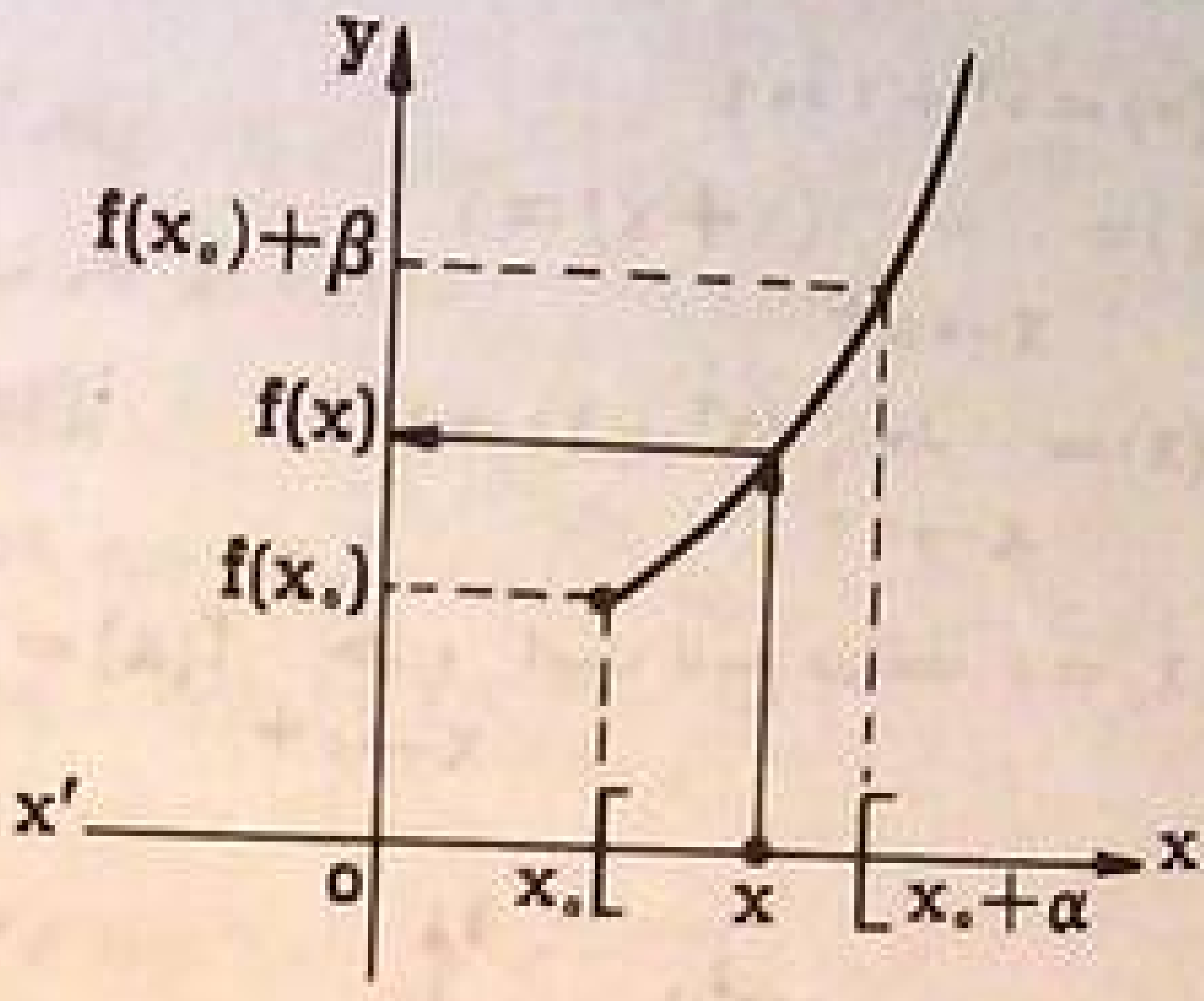
$\underset{x\to x_0^-}{\text{حد}} f(x)=f(x_0)$



II- پیوستگی راست

تعریف- تابع f که روی $[x_\circ , b[$ ، $x_\circ < b$ معین است. در نقطه $x_\circ$ پیوستگی راست دارد هرگاه، وقتی که x ازسمت راست به‌سمت $x_\circ$ میل می‌کند، حد تابع‌برابر $f(x_\circ)$ باشد یعنی:

$$\lim_{x \to x_\circ^+} f(x) = f(x_\circ)$$



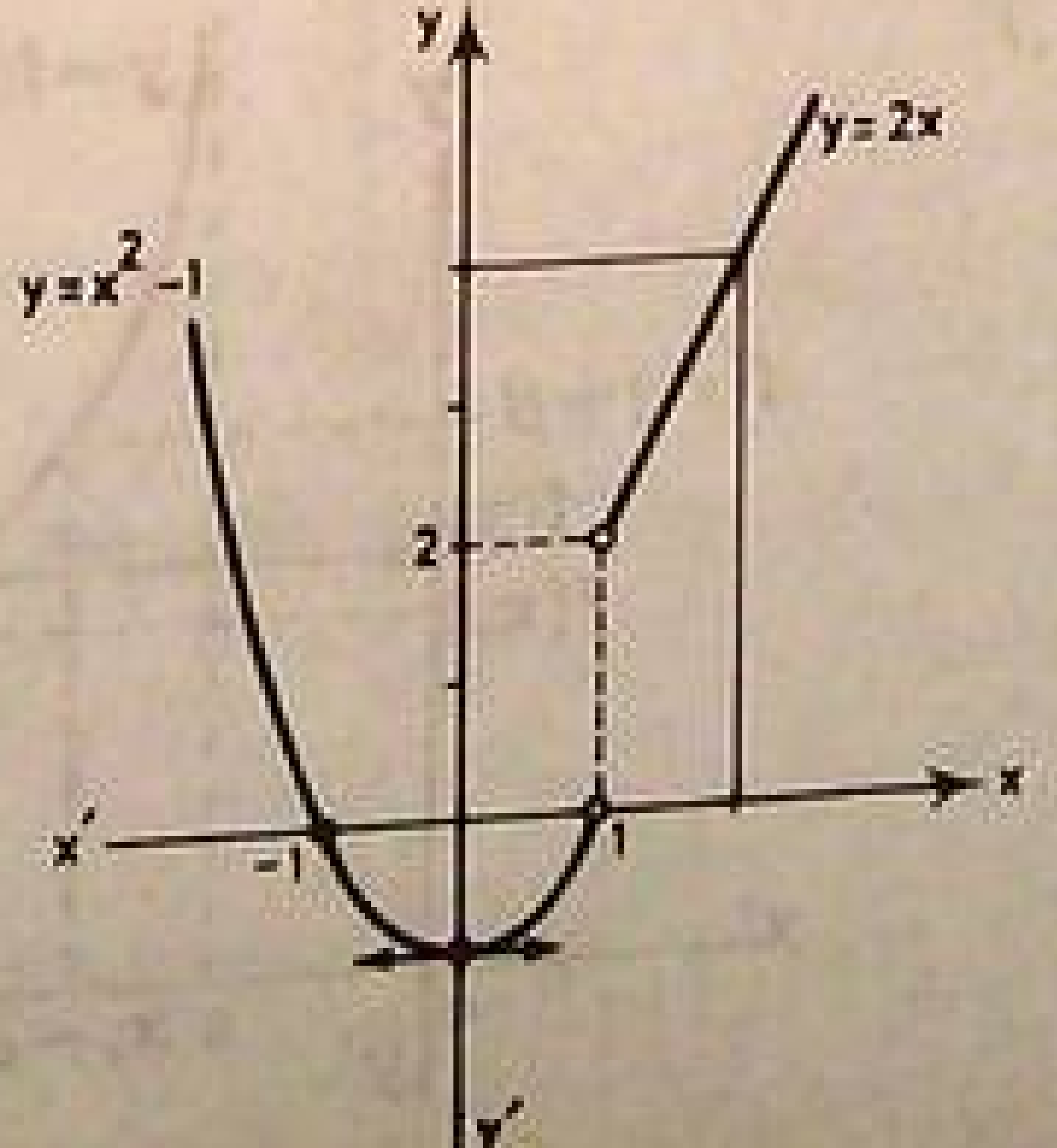
تذکر: اگر تابعی دریک نقطه پیوسته نباشد آن را گسسته یامنفصل گویند.

