

اندیشه برتر

(مجموعه کامل، جامع و ماندگار ریاضات)
گسسته و جبر و احتمال + آمار

مؤلف:

احمد علی دارائی

مقدمه مولف

با ذکر نام و یاد خداوندی که انسان را آفرید ، انسانی که در طول دوران زندگیش برای رسیدن به کمال مطلوبی که مورد رضایت خداوند متعال است از هیچ کوششی و سعی دریغ نکرد.

من نیز به نوبه ی خود، بر آن شدم که پس از تالیف کتاب اندیشه برتر در ریاضیات پایه و دیفرانسیل در زمینه ی آنالیز ترکیبی، جبرو احتمال و گسسته نیز با استمداد از خداوند متعال و با درخواست دانش آموزان و همکاران محترم دستی بر تالیف ببرم، لذا درصدد تالیف کتاب حاضر که در دو جلد ارائه میشود برآمدم.

همان طور که پیداست و از اسم ریاضیات گسسته روشن است، این کتاب بخشی از ریاضیات است که با دیفرانسیل، حسابان و بخش های از ریاضیات عمومی کاملا متفاوت است.

و اما ویژگی این کتاب :

این کتاب قابل استفاده برای دانش آموزان رشته ریاضی و تجربی و بالخصوص کنکوری و دانشجویان محترم و همکاران عزیز می باشد جلد اول کتاب که شامل آموزش مباحث ریاضیات گسسته و جبرو احتمال در پنج فصل میباشد به همراه مبحث آمار آورده شده است.

در این کتاب سعی شده است مطالب از سطح ساده تا دشوار بیان شود، که تاثیر آن از زبانی ساده و شیوا همراه با مثال های زیاد در حین تالیف استفاده شده است و همچنین باید خدمت شما بزرگواران عرض کنم که این کتاب به زمان و مکان بستگی ندارد و با تغییر کتب درسی از ارزش آن نمی کاهد.

نحوی استفاده از کتاب:

باید بدانیم و بدانید که در درس ریاضیات گسسته و جبرو احتمال، مبحث آنالیز ترکیبی پیش نیاز مباحثی همچون گراف ، ترکیبیات و احتمال می باشد لذا خواشمند است از دانش آموزان و دانشجویان و همکاران محترم (جسارتا) برای مطالعه و استفاده ی بهینه از کتاب، ابتدا مبحث آنالیز ترکیبی را مطالعه نمایند، البته اگر شخصی در این مبحث تبحر لازم را داشت دیگر اختیار خواندن این مبحث را به خودش می سپارم با توجه به اینکه در کتاب درسی هر مبحث به صورت خیلی مختصر بیان شده است لذا خواشمند است با دیدن حجم زیاد مطالب، متعجب و حیرت زده نشوید چرا که هدف اینجانب از تالیف این کتاب بیان کلیه نکات لازم و تشریحی و تستی کنکوری همراه با جزئیات می باشد، البته کسانی که میخواهند از لحاظ علمی به بنییه ای قوی برسند و در کنکور موفقیت قابل توجه و شایان ذکری داشته باشند، متوجه عریض بنده هستند، امید است این کتاب همچون کتاب ریاضیات پایه و دیفرانسیل اندیشه برتر مورد توجه شما بزرگواران قرار گیرد.

و در پایان لازم میدانم از تمامی عزیزانی که در تالیف این کتاب اعم از چاپ و نگارش و کلیه کسانی که مرا در این راه همراهی کردند سپاس گذاری کنم .

واضح است که این کتاب در زمان تالیف با دقت و توجه ی که به عمل آمده خالی از اشکال و ایراد نیست لذا از کلیه عزیزانی که این کتاب را مطالعه می کنند صمیمانه تقاضا دارم اگر به معایبی برخوردید با دیده اغماض مطالب را ارزیابی نموده، بر من منت گذاشته و یا از طریق تلفن همراه بنده ۰۹۱۲۴۰۷۳۵۸۲ مرا از راهنمایی و انتقادات سازندهی خود بی نصیب نگذارید.

احمد علی دارائی

زمستان ۱۳۸۴

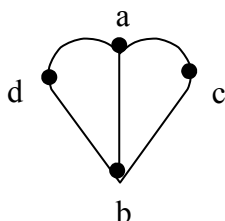
فهرست مطالب

فصل ۱	
گراف	۱
فصل ۲	
نظریه اعداد	۵۸
فصل ۳	
منطق ریاضی	۱۴۲
فصل ۴	
آنالیز ترکیبی و ترکیبیات	۱۹۷
فصل ۵	
احتمال	۲۴۸
فصل ۶	
آمار	۳۰۶

گراف :

تعریف شهودی گراف :

شکلی است که از تعدادی نقطه و تعدادی پاره خط یا کمان که این نقاط را به یکدیگر وصل می کنند ، تشکیل شده است .
مانند گراف زیر :



تعریف گراف (گراف ساده) :

یک گراف ساده در حقیقت یک زوج مرتب مانند $G = (V, E)$ است که در آن V مجموعه ای متناهی و نا تهی است و E مجموعه ای از مجموعه تمام زیر مجموعه های دو عضوی V است.

چند نکته مهم :

۱- V هرگز تهی نیست ولی E می تواند تهی باشد.۲- اعضای V را رأس یا گره می گوئیم ، مجموعه رأس های گراف G را با $V(G)$ نمایش می دهیم.۳- اعضای E را یال می گوئیم ، مجموعه یال های گراف G را با $E(G)$ نمایش می دهیم.۴- به تعداد اعضای V ، یعنی تعداد رئوس گراف ، مرتبه گراف گفته می شود و آن را با P نشان می دهیم.یعنی : $|V| = P$ ۵- به تعداد اعضای E ، یعنی تعداد یال های گراف ، اندازه گراف گفته می شود و آن را با q نشان می دهیم.یعنی : $|E| = q$

۶- اگر یالی دو رأس a و b را به یکدیگر وصل کند ، آن را به صورت ab یا $\{a, b\}$ نمایش می دهیم در این حالت می گوئیم رئوس a و b مجاورند.

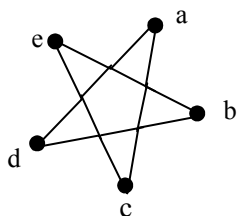
۷- به هر گراف می توان یک نمودار نسبت داد ، کافی است رأس های گراف را با نقاطی مجزا در صفحه به طور دلخواه مشخص کرده و سپس به ازاء هر یال $\{a, b\}$ یا ab ، دو نقطه a و b را با یک پاره خط یا کمان به هم وصل کنیم ، نمودار به دست آمده را نمودار گراف می گویند.

✓ تذکر مهم : نمودار یک گراف منحصر به فرد نیست ، به مثال زیر توجه کنید.

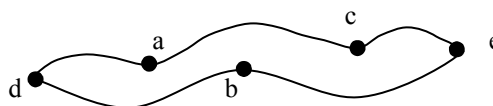
مثال : نمودار گراف $G = (\{a, b, c, d, e\}, \{ad, ac, bd, be, ce\})$ را رسم کنید؟

$$\begin{cases} V(G) = \{a, b, c, d, e\} \\ E(G) = \{ad, ac, bd, be, ce\} \end{cases}$$

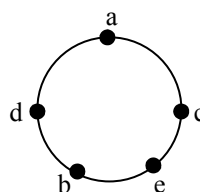
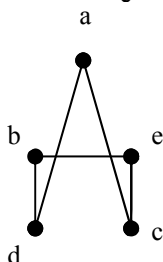
هر یک از نمودار های زیر ، نمودار گراف فوق هستند.



یا



یا



✓ **تذکر مهم :** دقت کنید که یال ac با یال ca فرقی ندارد.

✓ **تذکر مهم :** لزومی ندارد که محل برخورد دو یال ، رأسی از گراف باشد.

گراف های یک ریخت :

دو گراف را که دارای مجموعه ی رؤس و مجموعه ی یال های یکسان باشند یک ریخت می نامیم ، به عبارت دیگر دو گراف، یک گراف هستند ، اما از لحاظ نمودار ، ظاهراً با هم فرق دارند ، به عنوان مثال چهار گراف رسم شده در فوق یک ریخت هستند.

✓ **تذکر مهم :** تشخیص یک ریخت بودن دو گراف ، به خصوص اگر رؤس آنها نام گذاری نشده باشند دقت بیشتری را می طلبد و همیشه به سادگی ممکن نیست.

تست : تعداد رؤس و یال های گراف $G = (V, E)$ که $V = \{V_1, V_2, \dots, V_6\}$ و $E = \{V_1V_2, V_1V_3, V_2V_6, V_4V_5\}$ به ترتیب عبارتند از :

(۱) 4 و 6 (۲) 5 و 6 (۳) 6 و 4 (۴) 6 و 8

حل : واضح است که تعداد رؤس برابر 6 (تعداد اعضای V) و تعداد یال ها برابر 4 (تعداد اعضای E) می باشد ، لذا گزینه ۳ درست است.

✓ **نکته مهم :** حداکثر تعداد گراف های ساده که با P رأس می توان ساخت برابر است با :

$$2^{\binom{P}{2}} = 2^{\frac{P(P-1)}{2}}$$

یعنی با P رأس می توان به اندازه $2^{\frac{P(P-1)}{2}}$ گراف ساده ساخت.

