انفجار ریاضیات

به‌کوشش ارسلان شادمان

انجمن ریاضی فرانسه، انجمن ریاضیات کاربردی و صنعتی فرانسه
برگردان رسمی به فارسی: انجمن ریاضی ایران

l'explosion des
MATHEMATIQUES

کتاب "انفجار ریاضیات" ترجمه فارسی از کتابی است که انجمن‌های ریاضی فرانسه منتشر کرده‌اند. همزمانی انتشار این کتاب را با شروع کار انجمن ریاضی ایران در ساختمان جدید واقع در پارک ورشو ـ خیابان استاد نجات‌الهی در تهران به فال نیک می‌گیریم. انتشار اولیه این کتاب به‌صورت الکترونیک و به‌طور رایگان در اختیار همه دوستداران ریاضی از طریق سایت انجمن ریاضی ایران www.ims.ir قرار می‌گیرد.

با پیگیری و سازماندهی علمی استاد ارجمند آقای دکتر ارسلان شادمان و با مساعدت دو دوره شورای اجرایی انجمن، تمام کارهای فنی این کتاب از تایپ و صفحه‌آرایی و ارایه اینترنتی توسط کارمندان محترم دبیرخانه انجمن تحت مدیریت آقای منصور شکوهی صورت پذیرفته است. نام مترجمان و ویراستاران هر فصل از این کتاب در اول فصل مربوطه آمده است.

جا دارد از طرف اعضای انجمن ریاضی از زحمات یکایک این عزیزان کمال تشکر را بنمایم. امیدوارم ارایه این کتاب در پیشبرد فرهنگ جامعه ریاضی سهم بسزایی را ایفا نماید.

سیدعبداله محمودیان

رئیس انجمن ریاضی ایران

شهریور ۱۳۸۴

فهرست مطالب

خلاصهٔ مطالب

پیش‌بینی وضع هوا یا اقلیم کار ساده‌ای نیست، بلکه مستلزم مدل‌سازی پدیده‌های متعدد با طبیعت گوناگون و دخالت چندین رشتهٔ علمی از ریاضیات گرفته تا زیست‌شناسی، انفورماتیک، فیزیک و شیمی است.

تلفن همراه امروزه یک وسیلهٔ نسبتاً عادی تلقی می‌شود. چه کسی هرگز یک تلفن همراه ندیده یا با آن تلفن نزده است؟ اما نادرند کسانی که به موارد علمی و فنی دخیل در آن بیندیشند.

در جهان امروز که مخابرات جایگاهی کلیدی دارد، رمزنگاری ترفند عمده‌ای است. این موضوع که به دانش پیچیده‌ای تبدیل شده است، نمی‌تواند از ریاضی‌دانانی در سطح بسیار عالی بی‌نیاز باشد.

خواه قابلیت مانور یک هواپیما مطرح باشد، خواه نگهداری مکانیکی یک سازهٔ پیچیده یا مدیریت عبور و مرور خودروها، پیشرفت در این زمینه‌ها تنها منوط به اختراعات صرفاً فنی نیست. این پیشرفت نیز زائیدهٔ پژوهش‌های مجردی نظیر نظریهٔ ریاضی کنترل است.

یک خط‌کش، یک مداد، مقداری مقوا، قیچی و چسب: برای فراهم ساختن خوشحالی ریاضیدانان و ایجاد مسائل زیبا، به چیزی جز این ابزار نیاز نیست. بررسی این مسائل، غالباً پس از انجام و به شکل غیرمنتظره، در مشاغل دیگر سودمند خواهد بود.

پیشرفت‌های بیولوژی مدرن و به‌ویژه ژنتیک ملکولی نیاز به ابزار جدید ریاضی دارند. مثال آن آمار و نقش آن در جستجوی ژن مسؤول سرطان سینه است.

تصاویر، خواه به شکل ذخیره‌سازی عددی در حافظهٔ رایانه‌ها و خواه در حین انتقال از نقطه‌ای به نقطهٔ دیگر در شبکهٔ اینترنت جای زیادی اشغال می‌کنند. خوشبختانه می‌توان بدون تنزّلِ کیفیّت آنها را فشرده و متراکم ساخت.

مقدمه
بر ترجمهٔ فارسی انفجار ریاضیات

به قلم: میشل والدشمیت (رئیس انجمن ریاضی فرانسه)

هدفِ این کتابچه اشاعهٔ ریاضیات بین جمعیتِ گسترده‌ای از خوانندگان است. متنِ اصلیِ آن به زبان فرانسه از سویِ انجمنِ ریاضیِ فرانسه (SMF) و انجمنِ ریاضیاتِ کاربردی و صنعتی (SMAI) انتشار یافت. در فرانسه، این دو انجمن مهمترین انجمنِ علمی هستند که خود را وقفِ ریاضیات کرده‌اند. ترجمهٔ متنِ کتاب به چند زبان، که یکی از آنها زبانِ انگلیسی است، مطرح شده است. ولی از این میان، ترجمه به زبانِ فارسی نخستین پیشنهادی بود که از سویِ استاد م. بهزاد و استاد ع. ایرانمنش، دریافت کردم. ماجرایِ آن در ملاقاتِ ما هنگامِ برگزاریِ مجمعِ عمومیِ اتّحادیهٔ بین‌المللیِ ریاضی (IMU) در شانگهای، ماهِ اوتِ ۲۰۰۲، رخ داد. انتشارِ نخستین چاپِ فرانسهٔ کتاب، در ژوئیهٔ ۲۰۰۲، شاهدِ پیروزیِ شایانِ توجّهی بود. به ویژه از سویِ دبیرانِ ریاضی با استقبال رو به رو شد. اعتقاد دارم که چاپِ فارسی نیز همان‌گونه، به پیروزی خواهد رسید.

وضعیّت در ایران و فرانسه یکسان نیست. در ایران، شما خانه‌هایِ ریاضیات دارید، که در بیش از ۱۳ شهرِ مختلف خارج از تهران راه‌اندازی شده‌اند. این خانه‌ها نقشِ کارآمدی در اشاعهٔ رشتهٔ علمیِ ما میانِ دانش آموزانِ دبیرستانی ایفا می‌کنند. در فرانسه، به استثنایِ دو موزهٔ علوم به نامهایِ کاخ اکتشاف و موزهٔ علومِ ویلِت، هیچ نهادی نظیرِ خانه‌های ریاضیاتِ شما نداریم. البته، چندین تشکّلِ اجتماعی به وسیلهٔ SMF، و تعدادی دیگر با حمایتِ SMF و SMAI به وجود آمده‌اند (از جمله، *Animath* و *Math en Jean*) که هدفشان کمک به افرادِ جوان در راستای استفاده‌از وقتِ آزاد برای

لذت بردن از ریاضی ورزی است. امّا هنوز یک ساختارِ زیربنایی منسجم برای این فعّالیّت‌ها، نظیرِ آنچه در ایران گسترده‌اید، نداریم.

از سویِ دیگر، در فرانسه و هم‌چنین در چندین کشورِ پیشرفته، با بی علاقگی دانشجویان نسبت به ادامهٔ تحصیل در رشته‌هایِ علوم رو به رو شده‌ایم. در آینده، به گونه‌ای روزافزون و بیش از پیش، نیازمندِ افرادی در علوم خواهیم بود که دارایِ پیش زمینهٔ نظری مستحکمی باشند. از جمله، فناوریِ پیشرفته این را ایجاب می‌کند. بنابراین، نیازمندیم با گستردگی هرچه بیشتر این آگاهی را به جامعه برسانیم که ریاضی همیشه همه جا حاضر است.

امیدوارم انتشارِ ترجمهٔ فارسیِ بروشورِ انفجارِ ریاضیات، در جهتِ رسیدن به هدفِ فوق سهمِ قابلِ توجهی داشته باشد. از معرفیِ این کتاب به شما، احساسِ سرور و شادمانی می‌کنم، به ویژه از آن رو که انجمن‌های ما، SMF و IMS، در حالِ تقویتِ بیشتر روابط بین خود هستند. امید و اطمینان دارم که این فرایند به گسترشِ خود ادامه خواهد داد.

میشل والدشمیت،
رئیس انجمن ریاضی فرانسه

Michel WALDSCHMIDT
Président de la Société Mathématique de France
miw@math.jussieu.fr
http://www.math.jussieu.fr/ miw

دیباچهٔ چاپ فارسی

انفجار ریاضیات آلبومی است که منظرهٔ چندین قلهٔ جالب از سرزمین‌های فتح شده در جریان گسترش روابط بین ریاضیات محض و کاربردی را، که تنها یکی از فصل‌های مهم فعالیت انسانیِ دهه‌های آخر قرن بیستم است، نمایش می‌دهد. البته از همهٔ اشخاص (حتی از نامدارانِ علم) نمی‌توان انتظار داشت که در گوشه و کنار جهان به یک شکل زیباییِ روزافزونِ این تعامل را تحسین کنند. انگیزهٔ دست یازیدن به ترجمهٔ کتاب را شاید بتوان به منزلهٔ احساس نیازی تعبیر کرد که بر اثر علاقه به نشان دادن زیبایی‌های آلبوم به اطرافیان و افرادِ خانواده، دست می‌دهد. انگیزهٔ تألیف متن اصلی کتاب ناشی از احساس نیازی مشابه است. این نکته را از اشارات پروفسور میشل والدشمیت در تقریظ بر کتاب حاضر می‌توان دریافت.

آفرینشِ هنری، ارائهٔ نمایشنامه و بازی در نمایش، هیچگاه به شکل خود به خود صورت نمی‌پذیرد. البته این‌ها وابسته به نیکخواهی تعدادی افراد معتقد، مصمّم و پابرجا هستند. ولی همچنین و شاید بیشتر به نهادهایی بستگی دارند که در جامعه کاملاً استقرار یافته باشند. یک محیط مناسب برای شکوفایی هنرمندانِ مستعد باید، در همهٔ ابعادِ قابل تصور، از مختصاتِ کارآمدی برخوردار باشد. باید سرمایه‌گذاری کرد، هم از نظر معنوی و فرهنگی و هم به کمک ابزارهای مادیِ بنیادین و کاملاً مشخّص. انجمن‌های علمیِ ما که باصفت «فوایدِ عامّه» موصوف‌اند، مسلماً بخشی از وظیفهٔ تبلیغات برای رشتهٔ علمی خود را بر عهده دارند، زیرا نمایندهٔ اصلی رشته‌های موردِ بحث، همین انجمن‌ها هستند. اما، رسانه‌های عمومی در کلِ اجتماع بسیار مؤثرترند، مثلاً بیش از SMF (انجمن

ریاضی فرانسه) و SMAI (انجمن ریاضی کاربردی و صنعتی) یا IMS (انجمن ریاضی ایران) جامعهٔ فرانسه یا ایران را تحت تأثیر قرار می‌دهند. ما وظیفه داریم نظر مسؤولین رسانه‌های همگانی را هم در سطح محلی و کشوری و هم در سطح جهانی متوجه این نکته کنیم تا به آگاهی عموم برسانند که ادامهٔ حیاتِ ما، تابعی است از همکاری و تعاون بین افرادِ مختلف و نهادهای گوناگون، دولتی و غیردولتی، در داخل کشور و در خارجِ آن. این اعتقاد، مستلزم فعالیت‌های جسارت آمیزی است که از هر گونه گرایشِ سیاسی فراتر می‌رود و موجب می‌شود علم را پیش ببریم، همان‌گونه که طبیعتِ علم ایجاب می‌کند، یعنی دانش بدون مرز.

یکی از نمونه‌های آن، پروژهٔ تحقّقِ چاپِ اصلیِ انفجارِ ریاضیات است، همان‌گونه که خواننده با نگاه به صفحات رو و داخل جلد چاپ فرانسهٔ کتاب، که ترجمهٔ آن اینجا آمده است، ملاحظه خواهد کرد. به عنوانِ نمونه‌ای دیگر، اجازه دهید همین ترجمهٔ فارسی را مطرح کنم: این ترجمه اساساً میوهٔ نظرهای دو شخصیتِ نیک‌خواه، مهدی بهزاد رئیس انجمن ریاضی ایران و میشل والدشمیت رئیس انجمن ریاضی فرانسه است، که در اثنای برگزاریِ مجمع عمومیِ اتحادیهٔ بین‌المللیِ ریاضی، در ماه اوت ۲۰۰۲ مبادله کردند. پس از آن، مدیون شورای اجراییِ انجمن ریاضی ایران است، که با پیشنهادِ دکتر بهزاد موافقت کرد. پیشنهاد این بود که متن کتاب فرانسهٔ انفجار را در اختیار بنده قرار دهند تا به فارسی ترجمه کنم. همین امر، وسیله شد که مطالب فراوانی بیاموزم، هم از طریق مطالعهٔ متن و هم با ارتباط مفصل و رد و بدل کردن نامه‌های الکترونیک بین والدشمیت، بهزاد و بنده که سرانجام به تنظیم و امضای قرارداد بین دو انجمن کشیده شد. این همکاری در جهات گوناگونی ثمربخش است که از همان آغاز به چشم می‌خورد و اکنون افق آیندهٔ امیدبخشی را در این راستا باز کرده است که بین SMF و IMS دیرپا خواهد بود.

در فاصلهٔ آبان تا اواخر اسفند ۱۳۸۱، موفق شدم چند نفر از استادان برجسته را قانع کنم که به عنوان مترجم یا ویراستار مرا در انجام این مهم یاری دهند. با تلاش بی وقفهٔ این گروه، توانستیم دستنویس را آماده کنیم. در دههٔ آخر اسفند ۸۱، پیش از فرصت مطالعاتی و عزیمت به دانشگاه پردو (در وست‌لافایت، امریکا) دستنویس را برای حروف‌نگاری در اختیار دبیرخانهٔ انجمن ریاضی ایران قرار دادیم. امیدوار بودم صفحه‌آرایی پیش از پایان سال ۲۰۰۳ تمام شود، اما چنین نشد و هنگامی که در دی‌ماه ۸۲ از فرصت مطالعاتی برگشتم، پیشرفت حروف‌نگاری تا پایان صفحه‌آرایی خیلی فاصله داشت. سازماندهیِ این کارِ فنی در دبیرخانهٔ انجمن پیچیده‌تر از آن بود که قبلاً تصور می‌کردم، کند بود اما با نظم خاصی مرتب شده بود. این نوع تأخیر طبیعتاً دلپذیر نیست، اما سرانجام دیدم که از دید

کمال گرایی، آن‌قدر هم بد نیست. در واقع، با دو ـ سه برابر تلاش و تصحیحِ چند باره تا آنجا که توانستم از اشتباهات چاپی و لغزش‌هایی که از دید خودم یا همکارانم پنهان مانده بود، کاستم.

لازم می‌دانم از همهٔ همکارانی که ما را در بارورساختن این ترجمه یاری داده‌اند، سپاسگزاری کنم. پیش از همه، مدیونِ پدیدآورندگان متنِ اصلیِ فرانسهٔ کتاب هستیم. پس از آن، همان‌گونه که قبلاً هم اشاره کردم، از پندارِ نیکِ استاد مهدی بهزاد و استاد میشل والدشمیت ممنونم. سپس از اعضای شورای اجرایی انجمن در دو دورهٔ متوالی که با این مدت قرین بود سپاسگزارم. از ذکر نام یکایک مترجمین و ویراستاران در اینجا خودداری می‌کنم، زیرا در هر مقاله نام آنان را نوشته‌ایم. همهٔ کارمندانِ دفتری در دبیرخانهٔ انجمن ریاضی ایران متحمل زحمات فراوان برای تایپ، نمونه‌خوانی، تهیه و توزیع این صفحات شده‌اند. از ایشان ممنونم و به عنوان نمادین و در رأس آنها از آقای منصور شکوهی و خانم فریده صمدیان به ویژه تشکر می‌کنم. آقای مزدک پاکزاد در انتقال و پردازش شکل‌ها و طراحی روی جلد دبیرخانهٔ انجمن را یاری داده‌اند. از زحمات ایشان نیز قدرشناسی می‌کنم.

نتیجهٔ این تلاش، بی‌گمان هنوز کامل نیست. از خوانندگان ارجمند در خواست می‌کنم که عیب و نقص‌ها را به حساب بنده بگذارند و با گوشزد آن به نشانی انجمن یا اینجانب به ما کمک کنند تا چاپ‌های آینده را کم عیب و نقص‌تر جایگزین کنیم.

تهران، بیست و ششم مرداد ۱۳۸۴
ارسلان شادمان

.

پیش‌گفتار

نویسندگان: میرَی مارتَن ـ دِشان، پاتریک لوتالِک [1]

مترجم: ارسلان شادمان

ویراستاران: فرج‌الله محمودی، شهناز عباسپور

امروزه در وضعیتی زندگی می‌کنیم که باید آن را دست کم تناقض آمیز خواند. ریاضیات نه تنها ابزاری بی‌بدیل در شکل‌گیریِ دقت و استدلال است، بلکه نیروی شهود، قدرت تخیّل و روحیهٔ نقّاد را پر و بال می‌دهد؛ ریاضیات، همچنین زبانی مشترک بین ملت‌ها و عنصری پرقدرت در فرهنگ است. اما علاوه بر این‌ها، به کمک رابطهٔ دو جانبهٔ کنش‌ها و واکنش‌ها با سایر علوم، ریاضیات در تکوین مفاهیم و بکارگیری اشیاء و موضوع‌های زندگی روزمرّهٔ ما، نقشی روزافزون ایفا می‌کند. و اما به‌طور عام باید گفت اکثریت شهروندان ما که غالباً معنای ریاضیات را از دست داده‌اند، نسبت به واقعیت این امر، کاملاً ناآگاهند. گاهی عده‌ای، از جمله برخی از مسؤولان بلندپایه، با لحنی بی‌پروا فخرفروشانه اقرار می‌کنند که «از ریاضی هیچ نمی‌دانند» یا «نمرهٔ ریاضی آنها صفر است» و یا آن که مفید بودن ریاضی را انکار می‌کنند.

---

[1] Martin-Deschamps, Mireille et Le Tallec, Patrick: *Préface*, in: L'explosion des mathématiques, SMF et SMAI, Paris, 2002, p. 5-6

برای این تناقض و ادراک نابسامان، می‌توان توضیحاتی آورد که شاید با ماهیّت خاص ریاضیات توجیه شود. ریاضیات مشتمل بر نظامی از دانش است که گرچه از ارتباط با سایر علوم و با دنیای واقعی تغذیه می‌شود، ولی خود نیز به تنهایی به تقویت خویش می‌پردازد: نظریه‌های ریاضی نه تنها همدیگر را نابود نمی‌کنند، بلکه هر یک بر روی دیگری ساخته می‌شود. در جهت عکس، هر چند تعداد فراوانی از پژوهشگران ریاضی پیش از هر چیز مجذوب جنبهٔ روشنفکری و حتی زیبایی‌شناسی رشتهٔ خود شده‌اند، گاهی می‌بینیم که کاربردهای غیرمترقبه‌ای هم خودنمایی می‌کند. البته، با آن که کاربردها به غنی‌سازی پژوهش کمک می‌نمایند، اما نمی‌توانند به تنهایی آن را هدایت کنند.

تعادل ظریفی که به این ترتیب بین سازه‌های گسترش داخلی و خارجی وجود دارد، باید با تمام قدرت حفظ شود. هر نیرویی که بخواهد فعالیت یا پژوهش ریاضی را فقط با کاربردهای بالقوّهٔ آن مشخص کند، مانند آن است که خواسته باشد این فعالیت و پژوهش را از هستی ساقط کند.از سوی دیگر، برخلافِ آنچه که در ایالات متحدهٔ آمریکا و اتحاد جماهیر شوروی دیدیم، اختصاص امتیاز بیشتر به اصل موضوعی‌سازی و بررسی ساختارها و پویایی داخلی ریاضیات، همانند آنچه در دههٔ ۱۹۴۰ برای ریاضیات فرانسه اتفاق افتاد، و چندین دهه پس از آن نیز ادامه یافت، موجب شد که گسترش ریاضیات کاربردی به تأخیر افتد. سازه‌های پیشرفت، غالب اوقات در مرزهای دانش مورد نظرند.

امروزه خوشوقتیم که می‌بینیم ریاضیات ارتباط‌های قوی با سایر علوم و بخش‌های متعدد اقتصادی را از سر گرفته و حتی ارتباط‌های جدیدی را به وجود آورده است. امروز، مرز بین ریاضیات محض و کار بسته به سایه روشن کمرنگی تبدیل شده است. اساسی‌ترین بخش‌های ریاضی در حل مسائلی که روز به روز پیچیده‌تر فرا روی فناوری قرار می‌گیرند به کار می‌روند. مثلاً حوزه‌هایی مانند هندسهٔ جبری و نظریهٔ اعداد، کاربردهای

غیرقابل پیش بینی در نظریهٔ کدگذاری و رمزنگاری پیدا کرده‌اند. همچنین ارتباط ریاضیات با امور مالی و بازرگانی چنان شدت گرفته است که می‌تواند به ارزیابی محصولات بیش از پیش پیچیدهٔ مالی ـ بازرگانی به‌عنوان تابعی از نیازها و تقاضاهای دست‌اندرکاران اقتصاد بپردازد و حتی محصولاتی را در این زمینه ابداع و تولید نماید.

با این وصف، در زمینهٔ اطلاع‌رسانی و ایجاد حساسیت، کار مهمی در پیش داریم تا چهرهٔ آن را، که به اندازهٔ کافی تحول نیافته است، دگرگون سازیم و کاری کنیم که همهٔ جنبه‌ها و توانمندی‌های دنیای ریاضیات و کاربردهای آن کشف شود. هدف این مجموعه مقاله آن است که ریاضیات را با جلوه‌های متنوع آن، یعنی علمی، فنی، فرهنگی و اجتماعی، بشناساند. هم چنین، این کتاب می‌خواهد روی تنوع و جهانی بودنِ رشته‌ای از دانش تکیه کند که نه تنها با فیزیک، شیمی، اقتصاد و زیست‌شناسی، بلکه با تاریخ، موسیقی و نقاشی نیز ارتباط خود را حفظ می‌کند. ریاضیات همه جا حاضر است. بدون ریاضیات، خواب رایانه را هم نمی‌شود دید، شبکه‌های اطلاع‌رسانی وجود ندارند، تلفن همراه موجود نیست، کارهای طراحی و تجسم ساختِ خودرو و هواپیما برچیده می‌شود، نظام موقعیت‌یابی به وسیلهٔ ماهواره‌ها از بین می‌رود، پردازشِ سیگنال، کدگشاییِ ژِنوم و تشخیص ژن‌ها، پیش‌بینیِ هواشناسی، رمزنگاری، کارت‌های الکترونیک، روبات‌ها، همه و همه بدون ریاضیات معدوم خواهند شد.

گذشته از نقشی که ریاضیات به‌عنوان یک علم دانشگاهی و تعلیم پایه در مدارس ایفا می‌کند، در زندگی روزمرهٔ امروزی نیز همه جا حاضر است. ریاضیات هم از گسترش علمی و فناوری امروز پیروی می‌کند، هم آن را همراهی می‌کند و هم گاهی از آن سبقت می‌گیرد، چرا که این پیشرفت علمی و فناوری، همان‌گونه که از اکتشافات روی هم انباشته شدهٔ گذشته بهره می‌گیرد، تازه‌ترین نتایجِ پژوهش‌های بنیادی معاصر را نیز به خدمت می‌خواند. سرانجام باید گفت که نیاز به ریاضیات، با شتاب گرفتن جهش‌ها

و آفرینش‌های فناوری، افزایش می‌یابد. نمی‌توان ریاضیات را نادیده گرفت در حالی که با نظام‌های پیچیده‌ای سر و کار داریم و می‌بینیم که دستکاری و تجزیه و تحلیل این نظام‌ها و تسلط بر آنها ضروری است.

در ایالات متحدهٔ آمریکا این موضوع به خوبی درک شده است، زیرا NSF (بنیاد ملی تحقیقات، نهادی که در سطح فدرال وظیفهٔ توزیع اعتبار جهت تحقیقات دانشگاهی را بر دوش دارد) از سال ۲۰۰۰ به بعد تصمیم گرفته است پشتیبانی مالی خود را از ریاضیات به طور چشمگیری افزایش دهد. بخت نیک ما فرانسوی‌ها این است که مکتب ریاضی فرانسه به‌صورت یکی از بهترین مکاتب ریاضی دنیا باقی است و فرهنگ ریاضی دانشمندان و مهندسینِ ما در سطح بسیار بالایی در مقیاس جهانی قرار دارد. تعداد جایزه‌های فیلدز[۱] که هم‌ارز جایزهٔ نوبِل[۲] در ریاضیات است، زیرا جایزهٔ نوبل در ریاضیات وجود ندارد، یکی از شاهدهای این مدّعاست. اخیراً در ژوئیهٔ ۲۰۰۰، هنگامی که سومین کنگرهٔ اروپایی ریاضیات در بارسلون[۳] برگزار می‌شد، از ۱۰ نفر لورِآ[۴] که با داشتن بیشترین امتیاز پیشنهاد شدند، پنج نفر برخاسته از مکتب ریاضیات فرانسه بود. بیایید وسایلی فراهم کنیم، تا این سطح عالی حفظ شود.

میری مارتن ـ دِشان
رئیس انجمن ریاضی فرانسه از ۱۹۹۸ تا ۲۰۰۱
پاتریک لوتالک
رئیس انجمن ریاضیات کاربسته و صنعتی از ۱۹۹۹ تا ۲۰۰۱

Mireille Martin-Deschamps
Présidente de la SMF de 1998 à 2001
Patrick Le Tallec
Président de la SMF de 1998 à 2001

۱ Fields ، ۲ Nobel ، ۳ Barcelone ، ۴ Lauréat

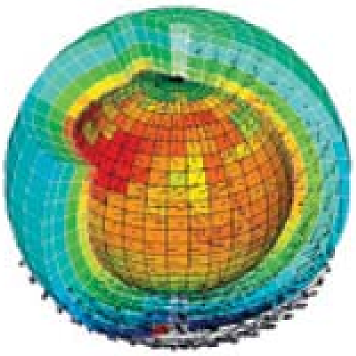
هوا چگونه خواهد بود

نویسنده: کلود بادوان [۱]

مترجم: ارسلان شادمان

ویراستاران: فرج‌الله محمودی ، شهناز عباسپور

پیش‌بینی وضع هوا یا اقلیم کار ساده‌ای نیست، بلکه مستلزم مدل‌سازی پدیده‌های متعدد با طبیعت گوناگون و دخالت چندین رشتهٔ علمی از ریاضیات گرفته تا زیست‌شناسی، انفورماتیک، فیزیک و شیمی است.



نمای هنری جعبه‌های محاسبهٔ یک مدل پیش‌بینی هوا یا اقلیم

(تهیه تصویر از L.Fairhead LMD/CNRS)

[۱] Basdevant, Claude: *Le temps qu'il fera*,
in: L'explosion des mathématiques, SMF et SMAI, Paris, 2002, p. 7-10

دیرزمانی است پشت صحنهٔ گزارش پیش‌بینی وضع هوا برای دوره‌های آینده، که هر شب در تلویزیون به‌وسیلهٔ گویندهٔ جذابی برای ما تشریح می‌شود، دیگر از قورباغه و دماسنج خبری نیست، و به جای آن‌ها، رایانه‌های ابرقدرتی وجود دارند که اندازه‌گیری‌های بی‌شمار به‌دست آمده از ماهواره‌ها، و هم‌چنین قوانینی از مکانیک، فیزیک و ریاضیات (گاهی اوقات بسیار جدید) را به خوردِ آن‌ها داده‌اند.

برای آن که رایانه‌ها بتوانند پیش‌بینی‌هایی فراهم کنند، باید قبلاً آنچه را یک مدلِ عددی پیش‌بینی هوا نامند، با پختگی تدارک ببینند. اجمالاً، یک چنین مدل پیش‌بینی که حالت جو زمین را نشان می‌دهد، مدت ۸ تا ۱۰ روز اعتبار دارد، و در این راستا از مقادیر معیارهای هواشناختی (سرعتِ باد، دما، رطوبت، فشار، ابرها و غیره) در مرکز «جعبه‌هایی» که حدود ۵۰ کیلومتر طول و عرض و چند ده تا چند صد متر ارتفاع دارند، کمک می‌گیرند. تقسیم کردن سرتاسرِ جوّ زمین به شکل تخیّلی به چنین جعبه‌هایی اجتناب‌ناپذیر است، زیرا مشخص کردن معیارهای هواشناختی در همهٔ نقاط جوّ زمین ممکن نیست (زیرا تعداد این نقاط بینهایت است!). اصولاً هرقدر این جعبه‌ها کوچکتر باشند، توصیف حالتِ جوّ مشخص‌تر و به همین نسبت پیش‌بینی وضع هوا هم دقیق‌تر خواهد بود. اما، در عمل طول و عرض جعبه‌ها را نمی‌توان کوچکتر از ۵۰ کیلومتر در نظر گرفت، وگرنه، توان بزرگترین رایانه‌ها هم برای پردازش داده‌ها کفایت نخواهد کرد. در واقع، لازم است که محاسبات در مدت زمان مفیدی، یعنی دقیقاً کمتر از ۲۴ ساعت، تکمیل شود.

با فرض بر این که در آغاز دورهٔ پیش‌بینی، حالت جوّ شناخته شده باشد، مدل مورد بحث، با استفاده از قوانین دینامیک و فیزیک، محاسبهٔ تحول حالت جوّ را به رایانه می‌سپارد. تحوّل برحسب زمان، گام به گام و به فاصله‌های زمانیِ چند دقیقه محاسبه می‌شود. پیش‌بینی عددی وضع هوا بر قواعدی استوار است که از اوایل قرن بیستم شناخته شده بود، امّا بکارگیری عملی آن تا سال‌های ۱۹۴۰ تا ۱۹۵۰ و ظهور نخستین رایانه‌ها به تأخیر افتاد.

از اندازه‌های هواشناختی نمی‌توان مستقیماً بهره‌برداری کرد

برای پیش‌بینی مطابق طرح مطلوب فوق، نخستین مسأله، شناختن «حالتِ آغازین جوّ زمین» است. مشاهداتِ معمول برای مطابقت با این مسأله فاصلهٔ زیادی دارند. ایستگاه‌های هواشناسی زمینی به‌صورت مناسبی در سطح کرهٔ زمین توزیع نشده‌اند و

اندازه‌گیری‌های اندکی هم از نقاط مرتفعِ جو فراهم می‌سازند. اما ماهواره‌ها هم غالباً پشت سر هم حرکت می‌کنند یعنی دائماً برداشت‌های متوالی از زمین دارند. بنابراین، اندازه‌گیری‌های به‌دست آمده در همهٔ نقاط مربوط به یک لحظهٔ مشترک نیستند. از سوی دیگر، ماهواره‌ها کمیّت‌هایی را اندازه‌گیری می‌کنند که مربوط به تمام ضخامت قشر جّوی است (و آن هم عموماً به جریان انرژی دریافتی برای طیف معیّنی از طول موج‌ها محدود می‌شود) و در واقع اندازهٔ کمیّت‌های هواشناختی (باد، دما، رطوبت و غیره) را که در معادلاتِ مدل‌ها دخالت دارند، به‌دست نمی‌دهند.

پس آنچه در اختیار داریم، انبوهی از داده‌های پراکنده مربوط به ۲۴ ساعت است که به شکل ناهماهنگی روی سطح کرهٔ زمین توزیع شده‌اند. حال باید با این داده‌ها به تدوین «اولین» پیش بینی، یعنی ساختن یک حالت هواشناسی «آغازین» بپردازیم که مدل مورد بحث بتواند تحول آن را شبیه‌سازی کند. و اما، بر اثرِ تحقیقاتی که در رشتهٔ **بهینه‌سازیِ دینامیک** صورت گرفته است و دانشمند روسی لِف پونتریاگین[۱] (۱۹۰۸-۱۹۸۸) و مکتب ریاضی فرانسه سهم به‌سزایی در آن داشته‌اند، خوشبختانه در سال‌های ۱۹۸۰ روش‌هایی به نام «شبیه‌سازی تغییراتی» فراهم شد و بدین ترتیب موفق شدند حالت آغازین را به شکلی بهینه بازسازی نمایند. فکر زیر بنایی این روش‌های عملی، از سال ۲۰۰۰ در موسسهٔ هواشناسی فرانسه (مِتِئوفرانس)[۲] این بود که به‌گونه‌ای مسیرِ مُدلِ عددی را مجبور کنند از «نزدیکِ» داده‌های مشاهده شده در ۲۴ ساعت گذشته عبور کند. البته، شبیه‌سازی تغییراتی، یگانه تکنیک جدید ریاضی نیست که پردازش مشاهدات را زیر و رو کرده است: استفاده از شبکه‌های عصبی مانند[۳] یا کاربرد موجک‌ها، که کمتر از ۲۰ سال از اختراع آنها می‌گذرد، فواید عمده‌ای برای کارآیی، دقت و سرعت در پردازش داده‌های به‌دست آمده به‌وسیلهٔ ماهواره‌ها داشته‌اند.

وقتی آنالیز عددی وارد عمل شود ...

به محض شناساییِ حالت آغازینِ جّو، که مورد نیاز مدل عددی پیش‌بینی است، آنچه برای نوشتن باقی می‌ماند یک برنامهٔ انفورماتیکی است که بتواند وضع هوای آینده را بر مبنای حالت آغازین و قوانین فیزیک محاسبه نماید. این قوانین متکی بر یک توصیف

[۱] Lev Pontriaguine

[۲] Météo-France

[۳] réseaux neuromimétiques

پیوسته از فضا و زمان هستند؛ اما مدلِ عددیِ ما فقط تعدادی متناهی، هر چند بزرگ، از جعبه‌ها را می‌شناسد؛ همچنین فاصلهٔ زمانی بین دو حالت محاسبه شده به چند دقیقه می‌رسد. این است که می‌گویند مسأله را «گسسته‌سازی» کرده‌ایم. رسیدن از معادلات پیوسته به الگوهایی عددی برای مدل گسسته‌سازی شده، و در عین حال حفظ بیشترین دقت ممکن، حوزهٔ مورد بحث آنالیز عددی است. این شاخهٔ ریاضیات، پس از رسیدن رایانه‌ها توسعهٔ انفجارآمیزی داشته است. هدف آنالیز عددی این است که بتواند معادلات را حل کند و محاسبات را به پایان برساند، یعنی تا آنجا پیش رود که مقادیر عددی دقیقی را به‌دست آورد و در عین حال زمان و تلاش‌های به‌کار گرفته را به حداقل برساند. ضرورتِ آنالیز عددی هم از آن جهت است که شبیه‌سازی مترادف با شُبهه‌سازی تعبیر نشود و هم از آن رو که به ارزیابی خطاها و تردیدهای موارد پیش‌بینی بپردازد. به‌عنوان مثال، اخیراً، در زمینهٔ جابجایی گونه‌های شیمیایی و ذرات توربولانس جوّی، و به‌ویژه در مورد روش‌های شبیه‌سازی آنها، پیشرفت‌های مهمی به‌دست آمده است. این پیشرفت‌ها، مطالعه و پیش‌بینی آلودگی هوا را به شکل قابل ملاحظه‌ای بهبود بخشیده‌اند.

آیا می‌توان وضع هوا را برای مدت مدیدی پیش‌بینی کرد؟ نظریهٔ سیستم‌های دینامیک پاسخ منفی به این پرسش می‌دهد

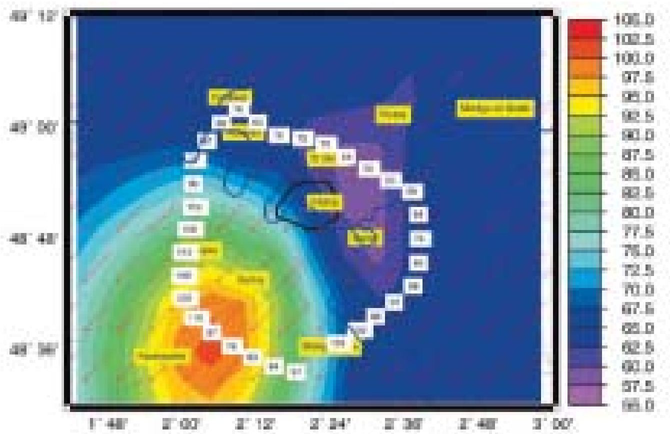
تاکنون راجع به پیش‌بینی وضع هوا برای مدت کوتاه ۸ تا ۱۰ روز مطالبی را مطرح کرده‌ایم. اما به چه علّت پیش‌بینی‌هایی برای مدت طولانی‌تر انجام نمی‌شود؟ هواشناس آمریکایی ادوارد ل.لورنز[۱] در مقالهٔ مشهوری به سال ۱۹۶۳ نشان داد که احتمالاً امیدی به این کار نیست. جوّ زمین، سیستمی آشوبناک[۲] است، یعنی هرگونه اشتباه در حالتِ آغازین، ولو بسیار کوچک هم باشد، در طول زمان با چنان سرعتی تشدید می‌شود که پیش‌بینی پس از ده روز، دقت خود را به کلی از دست می‌دهد. با این وصف، منظور این نیست که نمی‌توان اقلیم را پیش‌بینی کرد. یعنی، پیش‌بینی باید بیشتر به‌صورت آماری باشد تا قطعی و بیشتر ناظر به ارائهٔ متوسط بارش‌ها و دماها باشد، نه این‌که مثلاً بگوید هوای ناحیهٔ بروتانی در فلان روز از ماه ژوئیه دقیقاً چه خواهد بود. این موضوع بسیار مهم است: وضع اقلیم آینده در معرض خطر ناشی از گازهایی است که از فعالیت‌های

---

[۱] Edward L. Lorenz

[۲] Chaotique

انسانی برمی‌خیزد و باید آثار این اغتشاش‌ها را در دراز مدت پیش‌بینی کرد. در این زمینه، نظریهٔ **سیستم‌های دینامیک** ابزار لازم را برای توجیه مدل‌سازی اقلیم در اختیار ما قرار می‌دهد. قلمرو سیستم‌های دینامیک، که یکی از بنیان‌گذاران آن در اوایل قرن بیستم، ریاضیدان فرانسوی هانری پوانکاره بود، در طول بیست سال اخیر پیشرفت‌های مهمی داشته است. به‌عنوان مثال، نظریهٔ سیستم‌های دینامیک امکان دست‌یابی به پدیده‌ای را فراهم ساخت که ریاضیدانان از آن با عنوان جاذب‌ها[۱] یاد می‌کنند و هواشناسان آن را رژیم‌های هوا[۲] می‌نامند. هم‌چنین به کمک این نظریه می‌توان تشخیص داد در بین رژیم‌های هوا کدام یک پیش‌بینی‌پذیرترند و کدام‌یک ناپایدارترند. در وضعیت‌های ناپایدار، مدل‌سازیِ احتمالی[۳] را می‌توان ابزار مناسبی دانست. یعنی در این وضعیت‌ها باید مدل‌هایی را طراحی کرد که به‌طور آشکار، ویژگیِ تصادفی بودن پیش‌بینی را در نظر می‌گیرند. مدل‌سازی‌هایی از این نوع که هنوز توسعهٔ زیادی نیافته‌اند، باید بر ابزارهای بسیار جدیدِ نظریهٔ معادلات با مشتقات جزئی تصادفی[۴]، و آمار متکی باشند.



نمای رنگی اوزون روی ناحیهٔ پاریس، در روز ۷ اوت ۱۹۹۸، ساعت ۱٦ و در ارتفاع ۳۰۰ متری. تمرکزهای نشان داده شده وسیلهٔ مدل عددی (CHIMERE) از LMD/IPSL وسیله رنگها کُدگذاری شده‌اند. اندازه‌ها به وسیلهٔ هواپیما گرفته شده و به صورت برچسب‌های زینتی در شکل درج شده‌اند (تهیهٔ تصویر توسط MERLIN از متئو فرانس).

[۱] attracteur

[۲] régimes de temps

[۳] Modélisation probabiliste

[۴] théorie des équations aux dérivées partielles stochastiques

از پیش‌بینی‌های هواشناسی تا پیش‌بینی‌های اقلیمی

مدل‌های عددی پیش‌بینی اقلیم و مدل‌های پیش‌بینی هوا شباهت زیادی با هم دارند اما دو تفاوت اساسی بین آنها وجود دارد. بنابر دلایل مربوط به زمان محاسبه، جعبه‌های انتخابی آنها بزرگترند و ابعادی در حدود ۲۰۰ تا ۳۰۰ کیلومتر دارند. از سوی دیگر، زمان‌های مورد بحث، از چند ماه گرفته تا چند صد و گاهی چند هزار سال در نظر گرفته می‌شوند، زیرا دقیق‌تر از آن امکان ندارد. اما اختلاف اساسی ناشی از آن است که تغییرات اقلیمی در مقیاس‌های زمانی طولانی رخ می‌دهند و از این رو نمی‌توان از تأثیرات متقابل بین جوّ، اقیانوس‌ها، یخ‌های دریایی، و جوّ زیستی چشم پوشید. به همین دلیل، یک مدل‌سازی اقلیم ناچار است یک مدل جوی، یک مدل اقیانوسی، یک مدل یخ‌های دریایی و یک مدل کرهٔ زیستی را با هم تلفیق کند. علاوه بر پیچیدگی‌هایی که این ساخت از نظر انفورماتیک دارد، در مورد برقراری بهترین راه ایجاد هماهنگی بین این قلمروها، مسائل ریاضی حساسی مطرح می‌شوند، و همین‌طور در مورد شرایط محل تماس جوّ با اقیانوس، اقیانوس با یخ و غیره. نهایتاً برای آن که محاسبه در «جعبه‌های بزرگ» محاسبه‌ای با معنی تلقّی شود، باید در مقیاس این جعبه‌ها، تأثیر آماری فرایندهایی را که در مقیاس بسیار کوچکتر ایجاد می‌شوند، ارزیابی کرد (مثلاً مطالعه شود که تأثیر آماری بر بیلان انرژی جعبه‌ای با ابعاد ۳۰۰ کیلومتر توسط توده‌های کوچک و ابرهای کومولوسی که با قطر چند کیلومتر در آن به‌وجود می‌آیند چیست؟) در تمام این مسائل، مطالب فراوانی برای مطالعه و بسط ریاضی آنها باقی مانده است.

کلود بادوان
آزمایشگاه هواشناسی دینامیک،
دانشسرای عالیِ پاریس،
آزمایشگاه آنالیز، هندسه و کاربردهایشان،
دانشگاه پاریس ـ شمال

چند مرجع

- *La Météorologie, n° 30*, numéro spécial sur la prévision météorologique numérique (2000).
- M. Rochas, et J.-P. Javelle, *La Météorologie - La prévision numérique du temps et du climat* (collection " Comprendre", Syros, 1993).
- R. Temam et S. Wang, " Mathematical Problems in Meteorology and Oceanography ",*Bull. Amer. Meteor. Soc.*, 81, pp. 319-321(2000).

Claude Basdevant
Laboratoire de météorologie dynamique,
École normale supérieure, Paris et
Laboratoire Analyse, géométrie et applications,
Université Paris-Nord.

.

پشت پردهٔ تلفن همراه

نویسنده: دانیل کروب [۱]

مترجم: محمدفرهاد رحیمی

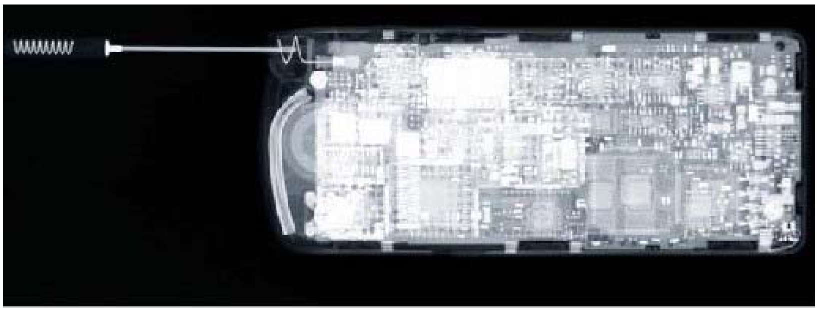
ویراستاران: فرج‌الله محمودی، ارسلان شادمان

تلفن همراه امروزه یک وسیلهٔ نسبتاً عادی تلقی می‌شود. چه کسی هرگز یک تلفن همراه ندیده یا با آن تلفن نزده است؟ اما نادرند کسانی که به موارد علمی و فنی دخیل در آن بیندیشند.

امروزه استفاده از تلفن همراه در خیلی از کشورها بسیار متداول شده است. مدتی بیش نمی‌گذرد که وضعیت به کلی متفاوت بود. در 1985 تعداد زیادی سیستم‌های تلفن بی‌سیم وجود داشت که توسط تولیدکنندگان بزرگ با سوابق تاریخی ملی گسترش یافته و به صورت تجاری درآمده بود. اما این تلفن‌ها با یکدیگر ناسازگار بودند. به علت آنکه ویژگی‌های فنی این سیستم‌ها متفاوت بودند و امکان ارتباط از یک شبکه به شبکهٔ دیگر وجود نداشت. برای اینکه بتوان این سازگاری را محقق ساخت، می‌بایست با مجموعه‌ای از ویژگی‌های فنی، یعنی یک معیار و رهیافت مشترک توافق کرد. این امر از پنج سال پیش

[۱] Krob, Daniel: *Les dessous du téléphone portable,*
in: L'explosion des mathématiques, SMF et SMAI, Paris, 2002, p. 11-14

شروع شد که در خلال آن معیار GSM[۱] (سیستم جهانی ارتباط با تلفن همراه) در اروپا مطرح شد، و با ابتکار دو شرکت تلفن بزرگ فرانسوی و آلمانی تلکوم[۲] در آن زمان ابداع گشت. اولین سیستم‌های تجاری مبتنی بر این معیار در آغاز سالهای 1990 به کار گرفته شد و حدود اواسط دهه نود بود که GSM حقیقتاً به عنوان تنها وسیلهٔ استاندارد واقعی



یک رادیوگرافی از یک تلفن همراه. الکترونیک این دستگاه به نظر پیچیده می آید، اما قادر نیست زحماتی را که از لحاظ ریاضی جهت به مرحله اجرا درآمدن تلفن همراه کشیده شده است نشان دهد.
(کلیشه Stock Image).

بین‌المللی تلفن همراه به مرحلهٔ ظهور رسید. رشد کنونی شبکه‌های تلفن همراه از نسل سوم، در واقع یک شاهد بارز از اهمیتی است که این سیستم GSM برای خود کسب کرده است. منظور از پیدایش نسل سوم، سیستم UMTS[۳] (سیستم ارتباطی تلفن همراه بین‌المللی) می‌باشد که حاصل گسترش طبیعی پدیدهٔ GSM است.

سیستم GSM یک پیچیدگی عمیق علمی و فنی را می‌پوشاند

استفاده کنندهٔ تلفن همراه به ندرت از پیچیدگی‌های عمیق علمی و فنی که در پس شبکه‌های رادیو- موبایل نهفته است آگاهی دارد. به عنوان مثال، سیستم GSM حاوی بیش از 5000 صفحه ویژگی‌های تخصصی و فنی می‌باشد که خواندن آن حتی برای متخصصین مشکل است! و پروندهٔ آن با بسته شدن بسیار فاصله دارد، زیرا کوشش‌های تحقیقاتی و پیشرفت عظیمی چه توسط مؤسسات بزرگ مهندسی رادیو ـ تلفنی و چه توسط

[۱] Global System for Mobile communications

[۲] France Télécom و Deutsche Telekom

[۳] Universal Mobile Telecommunication System

آزمایش‌های بزرگ دانشگاهی در حال انجام بوده و سرمایه‌گذاری شده است تا بدون توقف کیفیت و کارایی شبکه‌های تلفن موبایل را بهبود بخشند.

سیستم GSM بر مجموعه‌ای از فنون استادانه متکی است که از ارتباط مخابرات کلاسیک، انفورماتیک (علوم رایانه)، ریاضیات و پردازش سیگنال مشتق می‌شوند. به ویژه ریاضیات و آلگوریتم نقش بنیادی در درک و عملکرد خوب ساز و کارهای داخل شبکه‌های رادیو ـ موبایل ایفا می‌کنند. این ریاضیات چنان پایه‌های نظری را تأمین می‌کند که بر اساس آن تقریباً تمام مراحل بنیادی پردازش اطلاعات لازم در مدیریت یک ارتباط تلفنی توسط یک تلفن همراه انجام می‌شود. آلگوریتم این فرصت را به دست داده است تا این نتایج بنیادی را در مقاوله نامه‌ای به صورت مؤثر و کارا تبدیل کرد، به گونه‌ای که بتوان از این نتایج به طور عینی در بطن یک شبکه رادیو ـ موبایل بهره جست.

یک آنتن رله برای تلفن همراه GSM که روی محوطه و تأسیسات کشاورزی در روستا نصب شده است (کلیشه REA).

آلگوریتم‌هایی برای عددی کردن اطلاعات، تقسیم کردن اطلاعات به بسته‌ها، رمزگذاری اطلاعات و غیره

برای نمایش تلاقی این دو زمینه در تلفن همراه، با جزئیات بیشتر به روشی نظاره می‌کنیم که برقراری یک ارتباط تلفنی را، هنگامی که یک کاربر شماره‌ای را روی دستگاه تلفن می‌گیرد، سامان می‌دهد. ابتدا، تمام داده‌های انتقال یافته در آستانهٔ ورود به یک شبکهٔ رادیو ـ موبایل منحصراً عددی هستند که در واقع از «پاکت‌ها» یا بسته‌هایی تشکیل یافته که یک دنباله اعداد 0 و 1 به طول ثابت است و هر یک چهارم ثانیه گسیل می‌شوند و

شامل مجموعه‌ای از اطلاعات (صحبت کردن، شناسایی تلفن همراه، کیفیت دریافت صوتی موبایل و غیره) وابسته به یک ارتباط تلفنی معین می‌باشند. علاوه بر مدیریت در حرکت استفاده کننده، تفاوت عمده بین تلفن همراه و تلفن ثابت کلاسیک مسلماً در این امر نهفته است که بسته‌های اطلاعات عددی توسط امواج هرتز منتشر می‌شوند نه توسط کابلها. این امر نیاز به راه‌اندازی یک مجموعه از فنون آلگوریتمیک و ریاضی بسیار ویژه دارد، که به ترتیب دخالت آلگوریتم گسترده، بهینه سازی ترکیبی در پردازش عددی سیگنال، هندسه آلگوریتمیک یا رمزگذاری تصحیح کننده خطاها را شامل می‌شود، و این فقط برخی قلمروها را در میان بسیاری دیگر پیش می‌کشد.