۲-۲۳- حالتهای انفصال (یا ناپیوستگی)

الف- وقتی که تابع درنقطهٔ $x_\circ$ معین نیست.

مثال ۱- تابع $f(x) = \frac{۱}{x^۲}$ در نقطهٔ $x_\circ = \circ$ پیوسته نیست زیرا $f(\circ)$ تعریف نشده‌است.

مثال ۲- تابع $f(x) = \begin{cases} x^۲ - ۱ & x < ۱ \\ ۲x & x > ۱ \end{cases}$، هم‌در نقطه $x_\circ = ۱$ پیوسته نیست زیرا $f(۱)$ تعریف نشده است.



ب ـ تابع در نقطه x_0 حد ندارد یا دارای حد چپ و راست متمایز است.

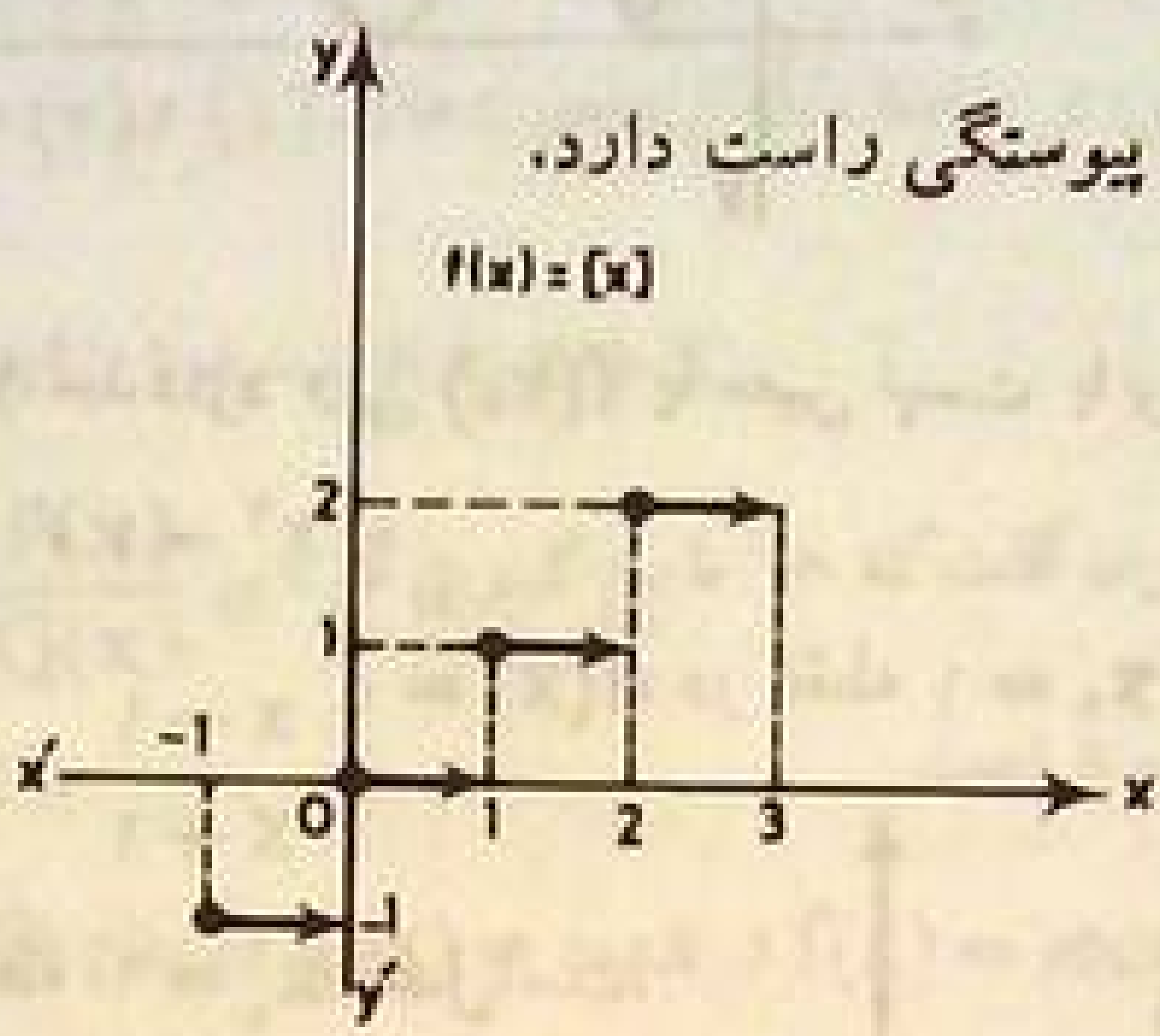
مثال ۱ـ تابع پله‌ای $f(x)=[x]$ در نقطه به طول عدد درست $x_0=n\in Z،n$ ناپیوسته است زیرا:

$$f(x_0)=f(n)=n$$

$$\lim_{x\to n^+} f(x)=n \quad ، \quad \lim_{x\to n^-} f(x)=n-1$$

حد چپ و راست تابع دراین نقطه ازهم متمایزند ولی چـون $\lim_{x\to n^+} f(x)=f(n)=n$ است

می‌گویند تابع در این نقطه پیوستگی راست دارد.