یادآوری :

$$\binom{P}{2} = \frac{P!}{2!(P-2)!} = \frac{P(P-1)}{2}$$

اثبات : وجود یا عدم وجود هر یالی در یک گراف ، باعث وجود 2 گراف مختلف می شود ، لذا تعداد گراف های مختلف به وجود آمده ، طبق اصل ضرب برابر است با :

$$\underbrace{2 \times 2 \times \dots \times 2}_P = 2^{\binom{P}{2}} = 2^{\frac{P(P-1)}{2}}$$

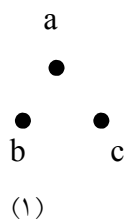
$$\binom{P}{2} \text{ مرتبه}$$

مثال : تعداد کل گراف های ساده با 3 رأس را مشخص نموده و آنها را رسم کنید؟

پاسخ : تعداد این گراف ها برابر است با :

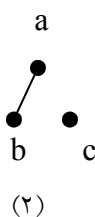
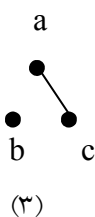
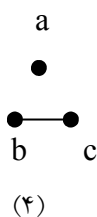
$$2^{\binom{3}{2}} = 2^3 = 8$$

این ۸ گراف را به تفکیک در زیر رسم کرده ایم :

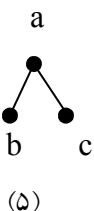
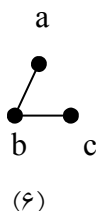
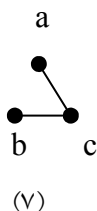


الف) گراف بدون یال :

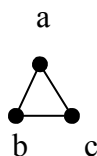
ب) گراف های با یک یال :



ج) گراف های با دو یال :



د) گراف با سه یال :



✓ نکته ۱: حداکثر تعداد یال های یک گراف ساده P رأسی برابر است با $\frac{P(P-1)}{2}$

$$q_{\max} = \binom{P}{2} = \frac{P(P-1)}{2}$$

(این در حالتی است که همه رئوس گراف با هم مجاور باشند).

$$0 \leq q \leq \frac{P(P-1)}{2}$$

لذا :

اثبات : می دانیم اگر مجموعه ای p عضو داشته باشد ($P \in \mathbb{N}$) ، تعداد زیر مجموعه های دو عضوی آن برابر است

با $\binom{P}{2}$ یا $\frac{P(P-1)}{2}$ ، به عبارت دیگر تعداد پاره خط هایی که از وصل کردن دو به دو ی p نقطه به دست می آید برابر است

با: $\binom{P}{2} = \frac{P(P-1)}{2}$ لذا اگر گرافی p رأس و q یال داشته باشد ، همواره داریم :

$$0 \leq q \leq \frac{P(P-1)}{2}$$

تست : مرتبه یک گراف ساده ، 6 می باشد ، کدام عدد نمی تواند اندازه این گراف باشد؟

0(۴)

6(۳)

12(۲)

18(۱)

$$P = 6 \Rightarrow q \leq \frac{P(P-1)}{2} = \frac{6(6-1)}{2} = 15$$

پاسخ :

لذا یک گراف 6 رأسی حداکثر 15 یال دارد و بنابراین گزینه ۱ درست است.

✓ نکته ۲: تعداد کل گراف های ساده P رأسی که دارای m یال می باشند برابر است با :

$$\binom{q_{\max}}{m} = \binom{\binom{P}{2}}{m} = \binom{\frac{P(P-1)}{2}}{m}$$

تست: چند گراف ساده از مرتبه 6 می توان ساخت به طوری که 10 یال داشته باشد؟

$$\binom{10}{6} \quad (۱) \quad \binom{15}{6} \quad (۲) \quad \binom{15}{5} \quad (۳) \quad \binom{6}{2} - 10 \quad (۴)$$

پاسخ: گزینه ۳ صحیح است زیرا :

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!(6-2)!} = 15 \Rightarrow \binom{15}{10} = \binom{15}{5}$$

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} \Rightarrow \binom{15}{10} = \binom{15}{5}$$

یادآوری:

✓ نکته ۳: تعداد کل گراف های ساده P رأسی که m یال داشته باشند و n یال به خصوص جزو این m یال باشند

$$\binom{\binom{P}{2} - n}{m - n}$$

برابر است با :

اثبات: می خواهیم گراف مورد نظر m یال داشته باشد ، اما n یال از این m یال قبلاً انتخاب شده اند ، لذا کافی

است $m - n$ یال باقی مانده را از بین $\binom{P}{2} - n$ یال دیگر انتخاب کنیم ، تعداد این انتخاب ها برابر است با :

$$\binom{\binom{P}{2} - n}{m - n}$$

تست: چند گراف از مرتبه 6 با 10 یال می توان ساخت به طوری که 2 یال خاص ، جزو این 10 یال باشند؟

$$9 \times 11 \times 13 \quad (۱) \quad 7 \times 9 \times 13 \quad (۲) \quad 7 \times 11 \times 13 \quad (۳) \quad 7 \times 9 \times 11 \times 13 \quad (۴)$$

پاسخ: کافی است 8 یال باقی مانده را از بین $\binom{6}{2} - 2$ یال باقی مانده انتخاب کنیم یعنی :

$$\binom{\binom{6}{2} - 2}{10 - 2} = \binom{13}{8} = \frac{13!}{8!5!} = 9 \times 11 \times 13$$

✓ نکته ۴: تعداد کل گراف های ساده P رأسی که m یال داشته باشند و n یال به خصوص جزو این m یال نباشند

$$\binom{\binom{P}{2} - n}{m}$$

عبارت است از :

اثبات: می خواهیم گراف مورد نظر m یال داشته باشد ، اما n یال به خصوص جزو این m یال نباشند ، لذا کافی است m

$$\binom{\binom{P}{2} - n}{m}$$

یال را از بین $\binom{P}{2} - n$ یال دیگر انتخاب کنیم ، تعداد این انتخاب ها برابر است با :

تست: چند گراف از مرتبه 6 و اندازه 10 می توان ساخت که 2 یال به خصوص در آن نباشند؟

$$\binom{13}{10} \quad (۴)$$

$$\binom{15}{8} \quad (۳)$$

$$\binom{13}{8} \quad (۲)$$

$$\binom{15}{10} \quad (۱)$$

پاسخ : گزینه ۴ صحیح است.

$$\binom{6}{2} = 15 \Rightarrow \binom{\binom{6}{2} - 2}{10} = \binom{13}{10}$$

✓ نکته ۵: تعداد گراف های ساده از مرتبه P به طوری که شامل n_1 یال خاص بوده و n_2 یال خاص در آن نباشند

$$2^{\binom{P}{2} - n_1 - n_2}$$

برابر است با:

تست: تعداد گراف های ساده از مرتبه 6 که شامل 2 یال به خصوص بوده و 3 یال خاص در آن نباشند برابر است با:

$$2^{\binom{6}{2}} \quad (۴)$$

$$2^{13} \quad (۳)$$

$$2^{10} \quad (۲)$$

$$2^{12} \quad (۱)$$

پاسخ :

$$\binom{P}{2} = \binom{6}{2} = 15 \Rightarrow 2^{\binom{P}{2} - n_1 - n_2} = 2^{15 - 2 - 3} = 2^{10}$$

مرتبه ، اندازه :

تعریف: در هر گراف مانند $G = (V, E)$ ، تعداد اعضای مجموعه V را مرتبه گراف G و تعداد اعضای مجموعه E را اندازه گراف G می نامیم و معمولاً آنها را به ترتیب با p و q نمایش می دهیم ، مرتبه G را با $P(G)$ و اندازه آن را با

$$\begin{cases} n(V) = |V| = P(G) = P \\ n(E) = |E| = q(G) = q \end{cases} \quad q(G) \text{ نمایش می دهیم ، بنابراین داریم :}$$

✓ نکته مهم: p همواره عددی بزرگتر یا مساوی یک است (زیرا در تعریف گراف دیدیم که مجموعه V باید غیر خالی باشد ، یعنی حداقل 1 عضو داشته باشد).

درجه :

تعریف: درجه رأس v از گراف G ، برابر تعداد یال هایی از G است که از رأس v می گذرند به عبارت دیگر درجه رأس v ، برابر تعداد رؤس مجاور با v است ، این عدد را با $\deg_G^v$ و گاهی به اختصار با $\deg^v$ نمایش می دهیم.

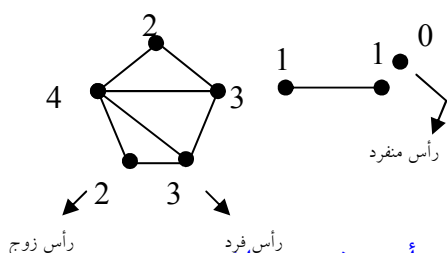
رأس فرد و رأس زوج :

اگر درجه رأسی فرد باشد ، آن رأس را رأس فرد و اگر درجه اش زوج باشد ، آن رأس را رأس زوج می نامیم.

رأس منفرد یا ایزوله یا تنها :

رأسی که درجه اش صفر باشد ، رأس ایزوله یا منفرد نامیده می شود.

مثال: درگراف زیر ، درجه هر رأس کنار آن نوشته شده است.



در گراف فوق ، 4 رأس زوج و 4 رأس فرد وجود دارد ، ضمناً از 4 رأس زوج یک رأس منفرد می باشد.

جمعوند فرد و جمعوند زوج :

به مجموع درجات رئوس فرد گراف ، جمعوند فرد گراف می گویند و به مجموع درجات رئوس زوج گراف ، جمعوند زوج گراف می گویند.

مثال : در گراف مثال قبل داریم :

$$\text{جمعوند فرد} = 3 + 3 + 1 + 1 = 8$$

$$\text{جمعوند زوج} = 0 + 2 + 4 + 2 = 8$$

✓ **نکته :** در یک گراف ساده P رأسی ، درجه هر رأس حداقل 0 و حداکثر $P-1$ است.

$$0 \leq \deg v_i \leq P-1$$

یعنی :

در واقع زمانی که به هیچ رأسی وصل نشده باشد درجه اش 0 و زمانی که به تمام رئوس دیگر (که تعدادشان $P-1$ رأس است) وصل شده باشد ، درجه اش $P-1$ می باشد.