بسته‌های اطلاعات در واقع به طور ناگهانی منتقل نمی‌شوند. برای اطمینان از محرمانه بودن اطلاعات، هر بسته به کمک یک مقاوله نامهٔ [۱] رمزگذاری که ویژهٔ دستگاه موردنظر است و با استفاده از کلیدهای مخفی مخصوص هر اپراتور (عملگر)، رمزگذاری می‌شود (و می‌دانیم که روش‌های رمزگذاری بر مبنای فنون و مفاهیم جبری یا هندسی که اغلب بسیار پیشرفته هم هستند متکی می‌باشند). مدیریتِ انتقالِ هرتزی که شایستهٔ این عنوان باشد مستلزم یک پردازش از پیش تعیین شده برای هر بسته اطلاعات می‌باشد. کانال هرتزی در واقع تحت انواع مختلف اغتشاشات قرار می‌گیرد که روی سیگنال‌های گسیل یافته توسط یک تلفن همراه اثر می‌گذارد. به عنوان مثال، جذب‌ها و انعکاس‌های امواج هرتزی توسط ساختمان‌ها باعث یک تضعیف و یک فاز زدایی [۲] از هر سیگنال گسیل یافته توسط هر تلفن همراه می‌شود. همینطور هر سیگنال، بازگشت‌های متعدد یا پژواک‌هایی [۳] را شامل می‌شود که باید در نظر گرفته شوند. همچنین یک بخش از هر بستهٔ اطلاعات از بازیافت سیگنالِ سرچشمه که در دریایی از پژواک‌ها (اکوها) غوطه‌ورند، به ویژه اخذ می‌شود.

این مسائل، مسلماً از مدت‌ها قبل، چه از لحاظ نظری و چه عملی مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. با این وجود، قیودِ [۴] مهندسیِ مختصِ شبکه‌های رادیو ـ موبایل، مستلزمِ گسترش و به‌کارگیری یک بخش مهم از ابزار ریاضیِ کلاسیک شده‌اند که در این مقوله‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرند.

---

[۱] Protocole

[۲] déphasage

[۳] écho

[۴] Contraintes

استفاده از نظریهٔ گراف‌ها برای تجویز مناسب فرکانسها

دستاورد آلگوریتمیک و ریاضیات، به زنجیر پردازش اطلاعات عددی، که ما به سرعت به آن اشاره کردیم، محدود نمی‌شود. فنون آلگوریتمیک به ویژه برای تنظیم مؤثر فرکانس‌های رادیویی که هر اپراتور در اختیار دارد از فنون بنیادی است. سازمان‌های رسمی [۱] به هر اپراتور بخشی از نوار فرکانسی مورد استفاده‌اش را اجاره می‌دهد که نسبتاً گران تمام می‌شود، با این وصف، تعداد کمی، حدود 300 فرکانس در بطن این نوار واقعاً قابل استفاده‌اند. دو ارتباط در یک زمان توسط دو تلفن همراه متفاوت، نمی‌توانند روی فرکانس‌هایِ نزدیک به هم انجام شوند زیرا تداخل امواج بر کیفیت انتقالات اثر می‌گذارد. بنابراین لازم است بدانیم چگونه به طریق بهینه فرکانس‌هایِ متداول در میان استفاده کنندگان را، که به واقع بیشتر از تنوع فرکانس‌ها می‌باشند، توزیع کنیم. می‌توان نشان داد که یک نفر نمی‌تواند این نوع معادله را در یک زمان معقول حل کند. روش‌های آلگوریتمیک، به مبنای مدل‌های ریاضی، برای اجرای یک برنامه‌ریزی طراحی شده‌اند که بتواند به طور مؤثر و به طور تقریبی، مسألهٔ اجاره دادن فرکانس‌ها را حل کند، در این مورد نظریهٔ گراف‌ها تعیین کننده بوده‌اند. تمام این مسائل از نقطه‌نظر صنعتی حائز اهمیت ویژه‌ای است، و هنوز موضوع تحقیقات بسیار فعال می‌باشد.

دانیل کروب
مدیر تحقیقات CNRS و مدیر LIAFA
(لابراتوار انفورماتیک آلگوریتمیک، مبانی و کاربردها)
دانشگاه پاریس هفت و CNRS

چند مرجع

- D. Krob et E.A. Vassilieva, “ Performance evaluation of demodulation methods: a combinatorial approach”, *Proceedings of DM-CCG, Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, pp. 203-214 (2001) (disponible en ligne: http://dmtcs.loria.fr).
- X. Lagrange, P.Godlewski, S. Tabbane, *Réseaux GSM-DCS* (Hermès, 1995).

---

[۱] Pouvoirs Publics

- J. G.Proakis, *Digital communications* (McGraw-Hill, 3^e édition, 1995).
- C. Servin, *Tèlécoms: de la transmission à l'architecture de réseaux* (Masson, 1998).

Daniel Krob
Directeur de recherches au CNRS et
directeur du LIAFA (Laboratoire d'informatique
algorithmique: fondements et applications),
Université Paris 7 et CNRS

رمزگذاری و رمزگشایی: ارتباط با ایمنی کامل

نویسنده: ژان ـ لویی نیکولا [1]

مترجم: ارسلان شادمان

ویراستاران: فرج‌الله محمودی، شهناز عباسپور

در جهان امروز که مخابرات جایگاهی کلیدی دارد، رمزنگاری ترفند عمده‌ای است. این موضوع که به دانش پیچیده‌ای تبدیل شده است، نمی‌تواند از ریاضی‌دانانی در سطح بسیار عالی بی‌نیاز باشد.

در مارس ۲۰۰۰، عنوان درشتی به مضمون زیر، صفحهٔ اول روزنامه‌ها را پر کرد: «اعلام خطر در مورد ایمنی کارت‌های بانکی». چه چیزی رخ داده بود؟ در فرانسه، رازداری کارت‌های مورد بحث، از ۱۹۸۵، به کمک یک روش کدگذاری انجام می‌شد که در آن یک عدد بزرگ N با ۹۷ رقم دخالت می‌کرد. این عددِ «N» می‌بایست حاصلضرب دو عدد اول بزرگ باشد، یعنی حاصلضرب دو عدد مانند ۷ و ۱۹ که جز بر ۱ و خود،بر هیچ عدد دیگری بخشپذیر نیستند. راز یک کارت بانکی دقیقاً از این دو عدد تشکیل می‌شود؛

[1] Nicolas, Jean-Louis: *Cryptage et décryptage: communiquer en toute sécurité,* in: L'explosion des mathématiques, SMF et SMAI, Paris, 2002, p. 15-18

پرداخت با کارت اعتباری، خرید ازطریق اینترنت: روش‌های رمزنگاری که ریاضیات برازنده‌ای را به‌کار می‌گیرند، برای ایمنی این‌گونه عملیات مورد نیازند (عکس از: تصاویر گتی)[۱]

در دههٔ ۱۹۸۰، محاسبهٔ آن‌ها با شروع از «N» عملاً غیرممکن بود. اما با افزایش توان رایانه‌ها و با بهبود روش‌های ریاضی، در سال‌های آخر قرن، اندازهٔ اعدادی که می‌توان عامل‌های اول آن‌ها را در زمانی معقول محاسبه کرد. از صد رقم هم گذشت (رکورد فعلی ۱۵۸ رقم، مربوط به ژانویه ۲۰۰۲ است). یک ترفندْ بازِ متخصص در دانش اطلاعات توانست دو عدد اولی را که حاصلضرب آن‌ها N است تشخیص دهد و از آن‌ها برای ساختن کارت‌های جدید استفاده کرد. از این رو، برای آن که ایمنی کارت‌های پلاستیک کوچک ما، تضمین شود سازمان مسؤول ادارهٔ این کارت‌های بانکی، بی‌درنگ اعداد جدید Nی ساخت که آشکارا خیلی بزرگترند.

رمزنگاری جدید در میعادگاه ریاضیات و دانش اطلاعات

این حادثه روشنگر آن است که امروزه دانش رمزورزی، یعنی کدگذاریِ پیامها، که برای اشخاص فضول غیرقابل خواندن شوند، از چه اهمیت قابل توجهی برخوردار است. رمزگذاری و رمزگشاییِ پیام‌هایِ محرمانه، فعالیتی با دیرینهٔ چند قرن و یا حتی چند هزاره است. این فعالیت دیگر منحصر به محدودهٔ دیپلماتیک و نظامی نیست و دنیای مخابرات

[۱] Getty Images

مَدَنی را کاملاً فراگرفته است: از آن جمله فرایندهای تشخیص اصالت، نقل و انتقالات بانکی، تجارت الکترونیک، حفاظت منزلگاه‌ها و پرونده‌های کامپیوتری و غیره.

رمزنگاری در طول دهه‌های اخیر شاهد پیشرفت‌هایی بوده است. در اثنای این پیشرفت‌ها، رمزنگاری به دانشی پیچیده تبدیل شده است که ترقیات آن محصول کار متخصصین با آموزش‌های سطح بالایی در ریاضیات و دانش اطلاعات است. این جنبهٔ تخصصی از جنگ جهانی دوم آشکار شده است. امروز می‌دانیم که شکستن رمز و خواندن پیامدهایی که آلمانی‌ها با ماشین های انیگمای[۱] خود کدگذاری کرده بودند، چه نقش تعیین کننده‌ای در سرنوشت این جنگ برای متفقین داشت. وانگهی ریاضیدان برجستهٔ بریتانیایی، آلن تورینگ[۲] که یکی از پدران علوم کامپیوتر نظری نیز هست، سهمی اساسی در این رمزگشایی ایفا نمود.

در سال‌های ۱۹۷۰، رمزنگاری شاهد تحول کوچکی شد: اختراع رمزنگاری با «کلید عمومی[۳]» به‌وسیلهٔ روش RSA[۴]. موضوع این ماجرا چیست؟ تا آن زمان، طرف‌های خواهان تبادل پیام می‌بایست یک کلید محرمانه در اختیار داشته باشند، اما خطر لو رفتن این کلید خیلی زیاد بود. قرارداد RSA که نام آن از نام سه مخترع آن (رونالد ریوست[۵]، آدی شامیر[۶] و لئونارد آدلمن[۷]) گرفته شده است، این مشکل را برطرف کرد. در این روش از دو کلید استفاده می‌شود: یک کلید، رمزگذاری عمومی است که همه می‌توانند آن را بشناسند ـ و یک کلید، رمزگشاست که محرمانه باقی خواهد ماند. این روش، متکی بر این اساس است که می‌توان اعدا اول بزرگی (با صد رقم، هزار رقم و یا بیشتر) ساخت، ولی یافتن عوامل اول p و q از روی یک عدد بزرگِ $N = p \times q$ بسیار مشکل است، همان‌گونه که در مورد کارت‌های بانکی هم به این روش اشاره کردیم. اجمالاً، شناخت عددِ N به منزلهٔ شناخت کلید عمومی رمزنگاری است، در حالی که شناخت p و q در حکم شناخت کلید محرمانهٔ رمزگشاست.

البته، اگر کسی می‌توانست روشی برای تجزیهٔ سریع اعداد بزرگ به عوامل اول

---

[۱] Enigma

[۲] Alan Turing

[۳] Clé publique

[۴] Rivest-Shamir-Adleman

[۵] Ronald Rivest

[۶] Adi Shamir

[۷] Leonard Adleman

آن بیابد، آنگاه پروتکل RSA از دور خارج می‌شد. اما این امکان هم وجود دارد که ریاضیدانان ثابت کنند چنین روشی وجود ندارد، در این صورت ایمنی پروتکل RSA تقویت هم می‌شود. در این موارد با موضوع‌هایی قطعی برای پژوهش سروکار داریم.

روش‌هایی که، مانند پروتکل RSA، نظریهٔ اعداد را در سطح پیشرفته‌ای دخالت می‌دهند، مطلب مهمی به ما می‌آموزند: پژوهش‌هایی با نهایت خلوص و بدون منافع مادی در ریاضیات (و به‌ویژه راجع به اعداد اول) انجام شده‌اند که سالها و گاهی دهها سال بعد، به گونه‌ای غیرقابل پیش‌بینی، برای این یا آن کاربرد، جنبهٔ حیاتی یافته‌اند. گ.هـ.هاردی[۱] (۱۹۴۷—۱۸۷۷) بریتانیایی، نظریه‌پرداز بزرگ در نظریهٔ اعداد و صلح‌طلبی پرحرارت، در کتاب خود تحت عنوان «دفاعیّهٔ از یک ریاضیدان» هدف کار خود را در زمینهٔ ریاضی کاملاً محض، یعنی حساب، که ظاهراً «سودمند» تلقی نمی‌شد، قرار داد. شاید کارهایش در زمان خود او «بی‌فایده» می‌نمود، اما امروز دیگر چنین نیست.

خم‌های بیضوی: هندسهٔ جبری در خدمت مأموران مخفی

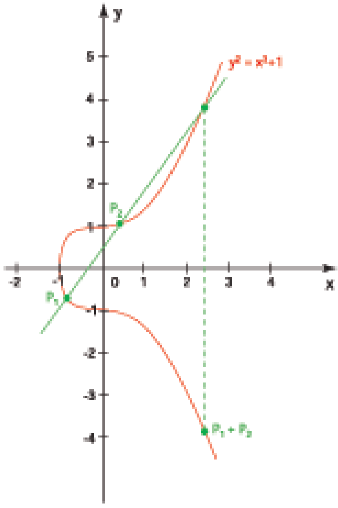
آنچه گفتیم منحصربه نظریهٔ اعداد نیست. حوزه‌های دیگری در ریاضیات که پیش از این می‌پنداشتند، هیچگونه کاربردی ندارند، در دانش رمزگذاری سهیم‌اند. در سال‌های اخیر روش‌های امیدبخشی در رمزنگاری ظاهر شده‌اند که بر اصولی نزدیک به اصول پروتکل RSA متکی هستند. یکی از این روش‌ها همان است که به نام روش لگاریتم گسسته[۲] نامیده می‌شود. این روش هم به نوبهٔ خود موجب شد به فکر روش‌های دیگری باشند که بر ویژگی‌های خم‌های بیضوی بنا می‌شوند. این خم‌ها به شکل بیضی نیستند بلکه خم‌هایی هستند که مطالعهٔ آن‌ها در قرن ۱۹، در جهت حل مسألهٔ پیچیدهٔ محاسبهٔ محیط بیضی آغاز شد. این خم‌ها که مختصات (x,y) یک نقطهٔ آن‌ها در معادلهٔ $y^۲ = x^۳ + ax + b$ صدق می‌کنند، ویژگی‌های جالبی دارند ـ که بررسی آن‌ها جزء هندسهٔ جبری است، که خود حوزهٔ وسیعی در ریاضیات فعلی است. مثلاً به کمک یک ساختمان هندسی مناسب، می‌توان به شکلی عمل جمع را بین نقاط خم بیضوی تعریف کرد. به‌طور کلی‌تر، خم‌های بیضوی که اشیائی هندسی هستند، دارای ویژگی‌های حسابی هستند که می‌تواند مورد استفاده در رمزنگاری قرار گیرد. به همین گونه است که یک روش

---

[۱] G. H. Hardy

[۲] logarithme discret

رمزنگاری موسوم به لگاریتم گسسته روی خم‌های بیضوی، تأسیس و گسترده شده است.



نمودار خم بیضوی به معادلهٔ $y^{۲} = x^{۳} + ۱$، خم‌های بیضوی ویژگی جالبی دارند: می‌توان دو نقطهٔ روی خم را طبق روشی که شکل نشان می‌دهد «با هم جمع کرد». عمل جمعی که به این طریق تعریف می‌شود از قواعد متداول حساب پیروی می‌کند (مثلاً $(P_۱ + P_۲) + P_۳ = (P_۱ + (P_۲ + P_۳)$). برخی از روش‌های نوین رمزنگاری با توسل به خم‌های بیضوی و ویژگی‌های جبری آن انجام می‌پذیرند.

اخیراً، جهت دیگری نیز به ظهور پیوسته است. در کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیدانان ۱۹۹۸ در برلین، پیتر شور[۱] از آزمایشگاه $AT\&T$ ، موفق به دریافت جایزهٔ نوانلینا[۲] به خاطر کارهایش روی رمزنگاری کوانتیک[۳] گردید. معنای این اصطلاح چیست؟ چند سال پیش، ریاضیدانان و فیزیکدانان به فکر افتادند که شاید بشود یک روز رایانه‌ای کوانتیک ساخت، یعنی رایانه‌ای که کارش بر مبنای قوانین عجیب و غریب فیزیک کوانتومی باشد، قوانینی که بر دنیای بی‌نهایت کوچک حاکم‌اند. متوجه شده‌اند که اگر این ساخت تحقّق یابد، آنگاه چنین رایانه‌ای قادر خواهد بود اعداد بزرگ را هم تجزیه کند و بدین ترتیب کارآیی روش RSA را از بین می‌برد. اخیراً تحقیقاتی دربارهٔ تحقّق عملی

---

[۱] Peter Shor

[۲] Nevanlinna

[۳] cryptogrphie quantique

این گونه رایانه‌های کوانتیک در مجلهٔ بریتانیایی نیچر[۱] منتشر شده است (آخرین مرجع ذیل). از سوی دیگر، محققین به پروتکل‌هایی برای رمزنگاری کوانتیک پرداخته‌اند، یعنی روش‌هایی مبتنی بر اشیائی (از قبیل فوتون‌ها، اتم‌ها و غیره) که از قوانین کوانتیک پیروی می‌کنند. این پروتکل‌های کوانتیک به شرط تحقق، ضامن ایمنی بدون چون‌وچرا خواهند بود. همهٔ این مسائل در دست بررسی است و امکان دارد ظرف چند سال آینده به شکل عملی درآید...

ژان‌لویی نیکولا
انیستیتو ژیراردزارگ، ریاضیات
دانشگاه کلود ـ برنار (لیون۱)

چند مرجع

- D. Kahn, *La guerre des codes secrets* (Interéditions, 1980).
- J. Stern, *La science du secret* (Odile Jacob, 1998).
- S. Singh, Histoire des codes secrets (J.-C. Lattès, 1999).
- J.-P. Delahaye, *Merveilleux nombers premiers* (Belin/pour la Science, 2000).
- D. Stinson, *Cryptographie, théorie et pratique* (Vuibert, 2001).
- L. M. K. Vandersypen et al., "Experimental realization of Shor's quantum factoring algorithm using nuclear magnetic resonance", *Nature, vol. 414*, pp. 883-887 (20 décembre 2001)

Jean-Louis Nicolas
Institut Girard Desargues, Mathématiques,
Université Claude-Bernard (Lyon 1)

[۱] Nature

کنترل دنیایی پیچیده

نویسنده: پیر پریه [۱]

مترجم: نوروز ایزد دوستدار

ویراستاران: فرج‌الله محمودی، ارسلان شادمان

خواه قابلیت مانور یک هواپیما مطرح باشد، خواه نگهداری مکانیکی یک سازهٔ پیچیده یا مدیریت عبور و مرور خودروها، پیشرفت در این زمینه‌ها تنها منوط به اختراعات صرفاً فنی نیست. این پیشرفت نیز زائیدهٔ پژوهش‌های مجردی نظیر نظریهٔ ریاضی کنترل است.

فایدهٔ آگاهی از نحوهٔ کنترل واکنش یک هواپیما یا یک موشک در جریان شدید هوا، یا اتخاذ رفتار مناسب و چاره‌جویی در زمینهٔ پیامد آن در صورت بروز اتفاقی ناگوار در یک مرکز هسته‌ای، نحوهٔ برخورد و ادارهٔ شبکهٔ برق رسانی در صورت بروز اشکال و غیره را هرکسی به آسانی می‌فهمد. در وضعیت‌های نرمال، هدفِ کنترل، بهینه‌کردنِ چیزی، بهبود بخشیدن شیوهٔ اجرایی و صرفه جویی در مصرفِ مواد یا پول است. مثلاً نگهداری یک ماهواره روی مدار مطلوب با صرف کمترین سوخت نمونه‌ای از این موارد است.

برای مثال توجه خود را به شیوهٔ برخورد با توقف ناگهانی برق در یک شبکهٔ برق‌رسانی

---

[۱] Perrier, Pierre: *Contrôler un monde complexe*, in: L'explosion des mathématiques, SMF et SMAI, Paris, 2002, p. 19-22

پل واسکو دِ گاما روی رودخانهٔ تاخو در لیسبون. مقاومت هر ساختار پیچیده مانند یک پل را می‌توان به گونه‌ای فعّال کنترل کرد. برای این کار، اجزای لازم را در مکان‌های مناسبی که برحسب تکان‌های ساختار انتخاب می‌شوند، قرار می‌دهند، تا به این ترتیب مشخصهٔ مکانیکی ساختار تعدیل شود و اثرات لرزش، کاهش یابد. نظریهٔ ریاضی کنترل، چنین اوضاعی را بررسی می‌کند. (کلیشه گاما/ژیل باسیناک[۱])

معطوف می‌کنیم. حادثه‌ای نظیرِ یک مدار کوتاه یا قطع برق (مثلاً در اثر افتادن تیر برق) یا افزایش مصرف انرژی در یک ناحیه، روی شبکه می‌تواند پیامدهای فراوانی داشته باشد. و امّا تحقق یک مطالعهٔ فراگیر روی همهٔ اتفاقات ممکن و همچنین محاسبهٔ دقیق هر مرحله از انتشار اثرات چنین اتفاقی عموماً میسر نیست. شمارِ امکانات بررسی این مسائل بسیار فراوان است و در هر صورت بسیار فراتر از توان قوی‌ترین رایانه‌ها می‌باشد. بنابراین نیازمند طراحی مدلی ریاضی هستیم که به صورتی ساده شبکه و عمل‌کرد آن را ترسیم کند. به کمک تلاش‌ها و محاسباتی با وسعت معقول، این‌گونه مدل سازی به ما امکان می‌دهد تا حداقل به طور تقریبی بر محتوای سیستم احاطه داشته باشیم. در عوض، این الگوسازی می‌تواند به بهبود درک شبکه کمک کند. ولی همچنین می‌خواهیم توانایی کنترل یک وضعیت بحرانی را نیز داشته باشیم، که برای مثال با افزایش اضافه بار موضعی یا در کل یک ناحیه به‌وجود می‌آید. به سخنی دیگر، می‌خواهیم بدانیم که پست فرمان چه تسلسل عملیاتی را باید اجرا کند تا پیامدهای ناشی از توقف را به حداقل برساند. آیا چنین دانشی به طور نظری میسّر است؟ آیا استراتژی‌های کنترل بهینه وجود دارند؟ چنانچه

[۱] Cliché Gamma/Gilles Bassignac

پاسخ مثبت است، این استراتژی‌ها کدامند؟ سرانجام برای بررسی درستی این مسأله، پیش از اقدام به اجرای کلان آن در جهان واقعی، به‌وسیلهٔ شبیه‌سازی عددی با رایانه، چه الگوریتمی باید به‌کار برد؟ فراهم ساختن یک چهارچوب مطالعهٔ دقیق در مسألهٔ مدیریت منابع و لوازم فوق، به منظور جلوگیری از هدردادن انرژی یا قربانی‌شدن بر اثر قطع کلی جریان برق، ضروری است. این مثال، نخستین نوع از مسائل کنترل پیچیده‌ای را ارائه می‌دهد، که ریاضیدانان ــ با یاری منطق ریاضی، نظریهٔ اعداد، نظریهٔ احتمال، آنالیز و نظریهٔ کنترل ــ سهم خود را در آن ادا می‌کنند. اینان می‌توانند راجع‌به وجود یک راه حل پذیرفتنی و راجع‌به وسایل دسترسی به این راه حل، دست کم برای ما اعتمادی پیشین فراهم کنند. البته باید منتظر تجارب آینده بود تا اعتبار این راه حل تأیید شود.

جلوگیری از انهدام پل‌ها

پیچیدگی لزوماً مختص یک شبکه نیست. ممکن است این پیچیدگی در واکنش رفتار یک شیئ نظیر یک پل مستتر باشد. نگاهداری چنین ساختاری به تعداد زیادی پارامتر از جمله ارتعاش بستگی دارد. همان‌گونه که همه می‌دانند لرزش یک پل ممکن است با گذشتن صفی از کامیون‌ها یا به‌وسیلهٔ وزش باد یا طوفان ایجاد شود. این پدیده گاهی تا شکستگی ساختار موردنظر پیش می‌رود. هر پلی همانند سایر ساختارهای مکانیکی، دارای یک سری فرکانس‌های ارتعاشی مربوط به خود است؛ اگر اغتشاش بیرونی، لرزش‌هایی را سبب شود که متناظر فرکانس خاص لرزش باشد، تشدید یا رزُنانس تولید می‌شود که پل انرژی آن را با ارتعاش‌های خاص خود، جمع می‌کند، این انرژی‌ها تا زمانی که اغتشاش بیرونی ادامه دارد، و تا وقتی‌که ساختار موردنظر در برابر فشار مکانیکی حاصل از آن مقاومت می‌کند، گسترش می‌یابد.

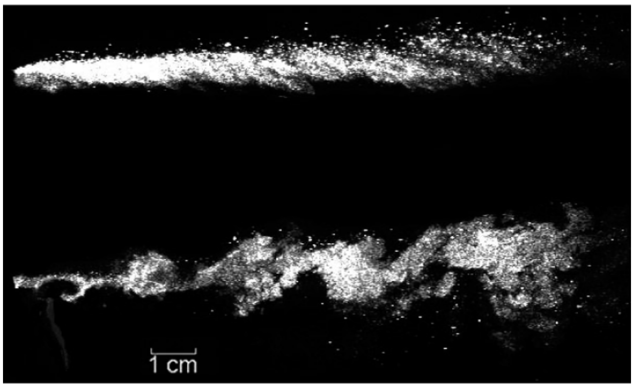
برای کنترل چنین پدیده‌هایی، باید آنها را درک کرد، دانست چگونه آنها را پیش‌بینی کرد و تأسیسات فنی مناسب برای خنثی کردن تشدیدهای خطرناک را نصب کرد. از کنترلِ منفعل زمانی گفتگو می‌شود که مستهلک سازها را مستقر می‌سازیم تا پیش از تمرکزِ انرژی در مواضع بحرانی، آنها را به قدر کافی جذب کند. ولی از کنترل فعّال زمانی گفتگو می‌شود که یک بار برای همیشه این نقاط بحرانی را تعیین کنیم، و در مکان‌های انتخابی مناسب لوازم فعال یا عمل‌کننده‌ها را قرار دهیم، این عمل‌کننده‌ها در ارتباط با گسترش جابه‌جایی‌های نقاط بحرانی وادار به عمل می‌شوند، به گونه‌ای که ساختار را از هر تحول خطرناکی دور نگاه می‌دارند. با یک تحلیل ریاضی سیستم مورد مطالعه است که

جایگیری‌های مناسب، نگهدارنده‌ها و عمل کننده‌ها و شیوهٔ عمل کنترل آنها به بهترین نحو تعیین می‌شود.

متأسفانه محاسبهٔ دقیق رفتار سیستم در غیاب کنترل حساسیت آن و استعداد کنترل آن، اغلب اوقات، غیرقابل دسترسی است. معمولاً دلیل آن ممکن است مربوط به پیچیدگی ریاضی درحالت غیرخطی (عدم امکان تجزیهٔ آنها به مجموع عناصر ساده و کم و بیش مستقل از نظر ریاضی)، یا مربوط به زمان محاسبهٔ طولانی با رایانه باشد. در نتیجه این کنترل اغلب ناقص است. برای مثال ممکن است فقط موفق به کنترل موقت چند نوع ارتعاش باشیم ــ انرژی بیرونی، پیش از این که ترکیب شده و به صورت تعداد اندکی ارتعاش با دامنهٔ پرتوان نمودار شود، نخست در انواع لرزش‌های با دامنهٔ ضعیف جمع می‌شود. برای درک بهتر این فرآیندها و ترمیم اثرات منفی آنها، کارهای زیادی باقی مانده است.

پابرجا ماندن با وجود آشفتگی‌های شدید محیط

سومین مثال را در مورد جریان‌های سیال با سرعت زیاد، نظیر جریان هوا در اطراف یک هواپیما، یا در اطراف موشک در حال پرتاب، یا جریان آب اطراف یک کشتی سریع‌السیر در نظر بگیریم. در این شرایط با آشفتگی‌ها، یعنی با حرکات پیچیده و ناپایدار سیال، با ویرانی و بازسازی دائمی ساختارهای چنان پیچیده‌ای رو به رو هستیم که گویی از یک بی‌نظمی کامل حاصل شده‌اند. این آشفتگی‌ها می‌توانند به طور قابل توجهی موجب ایجاد مزاحمت برای یک وسیلهٔ نقلیهٔ هوایی یا غیرهوایی شوند. به نظر همه می‌رسد که کنترل در اینجا بسیار مشکل است. ولی این مسأله دارای اهمیت کاربردی زیادی است. به همین دلیل مهندسین با روش آزمایش و خطا و مثلاً با الهام از پرواز پرندگان، برای هواپیماها سعی کرده‌اند نوعی قابلیت کنترل، در پرواز و حرکت‌های مشابه پدید آورند. این مهندسین مخصوصاً با تقویت لبه‌های گریز و مورد حملهٔ بال‌ها و با قراردادن گیرنده‌هایی در محل‌های نسبتاً آرام و قراردادن عمل کننده‌هاــ فرمان‌ها ــ در نقاط حساس نزدیک لبه‌های گریز هواپیماها تا حدودی در این کار موفق شدند.



تصویر بالایی جریان سیال مافوق صوت نسبتاً منظمی را نشان می‌دهد. در تصویر پایین می‌بینیم که نفوذ ناگهانی اندکی سیال از اطراف موجب گسترش ناپایداری جریان سیال می‌شود. چنین دخالتی روشنگر این اندیشه است که به ویژه از نظر کنترل می‌توان به کمک ساز و برگ‌های کوچک روی جریان‌ها اثر کرد. (کلیشه از اِروان کولَن LEA/CEAT ، دانشگاه پواتیه)

نظریهٔ ریاضی کنترل در وهلهٔ نخست اجازه داده است این نتایج تجربی را بازیابیم. سپس امکان پیشنهاد استراتژی‌های عمل را فراهم نموده است، یعنی نقشه‌هایی برای طراحی مناسبی که بسته به مورد، حساسیت نسبت به عمل‌های یک عملگر انسانی یا اغتشاش‌های بیرونی را تقویت می‌کنند یا کاهش می‌دهند. در حال حاضر در سرآغاز تشخیص ترتیبات مقدماتی کنترل فعال قرار داریم که در مقیاس تقریباً میکروسکپی، یک لایهٔ سیال با چند دهم میلیمتر ضخامت عمل می‌کند: از آن جمله می‌توان به رفتار میکرومکانیسم‌هایی که امکان تغییر شکل موضعی وسائط نقلیه را در نقاط بحرانی جریان سیال فراهم می‌کنند، اشاره نمود. با هماهنگی عمل نظم‌دهنده‌های ریزی از این نوع، به اثر جریان سیال در مقیاس ماکروسکوپی در حد انتظار دست می‌یابیم. پژوهش‌های ریاضی همراه تلاش‌های فیزیکی یا فنی در قلمرو کنترل آشفتگی‌های سیالات در حال گشایش دنیایی از تلاش‌های باورنکردنی به روی ما هستند که تا چند سال پیش غیرقابل تصور بود؛ دنیایی که در آن برای دست‌یابی به چنین نتیجه‌ای، مقدار انرژی یا اندازهٔ ابزارهای ضروری در حد خیلی زیادی کاهش می‌یابند.

در نظریهٔ کنترل از شاخه‌های گوناگون ریاضیات به ویژه نظریهٔ معادلات دیفرانسیل استفاده می‌شود.

مسائل کنترلی که در اینجا مطرح کردیم می‌تواند شامل موارد پیش‌پاافتاده‌ای مانند شیشه‌پاک‌کن‌های معمولی اتومبیل‌ها، تا پرتاب فضایی بسیار پیشرفته باشد. نظریهٔ کنترل که در سال‌های ۱۹۴۰—۱۹۵۰ بخصوص در رابطه با فعالیت‌های فضانوردی پدید آمد، روش‌ها و مفاهیم خود را از شاخه‌های مختلف ریاضی اتخاذ می‌کند. این نظریه به‌خصوص از معادلات دیفرانسیل (که مجهول آنها یک تابع است) و معادلات با مشتقات جزئی (که مجهول آنها تابعی از چند متغیر است) استفاده می‌کند، این نظریه‌ها میدان وسیعی از مطالعات قدیمی‌اند که هنوز هم کارآمداند. در واقع برای بسیاری از سیستم‌هایی که در دنیای واقعی با آنها مواجهیم، می‌توان به کمک چنین معادله‌ای رفتار آنها را الگوسازی کرد. از این رو یک مسألهٔ کنترل می‌تواند به کمک یک یا چند معادلهٔ دیفرانسیل یا با مشتقات جزئی بیان شود، که شامل جملات ارائه‌دهندهٔ عمل‌های کنترل‌اند و عمل‌های کنترل توسط انسان تعریف می‌شوند. جملات کنترل را به طور کلی با C، و تابع ارائه‌دهندهٔ رفتار سیستم را با f نشان می‌دهیم؛ f جواب این معادلهٔ دیفرانسیل است که C در آن دخالت دارد، بنابراین f به C بستگی دارد. پس هدف نظریهٔ کنترل، به طور کلی تعیین C است به گونه‌ای که f، یعنی وضع رفتاری سیستم، قابل قبول باشد. برای یک ریاضیدان، حل یک معادلهٔ دیفرانسیلی خاص مطرح نیست، بلکه یافتن نتایجی کلی مطرح است، که در موارد رده‌ای وسیع از این معادلات معتبر باشد، تا در موارد عدیده‌ای با حالت‌های متفاوت به کار رود.

در فرانسه نظریهٔ کنترل موقعیت مناسبی در قلب مکتب مشهور ریاضیات کاربردی قرار دارد، که در اثر زحمات ژاک ـ لویی ـ لیونس[۱] (۱۹۲۸—۲۰۰۱) تأسیس شد. اما تنها یک مکتب ریاضی خوب برای نظریهٔ کنترل کفایت نمی‌کند. در عین حال باید نتایج آن شناخته شوند و توسط همهٔ کسانی که به آن نیاز دارند مورد استفاده قرار گیرند. از آنجاست که تحکیم ارتباط بین جامعهٔ ریاضی و جوامع مکانیک، مهندسین، شیمیدان‌ها و زیست‌شناسان فواید متعدد خود را روشن می‌سازد.

پیر پریه
آکادمی علوم و آکادمی فناوری
پاریس

---

[۱] Jacques-Louis Lions

چند مرجع

- J. R. Leigh, Control theory. A guided tour (Peter Peregrimmus, London, 1992).
- J. Zabczyk, Mathematical control theory: an introduction (Birkhaüser, 1992).
- J.-L. Lions, Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués (Masson, 1988).

Pierre Perrier
Académie des sciences et
Académie des technologies, Paris.

.

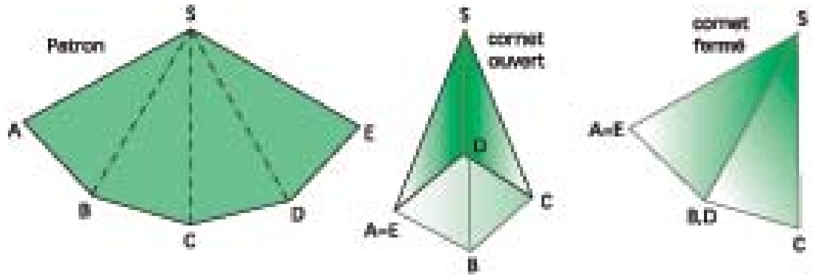
قضیهٔ دَم

نویسنده: اتین گی [۱]

مترجم: ارسلان شادمان

ویراستاران: فرج‌الله محمودی، شهناز عباسپور

یک خط‌کش، یک مداد، مقداری مقوا، قیچی و چسب: برای فراهم ساختن خوشحالی ریاضیدانان و ایجاد مسائل زیبا، به چیزی جز این ابزار نیاز نیست. بررسی این مسائل، غالباً پس از انجام و به شکل غیرمنتظره، در مشاغل دیگر سودمند خواهد بود.



شکل ۱. ساخت یک هرم از مقوا. بدون قاعدهٔ ABCDA، این جسم انعطاف‌پذیر است.
این سه شکل از چپ به راست، الگو، قیف باز و قیف بسته را نشان می دهند.

[۱] Ghys, Etienne: *Le théorème du soufflet*,
in: L'explosion des mathématiques, SMF et SMAI, Paris, 2002, p. 23-27

یک هرم مقوایی بسازیم. برای این کار، از یک برگ مقوا یک قطعه را طبق الگوی SABCDE مانند شکل ۱ ببریم، سپس آن را در امتداد خط‌های نقطه‌چین تا کنیم و اضلاع AS و ES را به هم بچسبانیم.

نتیجهٔ این کار نوعی قیف است که رأس آن S و قسمت لبهٔ آن چهار ضلعی ABCD است. این شیء انعطاف‌پذیر [۱] است. اگر آن را در دست بگیریم، چهار ضلعی ABCD تغییر شکل می‌دهد و کم یا بیش باز می‌شود: آنچه ساخته‌ایم استحکام زیادی ندارد. برای آن که هرم تکمیل شود، باید یک مربع مقوایی نیز بسازیم و آن را به چهار ضلعی مورد بحث بچسبانیم تا قاعدهٔ هرم تشکیل شود. با این عمل، هرم مورد نظر استحکام می‌یابد و به اصطلاح صُلب یا استوار[۲] می‌شود. اگر آن را در دست بگیریم و سعی کنیم به آرامی آن را تغییر شکل دهیم، قادر نخواهیم بود مگر آن که وجوه مقوائی را تغییر دهیم. همان‌گونه که همه بارها ملاحظه کرده‌ایم، یک مقوای مکعبی دارای استحکام است. آیا این مسأله برای یک چند وجهی در حالت کلی نیز که ممکن است هزاران وجه داشته باشد، صحّت دارد؟ آیا ژئود[۳] در محلهٔ ویلِّتِ [۴] پاریس، استحکام دارد؟ پرسش اخیر به خوبی نشان می‌دهد که مسألهٔ انعطاف‌پذیری یا استحکام فقط یک مسألهٔ نظری نیست.

مسأله‌ای که امروز هم مطرح است و به عهد باستان برمی‌گردد

مسألهٔ استحکام اشیائی از این قبیل، بسیار قدیمی است. احتمالاً اقلیدس نیز با این مسأله آشنا بوده است. ریاضیدان بزرگ فرانسوی، آدرین ــ ماری لُژاندر[۵] در اواخر قرن ۱۸ به این مسأله علاقمند شده و دربارهٔ آن با همکارش ژوزف ــ لویی لاگرانژ[۶] صحبت کرده است. لاگرانژ هم به نوبهٔ خود در ۱۸۱۳ به اوگوستَن ــ لویی کوشیِ [۷] جوان توصیه کرد این مسأله را بررسی کند. اولین نتیجهٔ چشمگیر بارون اُ. ــ ل. کوشی، که بعداً به یکی

---

[۱] flexible

[۲] rigide

[۳] La géode

[۴] Villette

[۵] Adrien-Marie Legendre

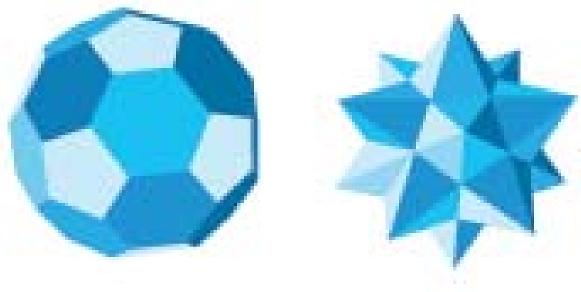
[۶] Joseph-Louis Lagrange

[۷] Augustin-Louis Cauchy

از بزرگترین ریاضیدانان قرن خود تبدیل شد، در این زمینه بود.

اوگوستن ــ لویی کوشی (۱۸۵۷ ـ ۱۷۸۹) یکی از بزرگترین ریاضی‌دانان زمان خود.
(کلیشهٔ آرشیوهای مدرسهٔ پولی‌تکنیک [۱])

کوشی، به چند وجهی‌های محدّب[۲] علاقمند شد، یعنی به چند وجهی‌هایی که هیچ یالی به سوی داخل ندارند. مثلاً هرمی که با مقوا ساختیم یا توپ فوتبال محدب هستند در حالی که شییء سمت راست در شکل ۲ چنین نیست.



شکل ۲.یک چند وجهی محدب و یک چند وجهی ستاره‌ای غیرمحدب

قضیه‌ای که کوشی ثابت کرد این است: هر چند وجهی محدب استوار است.

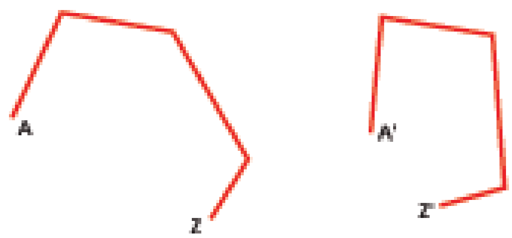
[۱] Cliché Archives de l'École Polytechnique

[۲] convexe

معنای این قضیه آن است که اگر یک چند وجهی محدب بسازیم به نحوی که وجوه آن تغییر شکل ندهند (مثلاً فلزی باشند) و به وسیلهٔ لولاهایی در طول یال‌هایشان به هم چسبیده باشند، آنگاه هندسهٔ سرتاسری[۱] آن مانع جابه‌جایی بست‌های آن خواهد شد. جسم قیفی شکلی که ساخته بودیم انعطاف‌پذیر بود ولی این مطلب از اعتبار قضیه نمی‌کاهد زیرا در مورد قیف، یک وجه آن ناقص بود و این همان وجهی بود که به هرم استحکام بخشید.

پرداختن به ریاضیات به معنای آن است که آنچه را می‌گوییم و ادعا می‌کنیم ثابت کنیم! و اما اثباتِ کوشی بسیار شکوهمند است (هر چند عده‌ای بعداً تذکر داده‌اند که اثباتِ او کامل نیست). متأسفانه در این مقالهٔ کوتاه نمی‌توان اندیشهٔ اثبات او را بیان کرد، با این وجود مایلم یکی از لم‌های آن یعنی مرحله‌ای از اثبات قضایای او را مطرح کنم.

روی زمین یک زنجیر مرکب از تعدادی میلهٔ فلزی را که یکی پس از دیگری به هم چسبیده باشد، مطابق شکل ۳ در نظر بگیرید. در هر یک از زاویه‌های خط چند ضلعی، دو میلهٔ ضلع زاویه را طوری حرکت دهیم که زاویهٔ مورد نظر کوچک شود. در این صورت، ابتدا و انتهای زنجیر به هم نزدیک می‌شوند. آیا این مطلب به نظر شما بدیهی است؟ سعی کنید آن را ثابت کنید ...



شکل ۳ـ اگر زوایایی را که پاره‌خط‌ها بین خود می‌سازند، کاهش دهیم، دو سر این رشته پاره‌خط به هم نزدیک می‌شوند.

مدتی طولانی، عدهٔ کثیری از ریاضیدانان این سؤال را مطرح کردند که آیا چند وجهی‌های غیرمحدب نیز به همان اندازه استوارند؟ آیا می‌توان یک روش اثبات برای

---

[۱] géométrie globale

استوار بودن چند وجهی‌ها پیدا کرد که از فرض محدب بودن استفاده نکرده باشد؟ ریاضیدانان دوست دارند احکامی را بیان کنند که در آنها همهٔ فرض‌ها برای رسیدن به نتیجهٔ حکم مفید باشند. در مورد این مثال خاص، مدت ۱۶۰ سال تلاش لازم بود تا آن که جواب شناخته شد.

ژئودِ ویلت در شهرک علمی پاریس، چند وجهی محدبی است مرکب از ۱۷۳۰ وجه مثلثی. استحکام چند ضلعی‌های مفصل‌دار به طرح یک مسئله زیبای ریاضی موکول می‌شود که سرانجام در سال ۱۹۹۷ به نتیجه رسیده (کلیشهٔ کاسماس / ر. برژرو[۱]).

در ۱۹۷۷ ریاضیدان کانادایی رابرت کونلی[۲] به آفرینش شگفتی دست یافت. او توانست یک چند وجهی (البته بسیار پیچیده) بسازد که انعطاف‌پذیر باشد. پرواضح است که چند وجهی او نمی‌توانست محدب باشد و گرنه با نظریهٔ کوشی در تعارض قرار می‌گرفت! مدتی پس از آن، شیوهٔ ساخت کونلی به‌وسیلهٔ افرادی، از جمله به‌ویژه توسط کلاوس اِشتِفِن[۳] اندکی ساده‌تر شد. در شکل ۴ الگویی ارائه می‌کنم تا خواننده بهتر بتواند طبق آن به ساختن «چند وجهی انعطاف‌پذیر»[۴] اشتفن بپردازد. مقوا را ببرید و آن را در امتداد خطوط رسم شده تا کنید. خط‌های پُر یال‌های به سوی بیرون و خط‌های نقطه‌چین یال‌های به سوی درون هستند. سپس کناره‌های آزاد را به شکل مشخص به هم بچسبانید.

---

[۱] R. Bergerot

[۲] Robert Connely

[۳] Klaus Steffen

[۴] flexidron

به این ترتیب یک نوع عروسک کاغذی درست می‌شود و خواهید دید که واقعاً (اندکی) انعطاف‌پذیر است.

آیا حجم یک چند وجهی با تغییر شکل تغییر می‌کند؟

زمانی که این شیئ جدید ساخته شد، ریاضیدانان از آن به وجد آمدند. یک نمونهٔ فلزی آن ساخته شد و در تالار چایخوری مؤسسهٔ مطالعات عالی علمی [۱] (IHES) در شهرِ بور کنار رودخانهٔ ایوت [۲] نزدیک پاریس، قرار داده شد. مردم با تکان دادن این شئی سرگرم می‌شدند، البته این شیئی چندان زیبا نیست ولی کمی ورجه وورجه می‌کند. در تاریخچهٔ این ماجرا نقل شده است که به فکر دنیس سالیوان [۳] خطور کرد که دود سیگارِ را به داخل چند وجهی انعطاف‌پذیر کونلی بدمد ولی متوجه شد که با تکان دادن آن اصلاً دود از آن خارج نشد. بر اساس این تجربه، سالیوان دریافت که با تغییر شکل چند وجهی انعطاف‌پذیر کونلی، حجم آن تغییر نمی‌کند! آیا این قصه حقیقت دارد؟ هر چه باشد، راست یا دروغ، کونلی و سالیوان پنداره‌ای مطرح کردند که می‌گوید **هنگامی که یک چند وجهی تغییر شکل دهد، حجمش ثابت می‌ماند.** این ویژگی را می‌توان در حالت خاص برای چند وجهی انعطاف‌پذیر کونلی و برای چند وجهی انعطاف‌پذیر اشتفن ثابت کرد (البته برای این کار باید محاسبات پیچیده و بیهوده‌ای انجام داد). پندارهٔ مورد بحث نه تنها برای این مثال‌ها بلکه راجع به همهٔ چند وجهی‌هاست، از جمله برای چند وجهی‌هایی که هیچگاه در عمل ساخته نشده‌اند. کونلی و سالیوان این پنداره را «پندارهٔ دَم» نامیدند: با فشار دادن دَم در کنار آتش هوا بیرون می‌جهد، به عبارت دیگر، از حجم دَم کاسته می‌شود (در واقع عمل دَم همین است). واضح است که یک دم واقعی نمی‌تواند در پندارهٔ کونلی ـ سالیوان صدق کند، زیرا دم واقعی از چرم ساخته می‌شود و وجوه آن مرتب در حال تغییر شکل‌اند، و این برخلاف چند وجهی‌های مورد بحث ماست که وجه‌های آن مستحکم می‌باشند.

در ۱۹۹۷، کونلی همراه با دو ریاضیدان دیگر، آی. سابیتوف [۴] و اَی. والتس [۵] سرانجام موفق به اثبات پنداره شدند. اثبات آنها پرعظمت است و یک بار دیگر نشان

---

[۱] Institut des Hautes Etudes Scientifiques

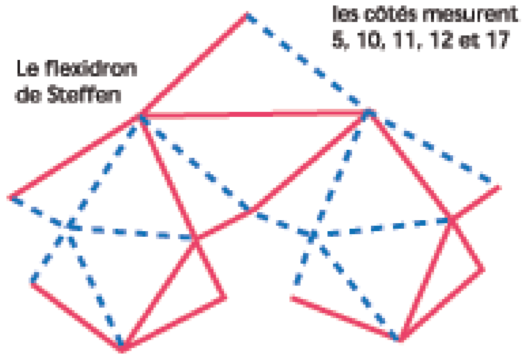
[۲] Bures-Sur-Yvette

[۳] Denis Sullivan

[۴] I. Sabitov

[۵] A. Walz

می‌دهد که بین همهٔ بخش‌های ریاضیات کنش و واکنش متقابل وجود دارد. در این مسألهٔ کاملاً هندسی، نویسندگان مقاله از روش‌های بسیار ظریف جبر مجرد نوین بهره گرفته‌اند. این اثبات را نمی‌توان به هیچوجه از کوشی توقع داشت، زیرا فنون ریاضی زمان کوشی برای آن کفایت نمی‌کردند. در اینجا می‌خواهم فرمولی را یادآوری کنم که سابقاً در دبیرستان می‌آموختند، بدین ترتیب که اگر طول اضلاع یک مثلث a، b و c باشند، به سادگی می‌توان مساحت مثلث را محاسبه کرد. برای این کار، نخست نصف محیط را به شکل $p = (a+b+c)/۲$ به‌دست می‌آوریم، سپس مساحت آن را با گرفتن ریشهٔ دوم از $p(p-a)(p-b)(p-c)$ محاسبه می‌کنیم. این دستور سودمند به نام ریاضیدان یونانی هِرون[۱] ثبت شده است و از زمان‌های بسیار دور به ما رسیده است. آیا می‌توان حجم یک چند وجهی را با در دست داشتن طول یال‌های آن محاسبه کرد؟ سه ریاضیدان معاصر مورد بحث ما ثابت کردند که جواب این مسأله مثبت است.