مثال ۲ـ تابع $f(x)=\sqrt{1-x}$ در نقطهٔ $x_0=1$ پیوستگی چپ دارد. زیرا:

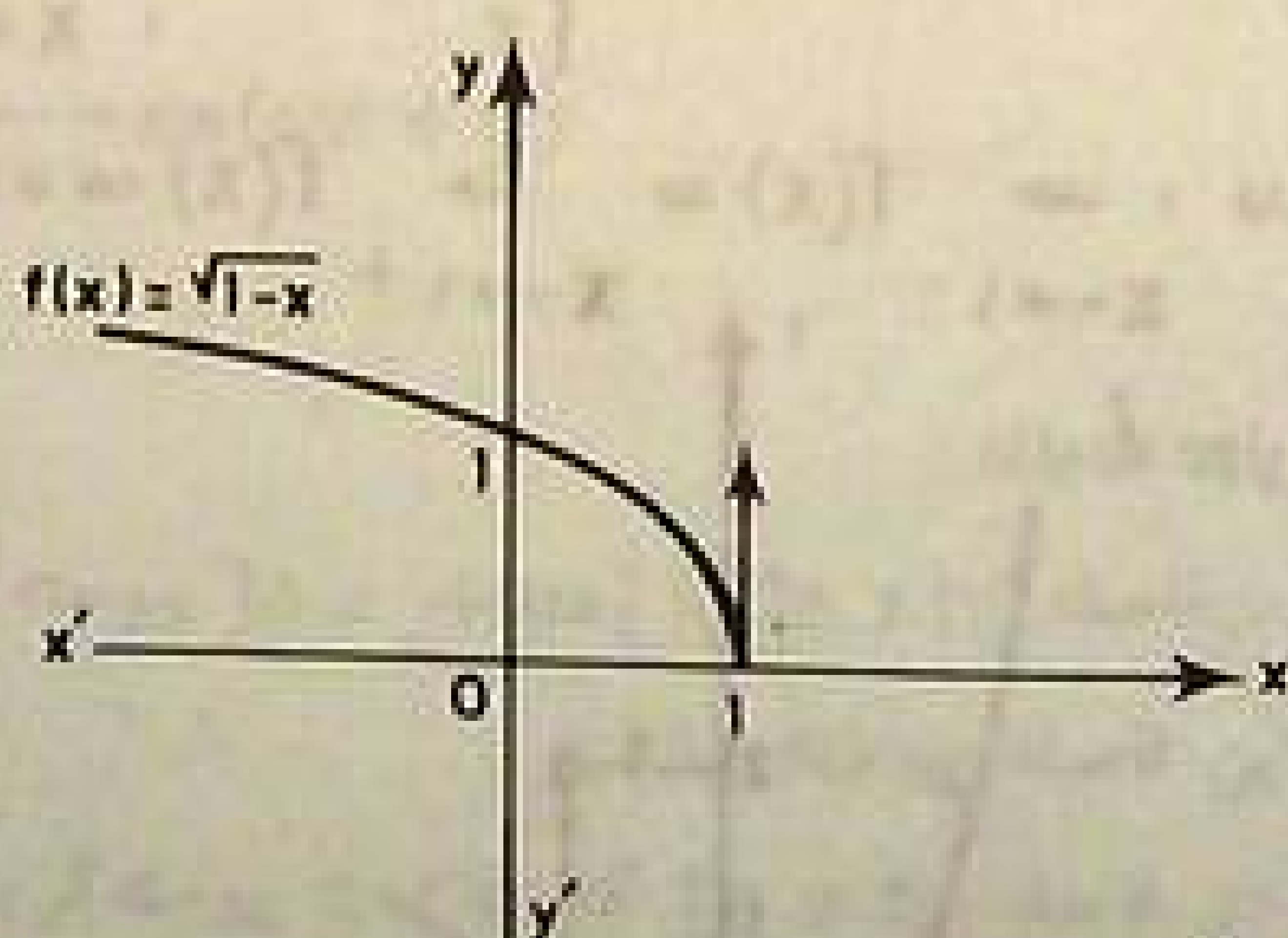
$$x_0=1\in D_f \text{ و } D_f=]-\infty،1]$$

$$f(x_0)=f(1)=0$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\sqrt{1-x}=0$$

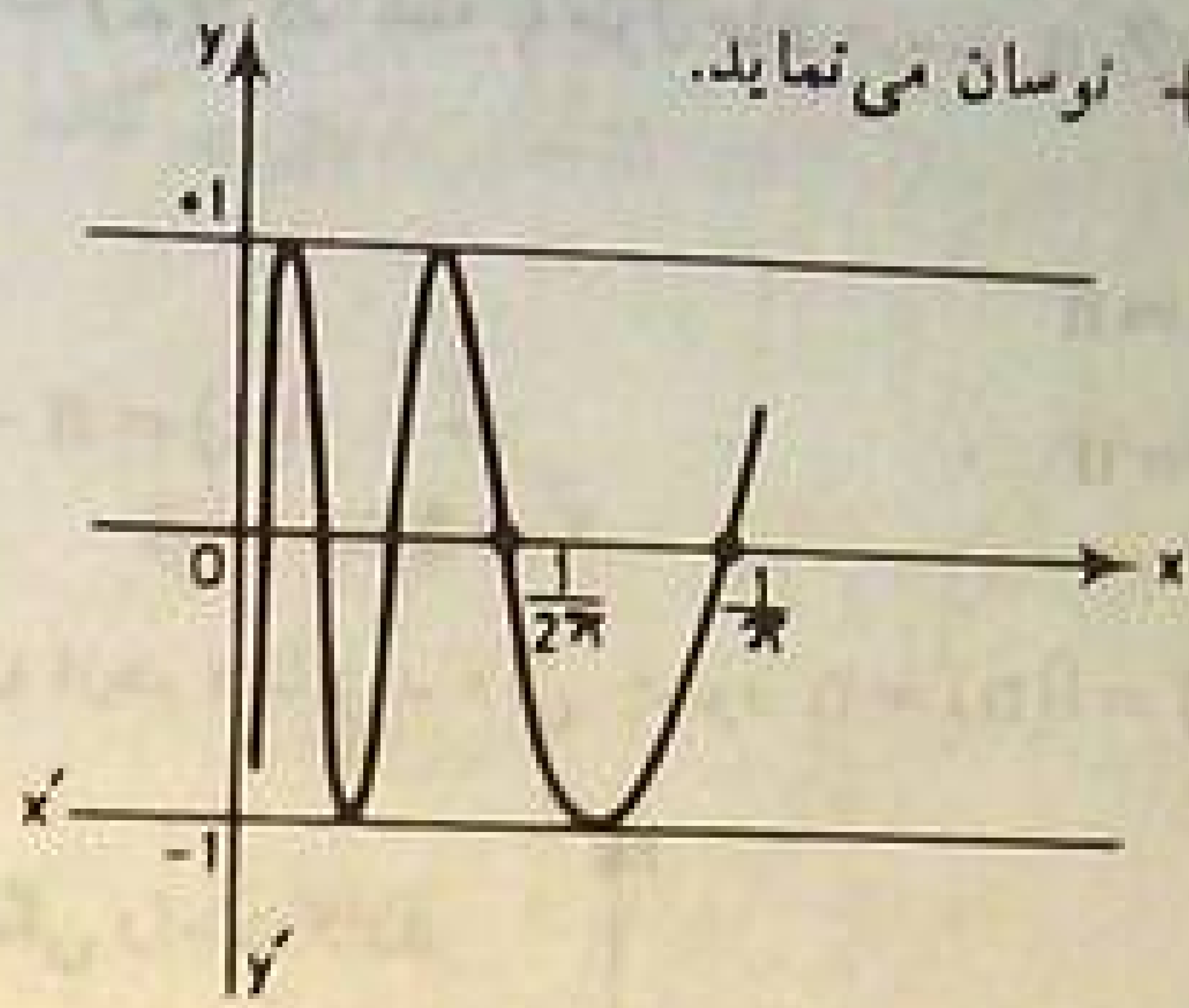
این تابع حد راست ندارد زیرا x نمی‌تواند از مقادیر بیشتر ازیك به‌سمت‌یـك میل كند

در نتیجه $\lim_{x\to 1^-} f(x)=0=f(1)$ بوده و تابع درنقطهٔ $x_0=1$ پیوستگی چپ دارد.