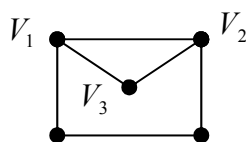
قضیه مهم : اگر $V = \{V_1, V_2, \dots, V_P\}$ ، مجموعه رأس های گراف G با اندازه q باشد آنگاه $\sum_{i=1}^P \deg v_i = 2q$ ، یعنی

مجموع درجات رئوس هر گراف دو برابر تعداد یال های آن است.

اثبات : می دانیم هر یال دو سر دارد ، یعنی دقیقاً از دو رأس G می گذرد بنابراین هنگامی که درجات رئوس گراف را جمع می کنیم ، هر یال دو بار به حساب می آید ، لذا :

$$\sum_{i=1}^P \deg v_i = 2q$$

مثال : درستی قضیه فوق را در گراف مقابل تحقیق کنید؟



$$\sum_{i=1}^5 \deg V_i = \deg V_1 + \deg V_2 + \deg V_3 + \deg V_4 + \deg V_5$$

$$= 3 + 3 + 2 + 2 + 2$$

$$= 12$$

(۱)

$$\text{تعداد یال ها} = q = 6 \Rightarrow 2q = 12 \quad (۲)$$

$$(۲) \text{ و } (۱) \Rightarrow \sum_{i=1}^P \deg V_i = 2q$$

دقت کنید که یال V_1V_3 ، دو رأس V_1 و V_3 را به هم متصل می کند ، لذا این یال در درجه رأس V_1 یک بار و در درجه رأس V_3 نیز یک بار به حساب می آید.

قضیه بسیار بسیار مهم : تعداد رئوس فرد هرگراف ، زوج است.

اثبات : فرض می کنیم $V = \{V_1, V_2, \dots, V_P\}$ مجموعه رأس های گراف G با اندازه q باشد ، طبق قضیه قبل داریم :

$$(۱) \quad \sum_{i=1}^P \deg V_i = 2q \quad \text{حال اگر رأس های فرد } G \text{ را با } V'_i \text{ و رأس های زوج آن را با } V''_i \text{ نمایش دهیم داریم :}$$

مجموع درجات رئوس زوج آن + مجموع درجات رئوس فرد گراف = مجموع درجات رئوس گراف

یعنی :

$$\sum_{i=1}^P \deg V_i = \underbrace{\sum_{i=1}^n \deg V_i'}_{\text{جمعوند فرد}} + \underbrace{\sum_{i=1}^m \deg V_i''}_{\text{جمعوند زوج}}, (n+m=P) \quad (2)$$

$$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow \sum_{i=1}^n \deg V_i' + \sum_{i=1}^m \deg V_i'' = 2q$$

$$\sum_{i=1}^n \deg V_i' = 2q - \sum_{i=1}^m \deg V_i''$$

می دانیم مجموع چند عدد زوج ، عددی زوج است لذا $\sum_{i=1}^m \deg V_i''$ زوج است و بنابراین سمت راست تساوی فوق نیز عددی زوج است (زیرا $2q$ زوج است و تفاضل دو عدد زوج عددی زوج می شود) بنابراین سمت چپ تساوی نیز عددی زوج است. لذا طبق نکته ی زیر :

✓ **نکته :** هرگاه حاصل جمع تعدادی عدد فرد ، عددی زوج شده باشد ، آنگاه نتیجه می شود که تعداد این اعداد فرد ، زوج بوده است.

نتیجه می شود که n عددی زوج بوده است ، یعنی تعداد رئوس فرد (V_i' ها) زوج بوده است.

✓ **نکته :** تعداد رئوس زوج هر گراف ، می تواند عددی زوج یا فرد باشد ، اما توجه داشته باشید که وقتی مرتبه گراف ، فرد باشد ، تعداد رئوس زوج باید فرد باشد و وقتی مرتبه گراف زوج باشد ، تعداد رئوس زوج باید زوج باشد ، لذا زوج یا فرد بودن تعداد رئوس ، به مرتبه گراف بستگی دارد.

مثال : گرافی رسم کنید که دنباله درجات رئوس آن 3 ، 2 ، 1 ، 1 باشد؟

پاسخ : چنین گرافی وجود ندارد ، زیرا تعداد رئوس فرد آن فرد است.

تست : با کدام اطلاعات زیر می توان گرافی ساده ساخت؟

(۱) 7 رأس از درجه 3 و 4 رأس از درجه 2 (۲) 5 رأس از درجه 2 و 7 رأس از درجه 3

(۳) 4 رأس از درجه 3 و 5 رأس از درجه 1 (۴) 5 رأس از درجه 1 و 7 رأس از درجه 3

پاسخ : جواب صحیح گزینه (۴) می باشد. زیرا :

$$\sum_{i=1}^P \deg V_i = 5 \times 1 + 7 \times 3 = 26 = 2q$$

در مورد سه گزینه دیگر داریم :

گزینه ۱ $\rightarrow 7 \times 3 + 4 \times 2 = 29 \neq 2q$

گزینه ۲ $\rightarrow 5 \times 2 + 7 \times 3 = 31 \neq 2q$

گزینه ۳ $\rightarrow 4 \times 3 + 5 \times 1 = 17 \neq 2q$

راه دیگر : تعداد رئوس فرد در گزینه های 1 ، 2 و 4 فرد است ، لذا این سه گزینه نادرست می باشند.

تست : کدام گزینه درست است؟

(۱) تعداد رئوس فرد هر گراف ، زوج است. (۲) تعداد رئوس زوج هر گراف ، زوج است.

(۳) تعداد رئوس فرد هر گراف ، فرد است. (۴) تعداد رئوس زوج هر گراف ، فرد است.

پاسخ : جواب صحیح طبق قضیه‌ی قبل ، گزینه (۱) می باشد.

تست : در یک گراف از مرتبه 14 و اندازه 25 ، که فقط دارای رئوس درجه 3 و 5 است ، تعداد رئوس درجه 3 کدام است؟

(۱) 10 (۲) 9 (۳) 4 (۴) 8

پاسخ : فرض می کنیم x تعداد رئوس درجه 3 و y تعداد رئوس درجه 5 باشد ، لذا با توجه به اینکه $P = 14$ و $q = 25$ است داریم :

$$\begin{cases} x + y = P = 14 \\ 3x + 5y = 2q = 50 \end{cases} \Rightarrow x = 10, y = 4 \Rightarrow x = 10$$

گزینه (۱) صحیح است.

دنباله درجات رئوس گراف:

دنباله ای است که هر جمله آن درجه رئوس از گراف می باشد ، به طوری که تعداد جملات آن برابر با تعداد رئوس گراف است، معمولاً برحسب قرار داد ، جملات دنباله را از بزرگ به کوچک (به ترتیب نزولی یا نا صعودی) می نویسیم.

ماکسیمم و مینیمم درجه G :

بزرگترین عدد در بین درجات رئوس گراف G (اولین عدد از سمت چپ در دنباله درجات رئوس گراف) را ماکسیمم درجه G می نامیم و آن را با $\Delta(G)$ یا به طور ساده با Δ نمایش می دهیم و کوچکترین عدد در بین درجه های رئوس گراف G (آخرین عدد از سمت چپ در دنباله درجات رئوس گراف) را می نیمم درجه G می نامیم و آن را با $\delta(G)$ یا به طور ساده با δ نمایش می دهیم.

✓ **نکته مهم :** در هر گراف ساده P رئوس داریم : $0 \leq \delta, \Delta \leq P-1$

✓ **نکته مهم :** یک دنباله از اعداد به شرطی می تواند ، دنباله درجات رئوس یک گراف ساده باشد (به عبارت معادل می گویند یک دنباله از اعداد به شرطی گرافیکی یا گرافیکال می باشد) که در 3 شرط زیر صدق کند.

(۱) مجموع درجات رئوس ، زوج باشد ، یعنی مجموع جملات دنباله زوج باشد.

(۲) تعداد رئوس فرد ، زوج باشد.

(۳) در یک گراف P رئوس ، $0 \leq \delta, \Delta \leq P-1$

✓ **نکته مهم :** اگر دنباله درجات رئوس گرافی معلوم باشد ، مرتبه گراف (یعنی P) برابر تعداد جملات گراف است و اندازه گراف (یعنی q) برابر نصف مجموع جملات دنباله است.

$$\left(\sum_{i=1}^P \deg V_i = 2q \Rightarrow q = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^P \deg V_i \right)$$

نکاتی مهم راجع به دنباله درجات رئوس یک گراف :

۱- تعداد اعضای دنباله ، همان مرتبه گراف یعنی P می باشد.

۲- مجموع جملات دنباله ، همان مجموع درجات همه رئوس بوده ، لذا باید همواره عددی زوج باشد (زیرا می دانیم:

$$\sum_{i=1}^P \deg V_i = 2q \text{ و نصف این عدد ، اندازه گراف می باشد.}$$

۳- در دنباله درجات ، نباید عددی بزرگتر از $P-1$ وجود داشته باشد ، زیرا گراف P رئوس ، رأس درجه P و بیشتر از P ندارد. (به عبارت دیگر Max درجه رئوس $P-1$ می باشد).