شکل ۴ـ الگوی چند وجهی انعطاف‌پذیر (فلکسیدرونِ) اشتفن
اضلاع به اندازه‌های ۵، ۱۰، ۱۱، ۱۲ و ۱۷ هستند

روش اثبات آنان این است که از یک چند وجهی که بر مبنای یک الگوی متشکل از تعدادی مثلث ساخته شده باشد، آغاز می‌کنند و طول اضلاع این مثلث‌ها را $l_۱$، $l_۲$، $l_۳$ و غیره می‌نامند (تعداد مثلث‌ها ممکن است خیلی زیاد باشد). آنان به این نتیجه رسیدند که V، یعنی حجم چند وجهی مورد نظر، الزاماً در یک معادلهٔ درجه n به‌صورت

$$a_۰ + a_۱ V + a_۲ V^۲ + \cdots + a_n V^n = ۰$$

[۱] Heron

صدق می‌کند. درجهٔ این معادله یعنی n به الگوی انتخاب شده بستگی دارد و ضرایب معادله یعنی $a_۰$ و $a_۱$ و غیره توابعی صریح از طول اضلاع یعنی $l_۱$، $l_۲$، $l_۳$ و غیره‌اند. به عبارت دیگر، اگر الگو و طول اضلاع را بشناسیم، معادله را می‌شناسیم. اگر خواننده به یاد بیاورد که یک معادلهٔ درجه ۱ دارای یک جواب و یک معادله درجه ۲ دارای دو جواب است، شاید بتواند حدس بزند که یک معادلهٔ درجه n، بیش از n جواب ندارد.

جمعبندی: اگر الگو و طول اضلاع را بشناسیم، الزاماً حجم را نخواهیم شناخت، ولی دست‌کم می‌دانیم که این حجم فقط می‌تواند یکی از مقادیر مجموعه‌ای متناهی از مقادیر باشد. لذا هنگامی که چند وجهی انعطاف‌پذیر مورد بحث تغییر شکل دهد، حجم آن نمی‌تواند به‌طور پیوسته تغییر کند (وگرنه، حجم آن به‌طورر متوالی بینهایت مقدار را می‌گرفت). پس حجم «منحصر» به یک مقدار است و به این ترتیب، پندارهٔ دَم اثبات می‌شود.

آری، مسالهٔ دم شایستهٔ توجه است!

آیا این مسأله سودمند است؟ جالب است؟ منظور از یک مسألهٔ جالب ریاضی چیست! مطمئناً این مسالهٔ مشکلی است که طرح کرده‌ایم و همان‌گونه که باید، مدت مدیدی است ریاضیدانان به آن می‌اندیشند. اکنون عناصری از پاسخ به مسأله و نشان‌هایی از «کیفیت» را بیان می‌کنیم. نخستین معیار، قدمت است: ریاضیدانان نسبت به سنّت حساسیت خاصی دارند، به مسائلی که از مدت‌ها پیش طرح شده‌اند و ریاضیدانان چند نسل متوالی به آن پرداخته‌اند و هنوز به نتیجهٔ نهایی نرسیده‌اند. هم‌چنین، یک مسالهٔ خوب باید به‌صورت ساده‌ای مطرح شود، حل آن منجر به گسترش‌های شگفت‌انگیز شود، احیاناً حوزه‌های بسیار متنوعی را به هم مربوط سازد. مسألهٔ استحکام که در این گفتار مورد بحث قرار دادیم، از نظر فوق جالب است.

این پرسش که آیا یک مسأله باید کاربردهای سودمندی در عمل داشته باشد، موضوع ظریفتری است. جواب ریاضیدانان به این سؤال بسیار متنوع است. بدون شُبهه، مسائل «عملی» که مثلاً از فیزیک سرچشمه می‌گیرند، غالب اوقات به‌عنوان انگیزه برای ریاضیات بکار می‌روند. گاهی صحبت بر سر حلِ یک مسألهٔ ملموس است، ولی در غالب موارد، ارتباط آن قدر روشن نیست: ریاضیدان از مسالهٔ ملموسِ مورد بحث، فقط به‌عنوان یک منبع الهام استفاده می‌کند و حل واقعی مسالهٔ نخستین، دیگر برای او انگیزهٔ واقعی نیست. مسالهٔ استحکام که در این گفتار مطرح کردیم به رستهٔ اخیر تعلق دارد. منشاء فیزیکی آن

کاملاً روشن است و مربوط به پایداری و استحکام ساختارهاست، مانند ساختارهای فلزی.

در حال حاضر، می‌توان گفت که مثال‌های کونلی هیچگونه فایده‌ای برای مهندسین ندارند. با این وجود، در آینده‌ای نامعلوم، برای دست یافتن به درک جامع‌تری از موضوع استحکامِ ساختارهای وسیع با تعداد فراوانی از عناصر جزئی (نظیر ماکرو مولکول‌ها، یا مجتمع‌های ساختمانی و غیره)، این نوع پژوهش نایاب نخواهند بود. بنابراین، بحث بر سر پژوهش‌های نظری و «فاقد بهره‌وری» است، اما این پژوهش‌ها به احتمال قوی یک روز سودمندی خود را نشان خواهند داد.

نویسنده: اتین گی
دانشسرای عالی لیون
مرکز ملی تحقیقات علمی (CNRS)[۱]
واحد پژوهشی UMR 5669

چند مرجع

- M. Berger, *Géométrie, vol. 3.* - Convexes et polytopes, polyèdres réguliers, aires et volumes(CEDIC/Nathan Information, 1977).
- R. Connelly, I. Sabitov, A. Walz, "The bellows conjecture", *Beiträge Algebra Geom., 38*(1997), *n°*1, pp. 1-10.
- R. Connelly, "A counterexample to the rigidity conjecture for polyhedra", Institut des Hautes Études Scientifiques, *Publication Mathématique n °47* (1977), pp. 333-338.
- N. H. Kuiper, "Sphères polyédriques flexibles dans $E^۳$, d'après Robert Connelly", *Séminaire Bourbaki, 30e année(1977/78)*, exposé n°514, pp. 147-168 (Lecture Notes in Math. 710, Springer, 1979).

Étienne Ghys
École Normale Supérieure de Lyon,
CNRS-UMR 5669

[۱] Centre National de la Recherehe Scientifique

.

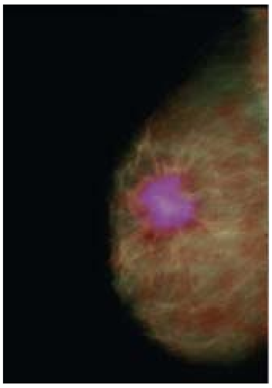
پیدا کردن ژنی که مسؤول سرطان است

نویسنده: برنار پرَنْ [1]

مترجم: حوری سپهری

ویراستاران: فرج‌الله محمودی، ارسلان شادمان

پیشرفت‌های بیولوژی مدرن و به‌ویژه ژنتیک ملکولی نیاز به ابزار جدید ریاضی دارند. مثال آن آمار و نقش آن در جستجوی ژن مسؤول سرطان سینه است.



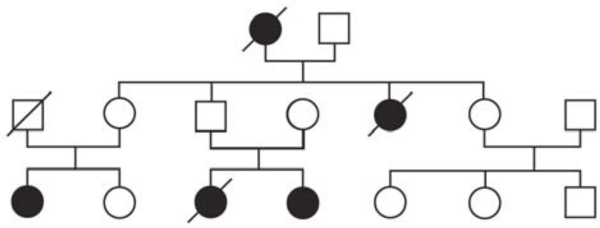
در این ماموگرافی (عکسبرداری از پستان) با رنگ غیرواقعی، یک غدهٔ سرطانی به رنگ صورتی به وضوح مشاهده می‌شود. قسمت مهمی از پژوهشهای سرطان سینه معطوف به منظرهٔ ژنتیکی آن است. در این پژوهش‌ها تئوری آماری نقش اصلی را بازی می‌کند.

---

[1] Prum, Bernard: *Trouver un gène responsable de cancer:*
in: L'explosion des mathématiques, SMF et SMAI, Paris, 2002, p. 28-31

بسیاری از بیماری‌ها ریشهٔ وراثتی دارند: احتمال بروز بیماری در افرادی که کم و بیش حامل ژن بیماری هستند بیشتر است. بدین جهت علم ژنتیک جدید در جستجوی آگاهی بر نقش ژن‌های مختلف و به‌ویژه عمل آن در پیدایش بیماری است، به این امید که روزی بتوان آن را معالجه کرد. مثلاً اشخاص مبتلا به سرطان سینه را در نظر بگیریم که در فرانسه از هر ۸ زن حدوداً یک نفر به آن مبتلاست. در کنار عوامل متعدد خطر سرطان (تغذیه، سیگار، قرار گرفتن در مقابل اشعه و غیره) چند سالی است ژنی را شناسایی کرده‌اند که موتاسیون‌های آن در درصد بالایی از زنان مبتلا به این نوع سرطان دخیل است. این ژن BRCA1 (سرطان سینهٔ ۱)[۱] نامگذاری شده است. این نتیجهٔ بیومدیکال جز با نتایج آنالیزهای آماری نمی‌توانست بدست آید و به طوریکه خواهیم دید این نتایج اجازه داد که با دقت روزافزون محل ژن را به‌طور دقیق معین کنند.

علم ژنتیک مدت‌ها طبیعت مادی ژن را نمی‌شناخت. بیش از ۲۰ سال نیست که به سکانس‌های متعدد DNA دسترسی پیدا کرده‌اند. DNA زنجیره‌ای ملکولی می‌باشد که اطلاعات ژنتیکی را از والدین به فرزندان منتقل می‌کند. در عین حال، ندانستن ترکیب شیمیایی ژن‌ها مانع از گرفتن نتایج وراثتی دقیق دربارهٔ برخی صفات نبوده است.



شکل ۱. خانواده‌ای را نشان می‌دهد که تعدادی از افراد آن دارای سرطان سینه هستند. مربع‌ها برای مردها، دایره‌ها برای زن‌ها، دایرهٔ سیاه مربوط به فرد مبتلا و دایرهٔ سیاه خط‌دار مربوط به فرد مبتلایی است که مرده است. ملاحظه می‌کنیم که مادربزرگ، یکی از دختران و سه نوهٔ دختری او دارای سرطان سینه بوده‌اند. مطمئناً در سایر افراد خانواده بیماری می‌تواند حضور داشته باشد. به وسیلهٔ نتایج این شجره‌نامه، ژنتیک‌دانان به فرض وجود یک عامل ژنتیکی در این بیماری هدایت شده‌اند.

در مقابل یک بیماری نظیر سرطان سینه، نخستین سوال مطرح این است که «آیا این بیماری وراثتی است؟» و آیا ژن‌هایی مسؤول آن هستند؟ جواب برای سرطان مدت‌ها

[۱] breast cancer 1

مشکوک بود. برای جواب مثبت به این سؤال باید منتظر بود تا تمرکز تعداد افراد مبتلا در فامیل تعیین شود. مثلاً معلوم شود آیا دختر یا خواهرزن مبتلا نسبت به سایرین بیشتر در معرض ابتلا است. مدت‌ها متخصصین آمار ـ ژنتیک نتایج را به‌صورت شجره‌نامهٔ شکل شمارهٔ یک نمایش می‌دادند. بااین شجره‌نامه چه باید کرد؟ تقریباً از مندل [۱] به بعد می‌دانیم که یک صفت وراثتی اغلب به‌وسیلهٔ ژنی مشخص می‌شود که دارای فرم‌های مختلف بنام آلل [۲] است. هر فرد یک آلل از پدر و یک آلل از مادر به ارث می‌برد، این فرد یکی از آن دو را به‌طور اتفاقی به فرزند خود منتقل می‌کند. ژنتیک‌دان‌ها برای انتقال یک بیماری مورد مطالعه، مدلی پیشنهاد می‌کنند که دخالت چند ژن و آلل را فرض می‌گیرد. ارزش این مدل با آزمون‌های آماری ویژه تعیین می شود، مثلاً باعث حذف فرضیهٔ ساده‌ای از قبیل «بیماری مطالعه شده هیچ عامل ژنتیکی ندارد» می‌شوند.

در بیماری‌هایی که دارای عوامل پیچیده هستند «نظیر سرطان سینه» و عوامل متعدد محیطی و سن در آن دخالت دارند، باید داده‌ها را برحسب وابستگی به زمان بررسی کرد. در این‌حال باید از آمار فرایندها استفاده کرد که شاخه‌ای پیشرفته از ریاضی است و قسمت بزرگی از این پیشرفت مدیون نتایج حاصله از مکتب احتمالات فرانسه در سال‌های ۱۹۸۰ (پ.آ. میر، ژ. ژاکو) [۳] و مکتب آماری اسکاندیناوی می‌باشد.

آمارهایی برای مشخص کردن کروموزوم حامل ژن

پس از آن‌که آنالیز شجره‌نامه‌ها وجود ژن حساسیت به سرطان پستان را نشان داد، مرحلهٔ بعد تعیین محل ژن ولو به گونه‌ای اجمالی روی یک کروموزوم از ۲۳ کروموزوم انسانی است. برای این کار از سال‌های ۱۹۸۰ به بعد از نشانه‌گذارهایی استفاده می‌کنند، این نشانه‌گذارها زنجیرهای کوچک DNAی کاملاً شناخته شده‌ای می‌باشند که می‌توان آنها را به آسانی و باکمترین هزینه مثلاً توسط تجزیهٔ شیمیایی سریع تشخیص داد. علامت‌گذاری تعیین محل آن آسان است. علامت‌گذارها اجازه می‌دهند که شباهت بین مناطق کروموزوم‌های مورد امتحان در افراد بیمار و وابسته ارزیابی شوند. هر قدر شباهت یک منطقهٔ کروموزومی در خویشاوندان مبتلا بیشتر باشد، به همان اندازه احتمال اینکه این

---

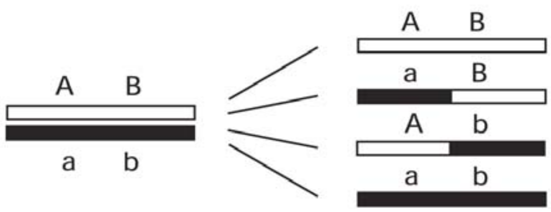
[۱] Mendel

[۲] *allèle*

[۳] (P. A. Meyer - J. Jacod)

منطقه دارای یک ژن دخیل در بیماری باشد بیشتر است.

چنین آنالیز آماری مطمئناً پیچیده است زیر هر والدی کروموزوم‌هایی را که از والدین خود گرفته است عیناً به فرزندان خود منتقل نمی‌کند بلکه به‌صورت ترکیب مجددی نظیر شکل (۲) آن‌ها را منتقل می‌نماید. اگر دو ژن را روی یک کروموزوم اولیه ملاحظه کنیم، آن‌ها را پس از ترکیب مجدد می‌توان روی دو کروموزوم متفاوت مشاهده کرد. به‌همان میزان که دو ژن مورد مطالعه از هم دورتر باشند احتمال پدیدهٔ فوق بیشتر است پس باید نرخ مشابهت در طول یک کروموزوم را تحلیل کرد، یعنی به بررسی یک فرایند تصادفی پرداخت. بنابراین با بررسی آماری فرایندها می‌توان فاصله‌ای را که در آن ژن مورد نظر قرار دارد مشخص کرد. به‌کار بردن علامت‌گذاری‌ها به اکیپ آمریکایی (جِف م. هال)[۱] از دانشگاه برکلی اجازه داد که در سال ۱۹۹۰ ژن BRCA1 را روی کروموزوم ۱۷ تعیین نمایند.



شکل ۲. برای هر زوج از کروموزوم‌های یک فرد، یک کروموزوم از سوی پدر به ارث می‌رسد (با رنگ سیاه) و یک کروموزوم از سوی مادر (با رنگ سفید). به هر فرزند از سوی هر یک از والدین فقط یک کروموزوم منتقل می‌شود. اما پیش از انتقال، کروموزوم‌های هر زوج می‌توانند قطعاتی را بین خود به طور تصادفی مبادله کنند. این فرآیند که تجدید ترکیب نامیده می‌شود موجب آن است که از سوی والدین کروموزومی با ترکیب جدید منتقل شود که به شکل یکی از چهار صورت درج شده در شکل است (دراین شکل فرض شده است که کروموزوم‌ها دو ناحیه را با هم مبادله کرده‌اند).

خواندن ملکول DNA برای مشخص کردن کامل ژن و ناهنجاری‌های آن

کار بعدی مشخص کردن دقیق محل ژن و شناختن ساختار آن است. می‌دانیم که مادهٔ ژنتیکی DNA زنجیر ملکولی کشیده‌ای است که با الفبای مرکب از چهار حروف a، c، g، t نوشته می‌شود (این چهار حرف، حرفهای اول چهار نوع ملکول تشکیل دهندهٔ زنجیرهٔ DNA می‌باشند). بانک‌های داده‌های ژنتیکی چندین میلیارد از این حروف را در اختیار

[۱] Jeff. M. Hall

دارند (حدود ۲۵ میلیون در روز به آن اضافه می‌شود).

با دقتی که در روش علامت‌گذارها وجود دارد می‌توان یک ژن را روی یک سکانس DNA که دارای ۴ میلیون حرف است معین کرد. برای دانستن این‌که کدام آلل یا کدام موتاسیون مسؤول مثلاً بیماری سرطان سینه است، باید این سکانس‌ها را در افراد سالم و بیمار مقایسه کرد. این عمل مانند آن‌است که یک غلط تایپی را در مطلبی با ۴ میلیون کاراکتر یعنی کتابی حدود ۲۰۰۰ صفحه پیدا کرد، یا بهتر بگوییم باید به تعداد افراد مورد مطالعه کتاب ۲۰۰۰ صفحه‌ای در نظر بگیریم و در آنها یک غلط تایپی پیدا کنیم. حتی با استفاده از امکانات وسیع کامپیوتری این کار بسیار سنگین است. اما در انسان ژن‌ها بیش از ۳٪ کروموزوم‌ها را تشکیل نمی‌دهند و بقیهٔ مادهٔ کروموزومی را بینِ ژنی نامند. بنابراین اگر پژوهش محدود به غلط تایپی ژن شود تعداد صفحات به ۳۰ صفحه می‌رسد که برای همه کامپیوترها قابل محاسبه می‌باشد.

اما چگونه ژن‌ها را از بقیهٔ کروموزوم تشخیص می‌دهند. مسلم شده است که «سبک» نوشتن ژن‌ها با روش مواد بین ژنی متفاوت است: فرکانس توالی حروف یکسان نیست و از این تفاوت می‌توان برای تشخیص سکانس‌های بین ژنی استفاده کرد. می‌توان این اختلاف سبک را مورد بهره‌برداری قرار داد و به کمک آن در سکانس مورد نظر ژنها و بخشهای بین ژنی را از هم تفکیک کرد. این چالش مشکل است. باید از مدل‌های آماری که **زنجیرهٔ مارکف**[1] **مخفی** خوانده می‌شود و در سال‌های ۱۹۸۰ در ارتباط با مسائل بازشناسی خودبخود گفتار بسط یافته بود کمک گرفت. استفاده از زنجیره‌های مارکف مخفی در ژنومیک هم زمان با استفاده از آلگوریتم‌هایی صورت گرفت که هم قادر بودند سبک‌های مختلف را مشخص کنند و هم به هر وضعیت روی کروموزوم سبک مناسب آن را نسبت دهند.

به این ترتیب می‌توان محل BRCA1 را به‌صورت دقیقی مشخص کرد و از این پس به سهولت در هر بیمار آن را خواند. ژن حساسیت به سرطان سینه ۵۵۹۲ حرف و بیشتر از ۸۰ آلل دارد. کار جدید آمارگران ارتباط بین آلل‌های متفاوت و اهمیت آن‌ها در بیماری سرطان است.

بیولوژی زمینهٔ جدید فعالیت را به ریاضی تقدیم می‌کند

مثال ژن BRCA1 مؤید این است که احتمالاً بیولوژی در مقابل ریاضی همان نقشی را

---

[1] Markov..

بازی خواهد کرد که در قسمت مهمی از قرن بیستم فیزیک در مقابل ریاضی داشته است: دادن زمینهٔ کاربردی به ابزارهای تئوری جدید و تدارک ابزارهای جدید (در اینجا به ابزارهای آماری متوسل می‌شویم اما می‌توانستیم از یکی دیگر از زمینه‌های ریاضی نظیر سیستم دینامیک، بهینه‌سازی تا هندسه کمک بگیریم. می‌دانیم که تشکل فضایی ملکول‌ها در عمل آنها نقش اساسی دارد). امروزه چالشی جدید برای متخصصین آمار بوجود آمده است: در حال حاضر می‌توان چندین میلیون معرف را روی یک سانتیمتر مربع شیشه جا داد و فهمید کدامیک از ژن‌ها در چه بافت‌هایی و در چه شرایط آزمایشگاهی یا ...در کدام سلول سرطانی عمل می‌نمایند. درصدها مورد با شرایط مختلف اندازه‌گیری‌هایی در آزمایشگاه‌ها انجام شده و در نتیجه تعداد زیادی دادهٔ عددی فراهم شده است که بیان عبارتهای هزاران ژن را عرضه می‌کنند. در حال حاضر تنها آنالیزهای آماری میتواند ادعا کند قادر است آنها را بررسی کند و به‌طور دقیق ارتباط بین ژن‌ها و بیماری‌ها را روشن سازد.

برنار پرَنْ
آزمایشگاه آمار و ژنوم
(UMR CNRS 8071)
ژنوپول، دانشگاه اِوری

چند مرجع

- B. Prum, "Statistique et génétique" dans *Development of Mathematics 1950-2000* (sous la dir.de J.-P. Pier, Birkhäuser, 2000).
- C. Bonaïti-Pellié, F. Doyon et M. G. Lé, "Où en est l'épidémiologie du cancer en l'an 2001", *Médecine-Science, 17,* pp. 586-595 (2001).
- F. Muri-Majoube et B. Prum, "Une approche statistique de l'ananlyse des génomes", *Gazette des mathématiciens, n° 89*, pp. 63-98 (juillet 2001).
- B. Prum, "La recherche automatique des gènes", *La Recherche, n° 346,* pp. 84-87 (2001).

- M. S. Waterman, *Introduction to computational biology* (Chapman & Hall, 1995).

Bernard Prum
Laboratoire Statistique et Génome
(UMR CNRS 8071),
La Génopole, Université d'Évry

.

موجکها برای فشرده‌سازی تصویر

نویسنده: استفان مالا [۱]

مترجم: ارسلان شادمان

ویراستاران: فرج‌الله محمودی، شهناز عباسپور

تصاویر، خواه به شکل ذخیره‌سازی عددی در حافظهٔ رایانه‌ها و خواه در حین انتقال از نقطه‌ای به نقطهٔ دیگر در شبکهٔ اینترنت جای زیادی اشغال می کنند. خوشبختانه می‌توان بدون تنزّلِ کیفیّت آنها را فشرده و متراکم ساخت.

A B C

شکل ۱. این سه تصویر توان روش‌های فشرده‌سازی فعلی را به نمایش می‌گذارند. تصویر اصلی (A) از ۵۱۲ × ۵۱۲ نقطه تشکیل شده است که رنگ آمیزی هر نقطه با انتخاب یک درجه از میان ۲۵۶ درجهٔ خاکستری ممکن صورت گرفته است. تصویر (B) نتیجهٔ فشرده‌سازی با ضریب ۸ است به این ترتیب که درجهٔ رنگ‌های مختلف را به ۲ درجه تقلیل داده است (فقط سیاه یا سفید). تصویر (C) نتیجهٔ فشرده‌سازی با ضریب ۳۲ است اما از یک پایهٔ موجک‌ها استفاده کرده است. در مورد اخیر اختلاف با تصویر اصلی به زحمت قابل تشخیص است (نمایش تصاویر کار مؤلف است)

[۱] Mallat, Stéphane: *Des ondelettes pour comprimer une image*,
in: L'explosion des mathématiques, SMF et SMAI, Paris, 2002, p. 32-35

یک تصویر عددی را می‌توان فشرده کرد، درست مانند آب پرتقالی که آن را به صورت چند گرم پودر فشرده درمی‌آورند. موضوع صحبت، فریبکاری و بازی با کلمات نیست، بلکه سخن از فنون دانش ریاضی و انفورماتیک است که اجازه می‌دهند فضای اشغال شده به وسیلهٔ یک تصویر در رایانه یا در یک خط مخابراتی تقلیل یابد. امروزه این فنون برای نگهداری و ذخیرهٔ اطلاعات یا برای انتقال آنها از طریق اینترنت، تلفن، ماهواره و یا هر وسیلهٔ دیگر ضروری هستند.

فشرده‌سازیِ یک تصویر به معنای حذفِ اضافات و نمایشِ تصویر به کمک تعداد محدودی پارامتر است. مثال برجستهٔ زیر به درک ایدهٔ اصلی کمک می‌کند: در مورد یک تصویر سفید یکنواخت، بیان درجهٔ خاکستری برای یکایک نقاط تصویر بی‌فایده است، زیرا این کار خیلی طولانی‌تر از آن خواهد شد که بگوییم: «همهٔ نقاط تصویر سفیدند». مسالهٔ نمایش، یکی از موضوع‌های مرکزی در ریاضیات است و کاربردِ آن بسیار فراتر از فشرده‌سازیِ تصاویر است. در طول ده سال اخیر، براثر گسترش نظریهٔ موجکها[۱] پیشرفت‌های قابل ملاحظه‌ای در نظریهٔ نمایش حاصل شده است. در زمینهٔ پردازش تصویر، این پیشرفت‌ها منجر به پذیرش استاندارد جدید فشرده‌سازی (JPEG-2000) شده است. این داستان دارای پیچ و خم‌های متعددی است که نقش ریاضیات را در چشم‌انداز علوم و فناوری نوین به خوبی نمایان می‌سازد.

سی و دو بار جای کمتر با استفاده از موجک‌ها

تصویری مانند شکل ۱ A را در نظر بگیریم. این تصویر از ۵۱۲ × ۵۱۲ نقطه تشکیل شده است که درجهٔ خاکستری آنها از ۰ (سیاه) تا ۲۵۵ (سفید) تغییر می‌کند. هر یک از ۲۵۶ درجهٔ خاکستری ممکن می‌تواند به وسیلهٔ یک «هشتایی»[۲] نمایش داده شود، یعنی به وسیلهٔ یک عدد دو—دویی متشکل از هشت بیت [۳] (پس یک هشتایی چیزی جز دنباله‌ای هشت رقمی از ۰ و ۱ نیست، مانند ۱۰۰۰۱۰۱۱). بنابراین برای کد کردن تنها یک تصویر از این نوع ۲۰۹۷۱۵۲ = ۸ × ۵۱۲ × ۵۱۲ بیت لازم است، که این هم خیلی زیاد است! نخستینِ فکری که به ذهن می‌رسد این است که تعداد درجه‌های خاکستری را کم کنیم، مثلاً آنها را به سیاه و سفید محدود کنیم، مانند شکل ۱ B . دو

[۱] Théorie des ondelettes

[۲] octet

[۳] bit

مقدار ممکن برای درجهٔ خاکستری را با یک بیت (که ارزش ۰ یا ۱ دارد) کدگذاری می‌کنیم. به این ترتیب تعداد بیت‌ها را هشت بار کم کرده‌ایم. البته، کیفیت تصویر شدیداً تنزّل یافته است. اکنون شکل ۱ C را نگاه کنید. کدگذاریِ آن ۳۲ بار کمتر از شکل اصلی و روش به کار رفته مبتنی بر نظریهٔ موجک‌هاست. اما می‌بینید که تنزّل کیفیت به زحمت قابل مشاهده است! چرا؟ زیرا به‌جای آن که درجهٔ دقت شکل را کم کنیم شیوهٔ نمایش اطلاعات را تغییر داده‌ایم.

نخست آنالیزِ ژوزف فوریه[1] به صحنه آمد ...

همان‌گونه که گفتیم، تصویر عددی شده به کمک ۵۱۲ × ۵۱۲ عدد مشخص می‌شود که شدت روشنایی را در هر نقطه تعیین می‌کنند. بنابراین همانطور که نقطه‌ای روی یک رویه را، که فضایی دوبعدی است، می‌توان با دو مؤلفه تشخیص داد، می‌توان تصویر مورد بحث را به عنوان نقطه‌ای از فضای ۵۱۲ × ۵۱۲ بعدی تعبیر کرد، و از خود پرسید که مناسبترین محورهای مختصات برای نمایش چنین نقطه‌ای کدام‌اند؟ یک دستگاه محورهای مختصات همان چیزی را مشخص می‌کند که یک **پایه**[2] می‌نامند (البته طبیعت آن بسیار مجردتر از طبیعت محورهای مختصات در هندسهٔ مقدماتی است).

نخستین پیشرفت بنیادی را ژوزف فوریه، ریاضیدان—فیزیکدان، در سال ۱۸۰۲ طی رساله‌ای در آکادمی علوم راجع به انتشار حرارت تحقق بخشید. موضوع انتشار حرارت ظاهراً به مسألهٔ مورد بحث ما مربوط نیست. برای آن که یک تابع $f(x)$ (که از نظر ریاضی نقطه‌ای است از یک فضای بینهایت بعدی) به شیوه‌ای ساده و فشرده نمایش داده شود، فوریه اساساً ثابت کرد که می‌توان از «محورهایی» استفاده کرد که به کمک مجموعه‌ای نامتناهی از توابع سینوس‌وار ساخته می‌شوند. به عبارت نسبتاً دقیق‌تر، فوریه نشان داد که یک تابع $f(x)$ را می‌توان به‌وسیلهٔ حاصل‌جمع بینهایت تابع سینوسی و کسینوسی به شکل $\sin(ax)$ و $\cos(ax)$ که هر کدام در ضریبی نیز ضرب شده باشد، نمایش داد.

این «پایه‌های فوریه» به صورت ابزاری اساسی، با کاربردهای فوق‌العاده متواتر در علوم، درآمده‌اند، زیرا برای نمایش انواع متعددی از توابع و در نتیجه کمیت‌های فیزیکی فراوان به کار می‌روند. به ویژه آنها را برای نمایش صداها و تصویرها به کار می‌برند. اما

---

[1] Joseph Fourier

[2] base

مهندسین نیک می‌دانند که در مورد سیگنال‌های پیچیده نظیر تصاویر، توابع سینوس‌وار نه تنها ایده‌آل نیستند بلکه از شرایط مطلوب دورند: مثلاً به شکل کارآمدی قادر به نمایش ساختارهای گذرا نظیر مرزهای موجود در تصویر نیستند.

... سپس «تبدیل به موجکها» فرا رسید

تنها متخصصین پردازش سیگنال نبودند که به محدودیت‌های پایه‌های فوریه وقوف یافتند. در سال‌های ۱۹۷۰ یک مهندس ـ ژئوفیزیکدان فرانسوی به نام ژان مورله [۱] متوجه شد که پایه‌های فوریه بهترین ابزار ریاضی ممکن در اکتشافات زیر زمین نیستند. این موضوع — در آزمایشگاهی متعلق به اِلف آکیتن [۲] منجر به یکی از اکتشافات **تبدیل به موجکها** گردید. این روشِ ریاضی که بر مجموعه‌ای از توابع پایه، متمایز از توابع سینوس‌وار متداول در روش فوریه بنا می‌شود، در برخی از موقعیت‌ها با شایستگی بیشتری جایگزین **تبدیل فوریه** می‌گردد. وانگهی از سالهای ۱۹۳۰ فیزیکدانان متوجه شده بودند که پایه‌های فوریه برای تحلیل حالت‌های یک اتم از تناسب خوبی برخوردار نیستند. این موضوع منشأ کارهای متعددی شد که بعدها در نظریهٔ موجکها فواید زیادی داشتند. همین حوالی سالهای ۱۹۳۰، ریاضیدان‌ها نیز به قصد تحلیل ساختارهای تکینِ موضعی به فکر اصلاح پایه‌های فوریه افتادند. این مسأله موجب آغاز یک برنامهٔ وسیع تحقیقاتی گردید که هنوز هم فعال است. به عبارت دیگر گروه‌های علمی با وسایلی که در اختیار داشتند، به تغییراتی در پایه‌های فوریه پرداختند. در سالهای ۱۹۸۰، ایوْ مِیِر [۳] ریاضیدان فرانسوی، نخستین پایه‌های موجکی متعامد را کشف کرد (تعامد نوعی از ویژگی‌ها را بیان می‌کند که موجب تسهیلات فراوانی در استدلال و محاسبه می‌شود؛ پایه‌های فوریه نیز متعامدند). این اکتشاف و به دنبال آن ملاقات‌های اتفاقی که در کنار دستگاه فتوکپی یا کنار دستگاه قهوه‌دم‌کنی یا هنگام نوشیدن قهوه در دانشگاه رخ می‌داد، حرکت علمیِ چندرشته‌ای وسیعی را در فرانسه به وجود آورد، که تأثیرات بین‌المللی آن قابل ملاحظه بود. کاربردهای نظریهٔ موجک‌ها و الگوریتم‌های موجکی راه خود را نه تنها در زمینه‌های متعدد علمی و تکنولوژیک باز کردند، بلکه منشأ تأسیس چندین مؤسسهٔ [علمی‌ـصنعتی]

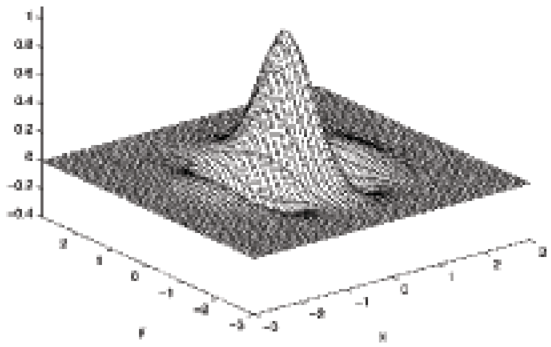
---

[۱] Jean Morlet

[۲] Elf-Aquitaine

[۳] Yves Meyer

در ایالات متحده گردیدند.



شکل ۲. نمودار یک موجک که در فشرده‌سازی تصاویر به کار می‌رود.

ریاضیات موجک‌ها در حوزه‌های متعددی نقش محوری داشته‌اند

ریاضیات در این زمینه، خواه در مورد پالایش و ژرف‌اندیشی و خواه به‌عنوان بستر کمکی، نقشی بنیادین برعهده داشته است. با تفکیک مفاهیم اصلی از کاربردهای مشخص، ریاضیات موجب گردید که دانشمندان رشته‌های مختلف — در فیزیک، در پردازش سیگنال، در نظریهٔ اطلاعات و غیره ـ دریابند که گذر به فراسو، صیقل دادن ابزارها و کنترل‌کردن کارایی موفقیت آنها، همهٔ این هدفها مدیون کارهای جدیدی است که روی آنالیز فوریه صورت گرفته است. سرانجام، این نظریه امکان به کار بستن روش استانداردی را در محاسبهٔ علمی فراهم کرد (این روش، **تبدیل به موجک‌های سریع** است) که محصول همکاری بین ریاضیدانان و متخصصین پردازش سیگنال است. تصویر C در شکل ۱ با همان پدیده‌های موجکی به دست آمده است که در آمار، زلزله‌شناسی و محاسبات علمی به‌کار می‌رود و الگوریتم سریع آنها نیز یکی است. به کمک استاندارد بین‌المللیِ JPEG 2000، این موجک‌ها همهٔ زمینه‌های تصویر را از اینترنت گرفته تا دستگاه‌های عکاسیِ عددی دربرگرفته و در حال گسترش به سوی ماهواره‌ها هم هستند.

بین دنیای موجک‌ها و دنیای هندسه پلی باید ساخت

دیدیم که پایه‌های فوریه در تحلیل پدیده‌های گذرا، سازگاری خوبی ندارند، حال آنکه پایه‌های موجکی برای این کار سازگارند. آیا این پایان داستان است؟ خیر. در پردازش

تصویر و هم‌چنین در همهٔ زمینه‌هایی که موجک‌ها به صورت ابزار اصلی در آمده‌اند، همهٔ دست‌اندرکاران در حال حاضر دغدغهٔ یک نوع مسأله را دارند: آن موضوع بهره‌برداری از نظم هندسی است. درواقع می‌دانیم که یک تصویر، هرقدر هم پیچیده باشد، با ترسیم ساده‌ای مرکب از تعداد نسبتاً کمی خط به گونهٔ قابل توجهی نمایش داده می‌شود، و غالباً مرزهای اشیائی را که در تصویر ظاهر می‌شوند می‌توان با خم‌های هندسی بس ساده‌ای برازش کرد. بنابراین اگر بتوانیم از این خم‌ها و از نظم آنها استفاده کنیم خواهیم توانست نتایج به دست آمده تا این زمان را به نحو قابل ملاحظه‌ای بهبود بخشیم؛ نظریهٔ موجک‌ها در حال حاضر قادر به این کار نیست. ساختن چنین پلی با دنیای هندسه، مسائل ریاضی مشکلی را مطرح می‌کند، اما با توجه به ارزش علمی و صنعتی این مهم می‌توان امیدوار بود که این پل ظرف ده سال آینده ساخته شود. آیا این مسأله در فرانسه به نتیجه خواهد رسید؟

استفان مالا
گروه ریاضی کاربردی
مدرسه پلی تکنیک، پالزو

چند مرجع

- B. B. Hubbard, *Ondes et ondelettes - La saga d'un outil mathématique* (Pour la Science/Belin, 1995).
- S. Mallat, *Une exploration des signaux en ondelettes* (Ecole polytechnique/Ellipses, 2000).
- Y. Meyer, *Ondelettes et algorithmes concurrents* (Hermann, 1992).

Stéphane Mallat
Département de mathématiques appliquées,
École Polytechnique, Palaiseau

جلوگیری از سر و صدای امواج

نویسنده: دانیل بوش [۱]

مترجم: علی افضلی صمدی

ویراستاران: فرج‌الله محمودی، ارسلان شادمان

چگونه می‌توان از تشخیص رادار گریخت؟
شکل مطلوب دیوار ضد صدا چگونه است؟
آیا می‌توان تصویرهای سونوگرافی را واضح‌تر کرد؟
برای دریافت پاسخی رضایت‌بخش، این پرسش‌ها نیاز به تحلیل‌های نظری پیشرفته‌ای دارند.

یک موج چیست؟ شخصی که بتواند در آن واحد پاسخی دقیق و منحصربه‌فرد به این سؤال بدهد، مسلماً شخص زیرکی است. با وجود این، امواج همه جا حضور دارند و برنامهٔ روزانهٔ تعداد بسیاری از دانشمندان و مهندسان را به خود اختصاص داده‌اند. با عبارتی نسبتاً مبهم ولی حسی، می‌توان گفت موج یعنی انتشار یک سیگنال، یک اغتشاش، در محیطی مناسب و با سرعتی قابل ارزیابی.

مثال‌ها در این مورد فراوانند، مسلماً موج‌های کوچکی که بر اثر پرتاب سنگریزه در سطح آب ایجاد می‌شوند، نمونه‌ای از آن است. در این حالت، آشفتگی که منتشر می‌شود

---

[۱] Bouche, Daniel: *Empêcher les Ondes de faire du bruit*,
in: L'explosion des mathématiques, SMF et SMAI, Paris, 2002, p. 36-40

مربوط به ارتفاع آب است. فاصلهٔ بین دو موج کوچک پیاپی طول موج است، که کمیتی اساسی در تشریح پدیده‌های موجی است. امواج صوتی، تغییرات فشار و چگالی محیط را (که غالباً هوا است) به بازی می‌گیرند، هنگامی که این تغییرات با بسامدهای قابل شنیدن ایجاد می‌شوند. امواج اکوستیک[۱] طبیعت مشابهی دارند که در آن واحد، شامل امواج صوتی و امواج غیرقابل درک به وسیله گوش‌ها هستند. تا زمانی که این امواج در محیطی جامد منتشر می‌شوند، غالباً آنها را امواج کشسان[۲] می‌نامند. امواج زلزله که از درون زمین عبور می‌کنند و زلزله‌نگار آنها را تشخیص داده و ثبت می‌کند، از این نوع هستند[۳].

امواج الکترومغناطیسی اهمیت ویژه‌ای دارند. در مورد این امواج، تغییرات میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی می‌توانند در خلاء با سرعتی معادل با سرعت نور منتشر شوند. نور مرئی، فروسرخ‌ها، فرابنفش‌ها، پرتوهایِ X و پرتوهای گاما(γ)، امواج ریز[۴]، امواج رادیوئی، امواج رادار، تمام این پدیده‌ها امواج الکترومغناطیسی هستند. اختلاف فقط در بسامد و یا در طول موج آنها است[۵]. (در مورد نور مرئی، طول موج کسری از میکرومتر است. برای فرابنفش‌ها وپرتوهای X و γ باز هم به مراتب کمتر و در حدود چند صد میلیونیم متر است. حال آنکه طول موج در مورد امواج رادار و رادیو در حدود چندین سانتی‌متر تا چند صد متر می‌باشد).

مطالعهٔ رفتار امواج نه تنها امکان درک طبیعت اطراف ما را میسر می‌سازد، بلکه ما را بر بسیاری از فنون مسلط نموده و به طریق اولی امکان اختراعات بسیار دقیقی را به ما می‌دهد. رفتار امواج نور مرئی در شناخت مکانیسم همهٔ دستگاه‌های اُپتیک از قبیل عدسی دوربین‌های عکاسی، عدسی میکروسکپ‌ها و عدسی ابزارهای مسافت یاب[۶] و غیره دخالت دارند. می‌توان به امواج رادار و کاربرد نظامی آن اندیشید، به تجسم وسایل نظامی که قادر باشند در حد امکان از دید رادار پنهان بمانند و بگریزند. در مورد امواج اکوستیک می‌توان به طراحی تالارهای کنسرت فکر کرد که برای بهینه‌سازی اکوستیک آنها، از مواد ساختمانی جاذب صدا و وسایل فعال ضد صدا استفاده می‌شود (وسایلی که

---

[۱] Acoustiques

[۲] Elastique

[۳] امواج اکوستیک از خلاء عبور نمی‌کنند.م

[۴] Micro-Ondes

[۵] این دو معیار نسبت عکس باهم دارند، هر قدر طول‌موج بزرگتر باشد بسامد کوچکتر است و برعکس. انرژی موج نیز با طول‌موج نسبت عکس دارد هر قدر طول‌موج بزرگتر باشد انرژی موج کمتر است و برعکس.(م)

[۶] appareil de télémétrie

موجب پخش امواج صوتی در جهت مقابل امواج صدای مزاحم باشند تا آنها را خنثی کنند). می‌توان امواج صوتی را در ساختار دستگاه‌های سونوگرافی، سنگ‌شکن کلیه‌ها و یا دستگاه‌های کنترل معایب، بدون بازکردن جسم مورد معاینه (مثلاً تشخیص معایب در قطعات درونی هواپیماها) به کار برد.

شکل ۱. دوک کوچک[۱] یک درُن (drone) یعنی هواپیمای کوچکی است که با کنترل از راه دور هدایت می‌شود و به وسیلهٔ شرکت‌های هواپیماسازی داسو[۲] ساخته شده است. این دستگاه، از نقطه‌نظر امواج رادار وسیله‌ای نامرئی است. شکل و مواد تشکیل دهندهٔ آن به نحوی انتخاب شده‌اند که تشخیص آن به وسیلهٔ رادار غیرممکن است. این انتخاب بر مبنای محاسباتی بسیار پیچیده و بر اساس انتشار امواج در شرایطی ویژه به دست آمده است. دقت و ظرافت چنین محاسباتی غیرقابل تصور و مبتنی بر پژوهشی جسورانه است.

(کلیشه از هواپیماسازی داسو Dassault Aviation)

معادلاتی شناخته شده که حل دقیق آنها دشوار است

دیر زمانی است که معادلات تعیین کنندهٔ امواج در انواع گوناگون شناخته شده‌اند. از جمله، معادلات مربوط به امواج الکترومغناطیسی بیش از یک قرن پیش، حدود سال‌های ۱۸۷۰ میلادی، به وسیلهٔ جیمز کلرک ماکسول اسکاتلندی[۳] ثابت شده‌اند. اما شناخت معادلاتی که مثلاً امواج رادار از آنها پیروی می‌کنند به تنهایی کافی نیست. به عنوان مثال، برای

---

[۱] Le Petit duc

[۲] Dassault

[۳] James Clerk Maxwel

تشخیص انتشار این موج یا واکنش آن بر روی مانعی که با آن برخورد می‌کند، مانند یک هواپیما و یا شیی‌ای در فضا که قصد تشخیص و تعیین وضعیت یا سرعت آن را داریم و برگشت بخشی از موج ارسالی به آنتن فرستنده، این معادلات کافی نیستند. در واقع باید قادر به حل این معادلات باشیم، معادلاتی که مجهول آنها میدان موجی یعنی دامنه‌های موج [۱] در هر لحظه و هر نقطهٔ فضا است. این مسأله آنقدرها هم ساده نیست. موضوع مورد بحث معادلات مربوط به مشتقات جزئی است (که در آن دامنهٔ موج به عنوان مجهول همراه با مشتق‌های جزئی آن نسبت به مختصات فضایی و نسبت به زمان دخالت می‌کنند). البته باید معادلات را با شرایط مرزی تکمیل کرد. این معادلات با بیان ریاضی، داده‌های اصلی نظیر میدان موجی در لحظهٔ نخست، شکل مانع و چگونگی رفتار موج بر سطح مانع (بازتاب یا جذب)، چگونگی افت دامنهٔ موج از فاصلهٔ بسیار دور نسبت به منبع موج و یا مانع را مشخص می‌کنند.

حل این نوع مسائل که در آن موج به وسیلهٔ اشیائی دچار پراش [۲] گردد (منحرف شود، تغییر شکل دهد) پیچیده است. لازمهٔ این کار ابزارهای ریاضی است، که برخی از آنها ساده و از مدت‌ها پیش شناخته شده‌اند، اما برخی دیگر بسیار پیشرفته و در دست تکمیل و توسعه هستند. به طور کلی‌تر مبحث معادلات مشتقات جزئی شاخه‌ای بسیار مهم در ریاضیات است که از دویست سال پیش تا کنون موضوع پژوهش‌های فعال بوده‌اند. به محض اینکه معادلات و شرایط مرزی آنها مشخص شد یکی از نخستین تلاش‌های ریاضیدانان بیان دقیق مسأله و فرمول‌بندی آن با عباراتی دقیق و نشان دادن وجود و در صورت امکان یکتایی جواب معادلات است (در غیر این صورت مفهوم آن این است که مسأله درست طرح نشده و مدل‌سازی آن ناقص بوده است). چنین مطالعه‌ای ممکن است دشوار باشد و گاهی دانش کافی برای پاسخ به آن را نداریم. ولی به هر حال این مطالعه به ما اطمینان خاطر می‌دهد که بیهوده درگیر محاسبات حل مسأله نشویم.

آنالیز ریاضی اجازه می‌دهد مسأله با دقت فرمول‌بندی شود و روش‌های کارآمدِ حل مسأله ارائه گردد.

مرحلهٔ بعدی پیشنهاد روش‌های مؤثر برای حل مسألهٔ موردنظر با دقت کافی است. راه‌حلی به اصطلاح تحلیلی که در آن به کمک فرمول‌های فشرده، به نتیجه‌ای دقیق و کلی

[۱] Amplitude

[۲] diffraction

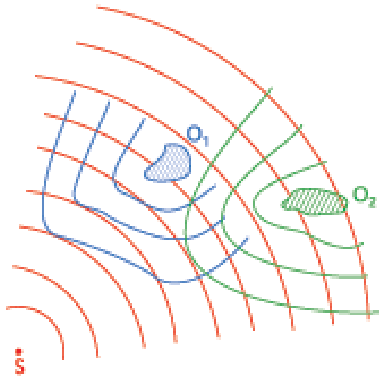
برسد، جز در حالت‌های استثنائی و بسیار ساده، عموماً خارج از دسترس است. پژوهشگر علمی یا مهندس مجبور است به حل عددی معادله مورد بحث بسنده کند و به دلیل حجم زیاد محاسبات اجرای آن را به رایانه بسپارد و نهایتاً جواب مسأله را به شکل مقادیر عددی قابل قبول با تقریب به دست آورد. دشواری‌های مهمی نیز در اینجا پدیدار می‌شود.

به این ترتیب در مسائلی که به پراش موج [۱] به وسیلهٔ اشیاء می‌پردازد، محیط انتشار غالباً نامحدود است: زیرا موج می‌تواند تا بی‌نهایت انتشار یابد. اما برای اینکه جواب مسأله یکتا باشد، باید شرطی را در نظر گرفت که اصطلاحاً شرایط پرتوافکنی می‌نامند، تا مشخص کند که دامنهٔ موج در حین دور شدنِ تدریجی چگونه کاهش می‌یابد. در نظر گرفتن این شرط به صورت عددی ساده نیست. یکی از راه‌حل‌های پیشنهاد شده، تبدیل معادله با مشتقات جزئی مورد بحث به یک معادلهٔ انتگرالی است (معادله‌ای که توابع مجهول آن در انتگرال‌هایی ظاهر می‌شود). مزیت این نوع فرمول‌بندی در آن است که شرایط پرتوافکنی را به طور خودبه‌خود رعایت می‌کند.

نخستین برنامه‌های رایانه‌ای برای حل مسأله به کمک معادلات انتگرالی در سال‌های ۱۹٦۰ نوشته شد. این برنامه‌ها محاسبهٔ پراش را فقط در مورد اشیائی امکان‌پذیر می‌ساخت که نسبت به طول‌موج کوچک باشند؛ وانگهی، از آنجا که این برنامه‌ها از تحلیل ریاضی کافی برخوردار نبود، نتایج به دست آمده غالب اوقات ناهنجار بود. با درک مشکلات موجود و شناختن راه‌حل آنها، در اواخر سال‌های ۱۹۸۰، امکان محاسبهٔ پراش امواج به وسیلهٔ اشیاء بزرگ‌تر از طول‌موج تابش، با دقتی بهتر فراهم آمد. امروزه پژوهش در قلمروهای مختلفی ادامه دارد، مانند انتخاب فرمول‌بندی انتگرالی سازگار با مسألهٔ موردنظر و کاربرد روش عددی برای حل معادلات. به‌ویژه روش‌هایی که به آنها چند قطبی می‌گویند، امکان افزایش قابل توجه حجم مسائل مطرح شده را فراهم می‌آورد. این پژوهش‌ها در به وجود آوردن ابزارهای نرم‌افزاری قابل اطمینان سهیم‌اند. این نرم‌افزارها قادر به محاسبهٔ دقیق میدان موجی پراش یافته به‌وسیلهٔ اشیایی هستند که اندازهٔ آنها ده‌ها برابر طول‌موج ارسالی است. این ابزار به‌ویژه در مورد تشخیص هواپیماهای عظیمی که در میدان دیدِ رادارهایی با طول‌موجی در ابعاد متری قرار می‌گیرند کاربرد دارند.