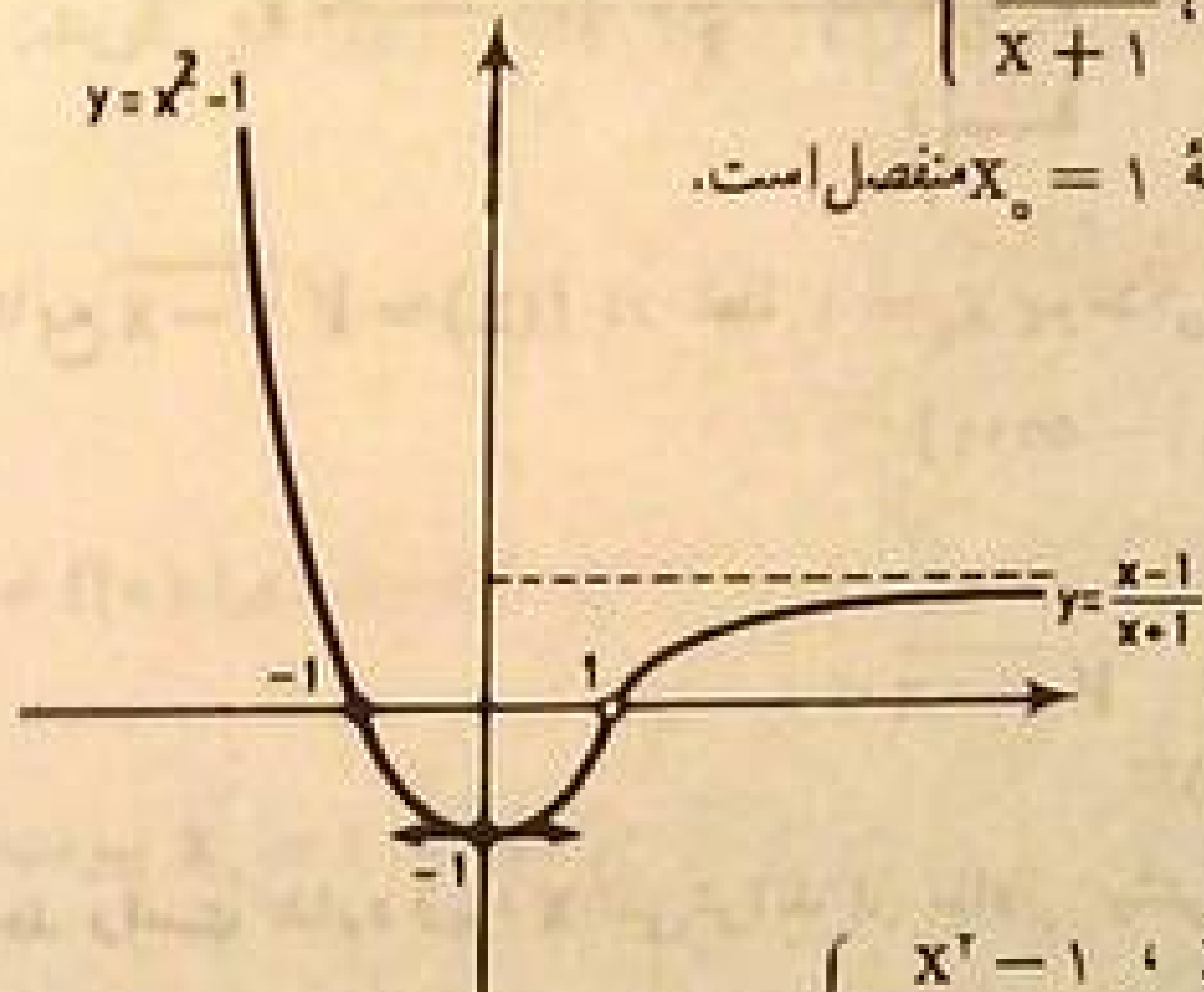
مثال۳ـ تابع $f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x} & ، x\neq 0\\ 0 & ، x=0\end{cases}$، درنقطه $x_0=0$ پیوسته نیست. زیرا وقتی که x بامقادیر

بزرگتر از صفر به سمت صفر میل می کند $\frac{1}{x} \to +\infty$ و ... $\sin\frac{1}{x}$ بدون اینکه به‌سمت حدی میل کند بین ۱ − و ۱ + نوسان می‌نماید.