۴- در دنباله درجات ، اعداد 0 و $P-1$ با هم نمی توانند وجود داشته باشند به عبارت دیگر ، اگر در یک گراف ساده P رئوس ، درجه یک رأس $P-1$ باشد ، در این صورت گراف نمی تواند راس ایزوله (رأسی از درجه 0) داشته باشد ، به همین ترتیب اگر 2 رأس از درجه $P-1$ داشته باشد ، نمی تواند رأس از درجه 1 داشته باشد ، به استقراء ثابت می

شود که :

۵- اگر گرافی k رأس از درجه $P-1$ داشته باشد ، در این صورت نمی تواند رأسی از درجه $k-1$ داشته باشد ، به عبارت دیگر ، درجه هر رأس آن ، باید حداقل برابر k باشد ، لذا اگر در دنباله ، k بار عدد $P-1$ مشاهده شود نباید عددی کوچکتر از k در آن باشد یعنی در این حالت همواره داریم:

$$\delta \geq k$$

۶- اگر n بار عدد 0 مشاهده شود نباید عددی بزرگتر از $(P-n-1)$ ، دیده شود.

۷- هر گرافی که بیش از یک رأس داشته باشد ، باید حداقل 2 رأس هم درجه داشته باشد ، یعنی در دنباله درجات چنین گرافی، درجه تمام رئوس نمی توانند اعداد دو به دو متمایز باشند ، به عبارت دیگر در چنین گرافی باید حداقل 2 رأس درجه یکسان وجود داشته باشد.

۸- تعداد جملات فرد دنباله باید حتماً زوج باشد.

۹- دنباله ای که فقط یک رأس (یک جمله) داشته باشد ، مسیری به طول صفر دارد.

تذکر : تعریف مسیر را در قسمت های بعدی ، ببینید.

مثال : گرافی رسم کنید که دنباله درجات رئوس آن 2، 2، 3، 3، 5 باشد؟

پاسخ : طبق نکته فوق چنین گرافی وجود ندارد زیرا ماکسیمم درجه رئوس یک گراف 5 رأسی ، $P-1=4$ می باشد و لذا عدد 5 نمی تواند یکی از جملات دنباله باشد ، از طرفی تعداد رئوس فرد گراف ، فرد است لذا چنین گرافی وجود ندارد .

مثال : گرافی رسم کنید که دنباله درجات رئوس آن 0، 1، 2، 3 باشد؟

پاسخ : طبق نکته 4 ، چنین گرافی وجود ندارد ، زیرا $P=4$ رأس دارد که درجه یک رأس آن $P-1=3$ است لذا در این گراف ، نباید رأسی ایزوله وجود داشته باشد.

تست : مقدار x چند باشد تا دنباله 1، 2، x ، 3 بتواند دنباله درجات رئوس یک گراف باشد؟

0(۱) 1(۲) 2(۳) 3(۴)

پاسخ : گزینه ۳ صحیح است ، اگر $x=1$ یا 3 باشد ، آنگاه تعداد رئوس فرد گراف فرد می شود ، ضمناً x ، صفر نمی تواند باشد زیرا $P=4$ و گراف رأسی از درجه $P-1=3$ دارد.

تست : کدام دنباله زیر گرافیکی است؟

0(۱) 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7 (۲) 3، 3، 3، 4، 4، 4 (۳)

1، 1، 1، 4، 4، 9 (۴) 3، 3، 3، 3، 3، 3 (۵)

پاسخ : گزینه ۴ صحیح است . در گزینه ۱ ، $P=8 \geq 2$ ، جمله تکراری نداریم ، در گزینه ۲ ، تعداد رئوس فرد گراف فرد است ، در گزینه ۳ ، $P=9$ و گراف نباید رأسی از درجه P داشته باشد.

تست : کدام دنباله می تواند دنباله درجات رئوس یک گراف باشد؟

0(۱) 0، 2، 3، 4، 5 (۲) 0، 2، 3، 3، 5 (۳)

0، 2، 2، 3، 4 (۴) 0، 2، 2، 3، 3 (۵)

پاسخ : گزینه ۴ پاسخ صحیح است ، گزینه های 1 و 2 ، 5 رأس دارند (زیرا 5 جمله دارند، ضمن اینکه در گزینه ۱) جمله تکراری نداریم.) و لذا نباید رأسی از درجه 5 داشته باشند ، در گزینه 3 چون $P=5$ و رأسی از درجه $P-1=4$ داریم لذا نباید رأسی ایزوله داشته باشیم.

تست : دنباله درجات رئوس یک گراف با اندازه 14 به صورت 2، 2، 2، y ، x ، 5، 6، 6 است ، y کدام است؟

1(۱) 2(۲) 3(۳) 4(۴)

پاسخ : می دانیم :

$$\sum_{i=1}^P \deg V_i = 2q \Rightarrow 6+6+5+x+y+2+2+2 = 2 \times 14 = 28$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y = 5 \\ 2 \leq y \leq x \leq 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow y = 2$$

قضیه: در هر گراف از مرتبه $P \geq 2$ ، حداقل دو رأس با درجه مساوی وجود دارد (این قضیه، همان نکته ی 7 است)

اثبات: فرض می کنیم G گرافی از مرتبه $P \geq 2$ باشد، دیدیم که حداقل درجه هر رأس 0 و حداکثر آن $P-1$ است، حال اگر درجه یکی از رئوس گراف 0 باشد (به عبارت دیگر، یک رأس با هیچ یک از رئوس دیگر مجاور نباشد)، آنگاه درجه هیچ رأسی از گراف $P-1$ نخواهد بود، همچنین اگر درجه یکی از رئوس گراف 1 باشد (به عبارت دیگر، این رأس فقط با یک رأس دیگر مجاور باشد)، آنگاه درجه هیچ رأسی از گراف $P-2$ نخواهد بود، لذا درجات رئوس یک گراف یا بین 1 تا $P-1$ و یا بین 0 تا $P-2$ خواهند بود و در هر حالت تعداد حالات های مختلف برای درجات رئوس یک گراف، $P-1$ عدد مختلف خواهد بود، در حالی که تعداد رئوس گراف برابر p است، چون $P > P-1$ ، لذا طبق اصل لانه کبوتری، حداقل دو رأس با درجه یکسان وجود خواهد داشت.

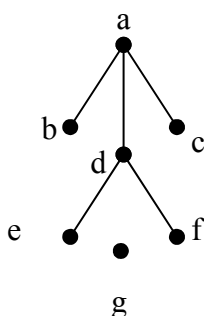
رأس Max و رأس Min:

هرگاه در یک گراف، رأس یا رأس هایی باشند به طوری که بیشترین درجه را داشته باشند، در این صورت این رأس ها را رئوس Max می نامند و درجه آنها را با Δ نمایش می دهند، همچنین هرگاه رأس یا رأس هایی باشند به طوری که کمترین درجه را داشته باشند، در این صورت این رأس ها را رئوس Min می نامند و درجه آنها را با δ نمایش می دهند، ضمناً همواره داریم: $0 \leq \delta \leq \deg V_i \leq \Delta \leq P-1$

✓ **تذکر:** یک گراف می تواند چند رأس از درجه ی Max و یا چند رأس از درجه ی Min داشته باشد.

مثال: در شکل مقابل رئوس Max و Min و Δ و δ را تعیین کنید؟

پاسخ: رئوس Max عبارتند از a و d و رأس Min عبارت است از g ضمناً $\Delta = 3$ و $\delta = 0$.



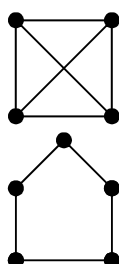
تست: در یک گراف مرتبه 20، 8 رأس درجه صفر وجود دارد، حداکثر درجه رئوس این گراف کدام است؟

- (۱) 9 (۲) 10 (۳) 11 (۴) 19

پاسخ:

$$20 - 8 = 12 \Rightarrow \Delta = \text{Max}(\deg V_i) = 12 - 1 = 11$$

تذکر: در یک گراف ممکن است هر رأس، هم رأس Max باشد هم رأس Min، به مثال های زیر توجه کنید:



$$\Rightarrow \delta = \Delta = 3$$

$$\Rightarrow \delta = \Delta = 2$$

✓ نکته مهم : در یک گراف ساده P رأسی ، میانگین درجات رئوس برابر است با :

$$\frac{\sum_{i=1}^P \deg V_i}{P} \quad \text{یا} \quad \frac{2q}{P}$$

✓ نکته مهم : میانگین درجات رئوس یک گراف ساده P رأسی ، همواره در رابطه زیر صدق می کند :

$$\delta \leq \frac{2q}{P} \leq \Delta$$

یا :

$$P\delta \leq 2q \leq P\Delta$$

اثبات :

$$\delta \leq \deg V_1 \leq \Delta$$

$$\delta \leq \deg V_2 \leq \Delta$$

⋮

$$\delta \leq \deg V_p \leq \Delta$$

$$+ \frac{\quad}{P\delta \leq \sum_{i=1}^P \deg V_i \leq P\Delta}$$

$$\Rightarrow P\delta \leq 2q \leq P\Delta \Rightarrow \delta \leq \frac{2q}{P} \leq \Delta$$

✓ تذکر مهم : البته این طبیعی است که میانگین درجات رئوس هر گراف ، همواره بین δ و Δ باشد ، چرا که میانگین چند عدد همواره بین کوچکترین و بزرگترین آنها قرار دارد.

تست : اگر میانگین درجات رئوس یک گراف $1/99$ و $q = P - 1$ باشد ، مرتبه گراف کدام است؟

199 (۱) 200 (۲) 201 (۳) 202 (۴)

پاسخ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2q}{P} = 1/99 \Rightarrow P = \frac{2q}{1/99} \\ q = P - 1 \Rightarrow P = q + 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{2q}{1/99} = q + 1$$

$$2q = 1/99 q + 1/99 \Rightarrow 0/01 q = 1/99 \Rightarrow q = 199 \Rightarrow P = q + 1 = 200$$

تست : کمترین درجه رئوس در یک گراف ساده 8 رأسی مساوی 5 است ، این گراف ، دست کم چند یال باید داشته باشد؟

21 (۱) 20 (۲) 19 (۳) 22 (۴)

پاسخ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta = 5 \\ P = 8 \end{array} \right\} \Rightarrow \delta \leq \frac{2q}{P} \Rightarrow 5 \leq \frac{2q}{8} \Rightarrow q \geq 20$$

پس باید حداقل 20 یال داشته باشد.