---

[۱] diffraction d’onde (wave diffraction)



شکل ۲. یک نمونه ویژه از مسائل انتشار امواج: چشمه تابش‌ها یک موج رادار، نوری، اکوستیک یا غیره را (به رنگ قرمز در شکل) با طول‌موج کاملاً مشخص منتشر می‌کند. موج بر روی دو مانع مشخص شده در شکل با O_1 و O_2 به صورت جزئی بازتاب می‌کند (به رنگ آبی و سبز در شکل). دامنهٔ امواج ایجاد شده در هر محل که مثلاً به وسیلهٔ تشخیص دهندهٔ S دریافت شده‌اند چیست؟ در حل این مسأله مشکل، باید نوع امواج منتشر شده، طول‌موج، شکل مانع و مواد ساختاری آن و ... را در نظر گرفت.

یکی از روش‌هایی که با روش تحویل به معادلات انتگرالی رقابت می‌کند، روش حل مستقیم معادلات مشتق جزئی است به این طریق که از شرط پرتوافکنی صرف‌نظر می‌نماید و محیط انتشار را به شیوهٔ مصنوعی به یک نوع «شرط مرزهای جاذب[1]» محدود می‌کند: یعنی (به شیوهٔ ریاضی) حضور یک مرز خیالی که جاذب همهٔ موج‌های رسیده به آن است، در نظر گرفته می‌شود. این شرایط مرزهای جاذب، مدتی طولانی مسؤول ظهور پدیده‌هایی مانند بازتاب‌های پارازیتی در راه‌حل‌های عددی بوده و به‌ویژه در مورد اشیائی که قابلیت پراش دهندگی ضعیف دارند مزاحم نیز بوده‌اند. ولی روش‌های عددی که از شرایط مرزهای جاذب استفاده می‌کنند به نحو قابل ملاحظه‌ای توسعه پیدا کرده است. با توجه به کارهای نظری که به خصوص در آغاز سال‌های ۱۹۹۰ انجام گرفته، در حال حاضر بازتاب‌های پارازیتی این روش‌ها بسیار ضعیف شده است.

هنگامی که اندازهٔ مانع مولد پراش امواج نسبت به طول‌موج بسیار بزرگ‌تر باشد (مثلاً یک قطره آب به‌وسیلهٔ نور مرئی روشن شده، یا هواپیمایی که به‌وسیلهٔ امواج راداری با

---

[1] Condition anx limites absorbantes

طول‌موج دسیمتری ظاهر شده و غیره.)، روشی نسبتاً ساده تر برای حل مستقیم معادلهٔ امواج وجود دارد و آن اپتیک‌هندسی شناخته شدهٔ قدیمی است. در این روش امواج نورانی را به پرتوهایی تشبیه کرده اند که در خط مستقیم و در محیطی مشخص منتشر می‌شوند و از قوانین سادهٔ بازتاب و شکست که چندین قرن قبل از تدوین معادلات الکترومغناطیسی کشف شده بودند، پیروی می‌کنند. فیزیکدان‌ها به‌ویژه آرنولدسمرفلد[۱] (۱۹۵۱ ـ ۱۸۶۸) سهم بزرگی در تدوین این روش داشته‌اند. آنها نشان دادند که اپتیک‌هندسی به نحوی قطعی راه‌حل مسألهٔ پراش موج را بر روی اشیائی که ابعاد بی‌نهایت بزرگ‌تری از طول‌موج دارند بدست می‌دهد.

ولی در واقع، اندازهٔ اشیاء واقعی بی‌نهایت نیست: بنابراین اپتیک‌هندسی با تقریبی نسبتاً مناسب پاسخ می‌دهد. سپس این روش‌هابه منظور تعیین میدان موج، در نقاطی که اپتیک‌هندسی کلاسیک آنها را منحصراً به صورت سایه پیش‌بینی می‌کرد، گسترش و عمومیت داده شدند. این کارها در سال‌های ۱۹۵۰ شروع شد و سپس ادامه یافتند. این پژوهش‌ها امکان در اختیار داشتن ابزارهایی را فراهم آوردند که هر چند دقت آنها کمتر از روش‌های حل عددی مستقیم معادلات مشتقات جزئی است، اما در قلمرو طول‌موج‌های کوتاه مؤثرند.

شکل ۳. امواج در سطح آب انتشار می‌یابند: حتی تشریح صحیح و دقیق این مسألهٔ عادی روزمره می‌تواند بی‌اندازه مشکل باشد (عکس از Getty Images)

---

[۱] Arnold Sommerfeld

با وجود تمام این پیشرفت‌ها، تعداد بسیاری از مسائل مربوط به امواج تا کنون به صورت کاملاً رضایت‌بخشی حل نشده‌اند. از جمله در مورد پراش موج به وسیلهٔ اشیائی به مراتب بزرگ‌تر از طول‌موج ولی با اشکال پیچیده و با مشخصات ظریف نسبت به طول‌موج مسأله چنین است. (از این قبیل است مسأله در مورد یک هواپیما یا یک موشک، هنگامی که شکل آنها با درنظر گرفتن جزئیات در حد ابزارهای کوچکی مانند پیچ ومهره‌ها مطرح باشد و نخواهیم به شمایل کلی آنها اکتفا کنیم). کارهای فراوانی برای انجام دادن پیش‌رو داریم.

دانیل بوش
کمیسریای انرژی اتمی (CEA)
گروه فیزیک نظری کار بسته
شاخهٔ ناحیهٔ ایل ـ دو ـ فرانس

چند مرجع

- Site Internet du project de recherche “Ondes” à l’ INRIA: `http://www.inria.fr/recherche/equipes/ondes.fr.html`
- G. B. Whitham, *Linear and non-linear waves* (Wiley, 1974).
- D. S. Jones, *Acoustic and electromagnetic waves* (Oxford University Press, 1986).
- J. A. Kong, *Electromagnetic wave theory* (Wiley, 1990).
- E. Darve, “The fast multipole method: numerical implementation”, *Journal of Computational Physics, 160 (1)*, pp. 195-240 (2000).
- D. Bouche et F. Molinet, *Méthodes asymptotiques en électromagnétisme* (Springer-Verlag, 1994).

Daniel Bouche
CEA (Commissariat à l’énergie atomique),
Département de physique théorique et appliquée,
Direction d’Île -de-France

وقتی هنر با ریاضیات درهم آمیزند

نویسنده: فرانسین دِلِمِر [۱]

مترجم: ارسلان شادمان

ویراستاران: فرج‌الله محمودی، شهناز عباسپور

ریاضیات فقط الهام‌بخش متخصصین علوم نیستند. هنرمندان متعددی موادّ برخی از آثار خود را از ریاضیات برگرفته‌اند. عکس موضوع نیز در مواردی درست است، مثلاً در مورد مناظر و مرایا، هنر راه به سوی تعدادی از نظریه‌های هندسی را نشان داد.

از نوامبر ۲۰۰۰ تا ژانویهٔ ۲۰۰۱، گالری ملیِ ژو دو پوم[۲] اقدام به نمایشی از آثار گذشتهٔ فرانسوا مورِلّه[۳] نموده است، فرانسوا مورله هنرمندی شناخته شده در رشتهٔ هنرهای پلاستیک است که ناقد هنر، توماس مک اِویلی[۴]، اورادرکاتالوگ نمایشگاه به عنوان «فیثاغورثیِ پسامدرن» توصیف نموده است. در فوریهٔ ۲۰۰۱، تام جانسن[۵] به خاطر ابداع

---

[۱] Delemer, Francine: *Quand art rime avec maths,*
in: L'explosion des mathématiques, SMF et SMAI, Paris, 2002, p. 41-44

[۲] Jeu de Paume

[۳] François Morellet

[۴] Thomas McEvilley

[۵] Tom Johnson

قطعهٔ کینتزی لوپز[۱] موفق به دریافت جایزهٔ پیروزی موسیقی[۲] گردید که جایزه‌ای در آفرینش موسیقی معاصر است. این آهنگساز تغییر لحن‌هایی را به وجود می‌آورد که به‌شکل قیدهای موسیقی و به صورت پیاپی عمل می‌کنند، ترانهشهای دنباله‌هایی که او در موسیقی بکار می‌گیرد، گاه اوتومات‌ها را می‌چرخانند، گاه مثلث پاسکال[۳] را تنزل می‌دهند (مثلاً در حلقه‌های بر خود پیچیده[۴]، یا در توپ‌های آهنگین[۵]، وغیره). او پیش از خلق

شکل ۱. نقل می‌کنند که گالیله[٦] در کلیسای جامع پیز[۷] به جای گوش دادن به دعا، متوجّه نوسان‌های لوسترهای آویزان از سقف گنبد بود. او به فکر محاسبهٔ نوسان‌های لوستر افتاد و ملاحظه کرد که بسامدها متفاوت‌اند و با جذر طول آونگ نسبت عکس دارند. آهنگ گالیلئو[۸] اثر آهنگساز تام جانسن متکی بر این مشاهده است. در این عکس آونگ‌ها از سازه‌ای که به وسیلهٔ مهندس هنرمند اهل بُردو، اِریک کاستانگس[۹] طراحی و ساخته شده است، آویزان شده‌اند.

---

[۱] Kientzy Loops

[۲] Victoire de la musique

[۳] مثلث خیام ـ پاسکال (م.)

[۴] Self replicating loops

[۵] Canons rythmiques

[٦] Galilée

[۷] Cathédrale de Pise

[۸] Galiléo

[۹] Eric Castanguès

آثارش، همواره به مفاهیم ریاضی می‌اندیشد و با ژان ـ پُل آلوش[۱] متخصص و پژوهشگر در رشتهٔ نظریهٔ اعداد و کامپیوتر نظری به گفتمان‌های طولانی و سؤال و جواب‌های سودمند می‌پردازد. در همین سال، نمایشنامهٔ اثبات[۲] اثرِ دیوید اوبرن[۳] که زندگی ریاضیدانان را به صحنه می‌آورد، برندهٔ جایزهٔ پولیتزر[۴] در تئاتر می‌شود. این نمایشنامه که برای بینندگان تازه وارد نوشته شده است، بینش جالبی از کار پژوهشگران را ارائه می‌کند و مشخصات چندی از زندگی این محیط را به تماشا می‌گذارد. در این نمایشنامه، می‌توان نگاه‌های گذرایی به داستان نوین و منفرد زندگی ریاضیدان امریکایی جان فوربز ناش[۵] و اشاراتی به تاریخ برهان قضیهٔ فرما[۶] توسط ریاضیدان انگلیسی آندرو وایلز[۷] داشت.

این سه پیشامد که در رسانه‌ها بازتاب یافتند، به خوبی نشان می‌دهند که جاذبهٔ دوسویه، بین ریاضیدانان و هنرمندان، موضوع روز هستند. در طول تاریخ، این روابط دو جانبه به طور مداوم همهٔ حوزه‌های هنری را در بر گرفته‌اند، و می‌بینیم که در سطوح بسیار متفاوت و متنوعی نیز به حفظ روابط خود ادامه می‌دهند. شاهد این مدّعا را می‌توانید از زبان فلاسفه، مورخین هنر، معرفت شناسان، هنرمندان و ریاضیدانان، هنگام بحث‌وجدل دربارهٔ واقعیت وجودی و ماهیت دقیق خود، بشنوید. هدف ما در این مقاله آن نیست که برخی آفرینش‌های هنری را با ارجاع دادن آن به نظریه‌های علمی موجّه جلوه دهیم، و آن هم نیست که به داوری و ارزشدهی یا حتی به رده‌بندی آنچه در ریاضیات و هنر انجام می‌شود بپردازیم. بحث ما محدود به آن خواهد بود که این روابط را با نگاهی نظیر نگاه نقاشان نقطه‌چین روشن سازد.

بین هنرها و ریاضیات روابطی است که در طول زمان شکل گرفته‌اند

توجه شود که می‌گویند در ساخت اهرام، حدود ۲۷۰۰ سال پیش از آغاز تاریخ مسیحی، مصریان مثلث‌های مقدس به اضلاع ۳ و ۴ و ۵ را که زاویهٔ قائمه می‌سازند بکار برده‌اند (این طول‌ها در رابطهٔ «مربع وتر برابر با مجموع مربع‌های دو ضلع دیگر است»

---

۱. Jean-Paul Allouche
۲. Proof
۳. David Auburn
۴. Pulitzer
۵. John Forbes Nash
۶. Fermat
۷. Andrew Wiles

صدق می‌کنند و این رابطه هم به نوبهٔ خود مثلث قائم‌الزاویه را مشخص می‌کند). همین‌طور به نظریه‌های فیثاغورثی راجع به نسبت‌های عددی فکر کنیم، که مربوط به حوالی ۵۰۰ سال پیش از میلاد است، و بر هماهنگی در موسیقی حاکم شدند. در زمان‌های نزدیکتر به ما، البرشت دورِر[۱] و لئوناردو داوینچی[۲]، این چهره‌های سرشناس و سرلوحهٔ روح انسانگرای دورهٔ رنسانس، به هندسه، به اُپتیک، به معماری و مسائل نظری و عملی دخیل در این حوزه‌ها علاقه‌مند بودند. دورر که از تأمّلات و آثار مکتب ایتالیا تغذیه شده بود، و به ویژه تحت تأثیر پیرودلافرانچسکا[۳] و آلبرتی[۴] قرار داشت، در کتاب شرح هندسی‌اش، با عنوان «*Underweysung der messung*» (به تاریخ ۱۵۲۵) قواعد مناظر و مرایا را تثبیت کرد. از همان زمان، هنرمندان به کاربرد وسیع این مباحث در آثارشان می‌پردازند. حال آن که در قرون ۱۷ و ۱۸ ریاضیدانان فرانسوی ژیرار دزارگ[۵] و پس از او گاسپار مونژ[۶] به تأسیس و توسعهٔ هندسهٔ تصویری و هندسهٔ ترسیمی پرداختند. در این موردِ خاص، باید به حضور و تأثیر هنر در علوم اشاره کرد، همان‌گونه که اِریک والِت[۷] تاریخ‌نگار هنر می‌گوید: « ابداع مناظر و مرایا بدون تردید نشانگر یکی از بارزترین مثال‌هایی است که به کمک آن، دستگاه نمادین هنری، شناختی از جهان را فراهم ساخت که برای علوم هنوز ناشناخته مانده بود».

شاید تصور شود که در ادبیات حضور ریاضیات کمرنگ‌تر است. با وجود این، اعضای اولیپو[۸] (که در ۱۹۶۰ به وسیلهٔ ریمون کِنو[۹] و فرانسوا لولیونه[۱۰]، دو نویسنده و ریاضیدان تأسیس شده، تکیه‌گاه‌های نوشتاری خود را غالباً از ریاضیات الهام می‌گیرند.[۱۱] از جمله،

---

[۱] Albrecht Dürer

[۲] Léonard de Vinci

[۳] Piero della Francesca

[۴] Alberti

[۵] Girard Desargues

[۶] Gaspard Monge

[۷] Eric Valette

[۸] Oulipo

[۹] Raymond Queneau

[۱۰] François Le Lionnais

[۱۱] عنوان اولیپو برگرفته از دو حرف اول هر یک از کلمات Ouvroir de littérature potentielle به معنای «دروازهٔ ادبیات آینده» است، به شرط آن که اینجا «آینده» را بر واژه‌های «بالقوه» یا «قریب‌الوقوع» در ترجمهٔ واژهٔ پتانسیل ترجیح دهیم. مترجم.

در کتاب «زندگی، طریقهٔ استعمال»[۱]، سازوکارهای ماجرای اصلی برگرفته از مسألهٔ ترکیبیاتی[۲] «مربع لاتین دوگانهٔ متعامد مرتبهٔ ده»[۳] است.

در آفرینش موسیقی قرن بیستم، کار دو آهنگساز، پیربولِز[۴] و یانیس کزناکیس[۵]، که هر دو تحصیلات ریاضی داشتند، درخشید. با ذکر یک مثال از انبوه آثار خلاقهٔ آنان می‌توان گفت که بولِز در آهنگ‌هایش قواعد سریالیسم[۶] را بسط می‌دهد، حال آن که کزناکیس از کنترل آماری معیارهای موسیقی در موسیقی تصادفیِ خویش بهره می‌گیرد. مؤسسهٔ ایرکام[۷] که در ۱۹۷۰ به وسیلهٔ پیر بولز تأسیس شد، جایگاهی برای همکاری موسیقیدانان، متخصصین اکوستیک، ریاضیدانان و متخصصین کامپیوتر است، که از تربیت مخلوط چند رشته‌ای برخوردارند. این مؤسسه و فعالیت‌های آن دالّ بر پیوند عمیق بین ریاضیات و موسیقی، هم از حیث نظری و هم از جهت فنون و تکنیک، در آغاز قرن بیست‌ویکم است. مسائل و مباحث مربوط به این موضوع، در چشم انداز جالبی با عنوان « منطق‌های ریاضی و منطق‌های موسیقی در قرن بیستم»، در چهارمین همایش ریاضی دیدرو[۸] که به وسیلهٔ انجمن اروپایی ریاضیات[۹] در دسامبر ۱۹۹۹ برگزار شد، ارائه گردید.

ریاضیات گاهی ابزار ساده و گاهی نیروی محرّکهٔ نظری در خلاقیت است

این چند نمونه روشنگر آنند که چه تنوعی در روابط ریاضیات و هنر وجود دارد که در عین حال مسائلی را نیز مطرح می‌کنند. آیا ریاضیات در یک هنر مشخص به دلایل فنی بکار گرفته می‌شوند یا به دلایل تئوریک؟ آیا ریاضیات بر سبیل استعاره و مجازی، الهام‌بخش هنرمندان است یا به نحو نمادین؟

فرانسوا مورِلّه نقاش، که قبلاً هم از او نام بردیم، به بهترین وجه ممکن از ابزار ریاضی بهره می‌برد، همان‌گونه که آثاری از قبیل « توزیع تصادفیِ چهل‌هزار مربع مطابق ارقام

[۱] La Vie mode d’emploi

[۲] Combinatoire

[۳] Carré bi-latin orthogonal d’orde dix

[۴] Pierre Boulez

[۵] Iannis Xenakis

[۶] principes du sérialisme

[۷] IRCAM

[۸] Quatrième Forum Mathématique Diderot

[۹] Société européenne de mathématiques

زوج و فرد یک سال‌نمای تلفن» یا «π ایرونیکونِ شمارهٔ ۲» و غیره گواهی می‌دهند. او در این آثار، فکرِ بی‌نهایت را تلقین می‌کند. به نظر ژیل گِربرانت [۱]، ناقد هنر، «در اثر مورله، ریاضیات (مقدماتی) ممکن است برای طرح مسائلی فقط به صورت یک ابزار بکار روند ولی هیچگاه هدف و غایت نیستند». از سوی دیگر، خود هنرمند ادعا می‌کند: «ریاضیات را از آن جهت بکار می‌گیرد که از هر گونه ذهنی‌گرایی شخصی یا موضعگیری عاطفی بپرهیزد و بدین شکل از اثر فاصله بگیرد و آن را فارغ از حساسیت کند» به این ترتیب، او به ایدئولوژی قدیمی افلاطونی بازمی‌گردد که حاکی از افشاگری فریبندگیهای هنر است، چرا که فریبندگیهای جاودانه نیستند.

شکل ۲. هنرمند فرانسوا مورله، یک «فیثاغورثی پسامدرن» (کلیشه از گمال رافائل گیارد [۲])

هر چند برخی از هنرمندان، مفاهیم مقدماتی ریاضی را به منزلهٔ مرجع یا دست‌آویز بکار می‌گیرند، امّا جمعی دیگر، اصول نظریه‌های ریاضی را از حیث مبانی آن مورد استفادهٔ اختصاصی قرار می‌دهند و در اعماق و جوهر استدلال هم کاوش می‌کنند. آلبر ایمه [۳] نقاش، که یکی از ریشه‌ای‌ترین کاوشگران نمونه در زمینهٔ تجرید است، بر روش‌هایی تکیه می‌کند که مشابه روش‌های تحقیق در ریاضیات است. او سازوبرگ‌های ترکیبیاتی [۴] را مردود می‌شمارد و نظرهای خود را در کتاب‌های مشروحی ــ از جمله، رهیافتِ یک زبان

---

[۱] Gilles Gheerbrandt

[۲] Gammal Raphaël Gaillarde

[۳] Albert Aymé

[۴] mécanismes combinatoires

نوعگرا[1] دربارهٔ پارادیگمها[2]، و غیره بیان می‌کند. و به این ترتیب، چارچوب پروندهٔ تصویرگری خود را ارائه می کند: «تلاش می‌کنم که در کارهایم با دقت یک متخصص رشته‌های علمی پیش بروم، بی آن که از هیجان های یک شاعر یا موسیقیدان جدا شوم». اثر او، در نهایت، از حد سخن می‌گذرد و با «زیبایی مطلق» ماندگار می‌شود، زیرا به تعبیر او «هنر نوین، موضوع روش است نه سلیقه».

هم ریاضیات و هم هنرهای مختلف، به عنوان فعالیت‌های انسانی، کار افرادی هستند که مشابه همدیگر در یک اقلیم فرهنگی، سیاسی و مذهبی غوطه‌ورند. گسیختگی‌های بزرگی که در طول تاریخ رخ می‌دهند، هیچ یک از این حوزه‌ها را به حاشیهٔ راه نمی‌رانند، زیرا واکنش‌هایی وجود دارد که گویی از روح زمان فرمان می‌برند. مگر نه این است که نوشتارهای فلسفی هانری پوانکاره[3] در سرآغاز قرن بیستم به عمومی کردن مفاهیم هندسهٔ نااقلیدسی پرداخت و نقاشان کوبیست همهٔ قواعد مناظر و مرایای سنتی را به کنار نهادند؟

وجدان آگاه خود را بکار گیریم. هرگونه عزم جزم برای ادغام یا متحد کردن کامل ریاضیات و هنرها، هم فرساینده و هم بی‌حاصل است. بلکه با شناخت و کنجکاوی می‌توانیم به مبادله و مقابله در حیطهٔ خاص هر یک از شکل‌های بیان بپردازیم. خوشبختانه می‌توان مشاهده کرد که هنوز و همیشه ریاضیات و هنرها با هم نورافشانی مشترکی را به اجرا درمی‌آورند.

فرانسین دِلْمِر
آزمایشگاه حساب و الگوریتمیک تجربی
دانشگاه بردو۱، تالانس

چند مرجع

- E. Valette, *La perspective à l'order du jour* (L'Harmattan, 2000).
- G. Gheerbrant, "François Morellet", *Parachute*, Montréal, n°10, p. 5 (printemps 1978).

[1] Approche d' un langage spécifique
[2] sur les paradigmes
[3] Henri Poincaré

- M. Loi (sous la dir. de), *Mathématiques et arts* (Hermann, 1995).
- J.-L. Binet, J. Bernard, M. Bessis (sous la dir. de), *La création vagabonde* (Hermann, collection Savoir, 1980).
- V. Hugo, *L'art et la science* (Anaïs et Actes Sud, (1864/1995).
- M. Sicard (sous la dir. de), *Chercheurs ou artistes* (Autrement, série Mutations, n° 158, 1995).
- I. Xenakis, *Arts/sciences. Alliages* (Casterman, 1979).
- J.-M. Lévy-Leblond, *La pierre de touche - la science à l'épreuve* (Gallimard, 1996).
- J. Mandelbort, "Les cheveux de la réalité - autoportraits de l'art et de la science", *Alliage*, 1991.
- D. Boeno, "De l'usage des sections coniques", *Cahiers art et science*, n° 5, pp. 41-54 (Confluences, 1998).

Francine Delmer
Laboratoire Arithmétique et Algorithmique expérimentale
Université Bordeaux 1, Talence

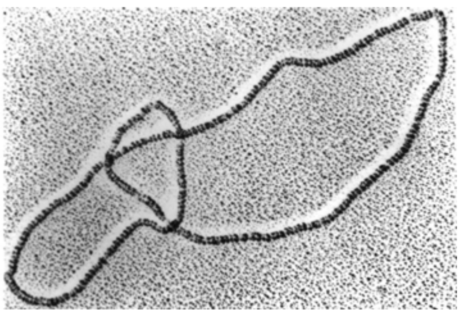
از DNA تا نظریهٔ گره‌ها

نویسندگان: نگوین کام شی و هوانگ نگونگ مین [1]

مترجم: فائزه توتونیان

ویراستاران: فرج‌اللّه محمودی، ارسلان شادمان

اثر بیولوژیکی مولکول DNA به ویژه به وضعیت آن در فضا و طریقه‌ای که پیچیده شده، مباحثی که در قلمرو نظریه گره‌ها می‌باشد، بستگی دارد.



یک مولکول DNAی مدوّر و گره خورده که با میکروسکوب الکترونیکی دیده شده است.

توپولوژیِ مولکولِ DNA بر فعالیتش اثر می‌گذارد.

(کلیشه از سی.ان.کوزارلی (C.N. Cozzarelli)، دانشگاه برکلی)

امروز هیچکس نمی‌تواند کتمان کند که DNA مولکولی است که در هر سلول از موجودات زنده، حامل اطلاعات ژنتیکی است و به قسمت بزرگی از فعالیت‌های سلولی

[1] Cam Chi, Nguyen et Minh, Hoang Ngoc: *De l'ADN à la théorie des nœuds*, in: L'explosion des mathématiques, SMF et SMAI, Paris, 2002, p. 47-50

فرمان می‌راند. معمولاً DNA شامل دو رشتهٔ بلند موازی مشتمل بر یک سری مولکول زنجیره‌ای می‌باشد که پایه‌های نوکلئوتیک نامیده می‌شوند، دو رشتهٔ که یکی به دور دیگری پیچیده و ساختار مارپیچی دارند: مارپیچ مضاعف مشهور.

اطلاعات حمل شده توسط DNA وسیلهٔ دنبالهٔ جفت‌های پایهٔ نوکلئوتیک کدگذاری می‌شوند. این دنباله به طریقی که مولکول پیچیده، آمیخته، یا گره خورده بستگی ندارد. با وجود این در سال‌های ۱۹۷۰ ـ ۱۹۶۰ بعد از کشف مولکول‌های مدوّر DNA در (حلقه‌های یک رشته‌ای یا دو رشته‌ای که یکی به دور دیگری پیچیده است) سؤال‌هایی در مورد تأثیر توپولوژیکی DNA، یعنی وضعیت آن در فضا، مطرح شد. در سال ۱۹۷۱ بیوشیمیدان آمریکایی جیمزوانگ[۱] روشن ساخت که برخی از آنزیمها، توپوایزومرازها[۲] می‌توانند شکل توپولوژیکی DNA را مثلاً با ایجاد گره‌ها در آن، تغییر دهند، و علاوه بر آن توپولوژی مولکول DNA بر روی نحوهٔ عملش در سلول اثر می‌گذارد. بنابراین، مطالعهٔ پیکربندی‌های (شکلهای) توپولوژیکی DNA می‌توانند در مورد شیوهٔ ورود DNA در مکانیسم‌های سلولی به ما اطلاعاتی بدهند.

توپولوژی، که برخی آن را به عنوان هندسهٔ کائوچو[۳] تعریف می‌کنند، یعنی مطالعهٔ خواصی که بر اثر تغییر شکل یا تغییر طول عوض نمی‌شوند و یک شاخهٔ مهم و اساسی از ریاضیات است. مفاهیم و روشهای توپولوژی تقریباً برای همهٔ ریاضیدانان لازم است. نظریهٔ گره‌ها تجلی خاصی از توپولوژی است. از تولد نظریهٔ گره‌ها حدود یک قرن می گذرد. مسائل آن شامل مطالعهٔ دقیق ساختار گره‌ها و رده‌بندی گره‌ها می‌باشد. علاوه بر وابستگی‌هایش با زمینه‌های دیگر پژوهشی ریاضی، نظریهٔ گره‌ها، کاردبردهایی در سایر شاخه‌های علمی (از جمله در شیمی مولکولی، در فیزیک آماری، در فیزیک نظری ذره‌ها، و غیره) نیز دارد.

سؤال اساسی نظریهٔ گره‌ها این است که: آیا با مفروض بودن دو گره (نه خیلی ساده!) که مثلاً هر کدام به صورت یک رشتهٔ نخی تحقق یافته‌اند، می‌توان گفت که آنها معادل هستند؟ به بیان دیگر می‌توان یکی را کشید یا تغییر شکل داد تا آن را، بدون ایجاد بریدگی، با دیگری یکسان ساخت. چون توپولوژی‌دانان تغییر شکل را مجاز می‌دانند، تعریف آنها از یک گره کمی با تعریف مردم کوچه و بازار تفاوت دارد: برای

---

[۱] James Wang

[۲] Topo-isomérases

[۳] géométrie du caoutchouc

توپولوژی‌دان‌ها یک گره از بهم پیوستن دو انتهای یک نخ به دست می‌آید، زیرا در غیر این صورت می‌توان ـ با کشیدن و با تغییر شکل دادن مناسب نخ ـ هرگره را باز کرد و در نتیجه همهٔ گره‌ها معادل می‌شوند. بنابراین از نقطه‌نظر توپولوژی یک گره اجباراً از یک یا چندین حلقه تشکیل می‌شود، که DNAهای مدور از این جمله‌اند.

رده‌بندی گره‌ها با جستجوی ناورداها: یک مسألهٔ توپولوژی جبری

کار متخصصین گره‌ها به طور کلی توپولوژی جبری است: آنها در جستجوی این هستند که به هر گره از لحاظ توپولوژی متفاوت یک «ناوردا» نسبت دهند، یعنی یک شئ ریاضی که آن را مشخص سازد و به راحتی قابل محاسبه باشد و آن را جهت دستکاری‌های جبری آماده سازد. این شیء ریاضی می‌تواند پیشاپیش یک عدد، یک چندجمله‌ای (یک عبارت جبری مانند $x^6 - 3x^2 + x + 2$ یا چیزی پیچیده‌تر یا مجردتر باشد. آن چه که اهمیت دارد این است که این شیء برای همه‌ی گره‌های از لحاظ توپولوژیْ معادلْ، یکسان باشد (کلمه ناوردا را از همین خاصیت گرفته‌اند). ایده‌ال این است که ناورداهایی را که به طور کامل گره‌ها را مشخص می‌سازند، پیدا کنیم، یعنی به نحوی که دو گره متمایز به ناچار ناورداهای متفاوت داشته باشند. بنابراین مسألهٔ رده‌بندی حل خواهد شد. به طور خلاصه سؤال‌های اصلی عبارتند از: آیا طریقه‌ای برای مشخص کردن گره‌ها به منظور متمایز کردن آنها داریم؟ آیا یک الگوریتم برای متمایز کردن دو گره وجود دارد. آیا یک برنامهٔ کامپیوتری که به یک کامپیوتر اجازه دهد تا دو گره مفروض را در یک زمان مناسب متمایز سازد، وجود دارد؟

با وجود پیشرفت‌هایی که در طول چندین دهه تحقیق انجام شده، جواب به این سؤال‌ها ناقص مانده است. بطور خلاصه به چند نمونه از این تحقیقات اشاره می‌کنیم. در سال ۱۹۲۸ ریاضیدان آمریکایی جیمزالکساندر[۱] اولین چندجمله‌ای ناوردا (چندجمله‌ای الکساندر) را معرفی کرد که اجازه می‌داد گره‌ها رده‌بندی شوند. اما چندجمله‌ای الکساندر یک ناوردای ناقص است: برخی گره‌های متمایز دارای چندجمله‌ای الکساندرِ یکسان هستند. بسیار جدیدتر در ۱۹۸۴، ریاضیدان نیوزیلندی وگان جونز[۲] ناوردای جدیدی کشف کرد که آن هم یک چندجمله‌ای است. این چندجمله‌ای کاراتر از چندجمله‌ای الکساندر است، اما این یکی هم به طور کامل مسألهٔ رده‌بندی را حل نمی‌کند. چندی

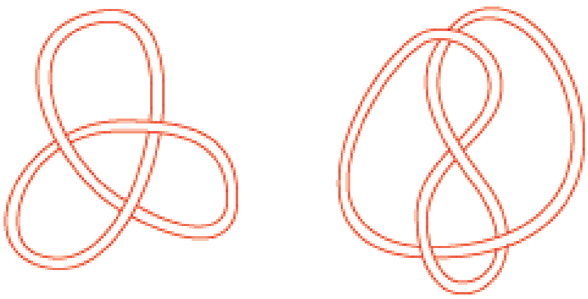
---

[۱] James Alexander

[۲] Vaughan Jones

بعد، محققان دیگر چندجمله‌ای ناوردای جونز را تصفیه کرده و تعمیم دادند؛ باز هم چندجمله‌ای‌های ناوردای جدید ناقص هستند و در تفاوت‌گذاری بین برخی گره‌های از لحاظ توپولوژی متمایز، کارایی ندارند.

آغاز جواب کامل شاید مقارن با ۱۹۹۰، با کارهای محقق روسی ویکتور واسیلیف[1] به تحقق پیوست. این محقق یک ردهٔ جدید از ناورداها معرفی کرد که فقط توسط روابطی که باید بین آنها برقرار باشند، تعریف می‌شوند. ناورداهای واسیلیف ناورداهای عددی هستند، یعنی که به هر گره یک عدد (که می‌تواند از روی یک آنالیز ترکیبی از توپولوژی گره تعیین شود)، نسبت داده می‌شود. واسیلیف حدس زد که این ناورداها یک دستگاه کامل تشکیل می‌دهند، به عبارت دیگر گره‌های متمایز همیشه دارای ناورداهایِ واسیلیفِ متفاوت هستند. اگرچه تاکنون مثال نقضی برای پندارهٔ واسیلف پیدا نشده است، اما اثبات پنداره هم ارائه نشده است، و بعلاوه پیدا کردن روش‌هایی برای محاسبهٔ ناورداهای واسیلیف به طریق مؤثر و کارا باقی مانده است. با این وجود، پیشرفتِ حاصل قابلِ ملاحظه است.



دو گرهی که در این شکل دیده می‌شوند از نظر توپولوژی متفاوت‌اند: فقط با کشیدن نخ‌ها نمی‌توان یکی را بر دیگری منطبق کرد، مگر آن که مجبور شویم نخ‌ها را ببریم و دوباره وصل کنیم. گره سمت چپ (گرهِ‌شینر) دارای چندجمله‌ای الکساندر به صورت $P(t) = t^{۲} - t + ۱$ است؛ اما اگر چندجمله‌ای الکساندر گره سمت راست به صورت $P(t) = t^{۲} - ۳t + ۱$ است. همان‌طور که شاید این دو چندجمله‌ای متفاوت‌اند. اما گره‌هایی موجودند که متفاوت‌اند در حالی که وابسته به یک چندجمله‌ای الکساندر هستند؛ پس چندجمله‌ای‌های الکساندر یک دستگاه کامل ناورداها تشکیل نمی‌دهند.

---

[1] Victor Vassiliev

بین تبدیلات ریاضی و مکانیسم‌های آنزیمی شباهت‌هایی وجود دارد

این تحقیقات ریاضی با سؤالهایی که بیولوژی‌دانان در مورد مولکول‌های نظیر DNA طرح می‌کنند، رابطه دارند. برای مثال مقارن با ۱۹۷۳ ریاضیدان بریتانیایی جان کانْوَی[۱] دو عمل جراحی ابتدایی (flip و décroisement) را معرفی کرد که تبدیل یک گره را به یک گره دیگر با تغییر آن گره در سطح اتصال رشته‌هایش اجازه می‌داد. بنابراین اعمالی که طبیعت ریاضی دارند، دارای معادل‌های بیوشیمی نیز هستند که توسط توپوایزومرازها ایجاد می‌شوند. این آنزیم‌ها که برای فعالیت همهٔ سلول‌ها لازم هستند، می‌توانند اول یکی از دو رشته حلقهٔ DNAیِ مدوّر را ببرند و یک قطعه از حلقه را از محل باز شده عبور دهند و دوباره انتهاهای بریده شده را ببندند تا یک گره در حلقه ایجاد شود. با انجامِ عملِ بریدن و عبور و اتصالِ دوبارهٔ آنها می‌توانند یک رشته را ببرند، رشتهٔ دیگر را از مَحل باز شده عبور دهند و سپس این برش را دوباره متصل کنند(این عمل متناظر با یک عمل flip کانوی است)، همچنین می‌توان دو برش، دو اتصال با پیوستن دو رشته به صورت عکس انجام داد.(این عمل متناظر با عمل جداسازی décroisement کانوی است).

اکنون چگونه توپولوژی DNA می‌تواند بر فعالیت بیولوژیکیِ آن تأثیر بگذارد؟ آن را با مثالی با پیچش بیشتر مولکول DNA توضیح می‌دهیم. در حالت معمولی رشته‌های مارپیچِ مضاعف مولکولی تعداد معینی پیچ حول محور مارپیچ دارند. برخی توپو ـ ایزومرازها می‌توانند این پیچ‌ها را افزایش یا کاهش دهند، کمی شبیه آن چه که می‌توان یک سیم تلفن را بیشتر یا کمتر پیچانید، البته این عمل شکل آن را تغییر می‌دهد. نکتهٔ قابل توجه‌تر آن که در یک DNAی مدور تعداد دورهای مارپیچ مضاعف، یک خاصیت توپولوژیکی ناوردا است: این تعداد نمی‌تواند توسط هیچ تغییری در شکل ساختار عوض شود، مگر آن که برش و بازسازی رشته‌های حلقهٔ DNAیِ دو رشته‌ای را ایجاب کند. بنابراین اگر یک حلقهٔ DNA باز شود، به راحتی می‌توان دید که مارپیچ مضاعف کمتر فشرده شده و قسمت داخلی آن بیشتر در معرض آنزیم‌هایی خواهد بود که دور آن را گرفته‌اند. یک چنین نمایشی برای دو برابر سازی (تشکیل یک نمونه دوم از مولکول) DNA و رونویسیِ آن (فرایندی که موجب می‌شود یاخته پروتئین بسازد) پیش شرط است.

از آنجا که شکل توپولوژیکیِ DNA توسط مکانیسمِ آنزیمی تعیین می‌شود، یکی از سؤال‌های به حق برای بیولوژی‌دانان این است که بدانند تا چه حد یک رده‌بندی توپولوژیکی گره‌ها اجازه می‌دهد به مکانیسم آنزیمی دخیل در عمل پی ببریم. یک سؤال

---

[۱] John Conway

دیگر که به سؤال قبل نزدیک است این است که بدانند آیا می‌توان با استفاده از اعمال پایه‌ای معرفی شده برای گره‌های ریاضی، تمامِ مکانیسم‌های آنزیمی را شبیه سازی کرد؟ تحقیقات در مرز بین ریاضیات مربوط به نظریهٔ گره‌ها و بیولوژی مولکولی در حال انجام است و هنوز فاصلهٔ زیادی با پایان کار دارند.

نگوین کام‌شی و هوانگ نگوک مین
گروه ریاضیات و اطلاعات،
دانشگاه لیل ۲

چند مرجع

- “La science des nœuds”, dossier hors-série de *Pour la Science*, avril 1997.
- A. Sossinsky, *Nœuds-Genèse d’une théorie mathématque* (Seuil, 1999).
- D.W. Sumners, “Lifting the curtain: using topology to prob the hidden action of enzymes”, *Notices of the American Mathematical Society, 42 (5)*, pp. 528-537 (mai 1995).

Nguyen Cam Chi et Hoang Ngoc Minh
Département de mathématiques et d’informatique,
Université de Lille 2

فیلسوف و ریاضیدان

نویسنده: پیر کاسو ـ نوگِس [۱]

مترجم: ارسلان شادمان

ویراستاران: فرج‌الله محمودی، شهناز عباسپور

فلسفه و ریاضیات در طول تاریخِ خود، رابطه‌ای تنگاتنگ و به همان اندازه شگفت‌انگیز داشته‌اند. شایسته است که در تمدن یونان به افلاطون [۲] و در آغاز دورهٔ جدید به دکارت [۳] توجه کنیم. در این مقاله، دو چهرهٔ برجستهٔ قرن بیستم، داوید هیلبرت [۴] و ادموند هوسِرل [۵] را مطرح می‌کنیم.

ادموند هوسرل و داوید هیلبرت در سال ۱۹۰۱ در گوتینگن [۶] با هم ملاقات می‌کنند. هوسرل (فیلسوف) قبلاً تحصیلات ریاضی داشته است. او نخست در برلین دستیار کارل

---

[۱] Cassou-Noguès, Pierre: *Le Philosophe et le mathématicien*, in: L'explosion des mathématiques, SMF et SMAI, Paris, 2002, p. 51-55

[۲] Platon

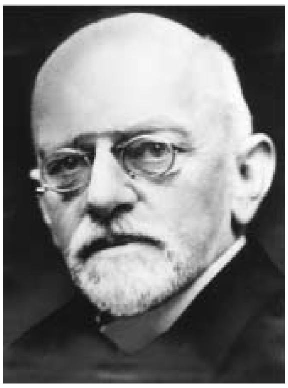
[۳] Descartes

[۴] David Hilbert

[۵] Edmund Husserl

[۶] Göttingen

وایرشتراس[۱] ریاضیدان بزرگ در رشتهٔ آنالیز بود، سپس در وین با فرانتس‌برنتانو[۲] دیدار



داوید هیلبرت (۱۸۶۲ تا ۱۹۴۳) مانند هانری پوانکارهٔ فرانسوی یکی از ریاضیدانان بزرگ سالهای ۱۹۰۰ بود. او با عمق آثار و دیدگاه‌هایش و با پویایی خاصی که توانست در گوتینگن به‌وجود آورد، تأثیر عظیمی بر ریاضیات قرن بیستم گذاشت (کلیشه از AKG)

داشته و به سوی فلسفه گرایش یافته بود. در ۱۸۹۱ کتاب فلسفهٔ حساب[۳] را منتشر کرده بود. امّا جلد اول پژوهش‌های منطقی[۴] او همزمان با استقرارش در گوتینگن منتشر گردید. هیلبرت (ریاضیدان) از ۱۸۹۷ در گوتینگن مستقر است. او مسالهٔ مشهوری به نام «مسألهٔ گوردان»[۵] را در نظریهٔ ناورداها، که حدود بیست سال ذهن ریاضیدانان آلمانی را به خود مشغول کرده بود، حل کرد. او در زمینهٔ جبر، «نظریهٔ میدان‌های جبری» را بسط داده است. هوسرل و هیلبرت تقریباً هم سن و سال هستند و در دانشکدهٔ فلسفه، که در واقع فرا گیرندهٔ ریاضیدانان و فیلسوفان است، همدیگر را ملاقات می‌کنند. هر یک از این دو نفر، پا به پای یکدیگر، تغییرات بنیادین در رشتهٔ مورد مطالعهٔ خود را به وجود آورده‌اند. هوسرل پدیده‌شناسی[۶] را کشف می‌کند و هیلبرت روش مجرّد[۷] را بنا می‌نهد که مشخّصهٔ ریاضیات نوین است.

---

[۱] Karl Weierstrass

[۲] Franz Brentano

[۳] Philosophie de L' arithmétique

[۴] Recherches logiques

[۵] Problème de Gordan

[۶] Phénoménologie

[۷] méthode abstraite

گوتینگن، جایگاه اعتلای ریاضیات، پذیرای فلاسفه است

هر چند گوتینگن شهر کوچکی نزدیک اشتوتگارت بود، اندکی پس از ۱۹۰۰ مرکز دنیای ریاضی گردید. فلیکس کلاین [۱] در راس دانشکده قرار داشت. این هندسه‌دانِ بزرگ که وجود فضاهای نااقلیدسی را قاطعانه ثابت کرد، از پژوهش چشم‌پوشی می‌کند تا از سویی به درس‌هایش دربارهٔ گسترش ریاضیات در قرن ۱۹ بپردازد و از سوی دیگر به سازماندهی و ادارهٔ دانشکده مشغول شود و وسایل مالی جدیدی را برای آن فراهم کند. او هیلبرت و سپس هرمان مینکوفسکی [۲] را به گوتینگن می‌آورد. مینکوفسکی در اثنایِ درسی مشهور، «پیوستارِ فضا ـ زمان» [۳] را طرح می‌کند که به نام او معروف است و بعداً در بیان نظریهٔ نسبیت آینشتاین [۴] مورد استفاده قرار می‌گیرد. هر هفته، انجمن ریاضی گوتینگن کِنار یک سخنران، که گاهی از گوتینگن و گاهی از بیرون است، گرد هم جمع می‌شوند. هوسرل، فیلسوف، در آوریل ۱۹۰۱ سخنران است و موضوع صحبت او مسألهٔ موهومی‌ها در حساب است. گوتینگن جایگاهی است که وقف ریاضیات شده است. نقل می‌کنند که روزی مینکوفسکی در خیابان اصلی آن گردش می‌کرد جوانی را دید که متفکر است و از موضوعی شدیداً رنج می‌برد. دستش را با مهربانی روی شانهٔ جوان گذاشت و به او گفت: «نگران مباش، همگراست». آن جوان که اطمینان خاطر یافته بود، دور شد.

گوتینگن جایی است که هیلبرت روش مجرد ریاضیات نوین را به شکلی پخته در آن ساخته و پرداخته کرد. روش مجرد در جبر قرن ۱۹ شروع شده بود. به ویژه، ریشارد ددکیند [۵] و لئوپولدکرونکر [۶] آنچه را ساختارها می‌نامیم مطرح کرده بودند. یک ساختار ریاضی مانند ساختار «گروه»، «فضای بُرداری»، «هیأت» و غیره به این ترتیب تعریف می‌شود که قواعد حاکم بر عمل‌ها را مشخص می‌کنند بی آنکه به طبیعت اشیاء تحت تأثیر این عمل‌ها کار داشته باشند. به این ترتیب، یک ساختار می‌تواند روی اشیائی با طبیعت گوناگون بکار رود. مثلاً روی اعداد، روی توابع، روی تبدیلات هندسی و غیره. تجرید در ریاضیات عبارت است از صرف نظر یا روی گرداندن از طبیعت اشیاء تا آنجا که فقط

---

[۱] Felix Klein

[۲] Hermann Minkowski

[۳] le “continuum d’ espace-temps”

[۴] Einstein

[۵] Richard Dedekind

[۶] Leopold Kronecker

روابط اشیاء با هم مورد توجه قرار گیرد. این دیدگاه که از جبر ددکیند سر برآورده بود در طول قرن ۱۹ ناآشنا و گمنام رها شد تا آن که هیلبرت به آن صراحت بخشید.

یکی از ساختمان‌های ریاضی دانشگاه گوتینگن امروز (مؤسسهٔ ریاضیات کاربردی و عددی). بین سال‌های ۱۹۰۰ تا ۱۹۳۰، به یُمن تلاش‌های داوید هیلبرت گوتینگن برای ریاضیدانان مرکزی پرآوازه در سطح جهان بود. ریاضیدانان در این مرکز با فلاسفه و دانشمندان سایر رشته‌ها به مباحثه می‌پرداختند. (کلیشهٔ دانشگاه گوتینگن)

هیلبرت به نمایشی اصل موضوعی از هندسه می‌پردازد

به محض رسیدن به گوتینگن، هیلبرت به ارائهٔ یک درس هندسه اهتمام ورزید. این درس که بعداً با عنوان مبانی هندسه[1] منتشر شد، بر روش جبر مجرد تکیه می‌کرد تا به اصل موضوعی‌سازی هندسه بپردازد. هیلبرت به مجردسازی طبیعت اشیاء هندسی، یعنی نقطه، خط و صفحه، می‌پردازد و به بیان (وضعِ) روابط بین آنها اکتفا می‌کند و ویژگی‌های این روابط را به صراحت در اصول موضوع بیان می‌نماید. به‌عبارت دیگر، اصولِ موضوع (اصل‌های وضع شده) ویژگی‌های روابط موجود بین اشیائی را بیان می‌کنند که طبیعت آنها عمداً نامشخص است. به این ترتیب، اصول موضوعِ هندسه، ساختاری شبیه ساختارهای جبری را معیّن می‌کنند. امّا از جبر تا هندسه، منزلت ساختار قویتر هم شده است. زیرا در جبر، ساختار را برای اشیائی که شناخته شده فرض می‌شد، نظیر اعداد و

[1] Les fondements de géométrie چاپ سوم کتاب Grundlagen der Geometrie در ۱۹۰۹ و حل مسأله وارینگ جزء پدیده‌های برجستهٔ گسترش ریاضیات ۱۹۰۰ تا ۱۹۵۰ فهرست شده‌است. مترجم.

توابع، در نظر می‌گرفتند. یک قضیه را هم می‌شد با استدلال بر مبنای ساختار به‌دست آورد و هم با استدلال روی اشیائی که طبیعت خاص خود را دارند. برعکس، در اصل موضوعی‌سازی، استدلال منحصر به استنتاج برمبنای اصول موضوع است ولاغیر، ضمناً اشیاء فقط با اصول موضوع تعریف شده‌اند. اصول موضوع، یا ساختار مورد بحث، هم برای تعریف این اشیاء و هم برای استدلال روی این اشیاء کفایت می‌کنند.

هیلبرت در اثنای پرداختن به اصل موضوعی‌سازی هندسه و در کارهای بعدیش، روش مجرد جبر را صراحت بخشید، آن را به شکل ریشه‌ای و رادیکال درآورد و از این امر در کسب نتایج جدید سود جست. در واقع، هیلبرت با چشم‌اندازی مجّرد، به سیر و سلوک در همهٔ ریاضیاتِ زمانِ خود می‌پردازد و آنها را دگرگون می‌سازد: هم هندسه را، هم جبر و نظریهٔ اعداد را، که در این زمینه نخستین اثبات «پندارهٔ وارینگ» را در ۱۹۰۹ ارائه نمود، و هم آنالیز را، با آوردن فضاهای هیلبرت، که «نقاطِ» آن مثلاً توابع هستند. روش مجرد در گوتینگِن به وسیلهٔ اِمی نوتر[1] و امیل آرتین [2] و پس از آنها در فرانسه به وسیلهٔ گروهِ بورباکی [3] دنبال می‌شود. از همین زمان به بعد، روش مجرد تمام ریاضیات را تغذیه می‌کند.