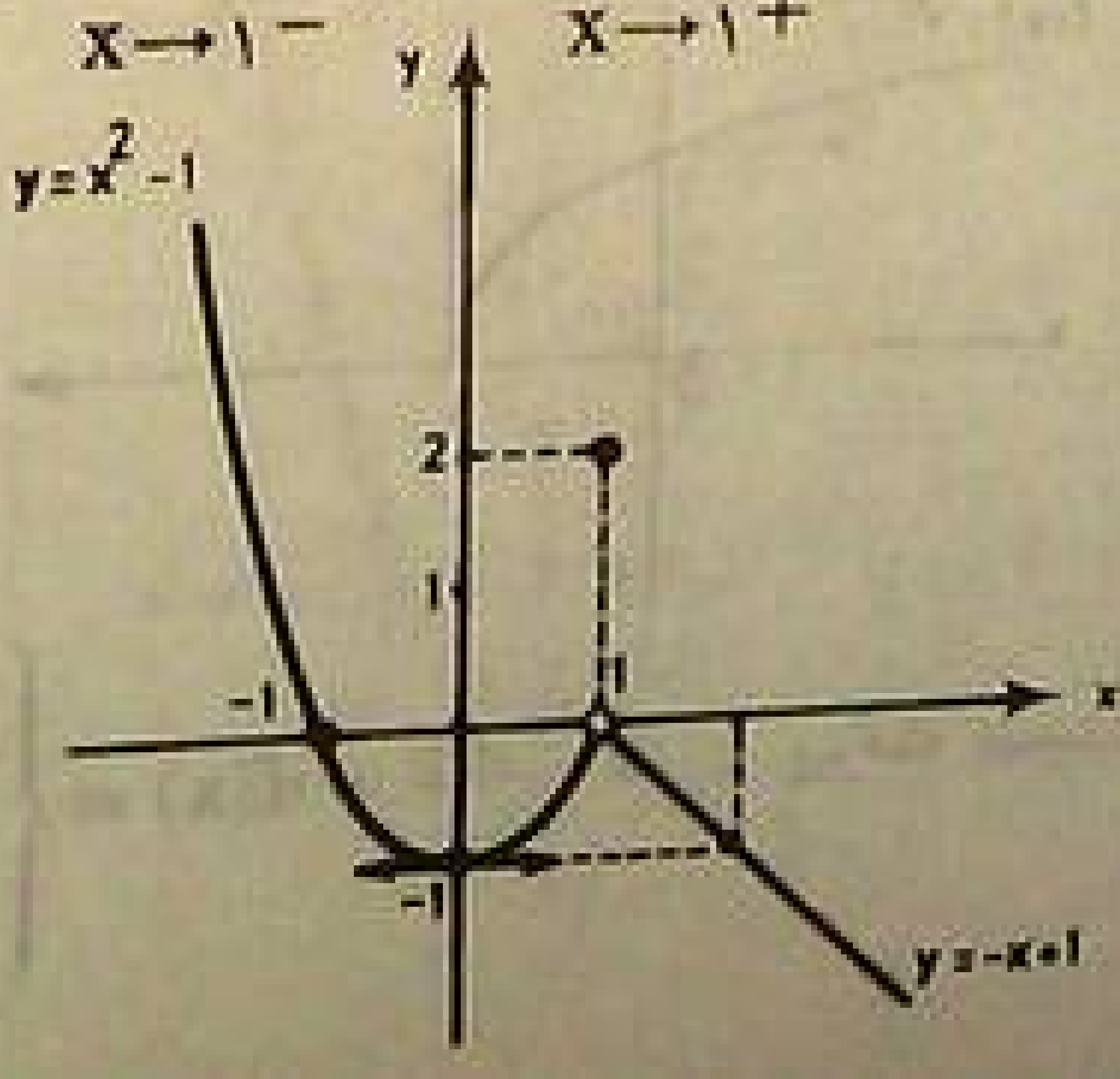


ج- تابع در نقطهٔ x_0 حد دارد ولی $f(x_0)$ یا معین نیست یا برابر با حد مزبور نیست.

مثال ۱- تابع
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & ، \ x < 1 \\ \dfrac{x-1}{x+1} & ، \ x > 1 \end{cases}$$
، در نقطه $x_0 = 1$ حد دارد ولی $f(1)$ تعریف نشده است پس تابع در نقطهٔ $x_0 = 1$ منفصل است.



مثال ۲- تابع
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & ، \ x < 1 \\ -x + 1 & ، \ x > 1 \\ 2 & ، \ x = 1 \end{cases}$$
در نقطهٔ $x_0 = 1$ حد دارد ولی با $f(1) = 2$ برابر نیست $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = 0 \neq f(1) = 2$ ، درنتیجه تابع در نقطهٔ $x_0 = 1$ منفصل است.



۲-۲۴ - قضایای پیوستگی

قضیهٔ اول- اگر f و g در x_0 پیوسته باشند $f \pm g$ نیز در x_0 پیوسته است.

قضیهٔ دوم- اگر f در x_0 پیوسته باشد، λf نیز در x_0 پیوسته است $(\forall \lambda \in R)$.

قضیهٔ سوم- اگر f و g در x_0 پیوسته باشند، تابع $f.g$ نیز در x_0 پیوسته است و اگر $g(x) \neq 0$ باشد، $\frac{f}{g}$ نیز در x_0 پیوسته است.

نتیجه- تابع $f(x) = x$ درهر نقطه پیوسته‌است ، بنا برقضیه(۳) تابع $g(x) = x^n$ (n نامنفی است) نیز چنین است. از این‌رو بااستفاده ازخاصیت‌های (۱) و(۲) می‌توان گفت که هر تابع چند جمله‌ای:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

پیوسته است.

به همین ترتیب می‌توان گفت که هر تابع کسری گویای $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ روی دامنهٔ تعریف یعنی برای $Q(x) \neq 0$ پیوسته است.

توابع قدر مطلق و $f(x) = \sin x$ و $g(x) = \cos x$ درتمام نقاط دامنهٔ تعریفشان پیوسته‌اند.

قضیهٔ چهارم- اگر f در نقطه x_0 پیوسته و درهمسایگی آن مثبت باشد، $\sqrt{f}$ نیز در x_0 پیوسته است.

قضیهٔ پنجم- اگر f درنقطه x_0 و g در نقطهٔ $y_0 = f(x_0)$ پیوسته باشند، تابع مرکب $h = gof$ در x_0 پیوسته است.

نتیجه- با استفاده ازمطالب بالا، ممکن است بررسی پیوستگی یك تابع دلخواه f را به بررسی پیوستگی توابع مقدماتی (مثل تابع توان، تابع مثلثاتی،...) که f با استفاده ازآنها ساخته می‌شود، برگردانیم. برای مثال تابع $f : x \longrightarrow \sin(\omega x + \varphi)$ پیوسته است، زیرا ترکیب دو تابع پیوسته زیر می‌باشد.