تست : در گرافی که دارای 17 یال است بیشترین درجه رئوس مساوی 5 است ، این گراف ، دست کم چند رأس باید داشته باشد؟

6 (۱) 8 (۲) 9 (۳) 7 (۴)

پاسخ :

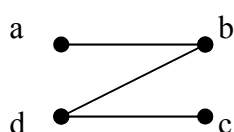
$$\begin{cases} \Delta=5 \\ q=17 \end{cases} \Rightarrow \frac{2q}{P} \leq \Delta \Rightarrow \frac{34}{P} \leq 5 \Rightarrow 5P \geq 34 \Rightarrow P \geq \frac{34}{5} = 6.8 \xrightarrow{P \in \mathbb{N}} P = 7$$

پس باید حداقل 7 رأس داشته باشد.

گراف بازه ها :

هرگاه رأس های یک گراف ، بازه هایی باز و غیر خالی از اعداد حقیقی باشند و ضمناً دو رأس در صورتی به یکدیگر متصل باشند (به عبارت دیگر مجاور باشند) که بازه های نظیر آن دو رأس با یکدیگر اشتراک داشته باشند ، در این صورت این گراف را گراف بازه ها می گویند.

مثال : هرگاه $a = (1,3)$ و $b = (2,5)$ و $c = (6,11)$ و $d = (4,7)$ ، آنگاه گراف بازه ای منسوب به $\{a,b,c,d\}$ عبارت است از :



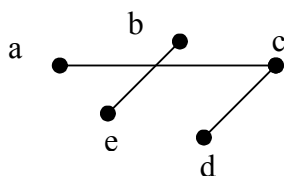
دقت کنید که چون رأس a با رأس b اشتراک دارد یعنی :

$$(1,3) \cap (2,5) \neq \emptyset$$

رئوس a و b به هم متصل شده اند اما به این دلیل که رأس a با رأس c اشتراکی ندارد یعنی :

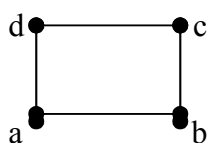
$$(1,3) \cap (6,11) = \emptyset$$

بین دو رأس a و c یالی وجود ندارد.

مثال : با معرفی 5 بازه مناسب ، نشان دهید که گراف شکل مقابل را می توان گراف بازه ها دانست؟**پاسخ :** کافی است $a = (1,3)$ ، $b = (-2,0)$ ، $c = (2,4)$ ، $d = (3,5)$ ، $e = (-3,-1)$ اختیار کنیم .

✓ **نکته مهم :** در حالت کلی تشخیص اینکه ، گرافی می تواند گراف بازه ها باشد بسیار مشکل است اما هرگاه گرافی از بازه ها ، تشکیل چهار ضلعی ، پنج ضلعی ، ... دهد ، لازم است حداقل یکی از قطر های آن ، حتماً یالی از گراف باشد (این مطلب به سادگی قابل اثبات است).

به عبارت دیگر می توان گفت که هر گرافی که چهار ضلعی بدون قطر باشد ، بازه ای نیست و به طور کلی هر گراف که شامل یک n ضلعی ($n \geq 4$) بدون قطر (حفره) باشد بازه ای نیست.

✓ **تذکر :** هر n ضلعی ($n \geq 4$) بدون قطر را یک حفره می گویند.**مثال :** ثابت کنید گراف زیر یک گراف بازه ای نیست.

اثبات : فرض می کنیم گراف فوق ، گرافی بازه ای باشد (فرض خلف) لذا بازه هایی غیر خالی از اعداد حقیقی مانند $a = (x_1, y_1)$ ، $b = (x_2, y_2)$ ، $c = (x_3, y_3)$ و $d = (x_4, y_4)$ را می توان برای گراف در نظر گرفت به طوری که :

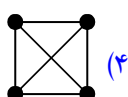
$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4$$

$$\left. \begin{aligned} \Rightarrow (x_1, y_1) \cap (x_4, y_4) \neq \emptyset &\Rightarrow x_1 \leq x_4 \langle y_1 \\ \Rightarrow (x_1, y_1) \cap (x_3, y_3) = \emptyset &\Rightarrow x_1 < y_1 \leq x_3 \end{aligned} \right\}$$

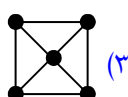
$$\Rightarrow x_4 < y_1 \leq x_3 \Rightarrow x_4 \langle x_3$$

نا مساوی به دست آمده با فرض اولیه $x_3 \leq x_4$ در تناقض می باشد ، لذا فرض خلف باطل و در نتیجه گراف فوق ، گرافی بازه ای نیست.

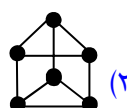
تست : کدام گراف زیر می تواند گراف بازه ای باشد؟



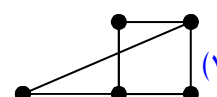
(4)



(3)



(2)

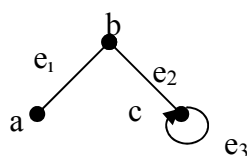


(1)

پاسخ : طبق نکته فوق گزینه 4 جواب تست است.

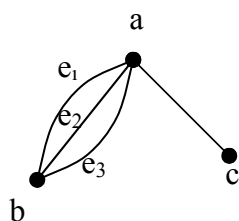
حلقه (طوقه) :

یالی که یک رأس را به خودش وصل می کند ، حلقه (طوقه) نامیده می شود ، به عبارت دیگر ، یالی که دو انتهایش بر هم منطبق می باشند مانند حلقه e_3 در گراف مقابل :



یال چندگانه (یال های موازی) :

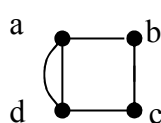
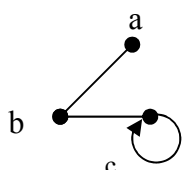
دو یا چند یال را موازی گوئیم ، هرگاه نقاط ابتدا و انتهای آنها ، یکسان باشند مانند یال های e_1 و e_2 و e_3 در گراف زیر :



تعریف گراف چندگانه :

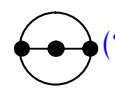
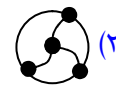
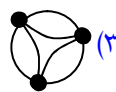
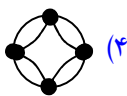
گرافی که شامل طوقه و یا یال چندگانه باشد را گراف چندگانه می گوئیم ، به عبارت دیگر هرگاه در یک گراف ، حداقل دو رأس وجود داشته باشند به طوری که با بیش از یک یال به هم مربوط شده باشند و یا اینکه حداقل یک رأس وجود داشته باشد که طوقه داشته باشد ، گراف را چندگانه می گوئیم.

مثال : گراف های زیر ، گراف هایی چندگانه اند.



✓ **تذکر مهم :** گراف های ساده ، طوقه و یال های موازی ندارند : (تعریف گراف ساده)

تست : کدام گزینه یک گراف ساده است؟



پاسخ : گزینه ۲ صحیح است زیرا بین هر دو رأس ، حداکثر ۱ یال وجود دارد.

گراف منفرد (ایزوله یا بدیهی) : گرافی است مانند $G = (V, E)$ که در آن مجموعه V ، فقط از یک عضو تشکیل شده باشد ، واضح است که در این حالت مجموعه E تهی است نمودار این گراف فقط از یک رأس تشکیل شده است. (شکل زیر)

• a

$$E(G) = \{ \} , V(G) = \{a\}$$

در این گراف داریم :

گراف تهی : گراف بدون یال را گراف تهی می گوئیم ، هرگاه $G = (V, E)$ گرافی تهی باشد آنگاه همواره :

$$E = \phi , V \neq \phi$$

•

•

•

•

•

(۱) گراف تهی با یک رأس (گراف ایزوله)

(۲) گراف تهی با دو رأس

(۳) گراف تهی با سه رأس

گراف متناهی و گراف نامتناهی :

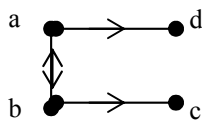
گراف $G = (V, E)$ متناهی است هرگاه تعداد رؤس آن یعنی مجموعه V متناهی باشد ، در غیر این صورت گراف را نامتناهی گوئیم.

مثال : اگر V مجموعه نقاط یک چند ضلعی باشد گراف متناهی خواهد بود و اگر V مجموعه نقاط محیط یک دایره باشد گراف نامتناهی خواهد بود.

گراف جهت دار :

زوج مرتب (V, E) را که در آن V مجموعه ای است متناهی و نا تهی و E زیر مجموعه ای است از مجموعه تمام زوج های مرتب متشکل از اعضای V ، یک گراف جهت دار می گوئیم ، به عبارت دیگر گرافی که برای هر یال آن جهت در نظر گرفته شود.

مثال : نمودار گراف جهت دار $G = (\{a, b, c, d\}, \{(a, b), (b, a), (b, c), (a, d)\})$ را رسم کنید؟



✓ **تذکر ۱ :** در گراف جهت دار ، به ازاء هر دو رأس متمایز a و b ، حداکثر دو یال جهت دار یکی از a به b و دیگری از b به a وجود دارد.

✓ **تذکر ۲ :** گراف جهت دار می تواند دارای طوقه باشد (ضمناً گذاشتن جهت برای طوقه ، مهم نیست).