تأسیس مبنایی برای ریاضیات

به موازاتِ این کارها، هیلبرت روشِ مجرد را تا آنجا گسترش می‌دهد که برنامه‌ای برای مبنای ریاضیات طرح می‌کند. تأسیس مبنای ریاضیات به معنی آن است که استدلال‌های ریاضی جاودانه تضمین شوند. به ویژه باید استدلال‌هایی که با فرض یک بینهایتِ موجود بالفعل [4] ارائه می‌شوند، یا استدلال‌های تَرامتناهی[5]، توجیه شوند، و در عین حال، نسبت به فرض وجود بینهایت، خود نگه‌دار باشیم. برنامهٔ صورتگرا[6] شامل دو مرحله است. نخستین مرحله، تلاش در جهت صوری کردن نظریه‌های ریاضی است. برای این کار، الفبایی از نمادها در نظر گرفته می‌شود، قاعده‌هایی تثبیت می‌شوند که شبیه

---

[1] Emmy Noether

[2] Emile Artin

[3] Bourbaki

[4] infini existant en acte

[5] raisonnant transfinis

[6] formaliste

قواعد املا و دستور زبان‌اند، تا به کمک این قواعد بتوانیم تشخیص دهیم یک فرمول چگونه ساخته می‌شود. از سوی دیگر، اصول موضوعی به صراحت بیان می‌شوند که نقش قضایای اولیه را در اثبات‌ها ایفا می‌کنند. نهایتاً قواعد استنتاج یک فرمول از فرمول یا فرمول‌های دیگر نیز در نظر گرفته می‌شود. انباری از فرمول‌ها جایگزین ریاضیات می‌شوند. یک اثبات مشتمل بر دستکاری نمادها بر طبق قواعدی مشخص و صریح، با انتزاع روی معنای نمادهاست. یک اثبات متشکل است از دسته‌ای از نمادها که به گونه‌ای سازگار طبق قواعدی مشخص کنار هم گذاشته می‌شوند، ترسیمِ یک شکل که آن هم طبق قواعدی معین و از قبل تعیین شده ساخته می‌شود. مرحلهٔ دوم، تلاش در جهت آن است که نشان دهد این دستگاه‌های صوری نامتناقض‌اند و این عمل با استدلال‌های متناهیانه [1] یعنی بدون دخالت بینهایت بالفعل، انجام پذیرد.

نخستین نظریه‌ای که هیلبرت سعی کرد برنامهٔ فوق را در مورد آن اجرا کند، حساب بود، که خود مشتمل بر استدلال‌های ترامتناهی است. بدین طریق، هیلبرت یک نظریهٔ اثبات [2] را ابداع کرد که عبارت از استدلال‌های متناهیانه بر روی شکل‌هایی است که نمایش دهندهٔ اثبات‌هایی در یک دستگاه صوری می‌باشند. با این وجود، در ۱۹۳۱، منطق‌دان اتریشی کورت گودِل [3] ثابت کرد که ممکن نیست که بتوان به وسیلهٔ استدلال‌هایی متناهیانه، نامتناض بودن دستگاهی صوری مشتمل بر حساب مقدماتی را ثابت کرد. بنابراین، باید از برنامهٔ آغازین هیلبرت چشم پوشید.

روش مجرد و برنامهٔ صورتگرا، فلاسفه را مجذوب کردند

اما این پیروزی بنام هیلبرت ثبت شد که او توانست مسأله‌ای فلسفی، یعنی مسألهٔ مبانی را، به یک مسألهٔ ریاضی تبدیل کند تا با روش مجرد و برخاسته از نظریه‌ای جدید، یعنی نظریهٔ اثبات، مورد بررسی قرار گیرد. نظریهٔ اثبات، امروز نیز نظریه‌ای زنده و فعال است. از طرف مقابل، روش مجرد و برنامهٔ صورتگرا که به طور ضمنی از آن مستفاد می‌شود، فلاسفه را به نحوی مسحور خویش ساختند. هوسرل در روش‌های منطقیِ ۱۹۰۱، و در منطق صوری و منطق متعالیِ [4] ۱۹۲۹، به گونه‌ای دربست و یکجا ارائهٔ مجرد ریاضیات

---

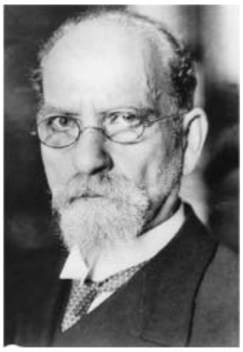
[1] finitiste

[2] Théorie de la démonstration

[3] Kurt Gödel

[4] Logique formelle et logique transcendantale

را در پدیده‌شناسی، که در دست زایش بود، به کار گرفت. هوسرل دو نوع ریاضیات را از هم تفکیک کرد، یکی ریاضیات کاربردی که مثلاً هندسه را به عنوان هندسهٔ فضای ما، یعنی فضایی که در آن زندگی می‌کنیم، در نظر می‌گیرد، و دیگری ریاضیات صوری.



ادموند هوسرل (۱۸۵۹ تا ۱۹۳۸) که از مسأله‌پردازی‌های ریاضی نیز برای برافراشتن بنای فلسفهٔ خویش بهره گرفت (کلیشه AKG).

بر مبنای یک نظریهٔ کاربردی، ریاضیدان به روشن نمودن معماریِ نظریه می‌پردازد و از آن یک دستگاه اصل موضوعی بیرون می‌کشد، که از آن پس، می‌تواند مشغول تغییر این دستگاه گردد تا صورت‌های جدیدی را برای نظریه‌های ممکن به دست آورد. به این شکل، ریاضیات صوری به منزلهٔ نظریه‌ای از صورت‌ها و نظریه‌ها ظاهر می‌شود، و یا با واژگان هوسرل به آپوفانتیک صوری [۱] می‌رسد، که هدف آن تعریف و رده‌بندی همهٔ سیستم‌های ممکنِ داوری است. به علاوه، همان گونه که هیلبرت نشان داده بود، فرایند اصل موضوعی به آن برمی‌گردد که طبیعت اشیاء را منتزع کنیم. در نتیجه، به هر صورت از نظریه‌ها، حوزه‌ای از اشیاء نظیر می‌شود که اشیائی دلخواهند و تنها با این صفت مشخص می‌گردند که از فلان دستگاه اصول موضوع تبعیت می‌کنند. پس، نظریهٔ صُوَرِ نظریه‌ها [۲] معّرِف یک موجودشناسی صوری [۳] است، نظریه‌ای در مورد «شیء دلخواه» محض، که هدف آن، تعریف و رده‌بندی همهٔ اشیاء متنوع ممکن، فقط برحسب صورت آنهاست. ریاضیات صوری مشتمل بر دو جهت است: هنگامی که ریاضیدان متوجه دستگاه‌های

[۱] apophantique formelle

[۲] théorie des formes de Théories

[۳] ontologie formelle

داوری است، ریاضیات صوری در جهت آپوفانتیک صوری است؛ هنگامی که ریاضیدان متوجه حوزه‌های اشیاء است، ریاضیات صوری در جهت موجودشناسی صوری است. هر چند هوسرل با دقت هندسهٔ قرن ۱۹ را مطالعه کرده بود و مفاهیمی از صورت نظریه‌ها و تنوع صوری پیش از ۱۹۰۱ را نیز می‌شناخت، اما شکی نیست که ملاقات او با هیلبرت و مباحثاتی که در انجمن ریاضی گوتینگن برگزار شد، نقشی تعیین کننده در راه‌اندازی یک پدیده‌شناسی منظم ایفا کرده‌اند.

هیلبرت موفق شد که در درون ریاضیات مسالهٔ مبنای ریاضیات را مطرح کند، که درونی‌سازی یک مسألهٔ فلسفی در ریاضیات است. هوسرل درونی‌سازی وارون را اجرا کرد، یعنی روش مجرد ریاضیات را در فلسفه اعمال کرد. عملکرد و سلوک این دو شخصیت، هوسرلِ فیلسوف و هیلبرتِ ریاضیدان، شاهد درونی‌سازی ریاضیات در فلسفه و درونی‌سازی فلسفه در ریاضیات است، که هم وارون یکدیگرند و هم یاور یکدیگر.

پیر کاسو ــ نوگِس
مرکز ملی تحقیقات علمی
آزمایشگاه دانش و متون، دانشگاه لیل ۳

چند مرجع

- P. Cassou-Noguès, *Hilbert* (Les Belles Lettres, 2001).
- P. Cassou-Noguès, *De l'expérience mathématique. Essai sur la philosophie des sciences de Jean Cavaillès* (Vrin, 2001).
- J.-T. Desanti, *La philosophie silencieuse* (Seuil, 1975).
- D. Hilbert, *Gesammelte Abhandlungen* (Springer, Berlin, 1931-35).
- E. Husserl, *Recherches logiques* (tr. fr. H. Elie, A. L. Kelkel et R. Schérer, P.U.F. , 1959).
- C. Reid, *Hilbert* (Springer, 1970).
- H. Sinaceur,*Corps et modèles* (Vrin, 1991).

Pierre Cassou-Noguès
CNRS, Laboratoire Savoirs et Textes,
Université Lille III

چگونه می‌توان فروش به‌صورت مزایده را عقلایی کرد؟

نویسنده: ژان ـ ژاک لافون [۱]

مترجم: سید علی حائری روحانی

ویراستاران: فرج‌الله محمودی، ارسلان شادمان

فروش به‌صورت مزایده به‌خصوص با استفاده از اینترنت در حال گسترش است. الگوسازی این روش‌های فروش موجب مشخص شدن قواعد و استراتژی‌های بهینهٔ کاربرد آن‌ها می‌شود

مزایده یک روش خرید و فروش است که روز به روز متداول‌تر می‌شود. این روش ویژه به‌وسیلهٔ اینترنت نیز صورت می‌گیرد، همان گونه که چنانکه موفقیت اعجاب‌آور پایگاه eBay، که در آن هر نوع کالا از کتاب گرفته تا اتومبیل، اشیاء هنری یا وسایل الکتریکی به حراج گذاشته می‌شود، شاهد این مدّعا است. حراج مزایده‌ای به‌عنوان روشی برای به دست آوردن کالاهای کمیاب به‌طور سنتی در بازارهای محصولات دامی و کشاورزی (ماهی، گل و غیره) رایج است. این شیوه به تازگی در مورد کالاهای گران‌قیمت مانند آپارتمانها و یا موارد بسیار پیچیده‌تر مانند کسب امتیاز نمایندگی نسل سوم تلفن‌های همراه نیز گسترش یافته است.

---

[۱] Lafont, Jean-Jacques, : *Comment rationaliser les ventes aux enchères* in: L'explosion des mathématiques, SMF et SMAI, Paris, 2002, p. 56-60

یک مزایده حضوری فروش آثار هنرمندان قرن بیستم در گالری کریستیز (Christies). رفتار هر خریدار احتمالی، تابعی از تصورات او از اقدام دیگران است. نظریهٔ بازی‌ها این نوع وضعیت‌ها را بررسی کرده و به یافتن استراتژی بهینه کمک می‌کند.

استفاده از مزایده از زمان‌های قدیم معمول بوده و به دوران باستان برمی‌گردد چنان که هرودوت بازار ازدواج شهر بابِل را شرح داده است که در آن «شیء» فروشی به کسی که بیشترین بها را پرداخت می‌کرد تعلق می‌گرفت و با مزایدهٔ زیباترین زنان جوان شروع می‌شد. در آسیا قدیمی‌ترین متنی که دربارهٔ مزایده‌ها وجود دارد مربوط به فروش اشیاء متعلق به راهبان وفات یافته در قرن هفتم است.

اولین نگرش‌های مربوط به مزایده به‌علت ساده‌نگری بیش از حد مناسب نبودند

با وجود آن‌که مزایده‌ها تقریباً به آغاز تمدن انسان برمی‌گردند، مفاهیم و بینش‌های مربوط به آن بسیار جدیدتر می‌باشند. اولین اثر دانشگاهی مهم در این مورد رساله‌ای است که در سال ۱۹۵۵ به‌وسیلهٔ یک آمریکایی به‌نام ال. فریدمن[۱] ارائه شده است. این رساله از اولین پایان‌نامه‌های تحقیق در عملیات بود. موضوع مورد بررسی آن استراتژی‌هایی است که شرکت‌ها برای به مزایده گذاشتن حق حفر چاه‌های نفت در خلیج مکزیک به‌کار می‌بردند. این روش مزایده به‌صورت کتبی و مخفی بود و در آن خریداران بهای پیشنهادی خود را در پاکت‌های دربسته ذکر می‌کردند. در این نوع مزایده ارقام پیشنهادی

[۱] L. Friedman

افراد افشا نمی‌شد و بالاترین پیشنهاد، برندهٔ مزایده اعلام می‌گردید.

شیوهٔ عمل موردنظر فریدمن فقط این بود که آنچه امید سودآوری خوانده می‌شد به میزان حداکثر افزایش یابد. درصورت موفقیت، سودی که عاید شرکت کننده در مزایده می‌شود$(v-b)$ است، یعنی تفاوت بین تخمین بهای شیء به مزایده گذاشته شده (v) و بهای پیشنهادی خود (b). بنابراین امید کسب سود عبارت از حاصل ضرب این تفاوت در $P(b)$ یعنی احتمال برنده شدن در مزایده با چنین قیمت پیشنهادی یعنی $(v-b)P(b)$ است. احتمال $P(b)$ در ابتدا نامعلوم است ولی با بررسی آماری مزایده‌های قبلی می‌توان روش عمل شرکت‌کنندگان در مزایده را پیش‌بینی کرد و تابع $P(b)$ و به دنبال آن میزان b^* مطلوبی را تخمین زد که امید سودآوری یعنی $(v-b^*)P(b^*)$ را به حداکثر رساند.

صفحهٔ شروع eBay - France یک پایگاه مزایده در اینترنت

این روش که به‌صورت گسترده و دقیق و به‌صورت‌های مختلف مورد استفاده قرار گرفته است، بسیار ساده اندیشانه است و در آن فرض بر این است که شرکت‌کنندگان دیگر شیوهٔ کار را نمی‌دانند و در آینده نیز به‌همان صورت گذشته رفتار می‌کنند. در سال ۱۹٦۱ ویلیام ویکری[۱] کانادایی (که در سال ۱۹۹٦، دو روز قبل از مرگش جایزهٔ اقتصادی نوبل را دریافت کرد) مسأله را با دخالت دادن نظریهٔ بازی‌ها[۲] به‌صورت دیگری مطرح ساخت.

---

[۱] William Vickrey

[۲] théorie des jeux

استفاده از نظریهٔ بازی‌ها و اقتصاد ریاضی برای یافتن استراتژیهای بهینه

نظریهٔ بازی‌ها که تعامل بین عوامل استراتژیک را بررسی می‌کند، در سال‌های ۱۹۲۰ تا ۱۹۴۰ به‌وسیلهٔ ریاضی‌دان مشهور مجارستانی‌الاصل جان فون نیومن [۱] با همکاری اقتصاددان اتریشی‌الاصل اسکار مورگنشترن [۲] ابداع گردید. این نظریه ناظر به همهٔ موقعیت‌هایی است که هر یک از شرکت‌کنندگان باید تصمیمی بگیرند و این تصمیم بر سرنوشت موقعیت تأثیر می‌گذارد. به این ترتیب نظریهٔ بازی‌ها در موارد عدیده‌ای از جهان

جان فُربز ناش [۳] ریاضی‌دان آمریکایی متولد ۱۹۲۸ که در سال ۱۹۹۴ به خاطر آثارش درنظریهٔ بازی‌ها، جایزهٔ نوبل را نصیب خود ساخت. ناش در حدود سی سالگی دچار بیماری سخت روانی گردید و در اواسط دههٔ ۱۹۸۰ به‌صورت غیرمنتظره‌ای بهبود یافت. زندگینامهٔ او در کتاب «یک مرد استثنایی» تشریح شده و الهام بخش فیلمی به همین نام [۴] است (کلیشه دانشگاه پرینستون).

اقتصاد، سیاست، دیپلماتیک و نظامی کاربرد دارد. به مزایده‌ها بازگردیم. هنگامی که یک شرکت‌کننده در مزایده باید در مورد رقم پیشنهادی خود تصمیم بگیرد، در مورد رفتار رقبای خود فکر می‌کند و سایرین نیز به همین ترتیب عمل می‌کنند. تعادل بین مجموعهٔ این عوامل برای متخصصان بسیار پیچیده است: این روش پیشنهاد قیمت یعنی تخمین

[۱] John von Neumann

[۲] Oskar Morgenstern

[۳] John Forbes Nash

[۴] منظور فیلم معروف «ذهن زیبا» The Beautiful Mind است [و.]

قیمت واقعی v و رقم پیشنهادی (b) برای شرکت‌کننده در مزایده با توجه به آنچه از میزان پیشنهاد دیگران و تصور آن‌ها از مقدار قیمت واقعی در ذهن دارد راهکار او را تشکیل می‌دهد. به‌عنوان مثال در یک وضعیت متقارن که در آن گمان همگان نسبت به یکدیگر مشابه است، استراتژی یک شرکت‌کننده باید امید سودآوری او را به‌حداکثر برساند، با توجه به آن که می‌داند دیگران نیز همین روش را انتخاب می‌کنند. مفهوم آنچه که ذکر شد تعمیم تعادل ناش[۱] و تطبیق آن با اطلاعات ناقص در مزایده است. لازم به توضیح است که ریاضی‌دان آمریکایی جان ناش (برندهٔ جایزهٔ نوبل اقتصاد در ۱۹۹۴) در حدود سال ۱۹۵۰ یک مفهوم تعادل بسیار طبیعی را پیشنهاد کرد که نظریهٔ سال ۱۸۳۸ آنتوان کورنو[۲] ریاضی‌دان و اقتصاددان فرانسوی را تعمیم می‌داد. با توجه به روش‌هایی که شرکت‌کنندگان در یک بازی می‌توانند انتخاب کنند، مشروط بر آن که هر بازی کننده به بهترین نحو ممکن بازی کند، آنگاه این روش‌ها یک تعادل ناش را تشکیل می‌دهند، در حالی که هر بازی کننده نسبت به این که دیگران نیز اعمال ویژهٔ تعادل ناش را انتخاب می‌کنند آگاهی دارد. درچنین وضعیت تعادل ناش، هیچ‌کس از تغییر یک جانبهٔ عمل خود سود نمی‌برد.

اِشکال ویژهٔ مزایده‌ها در این است که هر شرکت‌کننده در این بازی تنها فردی است که ارزیابی شخصی خود را دربارهٔ کالای فروشی می‌داند و از ارزیابی خریداران احتمالی دیگر اطلاعی ندارد. بنابراین باید مفهوم تعادل ناش را به این وضعیت که با اطلاعات ناقص است، تعمیم داد. این امر در سال ۱۹۶۱ به‌صورت عقلایی به وسیلهٔ ویکری آمریکایی و به‌صورت دقیق‌تر در سال‌های ۱۹۶۷ و ۱۹۶۸ به‌وسیلهٔ جان هارسانی[۳] آمریکایی مجارستانی‌الاصل صورت گرفت و موجب اهدای جایزهٔ نوبل به او گردید. به این ترتیب تعادل ناش بَیْزی[۴] ابداع شد که روش کار عقلایی شرکت کننده در یک مزایده را روشن می‌سازد.

در مفهوم مزایده‌ها یک استراتژی از نظر ریاضی یک تابع S است که به تخمین هر شرکت‌کننده مقدار پیشنهادی او را ارتباط می‌دهد. به‌عبارت دیگر برای هر ارزیابی خاص v این تابع باید $b^* = S(v)$ را که حداکثر امید سودآوری را با توجه به مقررات سودآوری و

[۱] équilibre de Nash

[۲] Antoine Cournot

[۳] John Harsanyi

[۴] Nash bayesien

با فرض بر این که سایر شرکت کنندگان نیز به‌همین ترتیب عمل می‌کنند مشخص کند. معنای این مطلب در یک تعادل ناش ـ بیزی متقارن این است که اگر دیگران نیز به همین ترتیب و روش عمل کنند، این شیوه پیشنهاد دادن بهینه است. واژهٔ بیزی به این جهت است که شرکت کننده در مزایده با توجه به آنچه از ارزیابی دیگران در ذهن دارد میزان امید به کسب سود خود را محاسبه می‌کند (در حساب احتمالات و آمار، نظریهٔ بیزی که از نام توماس بیز[۱] ریاضی‌دان انگلیسی قرن هجدهم گرفته شده است عبارت است از ارزیابی احتمالات بر اساس اطلاعات ناقص در دسترس و تصورات اولیه است).

وقتیِ سودمندیِ روش‌هایِ شهودیِ فروش مورد تأیید و گسترش نظریه قرار می‌گیرد

در مزایده‌ها بنابر آنچه که ذکر شد ریاضیات می‌تواند رفتار افراد شرکت کننده را طراحی کند و باعث پیش‌بینی پیشنهادهای آن‌ها شود. این امر در دو جهت باعث پیشرفت گردیده است. در زمینهٔ شناخت مثبت، امکان مقایسهٔ داده‌ها، یعنی پیشنهادهای شرکت کنندگان در مزایده‌های مختلف، با آنچه نظریه پیش‌بینی می‌کند فراهم شده است. بنابراین، نظریه جنبهٔ علمی یافته است: در صورتی که داده‌های به‌دست آمده با پیش بینی‌های نظریه مغایرت داشته باشد، می‌توان این نظریه را مردود دانست. بنابراین تئوری قابل رد کردن است.

درزمینهٔ برقراری قواعد، نتایج به دست آمده از آنچه گفته شد نیز مهم‌تر است. در چهارچوب فرضیه‌های نظریهٔ مزایده‌یی که ذکر شد، یک قضیهٔ جالب ثابت شده است: قضیهٔ هم‌ارزی درآمد. به‌طور خلاصه و با صرف‌نظر از جزئیات می‌توان گفت که این قضیه ثابت می‌کند که شیوهٔ مزایده با اولین یا دومین قیمت (خریدار برنده، دومین قیمت پیشنهاد شده را می‌پردازد)، البته قیمت‌ها نوشته شده در پاکت‌های دربسته‌اند، مزایده‌های حضوری، در مزایده‌های با قیمت‌های بالارونده (روش انگلیسی) و پایین رونده (روش هلندی) برای فروشنده ارزش یکسان دارند و اغلب نیز نتیجهٔ آن‌ها وضعیت بهینه دارد. به این ترتیب در سایهٔ این نظریه نشان داده می‌شود، روش‌های فروشی که عملاً به شیوهٔ تجربی در موارد خاص انجام می‌شده است، روش بهینه جهت واگذاری کالاهای کمیاب است. این امر شوق تازه‌ای برای گسترش این روش‌ها به هر نوع فعالیت اقتصادی ایجاد کرده است. بالاخره در وضعیت‌های پیچیده‌تر از فروش سادهٔ یک جنس، نظریه، با در نظر

---

[۱] Bayes

گرفتن حالات تعمیم یافتهٔ مزایده‌های ساده موجب بهینه‌کردن بیشتر درآمد فروشنده یا افزایش رفاه اجتماعی می‌شود، هنگامی که ترتیب دهندهٔ مزایده دولتی علاقه‌مند به رفاه اجتماعی باشد.

با اینترنت و فناوری‌های جدید ارتباطات، مزایده‌ها میدان تجربی بسیار بزرگی پیدا می‌کنند. شبکهٔ اینترنت امکانات جدیدی را در اختیار این سیستم قرار می‌دهد که نظریه، به ارزیابی و استفاده از آن کمک می‌کند. به‌عنوان مثال در یک مزایده، یک فروشندهٔ ناشناس از عدم تقارن اطلاعات رنج می‌برد، فقط خود او است که کیفیت کالایی را که می‌فروشد می‌داند و تنها می‌تواند جنس خود را به قیمت بسیار کم به فروش برساند. ولی با فروش مکرر کالاهای مرغوب به خریداران بالقوه که از قبل اطلاعی دربارهٔ جنس نداشته‌اند می‌تواند به تدریج با استفاده از تعریف و تبلیغ مشتریان، برای خود شهرتی فراهم کند. بنابراین ممکن است کیفیت مبادلات با ایجاد مرکزی که به صداقت و کیفیت خوب شهرت پیدا کرده است بهبود یابد و پایگاه اینترنت برای این کار بسیار مناسب است.

ژان ـ ژاک لافون
انستیتوی اقتصاد صنعتی،
دانشگاه علوم اجتماعی،
کارخانه دخانیات، تولوز

چند مرجع

- I. Ekeland, *La théorie des jeux et ses applications à l'économie mathématique* (P.U.F., 1974).
- A. Cournot (1838), *Recherche sur les principes mathématique de la theorie des richesses* (Calmann-Lévy, Paris, rééd. 1974).
- J. Crémer et J.-J. Laffont, "Téléphonie mobile", *Commentaire, 93*, pp. 81-92 (2001).
- L. Friedman, "A Competitive bidding strategy", *Operations Research, 4,* 104-112 (1956).

- J. Harsanyi, "Games with incomplete information played by bayesian players", *Management Science, 14,* 159-182, 320-334, 486-502 (1967-1968).
- J.-J. Laffont, "Game theory and empirical economics: the case of auction data", *European Economic Review, 41,* 1-35 (1997).

Jean-Jacques Laffont
Institut d'économie industrielle,
Université des sciences sociales,
Manufacture des tabacs, Toulouse

استفاده از اقتصاد ریاضی برای فروشِ شراب در فرانسه یا اوراق خزانه

نویسنده: فیلیپ فِوْریه و میکائل ویسر [۱]

مترجم: سید علی حائری روحانی

ویراستاران: فرج‌الله محمودی، ارسلان شادمان

در فرانسه شراب‌های نامدار و یا اوراق خزانه در مزایده‌های حضوری معامله می‌شوند. شیوهٔ این کار چیست؟ پاسخ این سؤال در تکمیل الگوسازی عمومی مزایده‌ها به وسیلهٔ بررسیهای اقتصاد ریاضی است.

در سالن‌های فروش ریشلیو دروا [۲] عمده‌فروشی شراب به‌صورت مزایدهٔ بالاروندهٔ کلاسیک یا مزایده به روش انگلیسی است. در این روش مسئول فروش ابتدا رقم کوچکی را اعلام می‌کند و سپس به‌تدریج قیمت را بالا می‌برد تا آنکه فقط یک خریدار باقی بماند و دیگران منصرف شوند و جنس مورد نظر به آخرین بها به او فروخته شود. هنگامی که چند جعبه فراوردهٔ مشابه به مزایده گذاشته می‌شود روندی که «قرار خرید» یا اُپسیون خوانده می‌شود به برندهٔ مزایده این اختیار را می‌دهد تا هر تعداد جعبه‌های مشابه را که مایل است به همان قیمت خریداری کند. (در غیر این صورت جعبه‌ها یکی پس از دیگری

---

[۱] Février, Philippe et Visser, Michael: *De l'économétrie pour vendre des vins ou des obligations*, in: L'explosion des mathématiques, SMF et SMAI, Paris, 2002, p. 61-65

[۲] Richelieu Drouot

به مزایده گذاشته می‌شود). فرض کنیم دو جعبه هر کدام مرکب از ٦ بطری فراوردهٔ موتُن روچیلد ۱۹۴۵ برای فروش وجود دارد. هنگامی که مزایدهٔ اولین جعبه به پایان رسید، مسئول فروش به برندهٔ مزایده دومین جعبه را به همان نرخ جعبهٔ اول پیشنهاد می‌کند و اگر او از این حق استفاده کند مزایده صورت نخواهد گرفت و هر دو جعبه به برندهٔ اولی فروخته می‌شود و اگر برنده از این حق استفاده نکند، دومین جعبه نیز به مزایده گذاشته می‌شود.

یک صحنه از فروش به‌صورت مزایده (در نور شمع) در مهمانسرای بن[۱] در بورگونی[۲]. بررسی‌های اکونومتری نشان می‌دهند که استفاده از «قرار خرید»[۳] موجب افزایش سود فروشنده می‌شود.

«قرار خرید» البته به فروش کالاها سرعت می‌بخشد امّا موجب نوعی استراتژی در فروش هم می‌شود. زیرا بدیهی است که رفتار شرکت‌کنندگان در مزایده در دو حالت وجود و یا فقدان قرار خرید یکسان نخواهد بود. در حالت اول عدم موفقیت در خرید جعبهٔ اول می‌تواند از دست دادن جعبهٔ دوم را نیز در صورت استفادهٔ برنده از حق خود در قرار خرید به دنبال داشته باشد، در حالی که در مورد دوم چنین نخواهد بود. نقش استراتژیک قرار خرید کدام است؟ آیا وجود قرار خرید، شرکت کنندگان در مزایده را به بالا بردن بهای پرداختی خود تشویق می‌کند و بنابراین سود فروشنده را افزایش می‌دهد؟

---

[۱] Beaune

[۲] Bourgogne

[۳] Option d' achat

آیا دولت باید مزایده‌های خود را به‌صورت همسان برگزار کند یا به‌صورت تبعیض‌آمیز؟

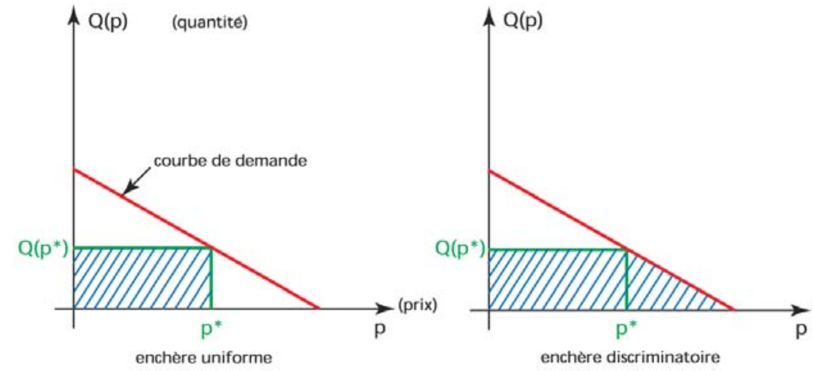
دولت فرانسه کسری بودجهٔ خود را با عرضهٔ سهامی به نام اوراق خزانه جبران می‌کند. فروش این سهام به‌صورت یک نوع مزایده که تبعیض‌آمیز خوانده می‌شود صورت می‌گیرد: هر یک از شرکت کنندگان در مزایده که متخصصین ارزشهای خزانه یا SVT نامیده می‌شوند، مجموعه‌ای از زوج‌های بها ـ کمیّت $(p, Q(p))$ تهیه می‌کنند که برحسب بهای یک برگ خزانه (p) تعیین می‌کند مایل به خرید چه مقدار اوراق خزانه $Q(p)$ است. با توجه به این که دولت قبلاً مبلغ کل (T) اوراق خزانه‌ای را که مایل به انتشار آن است اعلام کرده است، تقاضای پذیرفته شده (یعنی مجموع تقاضاهای انفرادی افراد شرکت کننده در مزایده) بهایی را که بهای تعادل p^* خوانده می‌شود مشخص می‌کند: منظور بهای p^* با شرط $T = Q_1(p^*) + Q_2(p^*) + \ldots + Q_N(p^*)$ است که در آن Q_i تعداد اوراق خزانهٔ مورد نظر به وسیلهٔ SVT شمارهٔ i می‌باشد. هر یک از این SVTها مقدار $Q_i(p^*)$ از اوراقی را که تقاضا کرده است دریافت می‌کند.

اگر بهایی که شرکت کننده برای هر برگ پرداخت می‌کند p^* باشد مزایده همسان خوانده می‌شود و جمع کل هزینه برای شرکت کننده در مزایده فقط $p^*Q(p^*)$ یعنی بهای یک برگ ضرب در تعداد اوراق درخواستی (مساحت مستطیل هاشورزدهٔ شکل سمت چپ) خواهد بود. در حالی که در مزایده‌ای که تبعیض‌آمیز نام دارد و دولت فرانسه به آن مبادرت می‌ورزد بهای پرداختی برای برگ برابر با p^* نیست، بلکه کمی بیش از آن است. در واقع دولت شرکت کنندگان در مزایده را به حداکثر آنچه که برای هر برگ اضافی حاضر به پرداخت هستند وادار می‌کند. جمع هزینه برای شرکت کننده در مزایده با مساحت قسمت هاشورزدهٔ شکل سمت راست مشخص شده است.

این مطلب را با ذکر یک مثال روشن می‌کنیم: فرض کنیم یک شرکت کننده در مزایده ده برگ به شرط آن‌که بهای آن ۹۰ یورو باشد و ۹ برگ در صورتی که بهای آن ۱۰۰ یورو باشد و ... و ۱ برگ در صورتی که بهای آن ۱۸۰ یورو باشد، درخواست نماید. با فرض بر این که بهای تعادل p^*، برابر با ۱۳۰ یورو باشد، این شرکت‌کننده ٦ برگ دریافت خواهد کرد. بهایی که این شرکت کننده در مزایدهٔ تبعیض‌آمیز می‌پردازد حداکثر بهایی است که حاضر به پرداخت برای این ٦ برگ بوده است: ۱۸۰ یورو برای اولین ۱۷۰ یورو برای دومین ... و ۱۳۰ یورو برای ششمین که در مجموع ۹۳۰ یورو می‌شود. چنانچه مزایده همسان بود این شرکت کننده برای هر برگ ۱۳۰ یورو یعنی در مجموع ۷۸۰ یورو

پرداخت می‌کرد.

مسلماً متخصصان ارزش‌های خزانه در این دو نوع مزایده یکسان عمل نمی‌کنند و مقایسهٔ مکانیسمهای این دو نوع مزایده کار ساده‌ای با نتایج آنی و بدیهی نیست. کشور مکزیک در سال ۱۹۹۰ روش مزایده‌ها را به نفع مزایدهٔ تبعیض‌آمیز تغییر داد. آمریکا برعکس در سال ۱۹۹۸ مزایدهٔ تبعیض‌آمیز را به نفع مزایدهٔ همسان رها کرد. آیا مزایدهٔ همسان برای دولت سود بیشتری دارد و آیا فرانسه نیز باید روش مزایدهٔ خود را تغییر دهد؟



در یک مزایدهٔ همسانِ اوراق خزانه، شرکت کننده در مزایده مقدار $p^*Q(p^*)$ (سطوح مشخص شده در شکل سمت چپ) را می‌پردازد که در آن p^* بهای تعادل یک برگ نامیده می‌شود و تابعی از تقاضای همهٔ شرکت کنندگان است و $Q(p^*)$ تعداد اوراق بهاداری است که توسط افراد برای این قیمت خواسته شده است. در یک مزایدهٔ تبعیض آمیز، شرکت کننده در مزایده بهایی بیش از $p^*Q(p^*)$ می‌پردازد (سطح مشخص شده در شکل سمت راست). استراتژی افراد شرکت کننده در این دو نوع مزایده یکسان نیست.

باید دو وضعیت را با هم مقایسه کرد در حالی که فقط در مورد یکی از آنها اطلاعات وجود دارد

پاسخ به سؤالات فوق دربارهٔ قرار خرید در مورد شراب یا مزایدهٔ تبعیض‌آمیز در مورد اوراق بهادار دارای اهمیت است. ارقام مربوط به این مزایده‌ها می‌توانند فوق‌العاده زیاد باشند. چنانکه در سال ۲۰۰۰ در مزایده‌های اوراق خزانه به ۱۸۵ میلیارد یورو و در سالن حراجی Drouot سالانه به چند ده میلیون یورو بالغ می‌شود. چنین مسائلی را چگونه می‌توان حل کرد؟ مؤثرترین روش برگزاری یک تجربهٔ واقعی است. در مزایده‌های اوراق خزانه باید به دو تجربهٔ موازی دست زد، تا بتوان نتایج را با یکدیگر مقایسه کرد. هم‌چنین،

در فروش مزایده‌ای شراب، باید به دو شیوهٔ مزایده یکی با قرار خرید و دیگری بدون قرار خرید مبادرت ورزید تا رفتار مزایده‌گرانِ مقایسه شود. متأسفانه امکان چنین تجاربی بسیار به ندرت به دست می‌آید. بنابراین مسأله‌ای که وجود دارد این است که دو وضعیت را در حالی که فقط دربارهٔ یکی از آنها اطلاعات قبلی داریم با یکدیگر مقایسه کنیم.

راه حل مسألهٔ ما نیاز به اعمال پیچیدهٔ ریاضی دارد. در مرحلهٔ اول باید رفتار شرکت کنندگان در مزایده را الگوسازی کرد. شرکت کنندگان با ارزیابی‌های خود یعنی بهای حداکثری که به تخمین خود حاضر به پرداخت آن برای به‌دست آوردن کالای فروشی هستند مشخص می‌شوند. در این الگو هر شرکت‌کننده ارزیابی خود را می‌داند ولی از نظر دیگران اطلاعی ندارد. او دربارهٔ ارزشی که این ارزیابی‌ها ممکن است پیدا کنند فقط یک تصور اولیه دارد. می‌توان این تصور اولیه را به‌صورت یک تابع f در نظر گرفت که احتمال تحقق این ارزشها را مشخص می‌کند: $f(v)$ میزان احتمالی است که شرکت کننده در مزایده برای این که کالای فروشی ارزش v را داشته باشد در نظر می‌گیرد. استراتژی مزایدهٔ بهینه یعنی بهایی که شرکت کننده باید برحسب ارزیابی خود پیشنهاد کند به کمک جستجوی تعادل بَیْزیِ ناش [1] به دست می‌آید (به مقالهٔ قبلی نوشتهٔ ژان ژاک لافون رجوع شود).

به این ترتیب از نظر تئوری می‌توان دو حالت عینی مورد بررسی را الگوسازی کرد تا از حیث نظری قابل مقایسه شوند. بدیهی است که این مقایسه به تابع f انتخاب شده بستگی دارد. نتیجه‌گیری زمانی ممکن است که تابع f هر چه باشد نتیجه شود که یکی از دو حالت بر دیگری برتری دارد (مثلاً عقیدهٔ متخصصان اوراق خزانه SVTها که در تابع f متجلّی است هر چه باشد، باز دولت از مزایدهٔ تبعیض‌آمیز بیشتر از مزایدهٔ همسان سود بَرَد). معمولاً وضعیت‌های مورد بررسی پیچیده‌تر از آن هستند که چنین برتری آشکار شود. در این مرحله به نتایجی از این قبیل می‌رسیم: اگر تابع f فلان است، در این صورت به نفع گالری دروو (فروشنده) است که قرار خرید را حفظ کند ولی اگر f بَهمان است، نباید به آن مبادرت ورزد. بنابراین مسأله به شناسایی کارآمدِ تابع f باز می‌گردد.

تقابل بین اطلاعات واقعی با آنچه که تئوری پیش‌بینی می‌کند تابع f را مشخص می‌کند. در واقع اگر یک تابع معین f را در نظر بگیریم، الگوها و استراتژی‌های تعادل محاسبه شده در الگوی رفتار، میزانی را که مطلوب است مزایده‌گران پیشنهاد کنند تعیین می‌کند.بنابراین چون f را انتخاب کرده‌ایم بر مبنای آن پیش‌بینی‌ها قابل محاسبه‌اند کافی

---

[1] Nash

است این پیش‌بینی‌ها را با مقادیر واقعی مقایسه کنیم. اگر با هم هماهنگ باشند، نشانهٔ این است که تابع تعیین شده برای f درست بوده است و در غیر این‌صورت باید با یک تابع دیگر دوباره عمل کنیم.

دو نوع روش اقتصاد ریاضی برای تعیین احتمالات وابسته به ارزیابی‌های مزایده‌گران

در عمل نمی‌توان همهٔ موارد قابل تصور تابع‌های f را که نهایت ندارند، یکی پس از دیگری بررسی کرد. برای تعیین f باید به روشهایی که اقتصاد ریاضی نامیده می‌شوند پرداخت. این روشها را می‌توان در دو دستهٔ وسیع رده‌بندی کرد: روشهای پارامتری (که در آن فرض بر این است که تابع f به کمک تعدادی پارامتر مجهول کاملاً مشخص می‌شود) و روشهای غیرپارامتری (که هیچ‌گونه پیش فرضی دربارهٔ f ندارند). روشهای اخیر کلّی‌تر ولی به همان اندازه پیچیده‌ترند و پیشرفت آنها از سالهای پایانی ۱۹۵۰ آغاز شده ولی فقط در سالهای اخیر محققان موفق به تطبیق آن برای استفاده در تخمین تابع f شده‌اند. با یافتن تابع f (یا به‌صورت هم ارز مقادیر پارامترهایی که f را در روشهای پارامتری تعیین می‌کنند) کافی است که دو وضعیت مطالعه شده را با یکدیگر مقایسه کنیم، تا برتری یکی بر دیگری روشن شود و مشخص شود فروشنده از کدام بیشتر سود می‌برد.

قرار خرید، مزایدهٔ تبعیض آمیز: الگوها نشان می‌دهند که استفاده از این روشها به نفع فروشنده است

بااین شیوه توانستیم پرسشی را که در ابتدای مقاله دربارهٔ استفاده از قرار خرید در حراجی‌های شراب سالن درواُ مطرح شد پاسخ دهیم. ما در ابتدا دو الگوی نظری را یکی با قرار خرید و دیگری بدون قرار خرید مطرح کردیم و تعادل‌های بیزی را در دو حالت مذکور محاسبه کردیم. سپس از سالن دروو اطلاعات لازم (بهای فروش فراورده‌ها، کیفیت آنها و غیره) را به دست آوردیم. سپس یک روش تخمین پارامتری را برالگوی نظری خود مبنی بر قرار خرید اعمال کردیم. باید توجه داشت که همهٔ فراورده‌ها یکسان نیستند(سال تولید، رنگ، شاتو، عنوان و غیره) و بنابراین باید برای هر نوع آن یک تخمین جداگانه‌ای برای تابع f رادر نظر بگیریم. با در نظر گرفتن این ارزیابی‌ها الگوی نظری بدون قرار خرید را بررسی کرده و درآمد فروشنده را در صورت عدم استفاده از قرار خرید،

مشخص کردیم. اولین نتیجه‌گیریهای این مطالعه نشان می‌دهند که استفاده از قرار خرید موجب افزایش درآمد فروشنده به میزان ۷% نسبت به عدم استفاده از قرار خرید می‌شود.

با توجه به اطلاعات مربوط به فروش اوراق خزانهٔ فرانسه در سال ۱۹۹۵ و با استفاده از همین شیوهٔ مطالعه، دو نوع مزایدهٔ همسان و تبعیض‌آمیز را با یکدیگر مقایسه کردیم. نتایج این بررسیها نشان می‌دهد که با استفاده از مزایدهٔ تبعیض‌آمیز درآمد دولت نسبت به مزایدهٔ همسان ۵% بیشتر شده است. به این ترتیب در هر دو مورد، فروش اوراق خزانه و مورد فوق‌الذکر با استفاده از الگوهای اقتصاد ریاضی می‌توان به سؤالاتی پاسخ داد که به علت فقدان اطلاعات مربوط به دو وضعیت مورد بحث ظاهراً بدون پاسخ به‌نظر می‌رسیدند.

فیلیپ فوریه[۱،۲]، میکائل ویسر[۱]

۱ مرکز پژوهش در اقتصاد و آمار— آزمایشگاه اقتصاد صنعتی (CREST-LEI) پاریس

۲ انستیتوی ملی آمار و بررسی‌های اقتصادی (INSEE)

چند مرجع

- C. Gouriéroux et A. Monfort, *Statistique et modèles économétriques* (Economica, 1989).
- P. Février, W. Roos et M. Visser, “Etude théorique et empirique de l’option d’achat dans les enchères anglaises”, Document de travail du CREST (2001).
- J.-J. Laffont, H. Ossard et Q. Vuong, “Econometrics of first price auctions”, *Econometrica, 63*, pp. 953-980 (1995).
- S. Donald et H. Paarsch, “Piecewise pseudomaximum likelihood estimation in empirical models of auctions”, *International Economic Review, 34*, pp. 121-148 (1993).
- P. Février, R. Préget et M. Visser, “Econometrics of Share Auctions”, Document de travail du CREST (2001).

- E. Guerre, I. Perrigne et Q. Vuong, "Optimal nonparametric estimation of first price auctions", *Econometrica, 68*, pp. 525-574 (2000).
- W. Härdle, *Applied nonparametric regression* (Cambridge University Press, 1990).

Philippe Février[۱,۲] *et Michael Visser*[۱]

[۱] *CREST-LEI (Centre de recherche en économie et Statistiqe-Laboratoire d'économie industriell, Paris)*

INSEE (Institut national de la statistique et des études économiques)

اشتغالات فکری شرکت‌های هوایی

نویسنده: ژان کریستف کولیولی [۱]

مترجم: هاشم مهرآذین

ویراستاران: فرج‌اللّه محمودی، ارسلان شادمان

مسائل سازماندهی و برنامه‌ریزی که در یک شرکت هواپیمایی مطرح است، شبیه همان مسائلی است که زمینه‌های دیگر فعالیت با آن درگیر هستند. پژوهش عملی یا تحقیق در عملیات یعنی قلمرو مورد علاقهٔ ده‌ها هزار ریاضیدان و مهندس در دنیا، تلاش می‌کند این مسائل را به بهترین صورت ممکن حل کند.

ترابری هوایی فعالیت پیچیده‌ای است که سرمایه‌گذاری‌های سنگین (هواپیماها و تأسیسات تعمیر و نگهداری)، کارکنان کارآزموده در سطح بالا (مانند کارکنان پرواز) و یک سامانه رایانه‌ای با زمان واقعیِ پُر هزینه (سیستم‌های ذخیرهٔ جا و مدیریت) را به کار می‌گیرد. هم‌چنین در این بخش رقابت بسیار فشرده است و نرخ‌های اعلام شده همیشه جوابگوی هزینه‌های لحظه‌ای نیستند. برای این که یک شرکت هواپیمایی در عین حال رقابتی و مطمئن باشد، باید به صحیح‌ترین شکل ممکن اداره شود.

برای این منظور باید در هر یک از مراحل بهره‌وری، روش‌های بهینه‌سازی اختصاصی را به کار گیرد. این روش‌های ریاضیاتی را تحت نام پژوهش عملی یا تحقیق در عملیات

[۱] Culioli, Jean-Christophe: *Les casse-téte des compagnies aériennes*, in: L'explosion des mathématiques, SMF et SMAI, Paris, 2002, p. 66-69

دسته‌بندی می‌کنند. این قلمرو تحت تأثیر فشار ناشی از نیازهای نظامی انگلیس و آمریکا در طول دومین جنگ جهانی با شروع به کار رایانه‌ها و روش‌های موسوم به برنامه‌ریزی خطی (شرح ذیل همین عنوان دیده شود) به ظهور رسید. از آن به بعد پژوهش عملی توسعهٔ زیادی یافته و به طور گسترده‌ای در زندگی مؤسسات و صنعت نفوذ پیدا کرده است. با توجه به مبالغ و تجهیزات درگیر، این روش‌ها گاهی محرمانه‌اند.

یک شرکت هواپیمایی برای بهترین استفاده از ناوگان خود باید برنامه‌های تعمیر و نگهداری و برنامه‌های پروازش را به دقّت تنظیم کند. کار کارکنان زمینی زائد و تعویض گروه‌های پرواز و غیره را زمان‌بندی کند. این‌ها مسائل مشکل پژوهش عملی هستند که معادلاتی با چند هزار مجهول را دخالت می‌دهند (عکس از ارفرانس)

پژوهش عملی بنا به توقعی که از آن می‌رود باید بتواند مسائل مربوط به تنظیم برنامهٔ زمانی، تعیین وظایف اختصاصی هر واحد، تنظیم مراحل ساخت و غیره را حل کند و به انجام برساند. در این مسائل تعداد زیادی متغیر و قیود دخالت می‌کنند و راه‌حل مسأله باید به بهترین صورت ممکن، یعنی بهترین هزینه، حداقل مدت یا شرایط دیگر انجام شود. یک مثال ساده از پژوهش عملی، مسألهٔ تعیین فعالیت‌ها در یک مؤسسه با ۵۰ واحد کاری است، به طوری که به بهترین وجه ممکن یک کار معین به هر نفر از ۵۰ کارمند با توجه به قابلیت‌های هر یک اختصاص یابد. برای به دست آوردن بهترین جواب این مسأله قطعاً می‌توان همهٔ امکانات را از نظر گذراند، هر یک را ارزیابی کرد و بعد سودمندترین آنها را انتخاب کرد. در عمل این راه‌حل کاملاً مردود است، چون باید $۱ \times ۲ \times ۳ \times \ldots ۴۸ \times ۴۹ \times ۵۰ = ۵۰!$ امکان را بررسی کرد. اما $۵۰!$ عدد بسیار بزرگی است (تقریباً برابر با ۳×۱۰^{۶۴}) حتی اگر یک رایانه بتواند یک میلیارد امکان را در ثانیه بررسی کند $۱۰^{۴۸}$ سال وقت نیاز دارد تمام آنها را به اتمام برساند، یعنی زمانی خیلی

بیش از عمر تخمینی عالم (تقریباً 10^{10} سال).

برنامه‌ریزی خطی

برنامه‌ریزی خطی آن مسألهٔ ریاضی است که می‌خواهد مقادیر مثبت $x_1, x_2, \ldots, x_N$ را چنان بیابد که یک «هزینه» بنابر فرض به شکل $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_Nx_N$ را به حداقل برساند مشروط بر آن که c_iها اعداد معلومی باشند و اعداد مجهول x_i مقید به قیودی باشند که به شکل معادلات خطی (به‌صورت $A_1x_1 + \cdots + A_Nx_N = B$ با اعداد مفروض A_iها و B که بستگی به مسألهٔ مورد بحث دارند) بیان می‌شوند[1]. بسیاری از مسائل پژوهش عملی می‌توانند به این ترتیب بیان شوند. هرچند صورت مسألهٔ برنامه‌ریزی خطی آسان به نظر می‌رسد، اما حل آن ابداً این طور نیست، چون N یعنی تعداد مجهول‌هایی را که باید پیدا کرد، در عمل به چندین هزار می‌رسد. این مسألهٔ به ظاهر ناچیز اما با اهمیتِ زیاد در کاربرد طی سی سال اخیر نقطه شروع پرثمرترین تحقیقات، در بهینه‌سازی شده است. در ۱۹۴۷ ریاضیدان آمریکایی جرج دانتزیگ[2] روش (الگوریتم) عالی سیمپلکس را پیشنهاد کرد که هنوز هم به وفور مورد استفاده است. در سال‌های ۱۹۷۰ و ۱۹۸۰ الگوریتم‌های رقیب دیگری به وجود آمدند. سال ۱۹۸۴ در این زمینه نقطهٔ عطفی است: یک ریاضیدان جوان به نام، نارندراکارمارکار[3] که در آمریکا کار می‌کرد روش (الگوریتم) برنامه‌ریزی خطی بسیار موثری به نام، (همگرایی موصوف به چندجمله‌ای) ابداع کرد. افکار زیربنای روش این ریاضیدان، جریان پژوهشیِ بسیار فعالی (مشهور به روش‌های نقاط داخلی) را به وجود آورد که هزاران ریاضیدان را همزمان در دنیا به تحرک درآورده است. به کمک این تلاش‌ها، در حال حاضر، تعدادی الگوریتم‌های برنامه‌ریزی خطی خیلی موثر در اختیار صنایع قرار دارد.