$$x \longmapsto (\omega x + \varphi) \longrightarrow \sin(\omega x + \varphi)$$

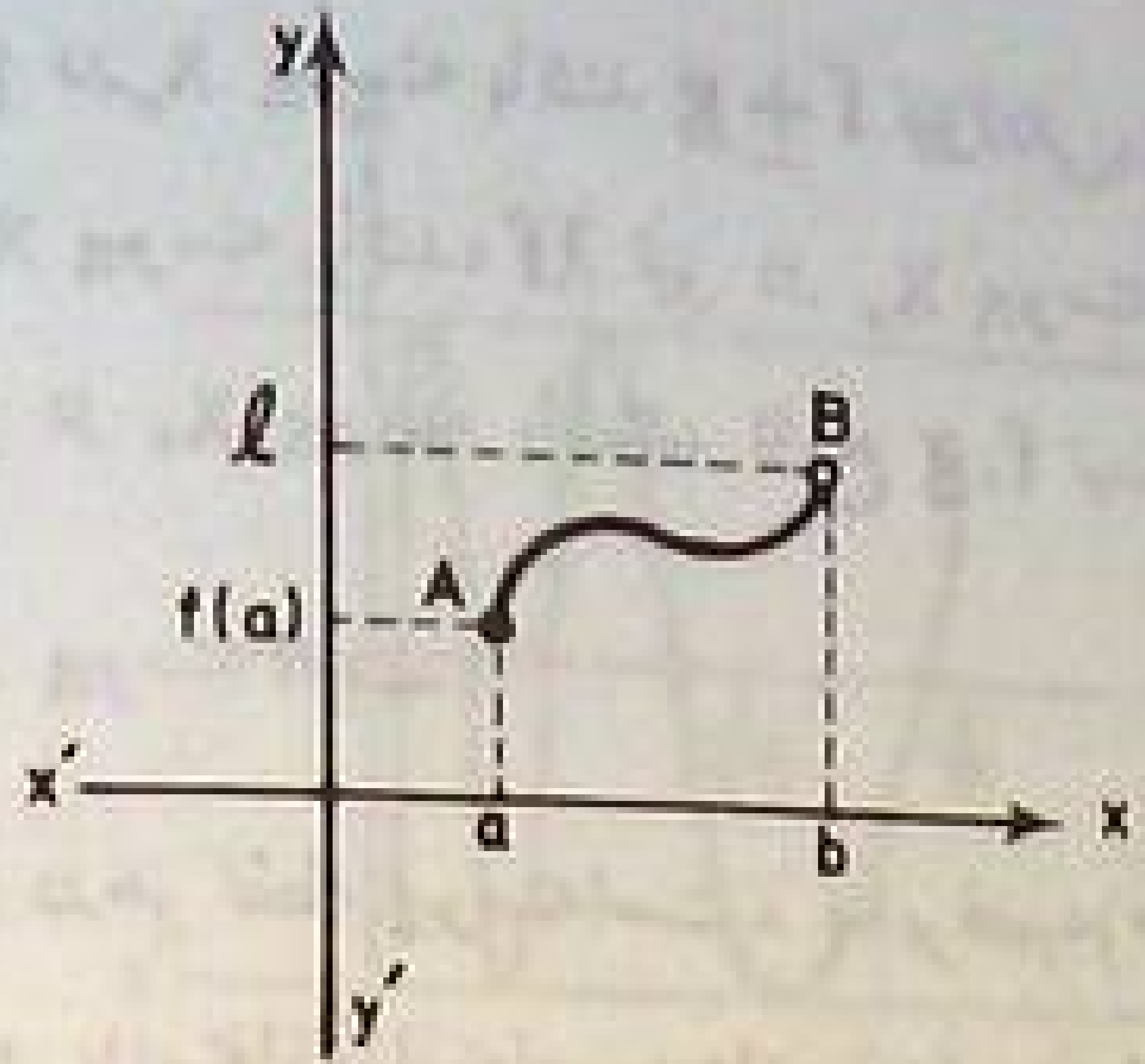
۲-۲۵- پیوستگی تابع در یك فاصله

تعریف ۱- تابع f را درفاصله $]a$ و $b[$ (یا $]a$ و $+\infty[$) پیوسته گویند در صورتیکه بازای هر نقطه بطول x_0 متعلق به این فاصله پیوسته باشد.

تعریف ۲- تابع f را در فاصله $[a$ و $b[$ که $a < b$ پیوسته گویند ، درصورتیکه :

الف: در فاصله $]a$ و $b[$ پیوسته باشد.

ب: در نقطه بطول $x = a$ پیوستگی راست داشته باشد.



نقطهٔ $A(a \text{ و } f(a))$ که متعلق به‌نمودار تابع است به‌نقطهٔ توقف موسوم‌است.
نقطهٔ $B(b \text{ و } \ell)$ که به‌نمودار تابع تعلق ندارد به‌نقطه حد موسوم است.

تعریف ۳ـ تابع f رادر فاصله $[b \text{ و } a[$ که $a<b$ پیوسته گویند درصورتیکه:

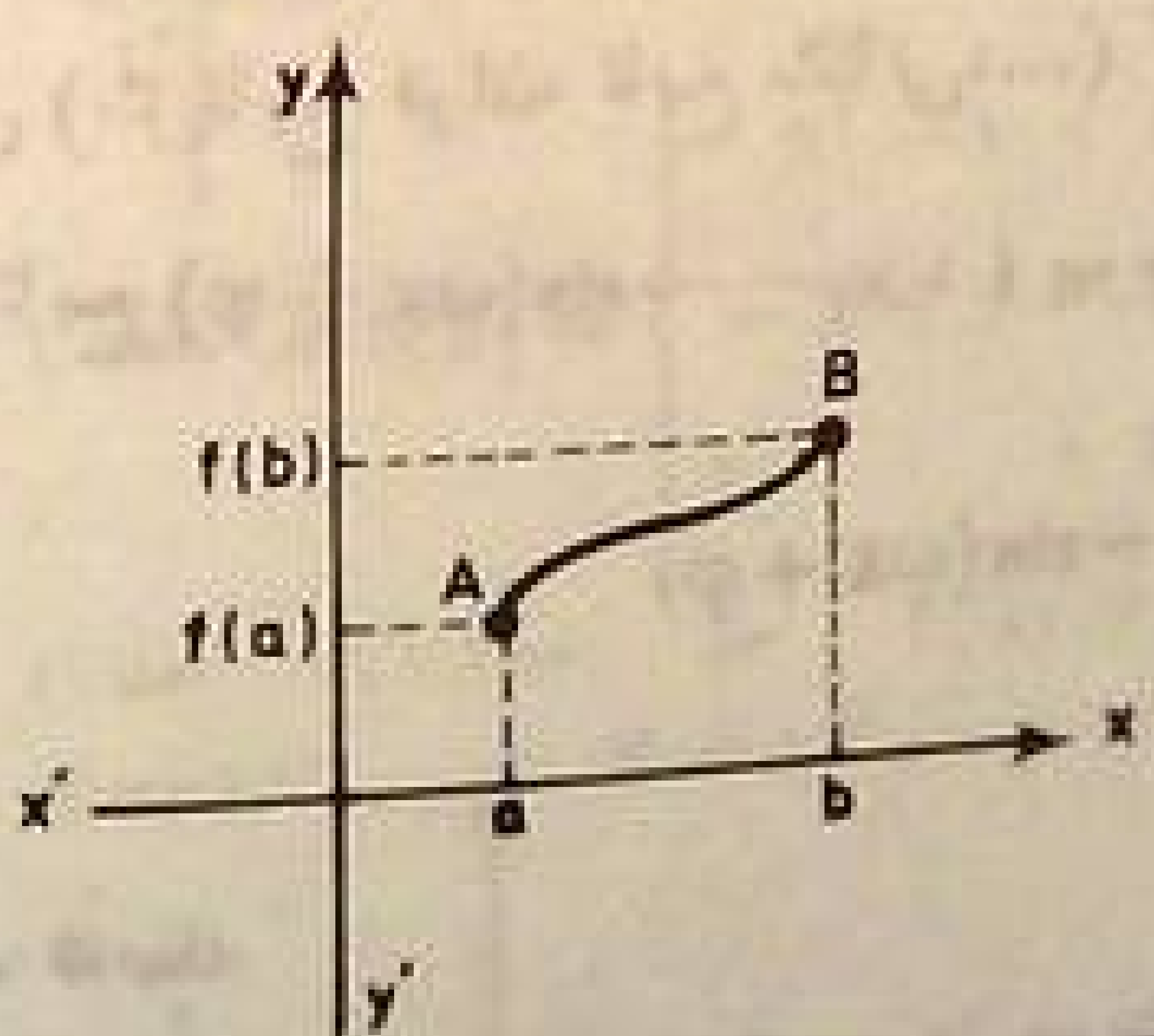
الف ـ در فاصله باز $]b \text{ و } a[$ پیوسته باشد.

ب ـ در نقطه بطول $x=b$ پیوستگی چپ داشته باشد.

تعریف ۴ـ تابع f رادر فاصله $[b \text{ و } a]$ که $a<b$ پیوسته گویند درصورتی که:

الف ـ در فاصله باز $]b \text{ و } a[$ پیوسته باشد.