تست : اگر گراف جهت دار G دارای P رأس باشد ، $E(G)$ حداکثر چند عضو دارد؟

$$\frac{P(P+1)}{2} \quad (۴)$$

$$P^2 \quad (۳)$$

$$P^2 - P \quad (۲)$$

$$\frac{P(P-1)}{2} \quad (۱)$$

پاسخ : گزینه ۳ صحیح است . زیرا :

$$E(G) = P \times P = P^2 = \text{تعداد تمام ازواج مرتب حاصل از اعضای } V(G) = \text{حداکثر تعداد اعضای}$$

در واقع باید به این نکته توجه داشته باشید که با P رأس، $P \times P = P^2$ زوج مرتب می توان ساخت.

✓ نکته: تعداد کل گراف های جهت دار P رأسی برابر است با 2^{P^2} .

تست: چند گراف جهت دار با P رأس وجود دارد؟

$$(1) 2^{P^2-P} \quad (2) 2^{P^2} \quad (3) 2^{\frac{P(P-1)}{2}} \quad (4) 2^{P^2+P}$$

پاسخ: با توجه به نکته ی قبل، گزینه ۲ صحیح است، زیرا:

$$2^{P^2} = \text{تعداد یال ها} = \text{تعداد گراف ها}$$

✓ نکته: تعداد کل گراف های جهت دار P رأسی بدون طوقه برابر است با:

$$2^{P^2-P}$$

تست: چند گراف جهت دار P رأسی بدون طوقه وجود دارد؟

$$(1) 2^{P^2} \quad (2) 2^{P^2-P} \quad (3) 2^{\frac{P(P-1)}{2}} \quad (4) 2^{P^2+P}$$

پاسخ: گزینه ۲ صحیح می باشد. زیرا تعداد کل یال های بدون طوقه این گراف برابر است با:

$$\begin{array}{c} P^2 - P \\ \downarrow \\ \text{تعداد طوقه} \end{array}$$

بنابراین تعداد گراف های جهت دار بدون طوقه برابر است با:

$$2^{P^2-P} = \text{تعداد یال ها} = \text{تعداد گراف ها}$$

تست: چند گراف جهت دار P رأسی دارای طوقه وجود دارد؟

$$(1) 2^{P^2} \quad (2) 2^{P^2-P} \quad (3) 2^{P^2} - 2^{P^2-P} \quad (4) 2^{P^2} - P^2$$

پاسخ: گزینه ۳ صحیح می باشد. زیرا:

$$2^{P^2} - 2^{P^2-P} = \text{تعداد کل گراف های جهت دار بدون طوقه} - \text{تعداد کل گراف های جهت دار طوقه دار}$$

$$\left(\begin{array}{c} P \\ K \end{array} \right) 2^{P^2-P} \quad \text{✓ نکته: تعداد گراف های جهت دار } P \text{ رأسی که دارای } K \text{ طوقه هستند برابر است با:}$$

تست: چند گراف جهت دار P رأسی که فقط دارای یک طوقه باشند، وجود دارد؟

$$(1) P \quad (2) 2^P \quad (3) 2^{P(P+1)} \quad (4) P \times 2^{P^2-P}$$

پاسخ: گزینه ۴ صحیح می باشد زیرا:

$$2^{P^2-P} = \text{تعداد گراف های بدون طوقه}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{چون یک طوقه می خواهیم پس یک رأس از } P \text{ رأس را انتخاب می کنیم} \\ \left(\begin{array}{c} P \\ 1 \end{array} \right) = P \end{array} \right\}$$

طبق اصل ضرب

$$P \times 2^{P^2-P}$$

✓ نکته: در هر گراف جهت دار، دو نوع یال متصل به هر رأس می توانیم داشته باشیم:

(۱) یال های ورودی به آن رأس

(۲) یال های خروجی از آن رأس

تعداد یال های وارد شده به یک رأس مانند a را با $\deg a$ نمایش داده و آن را درجه ورودی رأس a می نامیم ، به همین ترتیب تعداد یال های خروجی از یک رأس مانند a را با $\text{out deg } a$ نمایش داده و آن را درجه خروجی رأس a می نامیم.

گراف مختلط :

گرافی که در آن ، برخی از یال ها جهت دار و برخی فاقد جهت اند ، گراف مختلط نامیده می شود. مانند گراف مربوط به مسابقات تیمی با نتایج برد و باخت و مساوی.

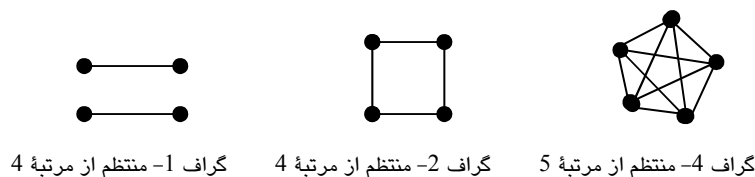
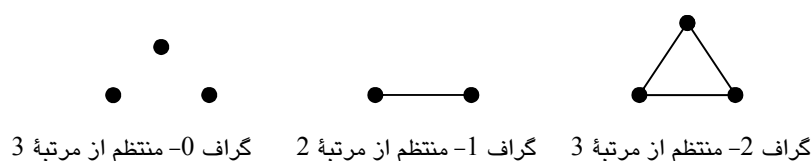
گراف منتظم :

عدد صحیح و نا منفی r را در نظر بگیرید ، هرگاه درجه همه رؤس یک گراف از مرتبه P ، مساوی r باشد ، آن گراف را یک گراف r منتظم از مرتبه P می نامیم.

✓ نکته : در هر گراف r منتظم از مرتبه P ، همواره داریم :

$$\delta = \Delta = r$$

مثال :



نکات مهم :

✓ نکته ۱ : در هر گراف r - منتظم از مرتبه P و اندازه q داریم : $Pr = 2q$

اثبات : داشتیم : (۱) $\sum_{i=1}^P \deg V_i = 2q$ ، چون درجه هر رأس r است $(\deg V_i = r)$

لذا درجه P رأس برابر است با Pr به عبارت دیگر :

$$\sum_{i=1}^P \deg V_i = \sum_{i=1}^P r = Pr \quad (۲)$$

$$(۱) \text{ و } (۲) \Rightarrow Pr = 2q$$

مثال : در یک گراف 3 منتظم داریم : $q = 2P - 7$ ، مرتبه و اندازه گراف را بیابید؟

پاسخ :

$$Pr = 2q \xrightarrow{r=3} \begin{cases} 3P = 2q \\ q = 2P - 7 \end{cases} \Rightarrow 3P = 2(2P - 7)$$

$$\Rightarrow P = 14 \Rightarrow q = 2(14) - 7 = 21$$

✓ نکته ۲ : در هر گراف r - منتظم ، $2q$ باید مضرب P و r باید باشد.

مثال : آیا گراف منتظمی وجود دارد که درجه تمام رؤس آن 4 بوده و دارای 15 یال باشد؟

پاسخ : خیر. زیرا :

$$Pr = 2q \Rightarrow 4P = 2(15) \Rightarrow P = 7/5$$

این امکان ندارد زیرا P باید عددی طبیعی باشد.

✓ نکته ۳: در هر گراف r - منتظم از مرتبه P باید حداقل یکی از دو مقدار r یا P زوج باشد.

اثبات : می دانیم : $Pr = 2q$ چون طرف راست تساوی اخیر مضرب 2 است (زوج است) لذا طرف چپ نیز باید زوج باشد، اما می دانیم حاصل ضرب دو عدد ، هنگامی زوج است که حداقل یکی از آن 2 عدد زوج باشد.

بنابراین :

$$Pr = 2q = \begin{cases} \text{زوج } P \Rightarrow r \text{ زوج یا فرد} \\ \text{زوج } r \Rightarrow P \text{ زوج یا فرد} \end{cases}$$

تست : چند گراف 3- منتظم از مرتبه 15 وجود دارد؟

(۱) 10 (۲) 5 (۳) 3 (۴) 0

پاسخ : طبق نکته قبل گزینه 4 صحیح است . در واقع داریم :

$$Pr = 2q \Rightarrow 15 \times 3 = 2q \Rightarrow 45 = 2q$$

این امکان ندارد زیرا $2q$ باید زوج باشد.

مثال : 15 نفر به مسافرت می روند و قبل از مسافرت قرار می گذارند که هر کس دقیقاً به 3 نفر دیگر نامه بفرستد و (هر فردی دقیقاً سه نامه دریافت بکند) ، این کار به چند طریق امکان پذیر است؟

پاسخ : در واقع یک گراف 15 رأسی 3- منتظم می خواهیم که طبق نکته فوق چنین گرافی وجود ندارد.

✓ نکته ۴: به طور کلی ، گراف فرد - منتظم از مرتبه P فرد نداریم.

✓ نکته ۵: تعداد گراف های منتظم از مرتبه P که :

$$r = \underbrace{0, 1, 2, 3, \dots, P-1}_P$$

(۱) P عددی زوج باشد ، عبارت است از P تا :

$$r = \underbrace{0, 2, 4, \dots, P-1}_{\frac{P+1}{2}}$$

(۲) P عددی فرد باشد ، عبارت است از $\frac{P+1}{2}$ تا :

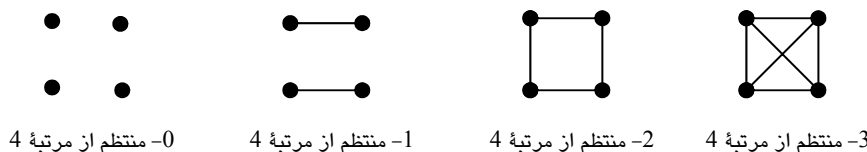
دقت کنید که چون در این حالت P فرد است لذا r باید زوج باشد.

(۳) P عددی فرد و گراف همبند باشد (گراف همبند در قسمت های بعدی آورده شده است) عبارت است از $\frac{P-1}{2}$ تا:

$$r = \underbrace{2, 4, 6, \dots, P-1}_{\frac{P-1}{2}}$$

مثال : چند گراف منتظم از مرتبه 4 وجود دارد.