---

[1] معمولاً قیود به صورت نامعادلات خطی بیان می‌شوند یعنی $(\leq B)$ را به جای $(= B)$ در نظر می‌گیرند. (و.)

[2] George Dantzig

[3] Narendra Karmarkar

این مثال به مهارتی از پژوهش‌های عملی نیاز دارد که بتواند چنین مسأله‌ای را به صورتی واقع‌بینانه و با محاسبه در زمانی قابل قبول حل کند. علاوه بر ابزارهای رایانه‌ای، روش‌های مختلف و متفاوت ریاضی (جبری، احتمالاتی، عددی و غیره) در طراحی این روش‌ها دخالت می‌کنند. با وجودی که بیش از پنجاه سال از پیدایش آن می‌گذرد، پژوهش عملی هنوز هم یک دانش ریاضی جوان است: از لحظه‌ای که یک روش در یک آزمایشگاه تحقیقاتی ابداع می‌شود و زمانی که، پس از گذراندن مرحلهٔ مراکز بررسی، به مراکز تولیدی می‌رسد، زمانی بیش از سه سال طول نمی‌کشد. در بخش هوایی منابع و تجهیزات درگیر چنانند که باعث ایجاد تعداد زیادی شرکت‌های مشاور و خدماتی ریاضیاتی و رایانه‌ای شده‌اند مانند گروه سابر[۱] که منشعب از تشکیلات پژوهش‌های عملی شرکت آمریکن ایرلاینز است، شرکت آدوپت[۲] منشعب از آزمایشگاه ژراد[۳] (گروه مطالعات و تحقیقات در تجزیه و تحلیل تصمیم‌ها) از دانشگاه مونرِآل یا شرکت‌های فرانسوی مانند اوروِدِسیزیون[۴]، ایلوگ[۵] یا کوسیتِک[۶] شده‌اند.

بهینه کردن برنامهٔ پروازها، تخصیص یک وسیله به هر پرواز و کمینه کردن زمان‌های عدم تحرّک (توقف روی زمین):

برای بهترین استفاده از وسایل ناوگان، یعنی مهم‌ترین ثروت یک شرکت هواپیمایی، باید از تنظیم یک برنامهٔ بهینه به منظور تعمیر و نگهداری با تعیین زمان بازدیدهای فنی کوچک و بزرگ هر هواپیما شروع کرد. یک هواپیما در زمین هیچ درآمدی ندارد، پس باید عدم تحرک هر هواپیما را با توجه به ساعات، مهارت‌های کارکنان، در دسترس بودن آشیانه‌ها به حداقل رسانید. معادلاتی که مسأله را مطرح می‌کنند، خطی نیستند و مشکلاتی به وجود می‌آورند، اما اخیراً روش‌های نسبتاً مؤثری برای حل آنها در اختیار داریم.

---

۱ Sabre

۲ Adopt

۳ Gerad

۴ Eurodécision

۵ Ilog

۶ Cosytech

شرکت‌های هواپیمایی تا آنجا که ممکن است در جستجوی کاهش زمان توقف هواپیماهای خود در روی زمین هستند. چون یک هواپیما در زمان‌های توقف در روی زمین هیچ درآمدی عاید نمی‌کند.
(کلیشه Air France)

پس از تشکیل یک شبکه، لیستی از مسیرها همراه با ساعات مربوط، به صورت تابعی از پیش‌بینی‌های مربوط به تقاضای بازار و سهم اختصاص یافته توسط یاتا (شرکت ترابری هوایی بین‌المللی)[۱] به هر شرکت، مشخص می‌کنند که چه نوع هواپیمایی (مثلاً ارباس ۳۴۰) از نظر فنی و اقتصادی برای انجام هر یک از پروازهامناسب‌ترین است. داده‌هایی که وارد برنامهٔ بهینه‌سازی می‌شوند شامل مشخصات هواپیما (ظرفیت، کارایی) پیش‌بینی‌های مربوط به تعداد مسافرین و غیره هستند. تهیهٔ برنامهٔ پروازها به فنونی از بهینه‌سازی نیاز دارد که در این زمینه آمار و احتمالات و روش‌های برنامه‌ریزی خطی موسوم به برنامه‌ریزی با اعداد صحیح (که در آن مجهول‌ها اعداد صحیح‌اند) را به کار می‌گیرند.

پس از آن باید پروازها و عملیات تعمیر و نگهداری هر یک از هواپیماها را طوری به دنبال هم قرار داد که تمام شرایط عملیاتی (توالی مجاز یا غیرمجاز، مقررات تعمیر و نگهداری و غیره) با توجه به کمینه کردن نتایج احتمالی خرابی‌های فنی و تأخیرهای پیش‌بینی نشده به صورتی رضایت‌بخش انجام شوند. این مسألهٔ بهینه‌سازی که به نام طرح چرخش هواپیماها شناخته شده به صورت یک برنامهٔ خطی با عدد صحیح و با ابعاد بزرگ مدل‌سازی می‌شود. برای این که این مسأله به طور دقیق حل شود به کار برد یک روش تجزیه نیاز دارد (تکوین ستون‌ها، رهاسازی لاگرانژی[۲])

---

[۱] IATA

[۲] relaxation lagrangienne

بالاخره برای هر چرخش هواپیما، باید مشخص کرد که دقیقاً کدام هواپیما با توّجه به قیود مربوط به نگهداری هر وسیله (تعداد ساعات پرواز، تعداد دفعات نشست و برخاست قبل از بازدید و غیره) به کار گرفته خواهد شد. تنظیم جدول معمولاً به کمک تحقیقی از نوع «برنامه‌ریزی دینامیکی» حاصل می‌شود. برنامه‌ریزی دینامیکی که در سال‌های ۱۹۵۰ توسط ریچارد بلمن [۱] آمریکایی مطرح شد، مبتنی بر تجزیهٔ مسألهٔ تصمیم‌گیری اولیه به چند مسألهٔ ساده‌تر است که می‌توانند یکی بعد از دیگری حل شوند (برنامه‌ریزی دینامیکی هم می‌تواند برای یافتن مسیرهای بهینهٔ هواپیماها و هم برای تعیین سیاست‌های مالی سرمایه‌گذاری به کار رود)

مسائل طرح و برنامه‌ریزی صور متفاوتی دارند و ریاضیات زیربنای آن نیز چنین است

چون هر هواپیما یک برنامه کاملاً پیش‌بینی شده از قبل دارد، پس می‌توان کوشید تا با باز کردن یا بستن کلاس‌های رزرو بر حسب تقاضای مؤثر مشتری، عایدی مورد انتظار به حداکثر برسد. این مسأله در هواپیمایی و ترابری مسافرین با راه‌آهن، هم‌چنین نزد اجاره دهندگان خودروها و زنجیرهٔ مهمانسراها خیلی کلاسیک است. طرح این عمل به عنوان یک مسألهٔ بهینه‌سازی تصادفی است که در آن باید یک درآمد F را به مفهوم احتمالی به حداکثر رسانید، یعنی با این اطلاع که F به متغیرهای تصادفی X_i بستگی دارد، امید ریاضی عایدی F را به حداکثر برسانیم (مثلاً X_iها می‌توانند تعداد هر یک از درجات ذخیرهٔ جا با قیودی به صورت $A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_Mx_M = B$ باشند که در آن B نمایشگر ظرفیت آن است).

به تمام موارد قبلی باید برنامه‌ریزی کار کارکنان زمینی (تعداد افراد و تجهیزات، همزمان‌سازی برنامهٔ پروازها، برنامه‌ریزی پذیرش مسافرینی که هواپیماهایشان را در فرودگاهای بین راه عوض می‌کنند، هم‌چنین بار آنها وغیره ...) و کارکنان پرواز را با در نظر گرفتن قواعد مربوط به کار و مقررات ایمنی آنها، افزود. می‌بینیم که فعالیت یک شرکت هواپیمایی مسائل متنوع زیادی را در ارتباط با بهینه‌سازی ایجاد می‌کند که غالباً شبیه مسائل مربوط به ترابری با راه‌آهن یا ناوگان دریایی هستند. این مسائل مشکلند و از نقطه‌نظر ریاضی به کمینه یا بیشینه کردن مقادیری که تابع تعداد زیادی متغیرند (اغلب چند هزار، حتی بیشتر) مربوط می‌شوند. با وجود این، تلاش‌های پژوهش عملی ثمرات

---

[۱] Richard Bellman

خود را ببار آورده‌اند، و امروز الگوریتم‌های خوبی برای اغلب وضعیت‌ها در درست است. اما در این زمینه هیچ‌کس به نتایج حاصله اکتفا نمی‌کند و آرام نمی‌گیرد: چون کارایی مؤسسات تابع آن است، تحقیقات باید ادامه یابند.

ژان ـ کریستف کولیولی
مدیر پژوهش عملی
ارفرانس

چند مرجع

- Y. Nobert, R. Ouellet et R. Parent, *La recherche opérationnelle* (3^{e}éd., Gaëtan Morin, 2001).
- R. Faure, B. Lemaire et C. Picouleau, *Précis de recherche opérationnelle* (5^e éd., Dunod, 2000).
- "Air Worthy OR" dans *Operational Research and Management Science Today*, numéro de décembre 1999.
- Bulletins de la ROADEF (Association pour la Recherche Opérationnelle et l'Aide à la Décision en France, issue de la refondation de l'AFCET).

Jean-Christopher Culioli
Directeur de la recherche opérationnelle
Air France

هندسهٔ ۱۱ـ بُعدی برای درک آغاز

نویسنده: موریس ماشال [1]

مترجم: ارسلان شادمان

ویراستاران: فرج‌الله محمودی، شهناز عباسپور

فیزیکدانان از دیرباز آرزومند نظریه‌ای هستند که یکجا همهٔ ذرات بنیادی و همهٔ کُنشها و واکنشهای بین آنها را در بر گیرد. از حدود ۱۵ سال پیش، یک راه جدّی به سوی مقصود پیش پا دارند. اما برای آن که بتوانند از آن استفاده کنند، باید به ناوبری در فضاهای مجردی بپردازند که ریاضیدانان هم هنوز دست به تجسّس در آنها نزده‌اند.

هر فرد محترم و با شخصیتی می‌داند که دانشمندان رشته‌های علمی مانند فیزیکدانان و شیمیدانان، ریاضیات را به‌کار می‌برند. اما نادرند اشخاصی که آگاه باشند این موضوع تا چه حد حقیقت دارد و ریاضیات و علوم طبیعی تا چه ژرفایی همدیگر را نگه می‌دارند. گالیله گفته است که طبیعت به زبان ریاضی نوشته شده است. به نظر می‌رسد که گسترش علوم جدید و به‌ویژه فیزیک، فکر گالیله را کاملاً تأیید می‌کند. امروز حتی از تأیید این فکر فراتر هم می‌روند: بسیاری از اندیشمندان در شگفت‌اند از این که ملاحظه می‌کنند همواره اختراعات یا اکتشافات ریاضی بالاخره در توصیف یکی از جلوه‌های پدیده‌های طبیعی

[1] Mashaal, Maurice: *De la géométrie à 11 dimensions pour comprendre la Genèse,* in: L'explosion des mathématiques, SMF et SMAI, Paris, 2002, p. 70-74

به کار رفته‌اند. این همان اظهارتعجب مشهور اوژن پ. ویگنر[۱] (۱۹۹۵—۱۹۰۲)، فیزیکدان مجارستانی‌الاصل است که اصطلاح «کارایی نامعقول ریاضیات در علوم طبیعی» را به‌کار می‌برد. حقیقتاً نمی‌دانیم چرا ریاضیات تا این حد «کارامد» هستند. این مسأله که مربوط به فلسفهٔ معرفت است هنوز حل نشده است. ما در این مقاله سعی نخواهیم کرد به این مسأله جواب دهیم، بلکه فقط می‌خواهیم این کارایی را در حوزه‌ای از فیزیک روشن کنیم که نظری‌ترین و بنیادی‌ترین حوزه است و پیشاپیش هیچ فایدهٔ مادی ندارد— هرچند اختراعات اساسی مانند لیزر، ترانزیستور و یا انرژی اتمی از آن نتیجه شده‌اند.

فیزیک و ریاضیات، سابقهٔ تاریخی طولانی در مشارکت دوجانبه

روابط بین ریاضیات و فیزیک از امروز شروع نمی‌شود. مگر اصل ارشمیدس (« به هر جسم که در مایعی غوطه‌ور شود نیرویی برابر با وزن مایع هم حجم آن وارد می‌شود.») یک جملهٔ ریاضی دربارهٔ پدیده‌ای فیزیکی نیست؟ مگر نه این است که فیزیک براثر ابداع حساب دیفرانسیل و انتگرال در قرن ۱۷ به وسیلهٔ نیوتن و لایبنیتس[۲] به پیشرفت چشمگیری دست یافت؟ آنچه مهم‌تر است این که روابط بین این دو رشته همیشه یک طرفه نیست که اول یک ابزار ریاضی اختراع شود سپس در یک مسألهٔ فیزیک به کار رود. یکی از مثال‌هایی که از بین خیل مثال‌های متعدد می‌توان به عنوان شاهد آورد این است: ضمن علاقه و کار روی مسألهٔ انتشار حرارت بود که ریاضیدان فرانسوی ژان باپتیست ژوزف فوریه[۳] (۱۷۶۸ تا ۱۸۳۰) «سری‌های فوریه» را مطرح کرد (موضوع آن، حاصل جمع نامتناهی توابع مثلثاتی است) که از آن پس نقش فوق‌العاده مهمی در علوم و فنون ایفا کرده‌اند.

فیزیک قرن ۲۰ پر از فعل و انفعال متقابل با ریاضیات است. از موارد آن می‌توان دو نظریهٔ عمده را مثال زد که در آغاز قرن پدید آمدند، یعنی نظریهٔ نسبیت آینشتاین[۴] و مکانیک کوانتیک. نسبیت (عمومی) آینشتاین نظریه‌ای در گرانش است که به جای نظریهٔ جاذبهٔ نیوتن بر کرسی می‌نشیند؛ این نظریه مبتنی بر مفاهیمی است که اختلافات بنیادی با اصول نظریهٔ پیشین دارند، مفاهیمی که مربوط به هندسه‌های نااقلیدسی‌اند، هندسه‌هایی

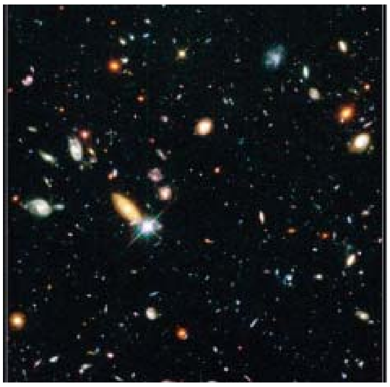
---

[۱] Eugène P. Wigner

[۲] Leibniz

[۳] Jean-Baptiste Joseph Fourier

[۴] Einstein



انبوهی از کهکشان‌های بسیار دور که با تلسکوپ فضایی هابل (Hubble) رصد شده است. با توجه به آن که گرانش عنصری کلیدی در زایش و تحول جهان است، متخصصین کیهان‌شناسی مایلند سرانجام به توصیفی از نیروی گرانش که با مبانی فیزیک کوانتیک سازگار باشد دسترسی پیدا کنند. آیا نظریهٔ ریسمان‌ها به تحقق این آرزو جامهٔ عمل خواهد پوشید؟ (کلیشه از R. Williams/HDF(STSci)/NASA).

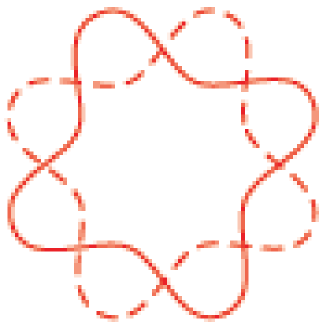
که در قرن ۱۹ وارد شدند و در آن زمان احدی گمان نمی‌برد که چنین مباحثی از ریاضیات بتوانند کاربردی در دنیای واقعی داشته باشند. به همین شکل، زمانی که ریاضیدانان در سال‌های ۱۹۰۰ مطالعهٔ «فضاهای هیلبرت[1]» را آغاز کردند، (فضاهای هیلبرت فضاهایی مجردند که نقاط آنها ممکن است مثلاً توابعی با شرایط فنی ویژه باشند)، هیچ‌کس فکر نمی‌کرد که بیست سال بعد ریاضیات فضاهای هیلبرت به شکل چارچوب مناسب برای بیان فرمول‌بندی مکانیک کوانتیک در خواهند آمد (مکانیک کوانتیک به ویژه در سطح اتمی و زیراتمی ظاهر می‌شود). در جهت عکس، مطالعات بنیادی در نسبیت عمومی و در مکانیک کوانتیک باعث تقویت پژوهش‌های صِرفاً ریاضی گردیده‌اند.

فیزیک ذرات بنیادی، میدانی است که ریاضیات بسیار مجردی در آن به‌کار گرفته می‌شود

به یکی از مسیرهایی که فیزیک کوانتیک در آن گسترش یافته است، اندکی نزدیک‌تر نگاه کنیم: منظور بررسی ذرات به اصطلاح بنیادی و فعل و انفعالات آنهاست. در دهه‌های ۱۹۳۰ تا ۱۹۵۰، قالبی نظری که هم از لحاظ مفاهیم، و هم از نظر فنون

[1] espaces de Hilbert

ریاضی مورد استفاده، بسیار پیچیده است، به کار گرفته شد که **نظریهٔ کوانتمی میدان‌ها** نامیده می‌شود. در این چارچوب و با یافتن ذرات بنیادی جدیدی که خود به لطف شتاب دهنده‌های ذرات پدیدار گشتند، فیزیکدانان کشف کردند که دنیای ذرات بنیادی از تقارنهایی برخوردار است. نظریهٔ گروه‌ها[1]، شاخهٔ مهمی از ریاضیات که در قرن ۱۹ تأسیس شد، در روشن شدن این تقارن‌ها (که غالباً تقارن‌های مجردی هستند) نقش اساسی ایفا کرده است و هنوز هم به نقش خود ادامه می‌دهد. بر اثر همین نظریهٔ گروه‌ها بود که در موارد عدیده‌ای فیزیکدانان نظری توانستند وجود برخی از ذرات بنیادی را سالها پیش از آن که در تجربه به‌دست آید پیش‌گویی کنند.



یک خم بسته به گونه‌ای ارتعاش می‌کند که برآمدگی‌هاو فرورفتگی‌هایی به تعداد صحیح متناهی داشته باشد. گویا ذرات زیراتمی متفاوت (الکترون‌ها، فوتون‌ها و غیره) متناظر با شیوه‌های متفاوت ارتعاش ریسمان‌های بنیادی بسیار ریز باشند.

در سال‌های ۱۹۷۰ تا ۱۹۸۰، نظریهٔ ذرات بنیادی به مقامی رسیده بود که می‌توانست به شیوه‌ای رضایت‌بخش و یکسان، همهٔ ذرات بنیادی شناخته شده و تقریباً همهٔ فعل و انفعالات بین آنها را توصیف کند. چرا «تقریباً»؟ چهار فعل و انفعال را می‌شناسیم: نیروی گرانش، نیروی الکترومغناطیس، دو نیرو هم که در مقیاس اتمی عمل می‌کنند، فعل و انفعال ضعیف و فعل و انفعال قوی. اما فیزیکدانان موفق نشده‌اند نیروی گرانش را در نظریهٔ خود که مدل استاندارد[2] نامیده می‌شود، دخالت دهند.

---

[1] théorie quantique des champs

[2] Modèle standard

آشتی دادن گرانش با فیزیک کوانتیک: دژ محکمی که شاید فتح آن از دست نظریهٔ ریسمان برآید.

این استثنا چه معنی دارد؟ به نظر می‌رسد که نسبیت عمومی آینشتاین، گرانش را به درستی توصیف می‌کند، اما نظریهٔ آینشتاین یک نظریهٔ کوانتیک نیست، یعنی از قواعد فیزیک کوانتیک تبعیت نمی‌کند (ضمناً هم ناگفته نماند که قواعد فیزیک کوانتیک عجیب و غریب‌اند). و اما واقعاً نمی‌فهمیم در حالی که همهٔ طبیعت از قوانین کوانتیک پیروی می‌کند، چرا باید گرانش از این تبعیت معاف شود؟ از همین جا، اصرار و ابرام فیزیکدانان نظری برای ورود گرانش به میهن کوانتیک درک می‌شود. علی‌رغم چند دهه تلاش، هنوز به این هدف نرسیده‌اند.

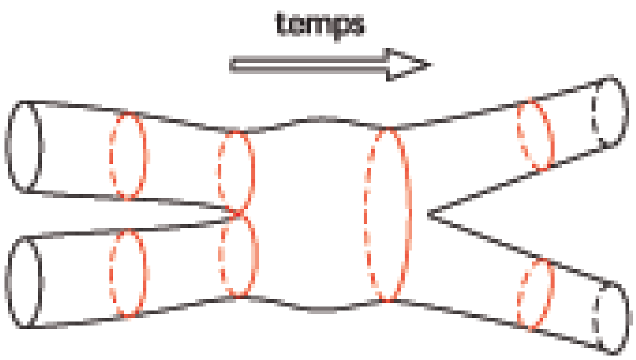
با وجود این، از اواسط دههٔ ۱۹۸۰، بسیاری از فیزیکدانان نظری گمان می‌کنند سر نخ خوبی یافته‌اند. در واقع این دوره‌ای است که نظریهٔ جدیدی به نام نظریهٔ ریسمان‌ها تأسیس شده است، که هرچند نظریه‌ای هنوز ناتمام است ولی نویدبخش است و از سازگازی‌های کافی برای آن‌که به طور جدی مورد توجه قرار گیرد، برخوردار است. زمینهٔ واقعی و دلایل دقیقی که فیزیکدانان را به سوی این نظریه سوق داد، فنی‌تر از آن است که بتوانیم اینجا شرح دهیم. هم‌چنین به شیوهٔ ساده‌ای نمی‌توان توضیح داد که نظریهٔ ریسمان چیست؟ فقط به شکل بسیار تقریبی بگوییم که در این نظریه فرض بر آن است که اشیاء بنیادی فیزیک ذراتی نیستند که بتوان آنها را به شکل نقطه تصور کرد («فلسفهٔ» نظریه‌های سنتیِ کوانتیکِ میدان‌ها بر این تصور بود) بلکه این اشیاء ریسمان‌هایی بدون ضخامت‌اندـیعنی نوعی پاره‌خط‌های ریز؛ هم‌چنین فرض بر این است که ذرات گوناگونی که در مقیاس ما مشاهده می‌شوند ناظر به ارتعاش‌های متفاوت این ریسمان‌ها هستند، تا اندازه‌ای مثل ارتعاش‌های گوناگون یک سیم ویولون که متناظر با نت‌های متفاوت موسیقی است.

برای آن که نظریه‌های ریسمان سازگار باشد، باید فضا ـ زمان ۱۱ بعد داشته باشد.

نظریه‌های ریسمان (نظریه‌ها به صورت جمع از آن رو است که به چندین شکل مطرح است) هنوز در مراحل مقدماتی هستند و پیچیدگی وحشتناکی دارند. تعدادی از جلوه‌های آن نیازمند کنکاش است. به علاوه در حال حاضر نمی‌توان نظریه‌ها را به محک آزمایش

سپرد، زیرا انرژی‌های مورد نیاز برای این کار کاملاً دور از دسترس هستند و حتی قوی‌ترین شتاب دهنده‌های موجود هم که در اختیار بشر است قادر به این کار نیستند. اما این نظریه‌ها اهل نظر را مجذوب خود ساخته‌اند، زیرا این نظریه‌ها (که نظریه‌های کوانتیک‌اند) توانسته‌اند گرانش را به گونه‌ای طبیعی در بر گیرند، و ظاهراً برخلاف نظریه‌های پیشین که با موانعی روبرو می‌شدند، در مورد نظریه‌های ریسمان هنوز به مانعی برخورد نکرده‌اند.

اگر فیزیکدانان موفق شوند یک نظریهٔ ریسمان کامل و سازگار بسازند، آنگاه قادر خواهند بود پدیده‌های گرانشی شدیدی (یعنی با انرژی بالایی) را که در کیهان اتفاق می‌افتد مانند فروریزی یک ستارهٔ بزرگ روی خود، یا فیزیک «سیاه چاله‌ها» و غیره را به دقت بررسی کنند. هم‌چنین رازهای مربوط به نخستین لحظات زایش جهان، نخستین لحظات مهبانگ معروف، آن پدیدهٔ به تمام معنی شدید را، می‌توان بهتر درک کرد. توصیفی کوانتیک از گرانش، یقیناً خواهد توانست جهشی در درک کیفی و کمی جهان، آغاز و منشأ و هم‌چنین تحول آن به وجود آورد.



نمایش اجمالی فعل و انفعال بین دو ریسمان. با گذشت زمان که در این شکل از چپ به راست نشان داده شده است، یک ریسمانِ بسته یک رویهٔ شبیه لوله را جارو می‌کند.

اما همان‌گونه که در سطرهای پیش گفتیم، نظریه‌های ریسمان بسیار پیچیده‌اند. این نظریه‌ها مستلزم فنون ریاضی پیشرفته‌ای هستند که غالباً از پژوهش‌های جدید نشأت می‌گیرند. به همین علت متخصصینی که این نظریه‌ها را بررسی می‌کنند، ریاضیدانان و فیزیکدانان را به یک اندازه دربر می‌گیرند (چندین برندهٔ جایزهٔ فیلدز، که بزرگترین پاداش در ریاضیات است، قسمت عمده از کار خود را به نظریهٔ ریسمان اختصاص داده‌اند؛

ادوارد ویتن، یکی از پدید آورندگان اصلی نظریهٔ ریسمان. معلوم نیست که آیا او را باید فیزیکدان نامید یا ریاضیدان... (کلیشه: DR).

از جمله ادوارد ویتن [۱] امریکایی و ماکسیم کونتسویچ [۲] روسی مقیم فرانسه). به ویژه ثابت شده است که برای سازگاری نظریه‌های ریسمان باید فضاـزمان به جای ۴ بعد (۳ بعد مربوط به فضا و یک بعد مربوط به زمان) دارای ابعاد بسیار زیادتری باشد: در آخرین خبر، صحبت از ۱۱ بعد است! هفت بعد باقیمانده در تجرید و پیچیدگی سهیم‌اند ولی از نظر حواس ما غیرقابل درک‌اند، زیرا به شکل کلاف‌هایی روی خود بسته می‌شوند. نیاز متخصصین اهل نظر به کارکردن با ریسمان‌ها و موضوع‌های دیگری که دارای ابعاد بزرگ هستند، موجب شده است که زمینهٔ همکاری فوق‌العاده جالبی بین فیزیکدانان و ریاضیدانان به وجود آید. پژوهش‌های این حوزه نه‌تنها برای نظریهٔ ریسمان بلکه برای رشته‌های مختلفی در ریاضیاتِ اساسی ثمربخش بوده است. این مثالی زیبا در تاریخ فیزیک و ریاضیات است که ارتباطی صمیمانه بین دو رشته را نشان می‌دهد، آنجا که نتایج به دست آمده در یکی از رشته‌ها، به تغذیهٔ پژوهش رشتهٔ مقابل می‌انجامد. این بازی به زحمت و هزینه‌اش می‌ارزد: درست است که نظریه‌های ریسمان هنوز در مراحل عالی تجرید است، اما این هم صحت دارد که شاید به گشودن معماهای مربوط به بینهایت

---

[۱] Edward Witten

[۲] Maxim Kontsevitch

کوچک‌ها و بینهایت بزرگ‌ها یعنی نهایتاً معماهای مربوط به سرآغازِ ما کمک کند.

موریس ماشال
روزنامه‌نگار علمی

چند مرجع

- B. Greene, *L'Univers élégant* (Robert Laffont, 2000).
- M. Duff, "Les nouvelles théories des cordes", *Pour la Science,* Avril 1998.
- N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, G. Dvali, "Les dimensions cachées de l'Univers", *Pour la Science*, octobre 2000.
- I. Antoniadis, E. Cremmer et K. S. Stelle, "Les supercordes", *Gazette des mathématiciens* n^o 87, pp. 17-39, et n^o 88, pp. 95-114 (janvier et avril 2001).
- P. Deligne et al. (eds.), *Quantum fields and strings: a course for mathématiciens* (American Mathematical Society/Institute for Advanced Study, 1999).

Maurice Mashaal
Journaliste scientifique

اینترنت: مدل‌بندی ترافیک برای بهتر اداره‌کردن آنها

نویسنده: فرانسوا باچِلّی [۱]

مترجم: فائزه توتونیان

ویراستاران: فرج‌اللّه محمودی، ارسلان شادمان

متخصصین شبکه‌های ارتباطی می‌کوشند تا خصوصیات آماری ترافیک داده‌هایی را که باید به مقصد برسانند، خوب بفهمند. ادارهٔ این شبکه‌ها و توسعهٔ آنها به این مطلب بستگی دارد.

شبکه‌های ارتباطی (تلفن، اینترنت، شبکه‌های محلی و غیره) در طی دهه‌های اخیر، توسعهٔ فوق‌العاده‌ای یافته‌اند. برای متصدیان آنها سؤال اصلی این است که بتوانند جریان اطلاعات را به طریق بهینه کنترل کنند، تا از هر گونه تنگنا جلوگیری به عمل آورند و سرویسی با کیفیت خوب، قابل اعتماد، و سریع به کاربران ارائه دهند. بنابراین برای درک شیوه‌های کارآمد در کنترل گردش اطلاعات، برای تعیین ابعاد صحیح نرم‌افزارها و تجهیزات مادی لازم، شناخت عمیقی از خواص ترافیک ارتباطها در چنین شبکه‌هایی لازم می‌باشد.

---

[۱] Baccelli, François, *Internet: modéliser le trafic pour mieux le gèrer,* in: L'explosion des mathématiques, SMF et SMAI, Paris, 2002, p. 75-79

شبکه اینترنت همانند آنچه شبکه‌های ارتباطی در گذشته بودند، متمرکز نیستند. همچو تغییرات ساختاری انعکاس‌های عمیقی بر خصوصیات ریاضیات ترافیک داده‌ها دارند. عکس از (Getty Images)

تحلیل ریاضی ترافیک در شبکه‌های ارتباطی یک نظام نسبتاً قدیمی است. این تحلیل به سال ۱۹۱۷ با کارهایی که توسط مهندس دانمارکی آگنر. ک. اِرلانگ[۱] انجام گرفت، برمی‌گردد. کار او که توسط محققهای بسیار دیگری دنبال شد، ابزار اصلی ریاضی جهت تعیین ابعاد توسط متصدیان و سازنده‌های شبکه‌ها را تا حدود سالهای ۱۹۹۰ فراهم ساخت.

تا سالهای ۱۹۹۰ مدل‌بندی ترافیک شبکه‌ها توسط قوانین آماری کلاسیک کفایت می‌نمود

در اصولِ مدل‌بندیِ ترافیک، روش ریاضی استفاده شده توسط ارلانگ و محققها و مهندسین دیگر بعد از او، روش مارکوفی است. این به آن معنی است که او ترافیک را با تکیه بر یک مدل ساده از فرایندهایِ تصادفی، یعنی زنجیرهای مارکوف بیان کرده است، که در این مورد نظریهٔ ریاضی کاملاً پیشرفته و توانا می‌باشد (آندره‌یی مارکوف[۲] (۱۹۲۲ ـ ۱۸۵۶) یک ریاضیدان روسی است که سهم بسزایی در نظریهٔ احتمال داشته است). به طور ساده یک زنجیر مارکوف دنباله‌ای از پیشامدهای تصادفی است، که در آن احتمال یک پیشامد داده شده، فقط به پیشامد بلافصل قبل بستگی دارد. در چارچوب شبکه‌های ارتباطی، در روش مارکوفیِ ارلانگ، فرض بر این است که قوانین آماریِ مشخص کنندهٔ ترافیک، قوانین پواسون هستند؛ قانون پواسون یکی از متداول‌ترین و ساده‌ترین قوانین

---

[۱] Agner K. Erlang

[۲] Andreï Markov

احتمال یا آمار است، نام این قانون از ریاضیدان فرانسوی دُنی پواسون[۱] (۱۸۶۰ ـ ۱۷۸۱) گرفته شده است. فرضیهٔ مبتنی بر قانون پواسون برای ترافیک تلفنی توجیه‌پذیر بود (در ترافیک تلفنی پیشامدهای تصادفی تلفن‌های مشترکین هستند که در لحظه‌های تصادفی رخ می‌دهند و مدت آنها نیز تصادفی است).

این نوع مدل‌بندیِ ترافیک اجازهٔ تدوین شیوه‌های متناسب کنترل را فراهم کرده است. تا تاریخی نسبتاً جدید، کنترل شبکه‌های ارتباطی یک کنترل پذیرشی بوده است، یعنی هنگامی که شبکه نمی‌تواند یک کیفیت خدماتی از پیش تعریف شده را تضمین کند متصدی به استفاده کننده، اجازهٔ ورود به شبکه را نمی‌دهد. این نوع کنترل مستلزم یک شناخت کاملاً دقیق از وضعیت کلی شبکه است، و در نتیجه جز برای شبکه‌هایی که به طریق مرکزی اداره می‌شوند، امکان‌پذیر نیست.

اما شبکه‌های ارتباطی امروزه دیگر شبکه‌های دیروزی نیستند. اینترنت پیشرفت شگفت‌انگیزی در پنج سال گذشته داشته است (تخمین زده‌اند که ترافیک ارتباطی صوتی ۹۰٪ ترافیک کلی در ۱۹۹۴، ۵۰٪ در ۲۰۰۰ است حال آن که فقط ۱۰٪ از آنرا در یکی دو سال آینده نشان خواهد داد). این پیشرفت اساساً وضعیتی را که بیش از نیم قرن پایدار بوده تغییر داده است. دلایل عمیق این پیشرفت سریع، در زمینهٔ پیشبرد اطلاعات و کنترل ترافیک، استفاده از قراردادهای جدید مسیریابی و کنترل غیر مرکزی است (مسیریابی IP برای قرارداد اینترنت[۲]) و (TCP، برای قرارداد کنترل انتقال[۳])، که شبکهٔ اینترنت را به طور نامحدودی قابل گسترش می‌سازد.

ویژگی‌های آماریِ ترافیک تغییر کرده‌اند. باید فهمید که چگونه و چرا؟

این تغییرات ساختاری، پیامدهایی بر ترافیک و خصوصیات آماری آن داشته است و می‌بایست که یک نظریهٔ ریاضی منطبق بر داده‌های جدید توسعه یابد. از این رو تحلیلهای آماری انجام شده در اواسط سال‌های ۱۹۹۰ توسط پژوهشگران بل‌کور[۴] در ایالات متحدهٔ آمریکا و پژوهشگران مؤسسهٔ INRIA (انستیتو ملی تحقیق در انفورماتیک و

[۱] Denis Poisson

[۲] Internet Protocol

[۳] Transmission Control Protocol

[۴] Bellcore

اتوماتیک[۱]) در فرانسه، ابتدا بر روی شبکه‌های محلی و سپس روی وب نشان داده‌اند که ترافیک دیگر نمی‌تواند به کمک قوانین احتمال پواسون بیان شوند. به ویژه فرایندهای تصادفی با حافظه‌های طولانی (که در آن احتمال یک پیشامد به پیشامدهایی که در گذشتهٔ نسبتاً دور رخ داده‌اند، بستگی دارد) را ملاحظه می‌کنیم که هر مدل‌بندی معمولی مبتنی بر فرایندهای مارکوفی کلاسیک را رد می‌کنند. اغلب این فرایندها خواص آماری دیگری هم دارند که به نام چند ـ فراکتالی نیز معروفند، و با این نام، بی‌نظمی فراوان آنها را بیان می‌کنند. بنابراین تمام این خواص آماری پیامدهای مهمی دارند، از جمله در مورد تعیین ابعاد حافظه‌های مسیریاب؛ درنظر نگرفتن آنها می‌تواند موجب بی‌توجهی به گم شدن بسته‌های اطلاعاتی توسط شبکه شود و اختلال‌هایی تا حدّ توقف در کار بوجود آورد.

کاربران شبکه‌های اینترنتی در یک کافی‌نت (سایبر کافی). به منظور تضمین عملکرد خوبی در شبکه، شناخت کامل خواص آماری جریان داده‌ها بر شبکه اینترنت، ضروری است.

به دنبال اولین مقالاتی که خواص آماری جدید ترافیک داده‌ها را روشن ساختند، کارهای بسیار زیادی به منظور توضیح آنها منتشر شده‌اند. امروز منشأ پدیدهٔ حافظهٔ طولانی را که در آمار ترافیک تحقق می‌یابد، به خوبی می‌فهمیم. ضمناً توانسته‌ایم ثابت کنیم که این مسائل مستقیماً از توزیع آماری اندازهٔ پوشه‌های موجود در کارگزارهای WEB و FTP (قرارداد انتقال فایل‌ها) و همچنین از اندازهٔ فایل‌های تقاضا شده توسط استفاده کننده‌ها به هنگام درخواست‌های HTTP (قراداد انتقال اَبَرمتنها، که به هنگام کار روی وب از آن استفاده می‌شود) و FTP، ناشی می‌گردند. منحنی‌های آماری آنها، یعنی

[۱] Institut national de recherche en informatique et en automatique

منحنی‌های نمایش دهندهٔ تعداد فایل‌های مورد مبادله یا مراجعه بر حسب اندازه، برای مقادیر بزرگ با سرعتی کمتر از یک منحنی نمایی، از دو طرف بیشینه‌هایشان کاهش می‌یابند: گفته می‌شود که قانون احتمال آنها زیر ـ نمایی [۱] است. آنچه که نشان داده شده است این است که انطباق و ادغام قوانینِ آماریِ زیر ـ نمایی که رفتار فردی کاربران شبکه‌های اینترنتی از آنها پیروی می‌کند، با توجه به تعداد فروان این کاربران، یک نتیجهٔ مستقیم دارد و آن هم حافظهٔ طولانی است ک ترافیک سراسری را مشخص می‌نماید.

تحلیل قرارداد TCP و اثرهای آن به منظور بهبود ادارهٔ شبکهٔ اینترنت

هنوز همهٔ مسائل روشن نشده‌اند. کارهای فعلی حول توصیف خواص آماری ترافیک شبکه در مقیاس‌های کوچک زمان متمرکزند، به ویژه خاصیت چند ـ فراکتالی در مرکز توجه است. شایع‌ترین فرضیه این است که این خاصیت از قراردهای کنترلی استفاده شده، و به ویژه از قرارداد TCP نتیجه می‌شود. اما قرارداد TCP که نزدیک به ٪۹۰ ترافیک روی اینترنت را کنترل می‌کند، از چه تشکیل می‌شود؟ این قرارداد مربوط به کنترل تطبیقی جریان ترافیک است که در آن میزان اطلاعات ارسالی از یک منبع توسط الگوریتمی فرماندهی می‌شود که آن را در طول زمانِ انتشار به طور خطی افزایش می‌دهد، مگر اینکه در عمل انسدادی رخ دهد؛ اما به محض این که گم شدن‌هایی مشاهده شود، الگوریتم جریانِ انتشار را تا نصف کاهش می‌دهد.

این کنترلِ تطبیقی است که هر پاسخی را در اثنای ترافیک زیاد شبکه تنظیم می‌کند. تحلیل ریاضی آن با دشواری‌های عدیده‌ای همراه است، به دلایل گوناگون از قبیل عدم تمرکز، تصادفی بودن (انسداد و گم شدن‌ها به صورت تصادفی رخ می‌دهند)، غیرخطی بودن (اثرها فقط متناسب با علت‌ها نیستند)، پیچیدگی (شبکه بسیار گسترده‌ای، که موجب برخوردهایی بین تعداد زیادی مسیریاب‌های میانی می‌شود). بنابراین، فراهم کردن مدل‌های در بر گیرندهٔ همهٔ این عناصر کاری بزرگ و شایان توجه است، به‌ویژه در هر یک از موارد زیر: تعریف قواعد تعیین ابعاد، بهینه سازی جریان‌ها یا پیش‌بینی و کنترل تغییرات تصادفی کیفیت سرویس ارائه شده توسط شبکه به مشتریان.

---

[۱] sous-exponentielle

مبارزجویی‌های علمی و سرمایه‌گذاری‌های اقتصادی، که دانشگاه‌ها و صنایع را به تحرک وامی‌دارند

چنین هدفی ایجاب می‌کند تلاش‌های تحقیقاتی در زمینه‌های مختلف (آمار، نظریهٔ احتمال وصَف‌های انتظار، کنترل تطبیقی دستگاه‌های غیرخطی، نظریهٔ شبکه‌های بزرگ تصادفی و دستگاه‌های پویا) انجام شوند، و ناچار از شیوه‌های سنتی فراتر روند. در این راستا در سال‌های اخیر تعداد زیادی مدل‌های بیش و کم ساده ارائه شده‌اند. برخی از این شیوه‌ها ویژگی چند ـ فراکتالی ترافیک سراسری (خاصیتی که در بالا ذکر شد) را در نظر می‌گیرند، برخی دیگر اجازه می‌دهند بررسی شود آیا تقسیم یک کانال ارتباطی بین چند جریان از داده‌های کنترل شده توسط TCP منصفانه است یا خیر و غیره.

پژوهش‌های کنونی بیشتر مربوط به تحلیل DiffServ می‌باشند، این روش مربوط به تفاوت گذاری بین سرویس‌های ارائه شده، و مبتنی بر ایجاد طبقه‌بندی‌های برتر برای مبادلهٔ داده‌ها است. به نظر می‌رسد که این روش تنها حرکت توسعه‌پذیر بوده و قادر به بهبود کیفیت سرویس در شبکهٔ اینترنت است. محور مهم دیگر مربوط به تطبیق UDP[1] می‌باشد که قراردادی برای استفاده از جریان داده‌های ویدئو (تصویری) و صوتی می‌باشد، یعنی جریان‌هایی که توسط TCP تنظیم نمی‌شوند، هدف این است که مدل‌های انتقالی برای این جریان‌ها طوری تعریف شوند که با TCP سازگار باشند.

در برابر این سؤال‌ها که مبارزه‌های علمی و سرمایه گذاری‌های اقتصادی بسیار مهمی را می‌طلبند، جهان دانشگاهی و جهان صنعتی چگونه خود را تجهیز می‌کنند؟ بیشتر گروه‌های بزرگ صنعتی و تکنولوژی اطلاعات و مسؤولین، گروه‌های تحقیقاتی بسیار توانایی تشکیل داده و بر روی مدل‌بندی ترافیک و کنترل در شبکه‌های داده‌ها و به ویژه شبکهٔ اینترنت متمرکز گشته‌اند. تلاش جهان دانشگاهی نیز در این زمینه، به ویژه در آمریکا، اروپا و در برخی کشورهای آسیایی قابل توجه است که این تلاش‌ها با همکاری بین ریاضیدان‌ها و محققهای انفورماتیک و یا مهندسین الکترونیک انجام می‌شود.

اسنادی که بیشترین اثر را در رشد و ارتقاء شبکهٔ اینترنت داشته‌اند بدون شک IETF[2] است که می‌توان با آدرس http://www.ietf.org با آن تماس برقرار کرد. این پایگاه برای همه، خواه طراح شبکه یا پژوهشگر یا اپراتور باز است. فعالیت‌ها به‌صورت گروه‌های کاری

---

[1] User Datagram Protocol

[2] Internet Engineering Task Force

با زمینه‌های مختلف نظیر مسیریابی، امنیت، ترابری، کنترل ازدحام، کاربردها و غیره انجام می‌شوند. این گروه‌های کاری مسؤول ارائهٔ توصیه‌ها و سفارش‌هایی هستند که برخی از آنها به صورت قانون (قاعده) در خواهند آمد. تعیین اعتبار این سفارش‌ها توسط مطالعات ریاضی، از نوع آنچه که در این مقاله ذکر شد، مؤلفه‌ای مهم و گاهی اوقات قاطع از سلسله کارهایی است که برای قانونی شدن توصیه‌ها به عمل می‌آید.

فرانسوا باچلی
اینریا (انستیتوی ملی تحقیق در انفورماتیک و اتوماتیک)
و دانشسرای عالی یا اکول نرمال سوپریور (گروه انفورماتیک) پاریس

چند مرجع

- K. Park et W. Willinger (eds.), *Self similar traffic analysis and performance evaluation* (Wiley, 2000).
- P. Abry, P. Flandrin, M.S. Taqqu et D. Veitch, “Wavelet for the analysis, estimation and synthesis on scaling data”, dans la référence ci-dessus.
- F. P. Kelly, A. K. Maulloo et D.K.H. Tan, “Rate control in communication networks: shadow prices, proportional fairness and stability”, *Journal of the Operational Research Society, 49*, pp.237-252 (1998).
- R.Riedi et J. Levy-Vehel, “Fractional brownian motion and data traffic modeling: the other end of the spectrum”, *Fractals in Engineering* (Springger-Verlag, 1997).
- M. Taqqu, W. Willinger et R. Sherman, “Proof of a Fundamental result in self similar traffic modeling”, *Computer Communication Review, 27*, pp. 5-23 (1997).

- F. Baccelli et D. Hong, *Interaction of TCP flows as billiards*, rapport INRIA, avril 2002.

François Baccelli
INRIA (Institut national de recherche en informatique et automatique) et
École Normale Supérieure
(Département d'informatique), Paris

ارزش اُپسیون‌های مالی

نویسنده: اِلْیِس ژوینی [۱]

مترجم: فائزه توتونیان

ویراستاران: فرج‌اللّه محمودی، ارسلان شادمان

دنیای مالی ارزشِ اپسیون[۲]ها را از طریق فرمول‌هایی مشخص می‌کند که ازتحقیقات نسبتاً جدید ریاضی به‌دست می آیند. تلاش برای دستیابی به بهترین فرمول‌ها ادامه دارد . . . و این امر منحصر به شرکت‌کنندگان در بورس نیست.

در مقدمهٔ چاپ چهارم کتاب مبانی اقتصاد سیاسی محض یا نظریهٔ ثروت اجتماعی، که سال ۱۹۰۰ در لوزان منتشر شد، لئون والراس[۳] نوشته است که « تمامی این نظریه یک نظریهٔ ریاضی است، به این معنی که هر چند ارائهٔ آن می‌تواند به زبان معمولی انجام شود، اثبات باید به‌طور ریاضی انجام پذیرد». اندکی بعد، او همچنین اضافه می‌کند که « در حال حاضر اقتصاد سیاسی همانند ستاره‌شناسی و مکانیک یک علم است که هم تجربی و هم استدلالی می‌باشد... قرن بیستم که زمان چندانی به فرارسیدنش نمانده است این نیاز را احساس خواهد کرد [...] که علوم اجتماعی را در دست مردانی قرار دهد که دارای

---

[۱] Jouini, Elyès: *Le prix des options financières*,
in: L'explosion des mathématiques, SMF et SMAI, Paris, 2002, p. 81-83

[۲] آپشن یا امتیاز خرید نیز گفته می‌شود. در این ترجمه از لفظ موقت اُپسیون استفاده کرده‌ایم (و.)

[۳] Léon Walras

بورس نیویورک، یک روز باشکوه، بیش از ۲۰ سال است که ریاضی در دنیای مالی وارد شده است، بالعکس دنیای مالی نیز مسائلی را فراهم کرده است که تحقیق در برخی دامنه‌های ریاضی را ایجاب می‌کنند. (کلیشه گاما لیزون ـ گی‌فورد Gamma Liaison/ Gifford)

فرهنگی جامع باشند و به طریقی هم با استدلال و هم به تشریح و تعقل و تجربه خو گرفته باشند. بنابراین اقتصاد ریاضی جایگاه خود را در کنار ستاره‌شناسی و مکانیک ریاضی به دست خواهد آورد.» می‌خواهم در خلال مثالی که متعاقباً ارائه می‌شود و از امور مالی برگرفته شده است، نشان دهم که چگونه ریاضیات و اقتصاد به حفظ روابط تنگاتنگ بینِ خود ادامه می‌دهند و در جالب‌ترین موضوع‌های کنونیِ هر دو رشته بهره‌وری متقابل واقعی وجود دارد.

مسأله‌ای که در این‌جا مورد توجّه است، ارزیابی اپسیون‌ها در امور مالی است. این موضوع به قدمت خودِ اپسیون است، که آثاری از آن را در عهد قدیم و قرن هفدهم روی بازار پیاز گل لاله در هلند باز می‌یابیم. با وجود این، همان‌طور که کمی بعد ملاحظه خواهیم کرد، این سؤال اولین پاسخ قانع‌کنندهٔ ریاضی خود را در سال ۱۹۷۳ یافته است. البته تصادفی نیست که در همان سال اولین بازار سازمان یافتهٔ اُپسیون‌ها، یعنی بازار شیکاگو، از رونق قابل توجهی برخوردار شد و در سال‌های بعد هم هیچ‌گاه بی رونق نشده است.

یک اُپسیون مالی چیست؟ سهام مشخصی را در بازارهای مالی در نظر می‌گیریم که قیمت آن امروز برابر S باشد. بازارهای مالی به خریدارهای بالقوهٔ موجود، امکان خرید این سهام را در یک موعد دیرتر، مثلاً بعد از سه ماه با قیمت K در قالب یک اُپسیون فراهم می‌سازند. شاید این امر برای خریداری که مثلاً هنوز پول لازم را در اختیار ندارد و

می‌خواهد در برابر یک افزایش قیمت مصون بماند، جالب باشد. چنین اُپسیونی، نوعی قرارداد اطمینان‌بخش است که حق خرید سهام را در یک موعد دیرتر و با یک قیمت تضمینی K فراهم می‌کند. واضح است که خودِ این حق باید به قیمتِ مشخصی فروخته شود، اما چه قیمتی؟ مسألهٔ ارزیابی قیمت اُپسیون همین است. به زبان مالی: قیمت اُپسیون روی یک سهم با قیمت زمان «صدور» S با قیمت اجرای K و سررسید سه‌ماهه چقدر باید باشد؟

واضح است که خریدار چنین حقی، فقط زمانی به اجرای آن مبادرت می‌ورزد که در طی سه ماه، قیمت سهام در بازار بیشتر از K باشد. بنابراین سهام را به قیمت K خریداری خواهد کرد و به قیمت جاری آن زمان خواهد فروخت و سودی مساوی تفاوت آن‌ها به‌دست خواهد آورد. بنابراین این معامله برای خریدار در صورتی که تفاوت مثبت باشد در عرض سه ماه سودی مساوی با تفاوت بین قیمت فعلی سهام و K فراهم می‌سازد و در غیر این صورت سودِ حاصل صفر خواهد بود.

اصل ناسوداگری مبنای تعیین قیمت دارایی‌هایِ امور مالی است.