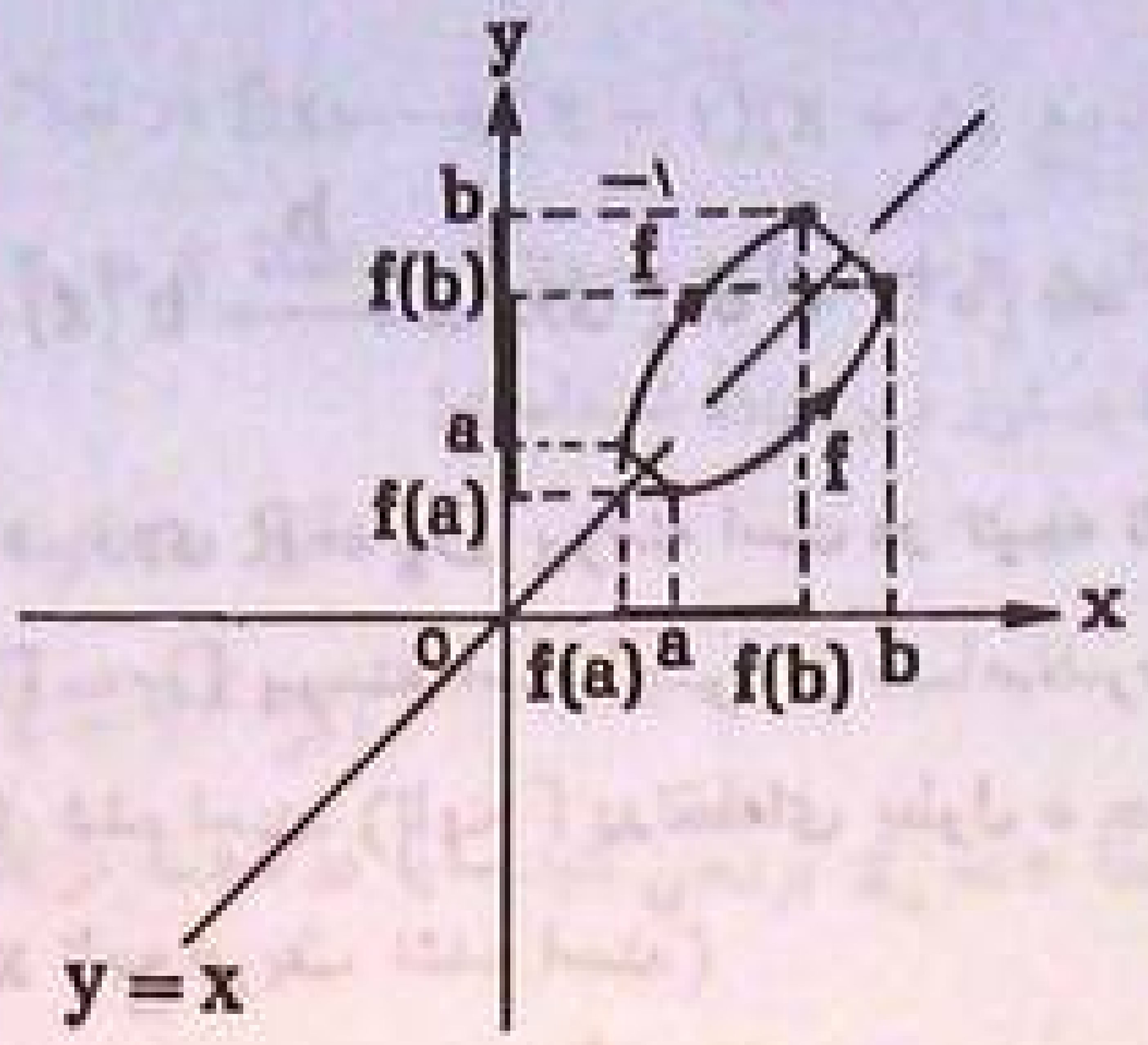
ب ـ در نقطهٔ به‌طول a پیوستگی راست و درنقطه به‌طول $x=b$ پیوستگی چپ داشته‌باشد



نقاط به مختصات $A\Big\vert^{a}_{f(a)}$ ، $B\Big\vert^{b}_{f(b)}$ را نقاط توقف نمودار تابع می‌گویند.

قضیه: اگر تابع f روی $[a, b]$ پیوسته و اکیداً صعودی باشد، معکوس پذیر است و تابع معکوس‌آن f^{-1} نیز روی $[f(a), f(b)]$ پیوسته و اکیداً صعودی است. (این قضیه بـ

اکیداً نزولی نیز درست است و از اثبات آن در این کتاب صرفنظر می‌کنیم).



مثال ۱- تابع $f(x)=x^3$ روی R پیوسته‌ویکنواست پس‌تابع معکوس‌آن $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$ نیز روی R پیوسته و یکنواست.

مثال ۲- تابع $y=\cos x$ در فاصله $[0 , \pi]$ پیوسته و یکنواست تابع معکوس‌آن:

$x=\mathrm{Arccos}\,y$ یا $y=\mathrm{Arccos}\,x$ نیز درفاصلهٔ $[-1 , +1]$ نیز پیوسته ویکنواست.

مثال ۳- با استفاده از قضایای پیوستگی، پیوستگی هریك ازتوابع زیر را درطول دامنهٔ تعریفشان بررسی کنید.

الف- $f(x)=x^5+2x^3$

ب- $f(x)=\dfrac{x^2-2x+2}{x^2-1}$

ج- $f(x)=x+1+\dfrac{x-3}{x^2-4}$

د- $f(x)=\sqrt{x}(x^2+1)$

ه- $f(x)=x+\sqrt{x^2}$

و- $f(x)=\dfrac{|x|}{\sqrt{x}}$

حل:

الف- f یك‌تابع چند جمله‌ای است که روی R معین وپیوسته است.

ب- f یك تابع خارج قسمت است که روی دامنه تعریفش $D_f=R-\{-1 , 1\}$ پیوسته است.

ج- تابع $x\xrightarrow{h} h(x)=x+1$ روی R پیوسته است و $x\xrightarrow{g} g(x)=\dfrac{x-3}{x^2-4}$ روی $D_g=R-\{-2 , 2\}$ پیوسته است. درنتیجه تابع f روی

$D_f=D_h\cap D_g=R-\{2,-2\}$ پیوسته است زیرا از مجموع دو تابع پیوسته تشکیل شده است.

د ـ تابع $x \xrightarrow{h} h(x)=\sqrt{x}$ روی $D_h=[0,+\infty[$ پیوسته است تابع $x \xrightarrow{g} g(x)=x^2+1$ هم روی $D_g=R$ پیوسته است در نتیجه تابع f روی ، $D_f=D_h\cap D_g=[0,+\infty[$ پیوسته است زیرا از حاصلضرب دو تابع پیوسته روی $D_f=[0,+\infty[$ تشکیل شده است. (تابع f درنقطه‌ای بطول $x=0$ فقط پیوستگی راست دارد زیرا سمت چپ $x=0$ تابع تعریف نشده است.)

هـ ـ تابع قدر مطلق $x \xrightarrow{h} h(x)=|x|$ روی $D_h=R$ پیوسته است و تابع $x \xrightarrow{g} g(x)=x$ هم روی $D_f=R$ پیوسته است در نتیجه تابع f روی $D_f=R$ پیوسته‌است زیرا از مجموع دو تابع پیوسته تشکیل شده است.