پاسخ : طبق نکته 1، 4 گراف وجود دارد (در این حالت r می تواند هر یک از اعداد 0، 1، 2، 3 باشد) که عبارتند از :



تست : چند گراف منتظم از مرتبه 10 می توان ساخت؟

(۱) 5 (۲) 6 (۳) 9 (۴) 10

پاسخ : طبق نکته 1، گزینه 4 صحیح است ، در این حالت ، r می تواند هر یک از اعداد 0، 1، 2، ...، 9 باشد.

در واقع داریم :

$$Pr = 2q \Rightarrow 10r = 2q \rightarrow r = 0, 1, 2, \dots, 9$$

تست : چند گراف منتظم از مرتبه 11 می توان ساخت؟

(۱) 5

(۲) 6

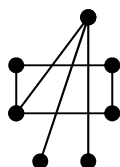
(۳) 9

(۴) 10

پاسخ : گزینه 2 صحیح است ، در این حالت چون P فرد است لذا r باید زوج باشد در نتیجه r می تواند هر یک از اعداد 0 ، 2 ، 4 ، 6 ، 8 یا 10 باشد ، در واقع داریم :

$$Pr = 2q \Rightarrow 11r = 2q \rightarrow r = 0, 2, 4, 6, 8, 10$$

تست : به گراف مقابل ، حداقل چند یال باید افزوده شود تا گراف حاصل ، گرافی منتظم شود؟



(۴) 7

(۳) 8

(۲) 9

(۱) 10

پاسخ : چون $\Delta = 3$ است (ماکزیمم درجه رؤس گراف) ، لذا باید آنقدر یال اضافه کنیم تا 3- منتظم شود، اما چون تعداد رؤس گراف فرد است ($P = 7$) ، لذا طبق نکته قبل ، این کار امکان پذیر نیست ، بنابراین آنقدر یال اضافه می کنیم تا 4 منتظم شود ، برای این منظور گوییم :

$$Pr = 2q \Rightarrow 7 \times 4 = 2q \Rightarrow q = 14$$

لذا گراف حاصل باید حداقل 14 یال داشته باشد ، اما چون 7 یال داریم ، پس 7 یال دیگر باید اضافه کنیم تا گراف حاصل ، گرافی 7 رأسی 4- منتظم شود.

تست : با کدام اطلاعات زیر می توان یک گراف ساخت؟

(۲) گرافی منتظم از مرتبه 8 و اندازه 27

(۱) گرافی 5 - منتظم با اندازه 36

(۴) گرافی منتظم با اندازه 36

(۳) گرافی 5 منتظم از مرتبه 13

پاسخ : گزینه 4 درست است.

گزینه ۱ نادرست است زیرا : $Pr = 2q \Leftarrow 5P = 72$ و این امکان ندارد زیرا 72 بر 5 بخش پذیر نیست.

گزینه ۲ نیز نادرست است زیرا : $Pr = 2q \Leftarrow 8r = 54$ و این امکان ندارد زیرا 54 مضرب 8 نیست.

گزینه ۳ نیز نادرست است ، زیرا P و r هر دو فردند در واقع $Pr = 2q \Leftarrow 65 = 2q$ و 65 مضرب 2 نیست.

تست : در یک گراف 6 - منتظم داریم : $q = 2P + 5$ ، q کدام عدد می تواند باشد؟

(۴) هیچ کدام

(۳) 17

(۲) 15

(۱) 13

پاسخ : گزینه 4 صحیح می باشد . زیرا :

$$\begin{cases} q = 2P + 5 \\ 6P = 2q \end{cases} \Rightarrow 6P = 2(2P + 5) \Rightarrow P = 5$$

اما این امکان ندارد ، زیرا $Max(r) = P - 1 = 5 - 1 = 4$ ، در صورتی که در صورت تست گفته شده گراف 6 - منتظم است .

تست : عدد P اول است ، تعداد گراف های P - منتظم از مرتبه $(P + 2)$ کدام است؟

(۴) بی شمار

(۳) هیچ

(۲) 2

(۱) 1

پاسخ : چون P اول است لذا P می تواند 2 یا 3 یا 5 یا ... باشد ، اما اگر P فرد باشد $P + 2$ نیز فرد خواهد بود ، در صورتی که می دانیم P و r هر دو باهم نمی توانند فرد باشند ، لذا P باید حتماً زوج و در نتیجه 2 باشد و در نتیجه $P + 2 = 4$ ، لذا گراف مطلوب گرافی 2 منتظم از مرتبه 4 است (یعنی گراف مقابل) ، بنابراین تعداد چنین گراف هایی فقط یکی است و لذا گزینه 1 درست است.



تست : در یک گراف r - منتظم ، مرتبه گراف از اندازه آن بیشتر است ، در این صورت کدام درست است؟

$$r > 3 \quad (۴)$$

$$r = 3 \quad (۳)$$

$$r \leq 2 \quad (۲)$$

$$r < 2 \quad (۱)$$

پاسخ : گزینه ۱ صحیح است . زیرا :

$$\begin{cases} P \geq q \\ Pr = 2q \Rightarrow q = \frac{Pr}{2} \end{cases} \Rightarrow P \geq \frac{Pr}{2} \Rightarrow \frac{r}{2} \leq 1 \Rightarrow r \leq 2 \Rightarrow r = 0 \text{ یا } 1$$

✓ **نکته ۶ :** نتیجه مهم : فقط دو گروه گراف منتظم وجود دارد که در آن مرتبه از اندازه بیشتر است.

گروه اول : گراف های ۰ - منتظم ($r = 0$) ، گروه دوم : گراف های ۱ - منتظم ($r = 1$) .

✓ **نکته ۷ :** نکته مهم : اگر در گرافی بدانیم $\delta = \Delta$ ، آن گراف صد در صد منتظم است.

✓ **نکته ۸ :** نکته مهم : دنباله درجات رؤس هر گراف ، تشکیل تصاعد عددی نمی دهند ، مگر آنکه همه جملات دنباله برابر باشند ، یعنی گراف منتظم باشد.

اثبات :

$$\delta, \delta + d, \delta + 2d, \dots, \Delta$$

$$\downarrow$$

$$t_1$$

$$t_p = t_1 + (P-1)d$$

$$\Delta = \delta + (P-1)d$$

$$\xrightarrow{\Delta \leq P-1} \delta + (P-1)d \leq P-1$$

$$\frac{\delta}{P-1} + d \leq 1 \Rightarrow d \leq 1 - \frac{\delta}{P-1} = 0 \Rightarrow d = 0 \text{ یک عدد اعشاری}$$

تست : دنباله درجات رؤس یک گراف به صورت x و x و x و x است ، کدام عدد نمی تواند باشد؟

$$4 \quad (۴)$$

$$3 \quad (۳)$$

$$2 \quad (۲)$$

$$1 \quad (۱)$$

پاسخ : چون گراف ۴ جمله دارد لذا $P = 4$ بنابراین درجه هیچ رأسی نمی تواند ۴ باشد لذا x می تواند ۰ یا ۱ یا ۲ یا ۳ باشد (طبق نکته بلافاصله بعد از تعریف گراف های منتظم) به عبارت معادل دنباله درجات ، تصاعدی است عددی که در آن $d = 0$ و جملات می توانند همگی ۰ یا ۱ یا ۲ یا ۳ باشند.

تست : کدام یک از دنباله های زیر نمی تواند دنباله درجات رؤس یک گراف ساده باشد؟

$$5, 5, 5, 5, 5 \quad (۲)$$

$$3, 3, 3, 3, 3 \quad (۱)$$

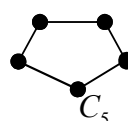
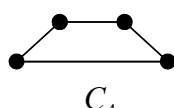
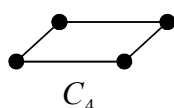
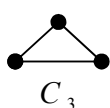
$$6, 6, 6, 6, 6, 6, 6 \quad (۴)$$

$$4, 4, 4, 4, 4, 4 \quad (۳)$$

پاسخ : گزینه ۲ صحیح است ، در یک گراف ۵ رأسی ، حداکثر درجه برابر $P-1 = 5-1 = 4$ است ، لذا درجه هیچ رأسی نمی تواند ۵ باشد ، ضمناً در این گراف تعداد رؤس از درجه فرد ، فرد است به طور کلی داشتیم که گراف از مرتبه فرد فرد منتظم نداریم.

✓ **نکته ۹ :** تمام چند ضلعی ها ، گراف ۲ - منتظم هستند که در آنها $P = q$ است.

این نوع گراف ها به گراف های سیکلوئیدی (دوری) معروف هستند و آنها را با C_n نمایش می دهند.



✓ نکته ۱۰: فقط ۲ گراف ۳ - منتظم از مرتبه ۶ وجود دارد ، این دو گراف عبارتند از :

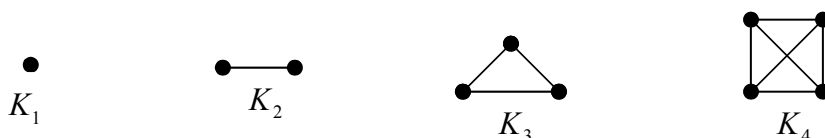


✓ نکته ۱۱: فقط ۲ گراف ۲ - منتظم از مرتبه ۶ وجود دارد ، این دو گراف عبارتند از :



گراف کامل: گراف G از مرتبه P را کامل گوئیم هرگاه $(P-1) -$ منتظم باشد ، یعنی درجه همه رئوسش $P-1$ باشد به بیان دیگر بین تمام رئوسش ، یال رسم شده باشد (در واقع گراف r - منتظم است و r حداکثر مقدار خودش یعنی $P-1$ را دارد) ، گراف کامل از مرتبه P را با K_P نمایش می دهیم.