برای تعیین قیمت چنین اپسیونی، نظریهٔ سوداگری بر اصل بسیار ساده‌ای استوار است که دال بر نبودِ فرصت‌طلبی‌های سوداگرانه است. به بیان دیگر این اصل گویای آن است که امکان ندارد، با سرمایه‌گذاری به ارزش صفر در حال حاضر، برای هر چه که در آینده پیش می‌آید پرداخت مثبتی در یک موعد دیرتر تضمین شود (هیچ در برابر هیچ). اصل نبود فرصت‌طلبی‌های سوداگرانه به این معنی نیست که بردهای معجزه‌آسا غیرممکن باشند. زیرا من می‌توانم قیمت یک بلیط بخت‌آزمایی را به خوبی قرض بگیریم و یک چنین بلیطی را خریداری نمایم. بنابراین سهم شخصی من صفر است. سپس اگر یک میلیون یورو برنده شوم، قرضم را پس می‌دهم و سود زیادی به دست می‌آورم. این اصل فقط بیان می‌کند که یک چنین سودی پیشاپیش تضمین شده نیست. در نتیجه، در معاملهٔ قبلی همچنین می‌توانم هیچ سودی به دست نیاورم و مجبور به پرداخت قرضم باشم، بنابراین امکان خطر زیان را خواهم داشت.

به این ترتیب اصل ناسوداگری به‌طور ساده به این معنی است که هر درآمد بیشتر از بازده یک دارایی پایهٔ بدون ریسک (نرخ بهره، اوراق قرضه، اسناد خزانه و غیره) لزوماً به یک ریسک وابسته است. مثلاً SICAVها دارای بهرهٔ متوسطی بیش از بهرهٔ بازار پول هستند؛ با این وجود، این بهره تضمین نمی‌شود و ممکن است مانند آنچه که در طول سال

۲۰۰۱ ملاحظه کردیم، از بهرهٔ بازار پول نیز کمتر شود.

اکنون برای ساده شدن مسأله فرض می‌کنیم که بازار فقط در دو تاریخ عمل کند، یکی امروز و دیگری در سه ماه بعد، و قیمت سهام S در سه ماه بعد فقط دو مقدار، مثلاً ۱۰۰ یا ۱۵۰ یورو باشد. به‌علاوه فرض کنیم که K قیمت توافقی خرید در انقضای موعد اپسیون، بین بالاترین مقدار $S_h = ۱۵۰$ و کمترین مقدار $S_b = ۱۰۰$، مثلاً $K = ۱۴۰$ یورو باشد. اگر قیمت سهام در سه ماه بعد در حد بالاترین مقدار یعنی ۱۵۰ یورو باشد، معامله‌کننده از حق خود استفاده می‌کند و به قیمت توافق شدهٔ قبلی $K = ۱۴۰$ یورو خریداری می‌کند، بنابراین سود وابسته به معامله در این حالت برابر $S_h - K = ۱۵۰ - ۱۴۰ = ۱۰$ یورو خواهد بود. اما اگر قیمت سهام پس از سه ماه در حد کمترین مقدار یعنی ۱۰۰ یورو باشد، معامله‌کننده از حق خرید خود با قیمت K که بالاتر است، صرف‌نظر خواهد کرد، سود وابسته به معامله در این حالت صفر خواهد بود.

می‌توان نشان داد که چنین سودی را همچنین می‌توان با تشکیل پروندهٔ تجاری مشتمل بر اوراق بهادار منحصر به سهام و سرمایه‌گذاری (یا وام‌ها) بر اساس نرخ بهره بازار که در این‌جا به r نمایش می‌دهیم، به‌دست آورد. ارزش معاملهٔ چنین اوراق بهاداری را C می‌نامیم. دو دارایی با بازدهِ یکسان باید دارای قیمت یکسان باشند (زیرا در غیر این صورت، ثابت می‌شود که اصل ناسوداگری نقض شده است). بنابراین از آن نتیجه می‌گیریم که قیمت اپسیون باید برابر C باشد.

ارزش C برای فعالیت‌های اوراق بهادار که مساوی با قیمت اپسیون است، می‌تواند به صورتی دقیق تعیین شود. نشان می‌دهیم که C میانگین وزن‌دار پرداخت‌های اپسیون بر اساس ارزش حال، یعنی میانگین وزن‌دار مبالغ $(S_h - K)/(۱ + r)$ و $۰ = (۱ + r)/۰$ می‌باشد، به‌علاوه ثابت می‌کنیم که وزن‌های دخیل در این میانگین به گونه‌ای هستند که قیمت S در سهام امروز، خود یک میانگین وزن‌دار از پرداخت‌های سهام $S_h/(۱ + r)$ و $S_b/(۱ + r)$ با وزن‌های یکسان بر اساس ارزش وقت آن است. به‌طور دقیق‌تر می‌توان ثابت کرد که یک قانون احتمال وجود دارد که بر اساس آن قیمت هر دارایی، برابر امید پرداخت‌های آتی آن است که بر اساس همین قانون محاسبه می‌شود. این نتیجهٔ آخر به کمک جبرخطی مقدماتی به‌دست می‌آید، و مربوط به مدل سادهٔ ارائه شدهٔ فوق است. اما به کمک روش‌های آنالیز محدب که حاصل تلاش‌های اواسط قرن بیستم است، این مدل به حالتی تعمیم می‌یابد که در آن سهام می‌تواند مقادیر متفاوتی (به تعداد متناهی) اختیار کند.

حساب تصادفی: هنگامی که امور مالی و ریاضیات نظری همدیگر را تقویت می‌کنند؟

با وجود این، اگر بخواهیم به حقیقت بیشتری دست یابیم و مدلی درنظر بگیریم که در آن هم زمان پیوسته باشد و هم قیمت‌های ممکن در یک پیوستار مقدار بگیرند، ناچاریم برای تفسیر همان اصل سادهٔ سوداگری، به مطالب پیشرفته‌تر نظریهٔ احتمالات که در نیمهٔ دوم قرن بیستم پدیدار گشت، متوسل شویم. این موضوع به‌طور دقیق‌تر به نظریهٔ فرآیندهای تصادفی (فرآیندهایی که در آن مقادیر به‌طور تصادفی در طی زمان تغییر می‌کنند) و نظریهٔ معادلات دیفراسیل تصادفی (معادلات دیفرانسیلی که در آن مقادیر تصادفی وارد می‌شوند) مربوط می‌گردد. در این زمینه‌ها جدیدترین توسعه‌ها به گونه‌ای تنگاتنگ به مسائل مطرح در امور مالی وابسته می‌باشند.

در این مدل‌ها، فرض بر این است که ارزش سهام با یک نرخ بهرهٔ قطعی (غیرتصادفی)، به اضافهٔ یک جملهٔ تصادفی با میانگین صفر و دامنه‌ای متناسب با دارایی موردنظر، تغییر می‌کنند. این تغییرات تصادفی فرّار[۱] نامیده می‌شوند و می‌توانند به زمان و وقایع بی‌شمار دیگر درونی و بیرونی وابسته باشند. بر اساس این فرض‌ها، درمی‌یابیم که قیمت اپسیون از یک معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات جزئی (معادلهٔ دیفرانسیلی که در آن تابع مجهول بستگی به چندین متغیر دارد) پیروی می‌کند. در ساده‌ترین حالت، که مطالعات به طور مستقل از سویی توسط فیشر بلاک[۲] و مایرن شولز[۳] آمریکایی و از طرف دیگر توسط روبرت مرتون[۴] در سال ۱۹۷۳ انجام شده است، دیده می‌شود که این معادله در واقع همان معادلهٔ انتشار گرما است که فیزیکدان‌ها با آن به خوبی آشنا هستند. بنابراین ممکن است آن را به‌طور روشنی حل کرد و قیمت اپسیون را به صورت تابعی از ویژگی‌های مربوطه (انقضای موعد، قیمت اجرا)، همچنین نرخ سهام و فراریت آن تعیین کرد. این همان فرمول بلاک ـ شولز و مرتون است که برای شولز و مرتون جایزهٔ نوبل اقتصاد را در سال ۱۹۹۷ به ارمغان آورد (بلاک در ۱۹۹۵ درگذشت).

این فرمول و اشکال مختلفی از آن در تمام مراکز مالی جهان استفاده می‌شوند. این‌ها که بر روی همهٔ کامپیوترهای سالن‌های بازار برنامه‌ریزی شده‌اند، و روزانه در اختیار تعداد

---

[۱] Volatilité

[۲] Fisher Black

[۳] Myron Scholes

[۴] Robert Merton

بی‌شماری از مراجعین قرار می‌گیرند، خود مثالی از وابستگی بین ریاضیات نظری و کاربردهای ملموس هستند. با این حال فرمول بلاک ـ شولز و مرتون فقط مربوط به حالت بسیار ساده‌ای محدود است که در آن نرخ بهره، میانگین عایدات، سطح ریسک و غیره در طی زمان ثابت باقی می‌مانند. به محض این که این فرض‌ها را تغییر دهیم، معادلات به دست آمده دیگر با معادلهٔ انتشار گرما معادل نیستند. معادلات دقیق دیگری که متأثر از تغییرات هستند ظاهر می‌شوند و اغلب به روش‌های حل خاص خود نیازمندند، اعم از حلِ ضمنی، صریح یا عددی. کار بر روی برخی از این معادلات بود که سبب شد در سال ۱۹۹۰ پژوهشگران فرانسوی داهر[۱] و رومانو[۲] که در آن زمان در دانشگاه پاریس ـ دوفین و صندوق مستقل تجدید منافع مالی[۳] کار می‌کردند، به دریافت جایزهٔ[۴] IMB محاسبات عددی قوی نایل شوند.

بالاخره اگر سعی کنیم که بیشتر واقع‌گرا باشیم و هزینه‌های معامله‌ها، قیدهای گوناگون تحمیل شده از سوی بازار یا همچنین تأثیر تعداد معامله‌ها روی قیمت را درنظر بگیریم، روش‌های محاسبات تصادفی کلاسیک کافی نخواهند بود. باید، همانند آنچه که در سال‌های اخیر انجام شده است، ابزارهای مخصوصی نظیر معادلات دیفرانسیل تصادفی تنزلی یا روش‌های دقیق دوگانی در کنترل بهینهٔ تصادفی توسعه یابند. درک این مسأله ممکن است تعجب‌آور باشد، که ایده‌های جدید ریاضی، که به منظور حل مسائل اقتصادی و مالی تحقق یافته‌اند، وابستگی به مسائل موجود در هندسه و فیزیک ـ از قبیل تغییر شکل سطح یا ذوب قطعه‌های یخ ـ را اثبات می‌کنند و برای هندسه و فیزیک جلوهٔ روشن جدیدی فراهم می‌کنند.

الیس ژوینی
استاد دانشگاه، مرکز پژوهشی ریاضیاتِ تصمیم‌گیری (CEREMADE)
دانشگاه پاریس ـ دوفین (پاریس ۹)

چند مرجع

• N. Bouleau, *Martingales et marchés financiers* (Odile Jacob, 1998).

---

[۱] C. Daher

[۲] M. Romano

[۳] Caisse autonome de refinancement

- F. Black et M. Scholes, "The pricing of options and corporate liabilities", *Journal of Political Economy, 81*, pp. 637-654 (1973).
- C. Huang et R. Litzenberger, Foundations for financial economics (North-Holland, 1988).
- L. Walras, *Éléments d'économie politique pure ou théorie de la richesse sociale* (Corbaz, Lausanne, 1874, édition définitive revue et augmentée par l'auteur, LGDJ, Paris, 1952).

Elyès Jouini

Professeur des Universités,

CEREMADE (Center de mathématiques de la décision)

Université Paris-Dauphine (Paris 9)

ارتباط بدون خطا: کدهای تصحیح کننده

نویسنده: ژیل لاشو [۱]

مترجم: فائزه توتونیان

ویراستاران: فرج‌الله محمودی، ارسلان شادمان

برای کشف و تصحیح خطاهای غیرقابل اجتناب در مبادلهٔ اطلاعاتی که به صورت عددی درآمده‌اند، متخصص‌های کدگذاری متوسل به روش‌های مجردی می‌شوند که از جبر و هندسه سرچشمه می‌گیرند.

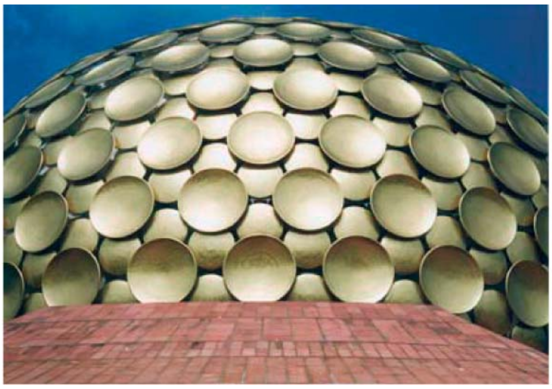
ما کاملاً در عصر عددی هستیم. این جمله گویای چیست؟ به‌طور خیلی ساده یعنی قسمت وسیعی از اطلاعات که بر روی سیارهٔ زمین مبادله می‌شوند، در قالب اعداد نشان داده شده‌اند. پیام‌های الکترونیکی، تلفن موبایل، معامله‌های بانکی، هدایت از راه دوره ماهواره‌ها، انتقال تصاویر از راه دور، دیسک‌های CD یا DVD و غیره: در تمام این مثال‌ها، اطلاعات به‌صورت دنباله‌ای از اعداد، که به‌طور فیزیکی متناظر با علائم الکتریکی یا علائم دیگرند، ترجمه می‌شوند ـ و یا گفته می‌شود کدگذاری شده‌اند (با رمزگذاری اشتباه نشود). به‌صورت دقیق‌تر، اطلاعات در مجموع به شکل دنباله‌ای از ارقام دودویی یعنی اعداد ۰ یا ۱، که بیت‌ها نیز نامیده می‌شوند، کدگذاری شده‌اند. مثلاً در کد ASCII (کد استاندارد آمریکایی برای مبادلهٔ اطلاعات) [۲] که توسط ریزکامپیوترها استفاده می‌شود،

---

[۱] Lachaud, Gilles: *Communiquer sans erreurs: les codes correcteurs*, in: L'explosion des mathématiques, SMF et SMAI, Paris, 2002, p. 84-87

[۲] American Standard Code for Information Interchange

حرف بزرگ A توسط هشتایی (دنباله‌ای از هشت بیت) ۰۱۰۰۰۰۰۱ و حرف بزرگ B توسط ۰۱۰۰۰۰۱۰، و غیره کدگذاری می‌شوند.



ماتریماندر در اوروویل (تامیل نادو، هندوستان)[۱]، ژئودِ کروی که توسط روژه آنژه[۲] معمار فرانسوی ساخته شده است. در مفهوم کدهای مؤثرِ تصحیح کننده با مسائلی برخورد می‌کنیم که به سؤال‌های مشکل هندسهٔ محض مربوط می‌شوند، نظیر دوباره پوشانیدن یک کره توسط بیشترین تعداد ممکن قرص‌های یک اندازه بدون این که آنها روی یکدیگر سوار شوند.

یک مسألهٔ بزرگ در مخابرهٔ اطلاعات، خطاها می‌باشند. کافی است که خراش کوچکی روی یک دیسک، یک اختلال در دستگاه، یا هر نوع پدیدهٔ پارازیتی، پیام مخابره شده را با خطا همراه سازد، یعنی «۰»ها به‌طور نابهنگام به «۱» یا بالعکس تغییر کنند. بنابراین یکی از راه‌های بیشمار رهایی از این‌گونه اشکال، امکانِ کشف و حتی تصحیح چنین خطاهایی است.

طولانی کردن کلماتِ پیام به طریقی که بعد از کوتاه کردن در طرف مقابل بتوان آنها را باز شناخت

نقش نخستین کدهای تصحیح کنندهٔ خطاها در همان دوران اول کامپیوترها مطرح شدند که از آن زمان بیش از پنجاه سال می‌گذرد. این کدها چگونه عمل می‌کنند؟ مبنا و اساس آنها به‌صورت زیر است: «کلمات» عددی رسانندهٔ پیام را طولانی می‌کنیم، به طریقی که قسمتی از بیت‌ها به‌عنوان بیت‌های کنترل به‌کار می‌روند. برای مثال در کد ASCII که قبلاً به آن اشاره شد، یکی از هشت بیت یک بیت کنترل است: برای بیت

[۱] Le Matrimandir à Auroville (Tamil Nadu, Inde)

[۲] Roger Anger

کنترل مقدار ۰ در نظر گرفته می شود اگر تعداد «۱»ها در هفت بیت دیگر زوج باشد، و گر نه ۱ را اختیار خواهد کرد. اگر در مقدار یکی از هفت بیت دیگر یک تغییر ناگهانی ایجاد شود، دیگر ارزش بیت کنترل با آن متناظر نخواهد بود و در نتیجه یک خطا کشف می‌شود. همین ایده را در قلمرو اعدادی که در زندگی روزانه با آنها برخورد داریم، مشاهده می‌کنیم. مثلاً در صورت حساب‌های بانکی، یک حرف کلیدی به یک شماره حساب اضافه می‌شود، تا بتوان خطای یک انتقال را کشف کرد. همچنین برای جلوگیری از تقلب، شمارهٔ اسکناس‌های بانکی بر حسب یورو کدگذاری می‌شوند. به بیان دیگر فلسفهٔ کدهای تصحیح کننده ایجاد پیام‌های اضافی است: هر کلمه از پیام به طریقی طولانی می‌شود که حاوی اطلاعاتی در مورد خود پیام باشد.

یک مثال ساده و روشنگر ولی نه چندان واقعیت‌گرا، از کدهای تصحیح کنندهٔ خطا، کد تکرار سه تایی است: هر بیت پیام سه بار کدگذاری می‌شود، یعنی ۰ به‌صورت ۰۰۰و۱ به‌صورت ۱۱۱ در می‌آیند. این کد اجازه می‌دهد که یک خطای احتمالی روی یک سه تایی را کشف و تصحیح کرد. در واقع اگر دنبالهٔ ۱۰۱ را بر فرض دریافت کنیم، بلافاصله از آن نتیجه می‌گیریم که دنبالهٔ صحیح ۱۱۱ بوده است (با فرض آن که فقط یک بیت از سه تایی دریافتی اشتباهی باشد)، پس در اطلاعات اولیه، بیت مورد نظر ۱ بوده است. کد تکراری سه تایی واقعیت‌گرا نیست، زیرا هزینه‌بردار است برای هر بیت اطلاعات باید سه عدد فرستاده شود، گفته می‌شود که نرخ بازدهی $\frac{1}{3}$ است. این نرخ تأثیرات مستقیمی بر روی زمان لازم جهت انتقال پیام‌ها و روی هزینهٔ ارتباط‌ها دارد.

یک کد تصحیح کنندهٔ خوب، باید دارای کیفیت‌های دیگر به‌ویژه یک نرخ بازدهی بالا باشد. بعلاوه باید قابلیت خوبی در کشف و تصحیح خطاها داشته باشد و رویّهٔ کدگشایی باید به اندازهٔ کافی ساده و سریع باشد. همهٔ مسألهٔ نظریهٔ کدهای تصحیح کنندهٔ خطاها این است که: با طولانی کردن ممکن پیام‌ها کدهایی بسازیم که تا حد ممکن خطاها را کشف و تصحیح کنند، و کدگشایی آن‌ها آسان باشد.

جبر میدان‌های متناهی به‌طور طبیعی در کدها کاربرد دارد، زیرا کدها از الفبای متناهی استفاده می‌کنند.

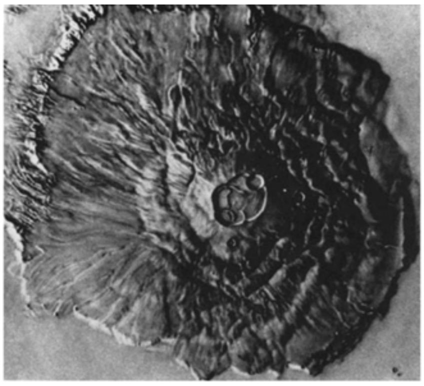
مدت‌های مدیدی است که ریاضیدان‌ها در این زمینه دخالت دارند. در ۱۹۴۸ ریاضیدان آمریکایی کلود شانن [۱]، یکی از پدران نظریهٔ اطلاعات به نتایج نظری کلی

---

[۱] Claude Shannon

دست یافت که مؤید وجود کد بهینه به یک معنی فنیِ دقیق بود. هر چند نظریهٔ شانن وجود کدهای تصحیح کنندهٔ بسیار خوبی را اثبات کرد، اما روشی عملی برای ساختن آنها ارائه ننمود. از طرف دیگر کدهای تصحیح کننده‌ای، نظیر کدهای همینگ [1] با قابلیت متوسط در اختیار بود، که به نام مخترعشان ریاضیدان آمریکایی ریچارد همینگ (۱۹۹۸ ـ ۱۹۱۵) نام‌گذاری شده‌اند و در سال‌های ۱۹۵۰ اختراع گردیده‌اند. (در این کدها، که بسیار هم مورد استفاده هستند بیت‌های کنترل توسط معادلات خطی ساده از روی بیت‌های اطلاعاتی تعیین می‌شوند).

بنابراین متخصصین به طریقی اصولی دست به کار شدند تا کدهای تصحیح کننده و ویژگی‌های آنها را مورد مطالعه قرار دهند، با این هدف که به‌طور واقعی کدهایی با همان قابلیت یا تقریبی از آنچه که نتایج نظری شانن پیش‌بینی کرده است، به‌دست آورند. برای انجام این کار آنان عمیقاً از جبر استفاده کرده‌اند. اگر کدگذاری اطلاعات به‌طور مستقیم با «الفبای» دوتایی ۰ و ۱ انجام می‌شود، جبر مورد استفادهٔ آن جبر زوج و فرد است که قبلاً افلاطون هم می‌شناخته است (زوج = زوج + زوج، فرد = فرد + زوج، زوج = زوج × زوج، فرد = فرد × فرد، و غیره).



کوه اولمپوس بر سطح سیارهٔ مریخ بزرگترین آتش‌فشان سیستم خورشیدی (منظومهٔ شمسی) است: قطر آن تقریباً ۶۰۰ و ارتفاع آن حدود ۲۷ کیلومتر است! این تصویر در سال‌های ۷۲ ـ ۱۹۷۱ به‌وسیلهٔ سفینهٔ فضایی مارینر ۹ گرفته شده است. اطلاعات آن وسیلهٔ کد تصحیح کننده‌ای با قابلیت تصحیح ۷ بیت اشتباه روی ۳۲ بیت به زمین ارسال شده است. در هر گروه از ۳۲ بیت، ۲۶ بیت آن مربوط به کنترل و ۶ بیت دیگر اطلاعات دقیق را تشکیل می‌داده‌اند. در حال حاضر کدهای تصحیح کنندهٔ کارآمدتری نیز مورد استفاده قرار می‌گیرند. (کلیشه ناسا/ جی ـ پی ـ ال)

[1] Hamming

از این رو جالبتر است که آن دسته از کدگذاری‌هایی را در نظر بگیریم که الفبایشان بیش از دو رقم داشته باشد و فقط در پایان فرایند به دنباله‌های دوتایی ۰ و ۱ توجه شود. چون الفبا شامل تعداد محدودی نشانه است و انتظار این است که محاسبات روی این نشانه‌ها انجام گیرد، جبر مورد استفاده، موضوع نظریهٔ میدان‌های متناهی می‌باشد که توسط ریاضیدان جوان فرانسوی اواریست گالوا[۱] در ابتدای قرن ۱۹، به هنگام مطالعهٔ حل‌پذیری معادلات جبری، اختراع شد (یک میدان متناهی مجموعهٔ عناصری با تعداد متناهی است که می‌توانند به طریقی مشابه با اعداد معمولی، جمع، ضرب و تقسیم شوند، و نتیجهٔ اعمال در داخل این مجموعه باقی می‌ماند. مجموعهٔ ساخته شده توسط ۰ و ۱، با قواعد حسابی زوج و فرد، یک میدان متناهی با دو عنصر است، که ساده‌ترین میدان متناهی است.)

به این ترتیب به کمک جبر مجرد و توسعه یافته، در ارتباط با نظریهٔ میدان‌های متناهی، کدهای تصحیح کنندهٔ خطا به گونه‌ای خیلی مؤثر ساخته شدند که با هر نوع انتقال اطلاعات تطبیق می‌یابند. از بین مثال‌های متعدد به دو مورد اشاره می‌کنیم: کد مورد استفاده برای ذخیره کردن اطلاعات دیسک‌های صوتی ــ عددی (این کد امکان تصحیح ۴۰۰۰ بیت متوالی، اشتباه ناشی از خراش بیش از ۲ میلیمتر بر سطح یک دیسک را فراهم می‌آورد)، و کدی که کاوشگر فضایی مارینر[۲] برای ارسال تصاویری از سیارهٔ مریخ از آن استفاده کرده است.

هرچند این تمبر فرانسوی چاپ شده در سال ۱۹۸۴ اواریست گالوا را هندسه‌دان نامیده ولی او یک جبردان بوده است. او در نظریهٔ گروه‌ها، و همچنین نظریهٔ میدان‌های متناهی که به‌ویژه توسط متخصص‌های کدهای تصحیح کنندهٔ خطاها استفاده می‌شوند، پیشگام بوده است. گالوا به دوئل دعوت شد، و در سنی که به سختی به ۲۱ سال می‌رسید، درگذشت.

---

[۱] Evariste Galois

[۲] Mariner

خانوادهٔ جدیدی از کدها که از هندسهٔ جبری منحنی‌ها استفاده می‌کنند

جبر مجرد تنها وسیله‌ای نیست که در اختیار متخصصین کدهای تصحیح کننده است. بلکه هندسه و به‌ویژه هندسهٔ جبری نیز ابزاری در دست آنهاست. هندسهٔ جبری که بخش وسیعی از ریاضیات کنونی است، نخست به بررسی اشیائی هندسی می‌پردازد از قبیل خم‌ها، رویه‌ها و غیره که توسط معادلات جبری تعریف می‌شوند. هر دانش‌آموز دبیرستانی می‌داند که مثلاً سهمی را می‌توان توسط یک معادلهٔ جبری از نوع $y = ax^۲ + bx + c$ نمایش داد که در آن x و y مختصات نقاط سهمی هستند. به‌همین ترتیب می‌توان منحنی‌های تعریف شده روی میدانهای متناهی را مطالعه کرد، بدین معنی که در معادلات جبری نمایشگر آنها کمیتهایی نظیر x و y دیگر اعداد دلخواه نیستند بلکه منحصر به عناصر یک میدان متناهی خاص هستند. حدود ۲۰ سال است که با استفاده از چنین منحنی‌ها و جبر وابسته به مختصات نقاط آنها (که از نظر تعداد متناهی هستند)، خانوادهٔ جدیدی از کدهای تصحیح کننده و کدهای هندسی، ساخته شده است. اخیراً این کدها اجازه داده‌اند که نتایج جدیدی مربوط به کدهای دوتایی به‌دست آید و کدهایی با قابلیتی حتی بیش از کدهایی که توسط کارهای شانن پیش‌بینی شده بود ساخته شوند. در مقابل، تحلیل کدهای هندسی، ریاضیدان‌ها را به بررسی دقیق‌تر در مورد تعداد نقاط یک منحنی جبری که بر روی یک میدان تعریف می‌شوند، هدایت کرده است. در اینجا مثال زیبایی از تأثیر متقابل مثبتی در اختیار داریم که یک قلمرو کاربردی می‌تواند بر اصول نظری که از آنها استفاده می‌کند داشته باشد.

ژیل لاشو
انستیتوی ریاضیات لومینه
مرکز ملی تحقیقات علمی CNRS
مارسی

چند مرجع

- P. Arnoux, "Codage et mathématiques", *La science au présent* (édition Encyclopædia Universalis, 1992).
- P. Arnoux, "Minitel, codage et corps finis", *Pour la Science* (mars 1988).

- G. Lachaud et S. Vladut, "Les codes correcteurs d'erreurs", *La Recherche* (juillet-août 1995).
- O. Papini, Disque compact: "la théorie, c'est pratique!" dans "Secrets de nombres", Hors-série n^o 6 de la revue *Tangente* (1998).
- O. Papini et J. Wolfmann, *Algèbre discrète et codes correcteurs* (Springer-Verlag, 1995).
- J. Vélu, *Méthodes mathématiques pour l'informatique* (Dunod, 1995).
- M. Demazure, *Cours d'algèbre - primalité, divisibilité, codes* (Cassini, 1997).

Gilles Lachaud
Institut de mathématiques de Luminy,
CNRS, Marseille

بازسازی رویه‌ها برای نگارگری

نویسنده: ژان ـ دانیل بواسونا [۱]

مترجم: ارسلان شادمان

ویراستاران: فرج‌الله محمودی، شهناز عباسپور

موضوع مورد بحث بازسازیِ رویه‌ای است که فقط تعدادی از نقاط آنرا می‌شناسیم: مسأله‌ای که غالباً با آن برخورد می‌کنیم، اعم از اکتشافات زمین‌شناسی، بایگانی بقایای اسناد باستان‌شناختی و تصویرسازی پزشکی یا صنعتی

هنگامی که به کاوش زیر پوستهٔ خاکی زمین در برخی از اماکن می‌پردازیم تا شکل‌گیری لایه‌های زمین‌شناسی را بشناسیم، یا هنگامی که بخواهیم به نقشه‌برداری اعماق دریا دست بزنیم، تعداد نقاط اندازه‌گیری ناچار متناهی است. حال آن که لازم است، بر مبنای این داه‌ها که تعداد محدودی هستند، به بازسازی رویه‌های متناظر بپردازیم. در همهٔ دستگاه‌های تصویرگری کامپیوتری (از قبیل اسکنرها، تله‌مترها، تصویرگرهای سه بُعدی و غیره) که در پزشکی، یا در صنعت، یا باستانشناسی و جز آن به کار می‌روند، وضع به همین منوال است. به عنوان نقطهٔ آغاز، یک شیئ واقعی وجود دارد، که ممکن است بخشی از بدن انسان، یک قطعهٔ مکانیکی، یک اثر باستانی، یک ساختار زمین‌شناسی و یا هر چیز دیگری باشد. از این شیئ حقیقی، به کمک ابزارها فقط می‌توان تعدادی از نقاط را ثبت

---

[۱] Boissonnat, Jean-Daniel: *Reconstruire des surfaces pour l'imagerie*, in: L'explosion des mathématiques, SMF et SMAI, Paris, 2002, p. 88-91

کرد، و سپس به کمک آن‌ها باید به طور مجازی شکل شیئ موردنظر را بازسازی کرد. موضوع مورد بحث در مسألهٔ به نامِ بازسازی رویه‌ها همین است (شکل ۱). پس مسأله این است که با در دست داشتن تعدادی متناهی نقطه بتوانیم به ارائهٔ نمایشی هندسی و کامپیوتری از شیئ دست یابیم، و از روی آن بتوانیم شیئ را برای تماشا روی یک پرده آماده سازیم، یا آنرا در حافظهٔ کامپیوتر بایگانی کنیم، و به سادگی محاسباتی روی آن انجام دهیم، و حتی بتوانیم تغییراتی در شکل آن بدهیم و یا بتوانیم با فرمان‌هایی از راه دور در نسخه‌ای از آن دستکاری‌های لازم را انجام دهیم. به طور خلاصه، همین قدر که شکل یک شیئ از حیث عددی ذخیره شد، و این ذخیره‌سازی با دقت کافی صورت گرفت، امکانات عدیده‌ای در اختیار خواهیم داشت تا به عمل یا محاسبه بپردازیم.

شکل ۱. بازسازی یک رویه به کمک یک نمونه از نقاط آن: این مسأله در حوزه‌های گوناگون مطرح می‌شود.

فواید اقتصادی و صنعتی مسألهٔ بازسازی رویه‌ها، هم‌چنین سرشت بنیادی آن از نظر علمی، منجر به آن شده‌اند که ظرف بیست سال گذشته کارهای متعددی در این زمینه صورت پذیرد. اما صورت‌بندی ریاضی مسأله توسط متخصصین، کار بسیار متأخرتر و مربوط به همین ایام اخیر است، که اجازه داده است الگوریتم‌های مؤثر طراحی شود و بازسازی اطمینان‌بخشی فراهم گردد. سپس برخی از دست‌آوردهای این هندسهٔ الگوریتمی با سرعت فراوان به دنیای صنعت منتقل شده‌اند و این انتقال با ایجاد نهادهای نوپایی (مانند ریندراپ جئوماژیک [۱] در ایالات متحده) صورت گرفته است و یا با عرضهٔ محصولات جدیدی به وسیلهٔ سرکردگان طراحی به کمک رایانه و یا به وسیلهٔ

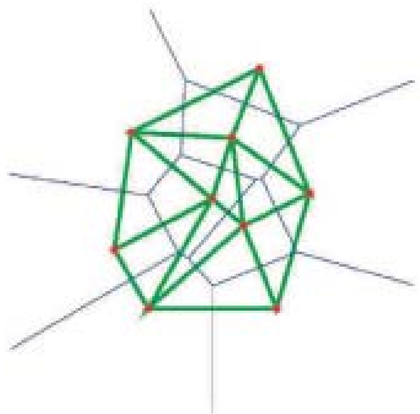
---

[۱] Raindrop Geomagic

دست‌اندرکاران نگارگری پزشکی (مانند سیستم‌های داسو[۱] یا زیمنسِ پزشکی[۲]) جامهٔ عمل پوشیده است.

نمودارهای وورونوی[۳]، مثلث‌بندی دلونه[۴]، دو ابزار هندسی لازم

برای آن‌که یک رویه از روی شکل تیره و تار متشکل از تعدادی نقاط نمونهٔ آن بازسازی شود، بیشتر الگوریتم‌ها ابزاری را به کار می‌برند که در هندسهٔ الگوریتمی حکم ابزار مرکزی و محوری را دارد و آن هم مثلث‌بندی دلونه است. این نامگذاری از نام



شکل ۲. نمودار وورونوی (آبی) و مثلث‌بندی دلونه (سبز) برای مجموعه‌ای از نقاط (قرمز). نمودار وورونوی و مثلث‌بندی دلونه از ابزارهای اساسی در هندسهٔ الگوریتمی هستند.

ریاضیدان روسی بوریس دلون[5] (۱۸۹۰ تا ۱۹۸۰) گرفته شده است که تلفظ نام فرانسوی شدهٔ آن دلونه است. مثلث‌بندی دلونه به گونه‌ای طبیعی بر مبنای نموداری تعریف می‌شود که نمودار وورونوی نامیده می‌شود، که آن هم برگرفته از نام ریاضیدان روسی گئورگی

---

۱ Dassault Systemes

۲ Siemens Medical

۳ diagrammes de Voronoï

۴ triangulation de Delaunay

۵ Boris Delone

ورونوی[۱] (۱۸٦۸ تا ۱۹۰۸) است. یک مجموعهٔ متناهی از نقاط فضا را در نظر بگیریم و آن را E بنامیم. نمودار وورونویی وابسته به E، تقسیم فضا (در شکل ۲ با رنگ آبی) به حجره‌هایی محدب است و هر حجره مرکب از نقاطی از فضا است که به یکی از نقاط E نزدیک‌تر از سایر نقاط‌اند. به این ترتیب، حجره‌ها، که چند وجهی‌های محدب هستند، بدون ابهام تعریف می‌شوند. اکنون آن نقاط E را که حجرهٔ وورونوی آن‌ها کنار هم می‌افتند با خط مستقیم به هم وصل کنیم. مجموعهٔ پاره‌خط‌های حاصل، مثلث‌بندی دلونهٔ وابسته به E را تشکیل می‌دهد (در شکل ۲ با رنگ سبز). این ساختارها را می‌توان در فضاهای با بعد دلخواه تعریف کرد، از جمله در فضای سه بعدی معمولی که از نظر بازسازی رویه‌ها، جالب‌ترین فضاهاست. نمودارهای وورونویی (شکل‌های ۲ و ۳) جزء اصلی‌ترین موضوع‌های مورد بحثِ هندسهٔ الگوریتمی است و در ۱۹۸۰ ارتباط آن‌ها با نظریهٔ پولی‌توپها[۲] روشن شد (پولی‌توپها مشابه چندوجهی‌ها در فضاهای با بعد بیشتر از ۳ هستند). بررسی آن‌ها در زمینهٔ نمونه‌برداری رویه‌ها خیلی هم جدیدتر است.

فایدهٔ نمودارهای وورونوی و مثلث‌بندی‌های دلونه چیست؟ اگر E یک نمونه‌برداری مرکب از n نقطه باشد که از رویهٔ S گرفته شده‌اند، می‌توان نشان داد نمودار وورونویی E و مثلث‌بندی دلونهٔ نظیر آن، شامل اطلاعات زیادی در مورد رویهٔ S اند. هنگامی که نمونه‌برداری به اندازهٔ کافی متراکم باشد، می‌توان تقریب‌های دقیقی برای رویهٔ موردنظر فراهم کرد. مثلاً برداری که نقطهٔ P از E را به دورترین رأس حجرهٔ وورونویِ همین نقطه وصل می‌کند، تقریب خوبی برای قائم بر رویهٔ S در نقطهٔ P است.

باید مطمئن شد که زمان‌های محاسبه در حد معقولی کوتاه و الگوریتم‌ها قابل اعتمادند

به این ترتیب امروزه چندین الگوریتم بازسازی می‌شناسیم که قادرند به اتکای نمونه‌برداری متناهی از نقاط یک رویهٔ S، به ساختن یک رویهٔ S' منتهی شوند به قسمی که رویهٔ S' را به شکل صحیح تقریب بزند. آنچه مهم‌تر است این که الگوریتم‌های موجود اجازه می‌دهند یک کران بالا برای اختلاف بین S و S' به‌دست آید، کرانی که البته بستگی به تراکم نقاط نمونه‌برداری دارد.

از آنجا که اطلاعات فراهم شده به کمک ابزارهای اندازه‌گیری غالباً صدها هزار و

[۱] Georgi Voronoï

[۲] polytopes

بلکه میلیون‌ها نقطه را در بر می‌گیرند، مسائل ترکیبیاتی و الگوریتمی نقشی بحرانی در بازی با این اطلاعات ایفا می‌کنند. مثلاً دانستن این نکته که مقدار محاسباتی که مثلث‌بندی دلونه ایجاب می‌کند از حد معقولی فراتر است یا نه، حائز اهمیت است. در بدترین و نامطلوب‌ترین حالت، عدد T یعنی تعداد مراحل محاسبه (و یا نهایتاً زمان محاسبه) ممکن است تربیعی باشد، یعنی T در بدترین حالات، به شکل توان دوم تعداد نقاط نمونه‌برداری است. اما فرض می‌کنیم که برای رویه‌هایی که خوب نمونه‌برداری شده باشند، این وضعیت رخ نمی‌دهد. در مورد رویه‌های چندوجهی گونهٔ[۱] S، یعنی رویه‌هایی که مرکب از وجه‌هایی به شکل چند ضلعی باشند، جدیداً نتایج دقیقی به دست آورده‌اند: در واقع، برای این گونه رویه‌ها و با شرایط ضعیفی روی نمونه‌برداری‌ها، ثابت شده است که در بدترین حالت، اندازهٔ محاسبات در مثلث‌بندی، متناسب با تعداد نقاط نمونه‌برداری است. در مورد رویه‌های هموار موضوع حساستر است؛ هم‌اکنون تحقیقات فعالی در مورد آن‌ها در حال اجراست.

نمی‌توان به کرانهایی که از حیث نظری به دست می‌آیند اکتفا کرد، بلکه باید شیوهٔ علمی و سریع محاسبه را در مثلث‌بندی برای این بازی‌های اطلاعاتی بدانیم. الگوریتم‌های متعددی را می‌شناسیم. کارآمدترین آن‌ها را متصادف[۲] می‌نامند زیرا در ضمن اجرای آن‌ها تعدادی انتخاب تصادفی صورت می‌گیرد. نظریهٔ الگوریتم‌های متصادف با سرعت زیاد در سال‌های ۱۹۹۰ رشد کرده و منجر به تحلیل‌های دقیقی شده است، که در بوتهٔ تجربه هم ارزش آن‌ها به اثبات رسیده است. در موارد زیادی، از جمله مثلث‌بندی دلونه، دخیل کردن بخشی از کار به صورت اتفاقی و تصادفی، تجویز می‌کند که در جستجوی حل بهینهٔ بدترین حالت (که احتمال اندکی دارد) نباشیم و به این ترتیب الگوریتم‌های ساده و در عین حال بسیار کارامد از نظر میانگین حاصل شده‌اند. مثلاً با نمونه‌برداری ۱۰۰۰۰۰ نقطه در حدود ۱۰ ثانیه بازسازی رویه را می‌توان انجام داد (به کمک پنتیوم ۴، با ۵۰۰ مگاهرتز).

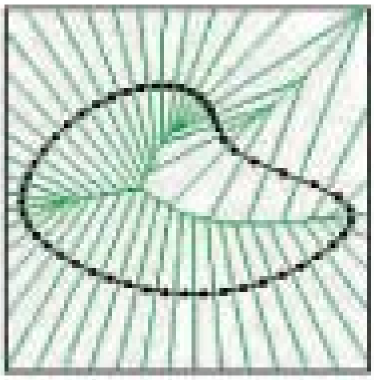
درست است که محاسبهٔ سریع مهم است، اما محاسبهٔ قابل اعتماد از آن هم مهم‌تر است. این مسأله‌ای حساس است، زیرا کامپیوترها به طور کلی اعداد را با تقریب و دقتی محدود نمایش می‌دهند (منظور تعدادی متناهی رقم اعشاری است). به این ترتیب نمی‌توان نمایش عددی و در عین حال دقیق برای اعدادی نظیر π یا $\sqrt{2}$ که بی‌نهایت

---

[۱] polyédrique

[۲] randomnisé

رقم اعشاری دارند، ارائه داد. انباشتگی خطاهای ناشی از گرد کردن ممکن است به رفتار ناهنجاری برای یک برنامه بینجامد. هر چند این رفتارها را کاملاً می‌شناسیم، اما



شکل ۳. نمودار وورونوی مجموعه‌ای از نقاط یک خم

مهار کردن آن‌ها بسیار مشکل است و تحقّق و نگهداری الگوریتم‌های قابل اعتماد بسیار پرهزینه‌اند. بخش عمده‌ای از پژوهش نوین در زمینهٔ هندسهٔ الگوریتمی، ناظر به این مسائل است و اینجاست که شاخه‌هایی از دانش نظیر الگوریتمیک [۱]، محاسبهٔ صوری [۲] (جایی که کامپیوتر به جای اعداد صریح، نمادها را دست‌کاری می‌کند)، و حساب کامپیوترها [۳] در هم می‌آمیزند. بر اثر این تلاش‌ها، تاکنون چندین کتابخانهٔ نرم‌افزاری گسترش یافته‌اند که امکان برنامه نویسی‌های ساده، کارآمد و اطمینان‌بخش را فراهم می‌کنند، از جمله کتابخانهٔ CGAL (کتابخانهٔ الگوریتم‌های هندسهٔ محاسباتی [۴]) که به کمک همکاری بین‌المللی دانشگاه‌ها و سازمان‌های پژوهشی تأسیس و توسعه یافته است.

ژان ـ دانیل بواسونا
INRIA (انستیتوی ملی پژوهشی در انفورماتیک و اوتوماتیک)
سوفیا ـ آنتیپولیس

[۱] algorithmigue

[۲] Calaul Formel

[۳] arithmétique des Ordinateurs

[۴] Computational Geometry Algorithms Library

چند مرجع

- J.-D. Boissonnat et M. Yvinec, Algorithmic geometry (Cambridge University Press, 1998).
- J.-D. Boissonnat et F. Cazals, "Smooth surface reconstruction via natural neighbour interpolation of distance functions", dans *Proceedings of the 16* $^{\text{th}}$ *Annual ACM Symposium of Computational Geomerty* (2000).
- CGAl, The Computational Geometry Algorithms Library, `http://www.cgal.org`.

Jean-Daniel Boissonnat
INRIA (Institut national de recherche en informatique et en automatique), Sophia-Antipolis

.

ریاضیدانان در فرانسه و در جهان

نویسنده: ژان - پیر بورگینیون [۱]

مترجم: ارسلان شادمان

ویراستاران: فرج‌الله محمودی، شهناز عباسپور

تا اواخر قرن ۱۹، «هندسه‌دانان»، اصطلاحی که قدما برای ریاضیدانان بکار می‌بردند، زیاد نبودند، در ظرف یک قرن، تعداد آنان به‌طور قابل ملاحظه‌ای افزوده شده است. امروز، آنان ناچارند با یک جهش عمیق در رشتهٔ علمی خود مواجه شوند.

در طول قرن بیستم، عدهٔ افراد جامعهٔ ریاضی گسترش عمده‌ای یافت. پس از صد سال، از چند صد عضو در ۱۹۰۰ به ده‌ها هزار (شاید حدوداً ۸۰۰۰۰) نفر رسید. برای انجام تخمین‌هایی از این نوع، باید نخست روی تعریف «ریاضیدان» به تفاهم برسیم. ما این نام را انحصاراً به مردان و زنانی اطلاق می‌کنیم که تا سطح معادل رسالهٔ دکترا تحصیل کرده باشند و در مشاغل آنان جایگاهی جدی برای تحقیقات ریاضی منظور شود و یا آن که نتایج این تحقیقات در شغل آنان بکار رود. این انتخاب ممکن است خیلی محدود کننده به نظر آید زیرا مثلاً یکی از پیامدهایش آن است که تقریباً همهٔ دبیران آموزش و پرورش در مقطع متوسطه را از حوزهٔ دید ما خارج می‌کند، حال آن که در طول نیمهٔ دوم قرن بیستم جمعیت آنان نیز به گونهٔ قابل ملاحظه‌ای رشد یافته است.

[۱] Bourguignon, Jean-Pierre: *Les mathématiciens en France et dans le monde*, in: L'explosion des mathématiques, SMF et SMAI, Paris, 2002, p. 92-97

این ازدیاد جمعیت ناشی از چند فرایند همزمان است. نخست آن که بی‌درنگ پس از جنگ دوم جهانی، آگاهی به اهمّیت علوم در رشد اقتصادی و صنعتی حاصل شد. از سوی دیگر، گروه‌های جدیدی از افراد به این مشاغل راه یافتند. از جمله می‌توان زنان ریاضیدان را نام برد که البته تعداد آنان از کشوری به کشور دیگر بسیار متفاوت است. اما [با وجود این تفاوت در تعداد،م.] تقریباً در همهٔ ممالک دنیا، شاهد تشکیل و حضور جمعیت‌هایی دانشگاهی در این دوره هستیم که متشکل از دست‌اندرکاران تحصیلات عالیه‌اند. به یک مثال اکتفا می‌کنم: ریاضیدانان اهل آفریقای جنوبِ صحرا، پس از تحصیل در یکی از کشورهای عربی یا در اتحاد جماهیر شوروی، نخستین رساله‌های دکتری خود را در سال‌های ۱۹۷۰ به پایان رساندند. نسل بعد، تحصیلاتشان را غالباً در کشور خودشان به پایان رسانیدند: در دههٔ ۲۰۰۰ ــ ۱۹۹۰، بسیاری از کشورهای آفریقای جنوب صحرا توانستند تشکیلات مستقلی برای تحصیلات عالیه بر پا کنند و از این نظر به استقلال دست یافتند. در سال‌های آینده، این گسترش ادامه خواهد یافت و احتمالاً جامعهٔ ریاضیدانان برخی از کشورها نظیر چین و هند تقویت خواهد شد.

زمین در نگاه شب. پراکندگی جهانیِ نورِ شبانگاهی، یادآور پراکندگی مراکز فعالیت ریاضی است. البته همهٔ ریاضیدانان شب کار نیستند!
(کلیشهٔ از: C-Mayhew et R. Simmon/NASA-GSFC)

جمعیتی از پژوهشگران و شبکهٔ انجمن‌های علمی آن

سازماندهی جامعه‌های ریاضیدانان چگونه بوده است؟ گسترش جامعهٔ بین‌المللی ریاضی، از طریق انجمن‌های علمی توانسته است به یک ساختار تشکیلاتی دست یابد.

تقریباً همهٔ این انجمن‌ها، به لطفِ از خود گذشتگی و تعهدِ همکاران داوطلب، به بقاء خود ادامه می‌دهند. به استثنای انجمن ریاضی آمریکا که قریب ۱۵/۰۰۰ عضو و بیش از ۲۰۰ کارمند دارد، سایر انجمن‌ها هنوز گسترش چندانی ندارند.

اولین مرحلهٔ رشد در سطح ملی، غالباً زمانی رخ می‌دهد که دولت‌ها و مراجع قدرت دریابند که گسترش علوم می‌تواند معرّفِ برتریِ اقتصادی یا نظامی باشد. در چنین شرایطی انجمن ریاضی فرانسه (SMF)، هم چنین انجمن فیزیک فرانسه، در سال ۱۸۷۲، یعنی درست پس از شکست فرانسه در جنگ ۱۸۷۰ در مقابلِ آلمان و تامّل دربارهٔ علل این شکست، تأسیس شدند. خوشبختانه، این چشم‌انداز شدیداً ناسیونالیستی در حال حاضر رنگ باخته است.

اتحادیهٔ بین‌المللی ریاضی در ۱۸۹۶ تشکیل شد. این اتحادیه هنوز هم ساختار کوچکی دارد. مسئولیت اصلی آن کمک به سازماندهی و برگزاری کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیدانان است. این کنگره هر چهار سال یک بار تشکیل می‌شود و در مقیاس جهانی میعادگاهی است که نمی‌توان آنرا نادیده گرفت. کمیتهٔ اجرایی کنگره موظف است کمیسیون جایزهٔ فیلدز را انتخاب کند. جایزهٔ فیلدز نیز هر ۴ سال یک بار اعطاء می‌شود و معتبرترین پاداش در ریاضیات است زیرا جایزهٔ نوبل در این رشته وجود ندارد.