و ـ تابع قدر مطلق $x \xrightarrow{h} h(x)=|x|$ روی $D_h=R$ پیوسته است و تابع $x \xrightarrow{g} g(x)=\sqrt{x}$ هم روی $D_g=[0,+\infty[$ پیوسته است و می‌دانیم خارج قسمت دو تابع پیوسته وقتی پیوسته است که $g(x)\neq 0$ در نتیجه تابع f روی ، $D_f=D_h\cap D_g-\{x\,|\,g(x)=0\}=]0,+\infty[$ پیوسته خواهدبود.

تمرین

الف ـ پیوستگی: مسائل زیررا با مراجعه به‌تعریف شماره ۲ـ۲۲ (بدون استفاده از بحث α و β) حل کنید.

۱ـ نشان دهید که تابع $f:x\longrightarrow \frac{x+3}{x-2}$ در نقطهٔ $x_0=1$ پیوسته است.

۲ـ نشان دهید که تابع $f:x\longmapsto x^3+2x-3$ درنقطهٔ $x_0=2$ پیوسته‌است.

۳ـ نشان دهید که تابع $f:x\longmapsto \frac{2}{(x+1)^2}$ در نقطهٔ $x_0=0$ پیوسته است.

۴ـ نشان دهید که تابع $f:x \longmapsto \frac{x^2+x+1}{x-1}$ در نقطهٔ $x_0=2$ پیوسته است.

۵ـ نشان دهید که تابع $f:x \longmapsto (x-1)(x+5)$ در نقطهٔ $x_0=1$ پیوسته است.

۶ـ نشان دهید که تابع $f:x \longmapsto \sqrt{1+x}$ در نقطهٔ $x_0=2$ پیوسته است.

۷ـ تابع f به‌وسیلهٔ دستور زیر داده شده‌است:

$$f(x)=\begin{cases}|x-2| & \text{اگر } x\neq 2\\ 1 & \text{اگر } x=2\end{cases}$$

پیوستگی تابع f را در نقطهٔ $x_0=2$ بررسی کنید. آیا درنقطـهٔ مزبـور پیوستگی راست یا چپ دارد؟

۸ـ تابع f به‌وسیلهٔ دستور زیر داده شده است:

$$f(x)=\begin{cases}-x+1 & \text{اگر } x<0\\ x^2 & \text{اگر } x\geqslant 0\end{cases}$$

پیوستگی تابع f در نقطهٔ $x_0=0$ را بررسی کنید. آیا در نقطهٔ مزبور پیوستگی‌راست یا چپ دارد؟

۹ـ تابع f به‌وسیلهٔ دستورزیر داده شده است:

$$f(x)=\begin{cases}2x+2 ،& \text{اگر } x>1\\ 2x-2 ،& \text{اگر } x<1\\ 0 ،& \text{اگر } x=1\end{cases}$$

پیوستگی این تابع را در نقطهٔ $x_0=1$ بررسی کنید. آیا در نقطهٔ مزبور پیوستگی راست یا چپ دارد؟

۱۰ـ تابع f به‌وسیلهٔ دستور $f(x)=3x+\frac{|2x|}{x}$ و $f(0)=2$ داده شده است پیوستگی آنرا در نقطهٔ $x_0=0$ بررسی کرده ونمودار آنرا درصفحهٔ محورهای قائم رسم کنید.

۱۱ـ همان سؤال مسئله ۱۰ برای تابع g بادستور: $g(x)=3x+\frac{|2x|}{|x|}$

۱۲ـ تابع f بادستور زیر داده شده است:

$$f(x)=\begin{cases}x^2-\frac{\sqrt{(x-1)^2}}{x-1} & \text{اگر } x\neq 1\\ 2 & \text{اگر } x=1\end{cases}$$

پیوستگی تابع را در نقطهٔ $x_0 = ۱$ بررسی کرده ونمودار آن را در صفحهٔ مختصات قائم رسم کنید.

۱۳ـ تابع $f: x \longmapsto f(x) = (x - [x])$ مفروض است:

پیوستگی این تابع را در فاصله]۲و۳] بررسی کنید ودر فاصلهٔ [۳ و ۳ −] نمودار آن را رسم کنید.

۱۴ـ همان سؤال برای تابع :

$$f: x \longmapsto \frac{x}{۱ + [x]}$$

۱۵ـ همان سؤال برای تابع :

$$f: x \overset{f}{\longmapsto} [x] + [-x]$$

۱۶ـ تحقیق کنید که آیا تابع زیر در $x_0 = ۰$ پیوسته است؟

$$x \overset{f}{\longmapsto} \begin{cases} f(x) = x^۲ \sin\frac{\pi}{x} & \text{اگر } x \neq ۰ \text{ ،} \\ f(۰) = ۰ & \text{اگر } x = ۰ \text{ ،} \end{cases}$$

۱۷ـ پیوستگی تابع $x \overset{f}{\longmapsto} f(x) = x + \sqrt{|x^۲ - ۱|}$ را در نقطه $x_0 = ۱$ بررسی کنید.

۱۸ـ تابع $x \overset{f}{\longmapsto} f(x) = \begin{cases} x^۲ + ۱ \text{ ،} & x \leqslant ۰ \\ x + ۲ \text{ ،} & x > ۰ \end{cases}$ مفروض است پیوستگی این تابع را در نقطهٔ $x_0 = ۰$ بررسی کنید.

۱۹ـ تابع $x \overset{f}{\longmapsto} f(x) = \begin{cases} \frac{۱}{x(x+۱)} - \frac{۱}{x} \text{ ،} & \text{اگر } x \neq ۰ \\ ۱ \text{ ،} & \text{اگر } x = ۰ \end{cases}$ مفروض است پیوستگی این تابع را درنقطهٔ $x_0 = ۰$ بررسی کنید.

۲۰ـ نشان دهید تابع $x \overset{h}{\longmapsto} h(x) = \sin(۲x + \frac{\pi}{۳})$ در نقطه $x_0 = \pi$ پیوسته است.

۲۱ـ نشان دهید تابع $x \overset{f}{\longmapsto} f(x) = x + [x]$ در فاصله]۲و۳] پیوسته است.

۲۲ـ نشان دهید تابع $x \overset{f}{\longmapsto} f(x) = x[x]$ در فاصلهٔ]۲و۳] پیوسته است.

۲۳ـ تابع $x \overset{g}{\longmapsto} \begin{cases} g(x) = x\sqrt[3]{1-x} & \text{و} \quad x \leqslant 1 \\ g(x) = \sqrt{x-1} & \text{و} \quad x \geqslant 1 \end{cases}$ مفروض است پیوستگی این تابع را

درنقطهٔ $x_0 = 1$ بررسی کنید ونشان دهید که تابع $x \overset{g}{\longmapsto} g(x) = \sqrt{x-1}$ روی دامنهٔ تعریفش پیوسته است سپس g^{-1} را بدست آورید.

۲۴ـ تابع f در R با ضابطهٔ $\begin{cases} f(x) = \dfrac{|x|}{x}\sqrt{|x|} \text{ ، } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$ مفروض است.

الف ـ حد $f(x)$ وقتی که x به‌سمت صفر میل می کند چقدر است.

ب ـ نشان دهیدکه f در $x_0 = 0$ پیوسته است.

ج ـ نشان دهیدکه f روی R پیوسته است.

هـ ـ نشان دهیدکه‌تابع معکوس f برابراست با: $f^{-1}(x) = x|x|$.