در پایان قرن بیستم، شاهد به وجود آمدن ساختارهای تازه‌ای، بینابین انجمن‌های کشوری و اتحادیهٔ بین‌المللی بوده‌ایم. نمونهٔ آن را همکاران آفریقایی در ۱۹۸۰ با تشکیل اتحادیهٔ ریاضی آفریقایی به وجود آوردند، سپس انجمن ریاضی اروپایی (SME) به وجود آمد، که برای ادارهٔ آن کارهای زیادی با الهام از اتحادیهٔ اروپا صورت گرفت، و در برگیرندهٔ انجمن‌های ریاضی ملی همهٔ کشورهای اروپایی و اسرائیل است و مثال دیگر، اتّحادیهٔ ریاضی آمریکای لاتین و کارائیب (UMALCA) است که ریاضیدانان آمریکای جنوبی و کارائیب را در برمی‌گیرد. به وجود آمدن این ساختارهای نوپا، ناشی از تمایل به تقویت همکاری در مقیاس نیمه‌ـ قاره‌ای است، تا با این همکاری‌ها از سویی مخاطبین مناسبی برای مقابله با ظهور مسائل جدید سیاسی فراهم شود (مصداق آن اتحادیهٔ ریاضی اروپا است) و از سوی دیگر کنترل بیشتری روی توزیع و جذب منابع به وجود آید، مثلاً در فردای دورانِ رنج آورِ دیکتاتوری نظامی، نگذارد همهٔ منابع به سوی آمریکای شمالی کشیده شود (مصداق آن آمریکای جنوبی است)

L'IHÉS (مؤسسهٔ مطالعات علمی عالی) در **بور ـ روی ایوت**[۱] در حومهٔ پاریس و مباحثه‌ای بین ریاضی‌دانان در محل کارشان. L'IHÉS محل ریاضیات بنیادی و فیزیک نظری، و مؤسسهٔ تحقیقات صاحب نامی است. فقط ۷ عضو دائمی دارد، امّا سالیانه برای مدت زمان‌های متفاوت حدود ۲۰۰ محقق از ملیت‌های مختلف را می‌پذیرد. جدیداً چند تن از این ریاضیدانان به سمت مسائل وابسته به بیولوژی مولکولی گرایش یافته‌اند. (کلیشه از: IHÉS و (IHÉS outsider Agency)

---

۱ Bures-sur-Yvette

حضور گسترده و روزافزون در صنعت و خدمات

ریاضیدانان در چه مشاغلی به کار گرفته می‌شوند؟ نوآوریِ بزرگ این است که در زمان ما ریاضیدانان در بخش‌های متعددی از صنعت و خدمات حضور دارند. بر خلاف صنعت شیمیایی و صنعت دارویی، یک «صنعت ریاضی» وجود ندارد. در واقع شغل‌هایی که به اشخاصی با توانمندی بالا در ریاضیات واگذار می‌شوند، غالباً نام‌های گوناگونی دارند و از این رو مشکل بتوان «ریاضیدانان صنعتی» را برشمرد. بنابر یکی از تخمین‌های جدید می‌توان گفت که حدود ۲۰۰۰ نفر به این شکل در فرانسه مشغول کارند. این عدد را باید با تعدادی که در بخش رقیب کار می‌کنند یعنی شغل‌های آکادمیک دارند (ریاضیدانان دانشگاهی، مدارس عالی، سازمان‌های تحقیقاتی گوناگون) مقایسه کرد که در این صورت می‌توان تعداد اینان را با اطمینان بیشتری حدود ۴۰۰۰ نفر تخمین زد. تقسیم این جمعیت دانشگاهی بین سازمان‌های تحقیقاتیِ دولتی و آموزش عالی (که ۱۰٪ در مقابل ۹۰٪ است) اندکی غریب به نظر می‌رسد: غالباً، در سایر رشته‌های علمی، وضع به منوال دیگری است، زیرا نسبت معتنابه‌تری تمام وقت خود را به پژوهش اختصاص می‌دهند بی‌آنکه اصلاً درگیر آموزش شوند.

چه بخش‌هایی علاقهٔ مخصوصی به جذب و استخدام ریاضیدانان دارند؟ بانک‌ها و شرکت‌های بیمه بیش از پیش استفادهٔ شایانی از مهارت ریاضیدانان می‌برند؛ محصولاتی که این دو نوع مؤسسه می‌فروشند غالباً متکی بر یک ساختِ ریاضی است و در واقع این ساخت همهٔ پایه و مبنای محصول است. هم‌چنین تعدادی از مؤسسات فناوری سطح بالا وجود دارد، که بررسی نظام‌های پیچیدهٔ آنها نیازمند رهیافت ریاضی است و نسل‌های جدید رایانه وسایل لازم برای محاسبات آنها را فراهم می‌کنند و به شکل قابل حصول درمی‌آورند. طبیعتِ این راه‌هایِ جدیدِ کاربرد، به گونه‌ای است که تصویر ریاضیات را در ذهن دانشجویان دگرگون خواهد کرد، اما هنوز در آموزش عالی فرانسه کاملاً هضم نشده است. در اغلب موارد، دلیل این امر اینرسی بیش از حد نظام آموزشی است که هنوز هم بر محورتر بیت برای شغل‌های آکادمیک متمرکز است.

نعمت جدیدی به ریاضیدانان روی آورده است

این گسترش‌های جدید بر ساختاربندی ریاضیات بدون تأثیر نبوده‌اند. این امر، هم در مؤسسات آموزش عالی و مؤسسات پژوهشی و هم در سطح نشریات صادق است. گاهی این شرایط بوجود آمده را به عنوان یک نزاع بین «ریاضیات محض» و «ریاضیات

کاربردی» تعبیر کرده‌اند. امّا این شیوهٔ نگاه به موضوع دست کم به دو دلیل ناموجّه است. دلیل اول آن است که نمونه‌های فراوانی از موقعیت‌های تاریخی را می‌توان مثال زد که در آنها بسط ریاضیات جدید بنابر درخواست‌های خارج از قلمرو ریاضی به وقوع پیوسته است؛ دلیل دوم آن است که پیشاپیش نمی‌توان اعلام کرد که در دست‌یابی به زمینه‌های جدید، کدام بخش از ریاضیات کلید حل مسألهٔ مطرح شده خواهد بود. مقایسه‌های متعدد شگفت‌آور و تأیید شده‌ای، مدلّل می‌سازند که دوگانگی ریاضیات محض ـ کاربردی، سرانجام بی‌فایده بوده‌اند. بر اثر تنشِ درونی جامعهٔ ریاضی بود که در ۱۹۸۳، انجمن ریاضی کاربردی و صنعتی (SMAI) در فرانسه تشکیل شد. بیست سال بعد، دو انجمن SMF و SMAI شیوهٔ مؤثری برای همکاری یافتند و اکنون مشترکاً دست به کارهایی می‌زنند که برای هر دو سودمند است. این دو انجمن جمعاً بیش از ۳۰۰۰ نفر عضو دارند که در مورد SMAI عضویت خیلی فراتر از جامعهٔ دانشگاهی است.

نوآوری اصلی ناشی از امکان بررسی نظام‌های پیچیده با استفاده از مدل‌های مختلف، هر روز بیشتر می‌شود. امروزه، مدلسازی اقدامی است که غالباً مورد نیاز است. این نوآوریِ تحسین‌آمیز ایجاب می‌کند که تأمل ژرفتری روی مبانی این رهیافت، و از جمله مبانی فلسفی آن، به عمل آید. یکی از ظرفیت‌های شایستهٔ توسعه، رویارویی مدل با واقعیتی است که مدعی نمایش آن می‌باشد.

با این وصف، می‌توان روی دو گرایش پُر وزن که از تماس‌های نوین بین دنیای ریاضی و دنیای خارج از آن تغذیه می‌شود، تکیه کرد: یکی از آنها اهمیت دادن دوباره به ساختارهای متناهی است (یعنی به ساختارهای ریاضی که تعداد اعضای دخیل در آنها متناهی است) و دیگری، تعمیم رهیافت‌های تصادفی است (فرایندهای دخیل در آنها تصادفی است).

در زمینهٔ دوم، به استثنای دو زیربخش آمار و تحلیل داده‌ها، فرانسه توانسته است پا به پای کشورهایی که از نظر توسعه با او هم‌ترازند، پیشرو باشد.

برعکس، آموزشِ ریاضیاتِ گسسته، یعنی ریاضیاتِ ناظر به ساختارهایِ متناهی، هم چنان در فرانسه کمرنگ است: برنامه‌های درسی در آموزش عالی که آموزش نسبتاً کاملی در این زمینه را ارائه کنند بسیار اندک‌اند.

اخیراً در همایشی که به تاریخ هندسه در نیمهٔ دوم قرن بیستم اختصاص داشت، استفن سمیل، [۲] ریاضیدان آمریکایی و یکی از پدران توپولوژی نوین که بعدها عمیقاً به

[۲] Stephen Smale

آنالیز عددی گرایش یافت، نکتهٔ دقیقی را گوشزد کرد: امروزه در رشد و نمو خارق‌العادهٔ ریاضیات، افراد دیگری هم شرکت دارند که ریاضیدانان تمایلی به پذیرش آنان در جمع خود نشان نمی‌دهند. باید این حقیقت را پذیرفت که غالباً آمار، اوتوماسیون، تحقیق عملیاتی و نظریهٔ کنترل کمتر در گروه‌های آموزشی ریاضی دانشگاهی ارائه می‌شوند، حال آن که قلب همهٔ این رشته‌ها واقعاً ریاضی است. همین حرف را تا اندازهٔ زیادی در مورد کامپیوتر نظری هم می‌توان گفت: این رشته روابطی نهادینه (یا اُرگانیک) با ریاضیات دارد که عمق این روابط و قدرت آنها را غالباً خود ریاضیدانان هم نمی‌شناسند. این موقعیت برای جامعهٔ ریاضیدانان امکاناتی را فراهم می‌کند که رشد و نمو قابل ملاحظه‌ای به دنبال خود خواهد داشت، مشروط به آن که ریاضیدانان کمتر تعصّب به خرج دهند و اصرار نداشته باشند که این فعالیت‌های نوین را از حوزهٔ عملیاتیِ خود حذف کنند. با کنجکاوی بیشتر و با روحیهٔ باز، هم میدان‌های عمل جدید و هم تقویت بنیهٔ بیشتری حاصل خواهد شد، که بیش از همه در توسعهٔ خود ریاضیات مؤثر خواهد بود.

تغییر شغل نیازمند مقاطع جدید یادگیری است

یکی از مطالبی که باید بازشناخت مربوط به حرفهٔ ریاضیدان در این تماسهای جدید است و آن این که دیگر کارِ این حرفه منحصر به اثباتِ قضایایِ ریاضی نیست. در حال حاضر نیاز داریم که تعداد کافی از ریاضیدانان با شغل‌های بسیار متفاوت به کاربردها علاقه نشان دهند. این امر مستلزم آن است که آنان یاد بگیرند چگونه با متخصصین رشته‌های دیگر تبادل نظر کنند، و صمیمانه به آنها گوش دهند.

از هم اکنون می‌بینیم که در مؤسسات آموزش عالیِ مختلفی در سطح جهان، آموزش‌های تخصصی و پرورش متخصصین در زمینه‌هایی، نظیر ریاضیات مالی اجرا می‌شود. مسلماً آموزشکده‌های دیگری نیز تأسیس خواهند شد که خروجیِ آنان مشاغل مهمی خارج از دنیای آکادمیک خواهد بود، و گسترش آن آموزشکده‌ها در مقیاسی متناسب با همین مشاغل تنظیم خواهد شد. مثلاً، هم اکنون آموزشکده‌هایی برای تربیت متخصصان بیمه را می‌توان نام برد، و پیشاپیش به آموزش‌های چند منظوره‌ای فکر کرد که بستری برای تبادل نظر بین ریاضیات و رشته‌های دیگر نظیر زیست‌شناسی و پزشکی باشد.

تدارک آموزش‌های بسیار تخصصی به دو دلیل اشتباه خواهد بود: دلیل اول آن، تنگ‌نظری رهیافت‌هایی از این نوع است و دلیل دوم آن، خطر ایجاد شکاف در جامعهٔ ریاضی است که مترتب این گونه آموزش‌ها خواهد بود. برای آن‌که دانشجویان بتوانند به

طور طبیعی به جهت‌گیری‌های جدیدی دست یابند که پذیرای روش‌های ریاضی است، باید تغییراتی عمیق‌تر در برنامه‌ریزی آموزشی و ریز مواد، پیش‌بینی و اجراء شود. باید در ایجاد ارتباط وسیعی بین دنیای آکادمیک و دنیای صنعت و خدمات تلاش زیادی به عمل آورد.این شرطی است که امکان تحریک‌پذیری و حساسیت به مسائل خوب را فراهم می‌کند، و غالباً به طور ناگهانی پیش می‌آید و منجر به حوزه‌های جدیدی می‌شود، و از سوی دیگر یکی از شرایطی است که اجازه می‌دهد مسائل مورد بحث با عمق لازم حل و فصل شوند.

ژان بورگینیون
CNRS و IHÉS (انستیتوی تحقیق علمی عالی،
بور، روی رودخانهٔ ایوت)
و مدرسهٔ پلی‌تکنیک، در پالزو.

چند مرجع

- B. Engquist et W. Schmid (eds.), *Mathematics unlimited*–2001 *and beyond* (Springer-Verlag, 2001).
- C. Casacuberta, R. M. Miró-Roig, J. M. Ortega, et S. Xambó-Descamps(eds.), *Mathematical glimpses into 21st century, Round tables held at the 3rd european congress of mathematics* (Societe Catalana de Matemàtiques, Barcelona, 2001).

Jean-Pierre Bourguignon
CNRS-IHÉS (Institut des hautes études scientifiques, Bures-sur-Yvette) et
École polytechnique, Palaiseau

چگونه می‌توان ریاضیدان شد؟

نویسنده: موریس ماشال [1]

مترجم: ارسلان شادمان

ویراستاران: فرج‌الله محمودی، شهناز عباسپور

کسی که بخواهد به تحقیقات بنیادی در ریاضی بپردازد، به سالیان طولانی یادگیری و استعدادی درخشان نیازمند است. متقابلاً، شیفتگان ریاضیات از یک سلسله امکانات برای رشد و تربیت برخوردارند و به بازار کار متنوعی راه می‌یابند.

یک درس ریاضی در دانشگاه. (کلیشه انستیتوی ریاضیات، دانشگاه بردو ۱)

---

[1] Mashaal, Maurice: *Comment devenir mathématicien,*
in: L'explosion des mathématiques, SMF et SMAI, Paris, 2002, p. 98-103

در قرن ۱۷، یک وکیل دعاوی اهل تولوز به نام پیر دوفِرما[۱] (۱۶۰۱ تا ۱۶۶۵) ساعتهای تفریح خود را صرف تحقیق در ریاضی و مراسلاتی راجع به این تحقیق می‌کرد. هرچند ریاضیات حرفهٔ او نبود، اما فرما موفق به کشفیات بزرگی در ریاضی گردید. به عنوان مثال، او یکی از پیشگامان در زمینهٔ ورود فنونِ جبری در هندسه است، و کارهایی که در زمینهٔ نظریهٔ اعداد کرده است او را مشهور ساخته‌اند، به‌ویژه به مناسبت پنداره‌ای که او بیان کرد و تا سال ۱۹۹۴ ثابت نشد (این پنداره می‌گوید که هرگاه عدد صحیح ثابت n بزرگ‌تر از ۳ یا مساوی ۳ باشد، آنگاه معادلهٔ $x^n + y^n = z^n$، جواب x و y و z در اعداد صحیح مثبت ندارد). فرما درواقع یکی از برجسته‌ترین ریاضیدانان قرن خود بود.

دوره‌ای که شخص با استعدادی می‌توانست به شکل خودآموز در ساعت‌های تلف شده‌اش به کشفیات بزرگی نایل آید، سپری شده است. بدون تردید هنوز افرادی پیدا می‌شوند که شیفتهٔ ریاضیات‌اند، هرچند ریاضیات حرفهٔ آنان نیست، امّا به طور اتفاقی، قضیه‌هایی را کشف و ثابت می‌کنند. در حال حاضر نه‌تنها این‌گونه موارد نادرند، بلکه مهمترین ویژگی آنها این است که نتایج حاصل عموماً حول مسائل بی‌اهمیت و در حاشیهٔ جریان‌های عظیم تحول ریاضیات دور می‌زنند.

خیر اگر امروز کسی مایل باشد به یک ریاضی‌پیشهٔ واقعی تبدیل شود، باید پیش از هر چیز به سالیان دراز تحصیل تن در دهد. حدود ۸ سال پس از دیپلم دبیرستان لازم است تا کارآموز ـ ریاضیدان به شناخت و توانمندی‌های اساسی برسد و بتواند متکی به نفس و مستقلاً نتایج ریاضی اصیلی را به دست آورد.

مسیر کلاسیک: دیپلم تحصیلات عمومی دانشگاهی DEUG، کارشناسی[۲]، کارشناسی ارشد[۳]، دیپلم تحصیلات عمیق DEA و رسالهٔ دکتری.

قبول داریم که تحصیلات عالی طولانی لازم است، امّا کدام تحصیلات؟ راه سنّتی در فرانسه این است که نخست دورهٔ اول دانشگاهی[۴] به مدت ۲ سال سپس دورهٔ دوم[۵] که

---

[۱] Pierre de Fermat

[۲] licence

[۳] maîtrise

[۴] premier cycle universitaire

[۵] second cycle

مدت آن نیز ۲ سال است و نهایتاً دورهٔ سوم[1] که حدود ۴ سال طول می‌کشد، سپری شود.

دورهٔ اول به DEUG (دیپلم تحصیلات دانشگاهی عمومی) اختصاص دارد. برای ریاضیدانان آینده، راه معمول این است که DEUG علمی را در شاخهٔ «ریاضیات، انفورماتیک و کاربرد در علوم» (MIAS) بگذرانند که آموزش آن بر ریاضیات، انفورماتیک و فیزیک متمرکز است. راه دیگر آن است که DEUG را در شاخهٔ «ریاضیاتِ کاربردی و علوم اجتماعی» (MASS) بگذرانند که از یک سو حول ریاضیات و انفورماتیک و از سوی دیگر در زمینهٔ علوم اقتصادی و انسانی دور می‌زند.

نخستین سال دورهٔ دوم دانشگاهی اختصاص به مدرک کارشناسی (لیسانس) و سال دوم اختصاص به مدرک کارشناسی ارشد (مِتریز) دارد، البته این کار را می‌تواند به چند طریق انجام دهد. دانشجویی که هدفش پژوهش اساسی در ریاضیات باشد، لیسانس و متریز را در رشتهٔ ریاضی می‌گیرد. امّا دانشجویی که علاقه‌مند به ریاضیات کاربردی در علوم اقتصادی و انسانی باشد، سیکل دوم را در MASS[2] می‌گذراند. هم‌چنین ممکن است دانشجو بخواهد متریز خود را در شاخهٔ مهندسی ریاضی بگیرد و خود را برای کار در کاربردهای صنعتی آماده کند، که در این صورت تکیه‌اش روی آنالیز عددی، مدل‌سازی، انفورماتیک، احتمالات و آمار خواهد بود.

سال اول سیکل سوم به DEA (دیپلم تحصیلات عمیق) اختصاص دارد که بسیار متنوع است (فقط در ریاضیات، بالغ بر ۵۰ عنوان متمایز در فرانسه وجود دارد). در دورهٔ DEA ممکن است بحث بر سر دیپلم تحصیلات عمیقی باشد که هنوز عمومی‌اند و طیف وسیعی از ریاضیات را در بر می‌گیرند، یا صحبت از DEAهای اختصاصی‌تری مانند DEAی الگوریتمیک، یا DEAی بیوماتماتیک (ریاضیات زیستی) باشد. انتخابِ DEA تعیین کننده است: معمولاً در طول همین سال تحصیلی، دانشجو وارد مرحلهٔ آشنایی با پژوهش ریاضی می‌شود، با زمینه‌های مطرحِ روز رو به رو می‌گردد و ناچار به مطالعهٔ عمیقِ مقالات تحقیقی می‌شود که برخی از آنها به‌تازگی انتشار یافته‌اند.

دیپلم تحصیلات عمیق بر دورهٔ بعدی یعنی دکتری، که معمولاً در ۳ سال تهیه می‌شود، به طور وسیعی تأثیرگذار است. دانشجو زمینهٔ تحقیقاتی خود را تعیین می‌کند، برای راهنمایی رسالهٔ خود یک استاد راهنما و هم‌چنین یک لابراتوار که او را بپذیرد دست و پا می‌کند، سپس آن قدر روی زمینهٔ انتخاب شده کار می‌کند تا بتواند شخصاً به نتایج اصیلی

[1] troisième cycle

[2] ریاضی کار بسته و علوم اجتماعی

دست یابد که حاصل آن به شکل یک یا چند مقاله در مجلات حرفه‌ای منتشر خواهند شد. مدرک دکتری پس از نگارش و دفاع از رساله که در جلسه‌ای علنی و با حضور هیأت داوران متخصص برگزار شده باشد، اعطا می‌شود.

ماژیستر و مدارس بزرگ، سکوهایی به سوی پژوهش بنیادی

لیسانس، متریز، DEA و رساله: به طور خلاصه مسیر تحصیلات رسمی در فرانسه برای تبدیل شدن به یک پژوهشگر ریاضیات هستند؛ غالباً چند سال پژوهش پسا ـ دکتری به این مسیر اضافه می‌شود، که البته توأم با دریافت پول به شکل بورس یا برمبنای قراردادهایی برای یک دورهٔ معین است که گاهی خارج از کشور انجام می‌گیرد. این دوره پیش از آن است که ریاضیدان جوان به عنوان پژوهشگر یا به عنوان آموزشی ـ پژوهشی به احراز شغل پایداری دست یابد: در اغلب کشورهای دیگر نیز کمابیش از همین مدل پیروی می‌شود. اشخاصی مانند آندرو وایلز[۱] ریاضیدان بریتانیایی که در ۱۹۹۴ نقطهٔ ختم بر پندارهٔ فرما نهاد، همین مسیر تحصیل و تحقیق را طی کرده‌اند.

در عمل مسیری که هم اکنون تشریح کردیم، با روایت‌های متعدد و یا استثناهای مهمی همراه است. نخست آن که در فرانسه، مدارس بزرگی نظیر دانشسراهای عالی (اکول نورمال سوپریور) و مدرسهٔ پلی‌تکنیک گرایش به جذب درخشان‌ترین دانشجویان ریاضی دارند. داوطلبان شرکت در آزمون ورودی این مؤسسات که خیلی نخبه‌پرور هستند، به جای آن که دورهٔ DEUG را بگذرانند، «کلاس‌های آمادگی» در برخی دبیرستان‌ها را به مدت ۲ (و گاهی ۳) سال می‌گذرانند؛ از مشخصات کلاس‌های آمادگی آن است که در آن آمادگی شدیدتر و مستلزم جدیت شخصی بیشتری از سوی داوطلبان است. پس از آزمون ورودی، دانشجویان دانشسرایی جذب سیکل دوم و سپس سیکل سوم دانشگاه‌ها می‌شوند، و دانشجویان پلی‌تکنیکی در خود مدرسهٔ پلی تکنیک ۲ سال آموزش می‌بینند، سپس اگر تمایل داشته باشند به تحصیل دانشگاهی در سطح DEA مشغول می‌شوند. برای کسی که بخواهد ریاضیدان شود، طی مسیر دانشسرای عالی یا مدرسهٔ پلی تکنیک الزامی نیست، با وجود این می‌توان تأیید کرد که در فرانسه، بیشترین پست‌های پژوهشی در ریاضیات بنیادی را شاگردان سابق دانشسرای عالی یا مدرسهٔ پلی تکنیک اشغال کرده‌اند.

به هر تقدیر، بسیاری از دانشگاه‌ها دوره‌های ماژیستر[۲] هم ارائه می‌کنند. دانشجویان

---

[۱] Andrew Wiles

[۲] magistère

این دوره، که اکثراً دانشجویان دانشسرایی هستند، بر اساس پروندهٔ تحصیلی بعد از DEUG و یا بعد از یک کلاس آمادگی، بر مبنای پروندهٔ تحصیلی درخواست‌کنندگان انتخاب می‌شوند. به سود پژوهشگران آینده است که به جای ادامهٔ شرایط عادی داوطلب گذرانیدن یک دورهٔ ماژیستر شوند.

هم‌چنین اشاره کنیم که گذرگاه‌های متعددی بین مدارس مهندسی و دانشگاه‌ها وجود دارد. مثلاً شاگردان مدارس مهندسی می‌توانند بسته به علاقه و سطح معلومات خود برای گرفتن DEA یا تهیهٔ رسالهٔ دکترا به خط دانشگاهی بپیوندند. برعکس دانشجویان دانشگاه‌ها نیز می‌توانند به محض اتمام DEUG تحت شرایطی خاص به مدارس مهندسی راه یابند، و حتی پس از آن به یک مدرسهٔ عالی وارد شوند.

مقطع مهندسی: دورهٔ تحصیل کوتاه‌تر و توجه کمتر به اهداف پژوهشی

چند کلمه هم دربارهٔ مدارس مهندسی صحبت کنیم که معمولاً شاگردانشان را پس از گذراندن کلاس‌های آمادگی با آزمون ورودی انتخاب می‌کنند. با آن که پیشاپیش هدف این مدارس بیشتر تربیت مهندس است تا محقّق، معمولاً در آنجا آموزش ریاضیات از سطح خوبی برخوردار است. برخی از این مدارس به ویژه مناسب برای تحصیل افرادی است که خواهان برقراری ارتباط میان ریاضیات و یک زمینهٔ مهندسی یا فناوری از قبیل مکانیک، آکوستیک، انفورماتیک و غیره هستند. تعدادی مدرسهٔ عالی تخصصی نیز وجود دارد، مثلاً می‌توان از ENSAE (مدرسهٔ دولتی آمار و مدیریت اقتصادی) یا ENSAI (مدرسهٔ دولتی آمار و تحلیل اطلاعات) که آماردان تربیت می‌کنند یا EURIA را که بیمه‌گر تربیت می‌کند و غیره نام برد.

پس از چهار یا پنج سال تحصیلات عالی در مدارس مهندسی ورود نسبتاً سریع به زندگی فعّال امکان‌پذیر خواهد بود. آشکارا، نوع فعالیت یک مهندس ـ‌ریاضیدان که در مؤسسه‌ای کار می‌کند با زندگی پژوهشگری که در یک آزمایشگاه تحقیقاتی کار می‌کند متفاوت است: فعالیت مهندس بیشتر شامل کاربرد ریاضیات شناخته شده در مسائل ملموس است و کمتر به آفرینش ریاضیات جدید می‌پردازد. با وجود این، بین این دو نوع فعالیت، انواع زمینه‌های تلاش بینابین وجود دارد که میزان گرایش آن به مؤسسهٔ صنعتی، سازمان، آزمایشگاه و یا شخص مهندس مورد بحث وابسته است. مثلاً مهندسی که در جریان گذراندن رسالهٔ دکتری خود با پژوهش آشنا شده و در شرکت بزرگی با فناوری بالا کار می‌کند، می‌تواند کارهای پژوهشی بنیادی انجام دهد.

سرانجام باید دانست که آموزش‌های نوع مهندسی را دانشگاه‌ها نیز بر عهده می‌گیرند و این کار را در انستیتوهای دانشگاهی حرفه‌ای[۱] (IUP) یا در برخی متریزهای حرفه‌ای مانند متریزِ MIAGE (روش‌های انفورماتیک با کاربرد در مدیریت صنایع[۲]) و MST (متریز علوم و فنون[۳]) انجام می‌دهند. این نوع آموزش‌های «دیپلم متوسطه به اضافهٔ ۴ سال» نیز مانند مدارس مهندسی به طور ویژه و انحصاری بر ریاضیات متمرکز نیستند. امّا یک DESS (دیپلم تحصیلات عالی اختصاصی[۴]) که شبیه DEA امّا با هدفی حرفه‌ای است، می‌تواند این نوع آموزش‌ها را تکمیل کند و او را به سمت ریاضیات مشخص‌تری هدایت نماید. به این ترتیب DESSهایی در «حساب علمی و انفورماتیک»، یا در «مهندسی ریاضی» و یا «ریاضیات، انفورماتیک و ایمنی اطلاعات»، و یا «مدل‌سازی تصادفی و پژوهش عملی» و غیره به‌وجود آمده‌اند: به حدّ وفور انتخاب وجود دارد.

در ریاضیات، بیش از سایر رشته‌های علمی، نقش کتابخانه به عنوان یک ابزار اساسی در کار دانشجویان و پژوهشگران مشهود است. (کلیشه انستیتوی ریاضیات، دانشگاه بردو ۱)

---

۱ Institut Universitaire Professionnalisé

۲ Méthodes Informatiques Appliquées à la Gestion des Entreprises

۳ Maîtrise de Sciences et Techniques

۴ Diplôme d' Etudes Supérieures Spéualisées

تخصص میان رشته‌ای، کلیدی برای آینده است.

شمار فراوانی از افراد معتقدند که باید ریاضیات با وسعت بیشتری به سوی رشته‌های دیگر راه یابد. در حوزه‌های بیشماری، سودمندی و نیاز به ریاضیاتِ پیشتاز احساس می‌شود. برعکس، مسائل ملموسی که در این حوزه‌ها مطرح می‌شوند، می‌توانند الهام‌بخش تحقیقات بنیادی پرباری باشند و موجبات پیشرفت دانش ریاضی را نیز فراهم کنند. در درونمایهٔ نهادهای آموزشی و پژوهشی، ارادهٔ سیاسی در روند گسترش میان رشته‌ای مشهود است، اما پیاده‌کردن این فکر هنوز خالی از اشکال نیست.

یکی از زمینه‌های اصلی فعالیت در جهت تحقق فکر میان ــ رشته‌ای زمینهٔ آموزش عالی است. هرچند در سطح DEA و DESSهای رشتهٔ ریاضی می‌بینیم که دریچه‌هایی به سوی حوزه‌های دیگر گشوده شده است، اما در مقطع سیکل دوم دانشگاهی (لیسانس و متریز) موقعیت نگران‌کننده‌تر به نظر می‌رسد: به گفتهٔ ژان پیر بورگینیون[1] رئیس IHÉS (انستیتوی تحقیقات عالی علمی[2]) «آموزش ریاضیات در این مقطع به گونهٔ تقریباً کاملی تک پارچه است». باید به بازنگری و بازاندیشی برنامه‌ها پرداخت، چرا که در طول دهه‌های اخیر تحول ناچیزی داشته‌اند. «مثلاً مواجههٔ بین ریاضیات و زیست‌شناسی یا پزشکی وجود خارجی ندارد و ریاضیات گسسته نیز به همین منوال است». با این وصف، می‌توان به تحول‌هایی مانند امتحان مدل‌سازی در آزمون کنکور آگرگاسیون اشاره کرد.

یک زمینهٔ دیگر فعالیت در جهت میان ــ رشته‌ای مربوط به استخدام پژوهشگران و آموزشگر ــ پژوهشگران و هم‌چنین پیشرفت‌هایی در وضعیت شغلی آنان است. همان‌گونه که ژان ــ مارک دِزویه[3]، رئیس بخش ریاضیات در ادارهٔ علمی دانشگاهی (وزارت تحقیقات[4]) خاطرنشان می‌کند: «می‌توان به مبادلات متخصصین میان رشته‌ای در کمیسیون‌های استخدامی کمک کرد»، مثلاً امکان استخدام آماردانان را در آزمایشگاه‌های بیولوژی فراهم نمود. هم‌چنین می توان آزمایشگاه‌هایی تأسیس کرد که به زمینه‌های چند رشته‌ای اختصاص داشته باشند، و یا سعی کرد برخی از آزمایشگاه‌های موجود، با ایجاد تحولاتی در آن به این سو سوق داده شوند. نهادهایی مانند CNRS (مرکز ملی تحقیقات علمی) و وزارت تحقیقات هم‌اکنون این کار را انجام می‌دهند. اما مشکلات عدیده‌ای بر سر راهِ میان‌رشته‌ای‌شدن وجود دارد: باید برخی عادت‌ها را ترک کرد، مانع‌های اداری یا اساسنامه‌ای را باید دور زد، بر مشکلِ ناشی از آن که پژوهشگران رشته‌های مختلف همدیگر را درک نمی‌کنند فائق آمد، و سرانجام باید سرمایه‌گذاری‌های مناسبی هم از حیث نیروی انسانی و هم از حیث پول به عمل آید، و غیره. هنوز اول کار است. کریستیان پسکین[5]، رئیس علمی وابسته به ریاضیات در CNRS می‌گوید: «رقابت و تخصص‌گرایی علمی، نظام‌های ارزشیابی و استخدام، غالباً گرایش به آن دارند که دیدگاه‌های سنتی و کم تحرک از تسهیلات برخوردار شوند». برای اشخاصی که از آموزش و توانمندی اصیلی برخوردار گشته باشند و سپس بخواهند خطرات (علمیِ) زمینه‌های جدید را بپذیرند، در نظام موجود به اندازهٔ کافی موجبات تشویق فراهم نیست. اما شاید کسانی که در حال حاضر به نقش و جایگاه مهمی در زمینه‌های چندرشته‌ای دست یافته‌اند، بتوانند با همراهی و تشویق، عده‌ای از همکاران و دانشجویان را به تقلید از خود وادارند.

۱ Jean-pierre Bourguignon

۲ Institut des Hautes Etudes Scientiques

۳ Jean-Marc Deshouillers

۴ Minister de la Recherche

۵ Christian Peskine

اشتغالات متعدد در انتظار تحصیل کرده‌های ریاضی است: به نسبت امکاناتی که آموزش در اختیار سایر زمینه‌های علمی قرار می‌دهد به همان اندازه اشتغال وجود دارد.

چه مشاغلی به دارندگان مدارک ریاضی عرضه می‌شود؟ برای اشخاصی که دارای مدرک دکتری هستند و یا فراتر از آن هم رفته‌اند، راه طبیعی، تحقیق و آموزش عالی است: سازمان‌های پژوهشی دولتی مانند CNRS، INRIA، CEA، ONERA و غیره ... . امّا در شرکت‌های بزرگی مانند: RATP یا EDF-GDF ، محققین و در دانشگاه‌ها افراد مدرس ـ محقق استخدام می‌شوند. به همین ترتیب مدارس عالی یا مدارس مهندسی، مدرس استخدام می‌کنند و در مواردی که دارای آزمایشگاه پژوهشی باشند، محققین را نیز جذب می‌کنند. با این وصف، تعداد محل‌های استخدامی در پژوهش و آموزش عالی خیلی زیاد نیست، و در نتیجه استخدام از این طریق بسیار گزینشی است. با ارائهٔ ارقام زیر مطلب روشن می‌شود: مرکز ملی تحقیقات علمی (CNRS) حدود پانزده ریاضیدان جوان را با عنوان «متصدّی پژوهشی [1]» در سال استخدام می‌کند (۲۰ نفر در سال ۱۹۹۵ و ۱۳ نفر در سال ۱۹۹۷) و دانشگاه‌ها هم حدود ۱۰۰ نفر را با عنوان «استادیار» (۱۱۶ نفر در ۱۹۹۵ و ۱۱۱ نفر در ۱۹۹۷) جذب می‌کنند؛ این ارقام را باید با تعداد مدارک دکترایی که هر سال اعطا می‌شود مقایسه کرد، یعنی تقریباً با ۳۵۰ تا ۴۰۰ نفر سالانه در فرانسه.

مؤسسات خصوصی به طور سنّتی مهندسین را استخدام می‌کنند و محل اندکی برای جذب ریاضیدانان (به معنی پژوهشگر) دارند. با وجود این لزوم پژوهش‌های ریاضی دقیق، در حوزه‌های مانند بازرگانی، بیمه، انفورماتیک، مخابرات عددی، روباتیک، صنعت هوا ـ فضا، تحقیقات نفتی و غیره که تعدادشان رو به ازدیاد است احساس می‌شود. هم‌چنین، حضور ریاضیدانان در مؤسسات صنعتی در حال افزایش است؛ جذب بیشتر ریاضیدانان در این بخش زمانی ساده‌تر انجام می‌پذیرد که دورهٔ آموزشی و پژوهشی ریاضیدان داوطلب شامل گرایش‌هایی در سایر رشته‌ها باشد (داخل کادر ضمیمه را ملاحظه نمایید).

تحصیلات ریاضی در سطح پایین‌تر از دکترا به مشاغل بیشتری دسترسی دارد، اما حرفه‌های متناظر آنها از حرفهٔ ریاضیدان به معنی کلمه دور می‌شود. یکی از راه‌ها که از حیث تعداد حائز اهمیت است، آموزش متوسطه است: اشتغال به تدریس در دبیرستان‌ها

---

[1] chargé de recherche

هم می‌تواند پس از لیسانس و هم پس از متریز باشد، سپس یک سال دورهٔ تکمیلی (پس از لیسانس) برای شرکت در آزمون کنکور CAPES و یا یک سال دورهٔ تکمیلی (پس از متریز) برای شرکت در آزمون آگرگاسیون[۱] امکان پذیر است. اما یک سلسله امکانات شغلی هم وجود دارد که نیازمند خبرگی داوطلب در ریاضیات است، مثلاً در بانک‌ها، در شرکت‌های بیمه، در انفورماتیک، در بخش‌های «پژوهش و توسعهٔ» کارخانه‌ها و صنایع، و غیره. خطر بیکاری برای افرادی که دورهٔ تحصیلات آنان علاوه بر ریاضیات، یک یا چند زمینهٔ تخصصی دیگر را نیز در بر گرفته باشد، خیلی ضعیف است.

موریس ماشال
روزنامه‌نگار علمی

چند مرجع

- *Infosup n° 189*, janvier-février 2001 (Dossier de l'ONISEP sur les études universitaires de mathématiques et leurs débouchés).
- Site Internet de l'ONISEP (Office national d'information sur les enseignements et les professions): http://www.onisep.fr.
- *Mathématiques à venir-où en est-on à la veille de l'an 2000*? supplément au *n°* 75 de la *Gazette des mathématiciens*, publié par la SMF et la SMAI (1997).

Maurice Mashaal
Journaliste scientifique

---

۱ agrégation

داخل جلد چاپ فرانسه

بروشور «انفجار ریاضیات» که به وسیلهٔ انجمن ریاضی فرانسه (SMF) و انجمن ریاضیات کاربردی و صنعتی (SMAI) طراحی شده، با پشتیبانی مالی وزارت تحقیقات و کمیتهٔ ملی فرانسوی ریاضیات (CNFM) به اجرا درآمد.
ویراستاران صمیمانه از خانم بریژیت دوگلر که در وزارت تحقیقات، ریاست ادارهٔ فرهنگ و اطلاعات علمی و فنی و موزه‌ها را عهده‌دار است، سپاسگزارند.

طراحی تحریریه و نظارت

میرَی مارتَن ـ دِشان، پاتریک لوتالِک و میشل والدِشمیت،
با مشارکت فابیَن آستیک، فرانسین دِلمر و موریس ماشال

کمیتهٔ بازخوانی

فابیَن آستیک، ژان ـ میشل بیسموت، ژان ـ پیر بورگینیون، میرَی شالیا ـ مورل، فرانسیس دِلمر، میرَی مارتَن ـ دشان، پاتریک لوتالک، ژِرار ترونِل، میشل والدِشمیت

مسئول نگارش

موریس ماشال

پژوهش آیکون‌نگاری

الکترون آزاد، فرانسین دلمر و موریس ماشال

ماکت و صفحه‌آرایی

پاتریسیاروشه (مدرسهٔ پلی‌تکنیک، پالِزو)

جلد

کریستوف بونگون

اجرا و چاپ

مدرسه پلی تکنیک پالزو

ISBN 2-85629-120-1

نشانی انجمن ریاضی فرانسه

SMF
Institut Henri Poincaré
11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris cedex 05, France
Tel: 01 44 27 67 96
http://smf.emath.fr

نشانی انجمن ریاضی کاربردی و صنعتی

SMAI
Institut Henri Poincaré
11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris cedex 05, France
Tel: 01 44 27 66 62
http://smai.emath.fr

عناوین، عناوین فرعی، متون و ارائه و شرح شکل‌ها با مسئولیت مسئول نگارش تهیه شده است.

پشت جلد چاپ فرانسه

«ولی به چه درد می‌خورد؟»: این پرسش را غالباً دانش‌آموزان با معلمین خود در میان می‌گذارند. هنگامی که این سؤال از دهان بچه‌های کم سن و سال درمی‌آید کاملاً معقول و قابل قبول است، ولی وقتی از زبان افراد بالغ و متصدی مسئولیت‌های اجتماع شنیده می‌شود، نه تنها تعجب‌انگیز بلکه تأسف آور است.

درطول زمان، همواره ریاضیات با سایر فعالیت‌های انسانی، از جمله فعالیت‌های اداری، فنی، علمی و فرهنگی ارتباط داشته است. اما از حدود ۳۰ سال پیش، شاهد یک انفجار واقعی در زمینهٔ تعداد حوزه‌هایی هستیم که پیشرفته‌ترین پژوهشهای ریاضی از ملزومات آنها هستند.

از کدنگاری گرفته تا پردازش تصویر، از فروشهای مزایده‌ای گرفته تا صنایع هوانوردی، از دیسکهای نوری گرفته تا تلفن همراه، از فیزیک و از بینهایت کوچک گرفته تا ژنتیک مولکولی، از دنیای اقتصاد و امور مالی گرفته تا فناوری عالی، از دنیای آکادمیک تا جهان صنعت، کاربردهای ریاضیات، از شمار بیرون است و طیفی بیش از پیش وسیع را در برمی‌گیرد. در جهت عکس، مسائل مطرح شده در دنیای تکنولوژی، دنیای امور مالی و دنیای ژنتیک، که فقط به ذکر آنها برای اختصار بسنده می‌کنیم، به شکل دو جانبه موجب می‌شوند که نظریه‌های جدیدی در ریاضیات ابداع شوند و گسترش یابند.

مقالات مختلف این کتاب می‌خواهند به وضوح نشان دهند که حضور ریاضیات در همهٔ عرصه‌ها در دنیای امروز رو به افزایش است، و در عین حال نباید فراموش کرد که ریاضیات به‌عنوان نظامی که سرچشمهٔ دقت و شادمانی است از ملاحظات فلسفی و از آثار و بدایع هنری نیز الهام می‌گیرد.

du contrat entre nos deux sociétés. Dès lors, cette collaboration se montre fructueuse en plusieurs égards et fut peut-être le début d'une longue et prometteuse collaboration SMF-IMS.

Dans la période Octobre 2002 - Mars 2003, j'ai réussi à convaincre quelques collègues éminents pour contribuer en qualité de tradcteurs et de comité de lecture, à cette grande tâche. Comme résultat de leurs efforts fastidieux, nous avons réussi à préparer le manuscrit, avant mon départ sabatique en mi-Mars 2003 vers l' université de Purdue (West Lafayette, USA). J'ai remis aussitôt le manuscrit au secrétariat de l'IMS en espérant que la mise en page soit terminée bien avant la fin de 2003. Ce n'a pas été le cas et le processus avait peu avancé lors de mon retour en Janvier 2004. L'organisation de ce travail technique au sein du bureau de l'IMS était plus compliquée que je n'arrivais à imaginer. Ce genre de retard n'est pas plaisant au premier abord, mais finalement j'ai constaté qu'il n'est pas, du point de vue perfectionniste, aussi mauvais qu'on pense. En effet, j'ai du doubler ou tripler littéralemnt le travail pour éviter autant que possible les erreurs ou mal compréhensions, échappées à mes yeux ou aux yeux de mes collègues dans la version précédente du manuscrit.

Je dois remercier tous les collègues qui ont bien voulu nous aider à mener au bien cette traduction. Avant tous, c'est aux personnes qui ont réalisé l'original en français que nous sommes redevables. Ensuite, comme dit plus haut, nous sommes reconnaissants aux bonnes volontés et encouragements de Professeurs Behzad et Waldschmidt. Vient après les membre des deux conseils de l'IMS dans cette période. Je ne cite pas ici les noms des traducteurs et des membres du comité de lecture, qui sont indiqués aprés les noms des auteurs de chaque article. Le personnel du secrétariat de la Société Mathématique d'Iran (IMS) a été engagé en plusieurs reprises dans ce travail. Tout particulièrement, je nommerais ici M. Shokoohi et Mme Samadian, et j' apprécie les aides de M. Pakzad pour la formation des macros en FTEX.

Le résultat n'est sûrement pas encore parfaît. Le lecteur est prié de nous signaler toute erreur pour en tenir compte dans les versions ultérieures.

Arsalan CHADEMAN, Professeur
Dept of Mathematics, Faculty of Science,
University of Tehran,
Tehran, P.O. Box 14155/6465, Iran

Préface à l' édition persane

L'Explosion des Mathématiques est un album qui reflète plusieurs sommets intéressants acquis à l'heure actuelle dans la démarche du déveloopement des relations entre Mathématiques Pures et Aappliqués, pour ne citer qu'un seul chapitre de l'évolution de l'activité humaine durant les derniers decennies du 20-ième siècle. Ici et là, on ne peut pas attendre que tous les hommes (même de science) apprécie de la même façon la beauté de plus en plus heureuse de cette intéraction. La traduction du livre peut être interprétée comme le signe d'un besoin que l'on a senti de faire visiter cet album par les siens. Le texte original lui même est aussi issu d'un besoin analogue, dont fait bien allusion Michel Waldschmidt dans son introduction à la présente édition.

La création artistique, la présentation et l'interprétation du sénario ne se fait pas automatiquement. Elles dépendent de la bonne volonté d'un certain nombre de personnes décidées, certes, mais aussi et surtout d'organisations bien établies dans la société. Un milieu favorable à l'épanouissement des artistes talents contient des coordonnées effectives en toutes les dimensions imaginables. Il faut investir aussi bien spirituellement et culturellement que par des moyens matériels substentiels bien déterminés. Nos sociétés savantes *d'intérêt publique* ont certainement en partie la vocation de faire de la publicité pour leur propre discipline, dont elles sont le principal représentant. Mais La Média agit beaucoup plus efficacement auprés de la publique que par example SMF et SMAI en France ou IMS en Iran. Nous devons attirer l'attention des responsables de la média locale et internationale pour faire comprendre à tous que notre survie est une fonction de la collaboration et coopération entre différentes personnes et établissements d'état et privés, à l'intérieur d'un pays, ou à l'échelle internationale. Cette conviction exige des actions courageuses en dehors de toute tendence politique pour faire avancer la science telle qu'elle est conçue dans sa nature, c'est-à-dire la science sans frontière.

La réalisation de L'Explosion de Mathématique en est un exemple, comme le lecteur constate par jetant un coup d'œuil sur les pages de sa couverture reproduite ici. En guise d'un autre exemple, je citerais la présente traduction: elle est essentiellement le fruit de l'échange de vues durant la session de l' IMU en Août 2002, entre deux hommes de bonne volonté, Mehdi Behzad Président de l'IMS et Michel Waldschmidt Président de la SMF. Ensuite le Conseil Executif de l'IMS a approuvé la proposition de Behzad, selon laquelle on me confiait l'Explosion pour traduire en persan. Ceci fut l'occasion pour moi d'apprendre énormément par la lecture du texte, mais aussi par communications et échanges de courriers electroniques avec Waldschmidt lui-même et Behzad jusqu'à l'établissement

Introduction to the farsi translation of "L'Explosion des Mathématiques"

The goal of this booklet is to promote mathematics to a wide audience. The original text in french was published by the Société Mathématique de France (SMF) and the Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles (SMAI), who are the two major learned societies dedicated to mathematics in France. Several translations are being planned, including one in english, but farsi was the first proposal I received from Professors M. Behzad and A. Iranmanesh when I met them at the General Assembly of the International Mathematical Union (IMU) which met in Shanghai in August 2002. The french edition was a success when it was released in july 2002, especially among mathematics high school teachers. I trust that the farsi edition will meet the same success.

The situations in Iran and in France are not identical. In Iran you have *Mathematics Houses* in not less than 13 different cities outside Tehran, which play an efficient role in promoting our science toward the high school students. In France, apart from two scientific museums in Paris, "le Palais de la Découverte" and "le Musée des Sciences de la Villette", we have nothing similar. Several associations have been created by SMF and others are supported by SMF and SMAI (*Animath, Math en Jeans* for instance) whose goal is to help young people to enjoy their free time by doing mathematics; but we don't yet have the same infrastructure for that as has been developed in Iran.

On the other hand in France as well as in several other developed countries we face a lack of interest for scientific studies among the students. In the future we shall need more and more scientists having a solid theoretical background. Advanced technology for instance requires it. Hence we need to distribute, to as a large extend as possible, the information that mathematic is ubiquitous.

I hope that the translation of this brochure into farsi will contribute to this goal. I feel especially pleased to introduce it to you, since SMF and IMS are tightening their links. I feel confident that this process will expand.

Michel WALDSCHMIDT
Président de la Société Mathématique de France
miw@math.jussieu.fr
http://www.math.jussieu.fr/∼miw

l'explosion des
MATHEMATIQUES

Édition Persane

«ولی به چه درد می‌خورد؟»: این پرسش را غالباً دانش‌آموزان با معلمین خود در میان می‌گذارند. هنگامی که این سؤال از دهان بچه‌های کم سن و سال درمی‌آید کاملاً معقول و قابل قبول است، ولی وقتی از زبان افراد بالغ و متصدی مسئولیت‌های اجتماع شنیده می‌شود، نه تنها تعجب‌انگیز بلکه تأسف آور است.

درطول زمان، همواره ریاضیات با سایر فعالیت‌های انسانی، از جمله فعالیت‌های اداری، فنی، علمی و فرهنگی ارتباط داشته است. اما از حدود ۳۰ سال پیش، شاهد یک انفجار واقعی در زمینهٔ تعداد حوزه‌هایی هستیم که پیشرفته‌ترین پژوهشهای ریاضی از ملزومات آنها هستند.

از کدنگاری گرفته تا پردازش تصویر، از فروشهای مزایده‌ای گرفته تا صنایع هوانوردی، از دیسکهای نوری گرفته تا تلفن همراه، از فیزیک و از بینهایت کوچک گرفته تا ژنتیک مولکولی، از دنیای اقتصاد و امور مالی گرفته تا فناوری عالی، از دنیای آکادمیک تا جهان صنعت، کاربردهای ریاضیات، از شمار بیرون است و طیفی بیش از پیش وسیع را در برمی‌گیرد. در جهت عکس، مسائل مطرح شده در دنیای تکنولوژی، دنیای امور مالی و دنیای ژنتیک، که فقط به ذکر آنها برای اختصار بسنده می‌کنیم، به شکل دو جانبه موجب می‌شوند که نظریه‌های جدیدی در ریاضیات ابداع شوند و گسترش یابند.

مقالات مختلف این کتاب می‌خواهند به وضوح نشان دهند که حضور ریاضیات در همهٔ عرصه‌ها در دنیای امروز رو به افزایش است، و در عین حال نباید فراموش کرد که ریاضیات به‌عنوان نظامی که سرچشمهٔ دقت و شادمانی است از ملاحظات فلسفی و از آثار و بدایع هنری نیز الهام می‌گیرد.

SMF . SMAI