مثال: گراف های کامل K_1 تا K_4 را رسم کنید.



✓ نکته: در هر گراف کامل K_P ، همواره داریم :

(۱) درجه هر رأس برابر $P-1$ می باشد.

(۲) مجموع درجات همه رئوس برابر $P(P-1)$ است.

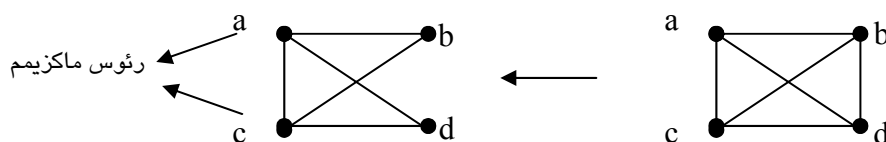
$$(۳) \quad q = \frac{P(P-1)}{2}$$

(۴) گراف کامل K_P ، بیشترین تعداد یال ها را دارد یعنی q ، حداکثر مقدار خود را که برابر $\frac{P(P-1)}{2}$ است ، دارد.

(۵) در این گراف ، همواره داریم : $\delta = \Delta = P-1$

(۶) در گراف کامل K_P ، همه رئوس ، رئوس Max اند اما اگر یکی از یال ها را حذف کنیم ، تعداد رئوس ماکزیم برابر $P-2$ می شود.

مثال:



گراف کامل K_4

$$P = 4 = \text{همه رئوس} = \text{رئوس ماکزیم} \quad P - 2 = 4 - 2 = 2 = \text{رئوس ماکزیم}$$

(۷) هر گراف کامل منتظم است ولی عکس این مطلب در حالت کلی نادرست است.

مثال: گراف منتظم هست ولی کامل نیست.



تست: گراف K_8 چند یال دارد؟

- (۱) 28 (۲) 72 (۳) 56 (۴) 36

پاسخ:

$$q = \frac{P(P-1)}{2} = \frac{8 \times 7}{2} = 28$$

تست: اگر اندازه یک گراف کامل 780 باشد، مرتبه آن کدام است؟

- (۱) 40 (۲) 39 (۳) 38 (۴) 37

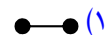
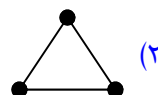
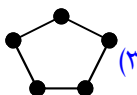
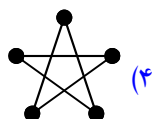
پاسخ:

$$q = \frac{P(P-1)}{2} \Rightarrow 780 = \frac{P(P-1)}{2} \Rightarrow P(P-1) = 2 \times 780$$

$$P(P-1) = 2 \times 10 \times 78 = 2 \times 10 \times 2 \times 39 = 40 \times 39$$

$$P(P-1) = 40(40-1) \Rightarrow P = 40$$

تست: کدام یک از شکل های زیر، مربوط به گراف 2 - منتظم کامل است؟



پاسخ: گزینه 2 صحیح است.

تست: در گراف K_8 ، اگر دو رأس و یال هایی که به آن دو رأس ختم می شوند را حذف کنیم، چند یال کم می شود؟

- (۱) 20 (۲) 7 (۳) 13 (۴) 15

پاسخ: کافی است تعداد یال های گراف K_8 را منهای تعداد یال های گراف K_6 کنیم. یعنی:

$$\frac{8 \times 7}{2} - \frac{6 \times 5}{2} = 13$$

۸- در گراف کامل K_p ، $1+8q$ باید همواره مربع کامل باشد زیرا:

$$q = \frac{P(P-1)}{2} \Rightarrow P(P-1) = 2q \Rightarrow P^2 - P - 2q = 0$$

$$P = \frac{1 + \sqrt{1+8q}}{2} \xrightarrow{P \in \mathbb{N}} \text{ چون } P \text{ عضو } \mathbb{N} \text{ است لذا } 1+8q \text{ باید مربع کامل باشد.}$$

۹- عددی می تواند، اندازه یک گراف کامل باشد که 2 برابرش، ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد زیرا

$$q = \frac{P(P-1)}{2} \Rightarrow 2q = P(P-1)$$

تست: گراف G با کدام یک از اندازه های زیر می تواند یک گراف کامل باشد؟

- (۱) 10 (۲) 11 (۳) 12 (۴) 9

پاسخ: $1+8q$ باید مربع کامل باشد لذا q باید 10 باشد، البته می توان گفت که تنها عددی در گزینه ها که دو برابرش، ضرب دو عدد متوالی می شود، 10 است.

۱۰- گرافی با اندازه q که حداقل رأس را داشته باشد، کامل است، یا اولین گراف کامل بزرگتر از آن است.

تست: در گرافی با اندازه 10، حداقل مرتبه چیست؟

- (۱) 4 (۲) 5 (۳) 6 (۴) 7

پاسخ :

$$10 = \frac{P(P-1)}{2} \Rightarrow P(P-1) = 5 \times 4 \Rightarrow P = 5$$

تست : گرافی با اندازه 27 و حداقل مرتبه داریم ، چند رأس آن از درجه Max است؟

- (۱) 5 (۲) 6 (۳) 7 (۴) 2

پاسخ :

$$2q = P(P-1) \Rightarrow 2 \times 27 = P(P-1) \Rightarrow P(P-1) = 54$$

چون 54 حاصل ضرب دو عدد طبیعی متوالی نیست لذا عدد بلافاصله بزرگتر از آن را که حاصل ضرب دو عدد طبیعی متوالی است در نظر می گیریم یعنی 56 را ، بنابراین :

$$P(P-1) = 56 \Rightarrow P(P-1) = 8 \times 7 \Rightarrow P = 8$$

اکنون کافی است از گراف K_8 یک یال را حذف کنیم (زیرا با حذف یک یال ، 2 واحد از جمع درجات رئوس کم می شود یعنی : $54 - 2 = 56$) در این صورت 6 رأس از درجه 7 داریم (6 رأس از درجه Max) و 2 رأس از درجه 6 (2 رأس از درجه Min) ، لذا گزینه ی 2 صحیح است.

تست : گرافی با اندازه 26 و حداقل مرتبه داریم ، کمترین مقدار δ کدام است؟

- (۱) 5 (۲) 6 (۳) 4 (۴) 7

پاسخ :

$$2q = P(P-1) \Rightarrow 52 = P(P-1)$$

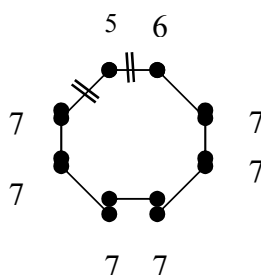
چون 52 ، حاصل ضرب دو عدد متوالی نیست 56 را در نظر می گیریم لذا داریم :

$$P(P-1) = 56 \Rightarrow P = 8$$

برای اینکه مجموع درجات رئوس 52 شود ، باید دو یال را حذف کنیم (در واقع این باعث می شود که 4 واحد از مجموع درجات رئوس کم شود : $52 - 4 = 56$)

در این صورت برای اینکه کمترین مقدار δ را بدست آوریم ، لازم است دو یال حذف شده ، دو یال گذرنده از یک رأس باشند چرا که درجه هر رأس در گراف K_8 ($P=8$) برابر $P-1=7$ است و در این صورت است که کمترین مقدار δ برابر $5 = 7 - 2$ خواهد شد .

به شکل توجه کنید :



ما در اینجا نمودار گراف کامل K_8 را رسم نکرده ایم زیرا نمودار شلوغ می شود. با حذف این دو یال (یال های ضربدر زده) درجه 1 رأس 5 شده ، 2 رأس 6 شده و 5 رأس دیگر همان 7 باقی خواهد ماند دقت کنید که در این حالت $52 = 5 \times 5 + 2 \times 6 + 5 \times 7$ البته اگر دو یال حذف شده دو یالی باشند که از یک رأس نمی گذرند در این صورت بیشترین مقدار δ بدست می آید که برابر 6 است زیرا $6 = 7 - 1$.

(۱۱) هر گراف کامل ، گرافی بازه ای نیز هست.

(۱۲) تعداد گراف های کامل متمایزی که می توان در گراف K_P مشخص کرد برابر است با: $2^P - 1$

اثبات :

می دانیم $\bullet$ ، $\bullet\bullet$ ، $\bullet\bullet\bullet$ ، $\triangle$ ، $\square$ ، ... همگی کامل اند ، لذا برای پیدا کردن تعداد گراف های کامل موجود در داخل گرافی کامل مانند K_4 ، کافی است تعداد گراف های از نوع $\bullet$ ، از نوع $\bullet\bullet$ ، از نوع $\triangle$ و از نوع $\square$ را شماریم ،

$$\binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 2^4 - 1 = 15$$

 تعداد $\bullet$
  تعداد $\bullet\bullet$
  تعداد $\triangle$
  تعداد $\square$

پس تعداد کل گراف های کامل موجود در گراف K_p برابر می شود با :

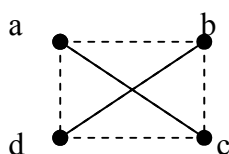
$$\binom{P}{1} + \binom{P}{2} + \dots + \binom{P}{p} = 2^P - 1$$

گراف مکمل یک گراف (گراف های مکمل) :

فرض می کنیم $G = (V, E)$ یک گراف ساده باشد ، اگر به جای مجموعه E ، مجموعه دیگری به نام $\bar{E}$ (که از یال های نا موجود در E تشکیل می شود) را در نظر بگیریم ، در این صورت گراف $\bar{G} = (V, \bar{E})$ را گراف مکمل گراف $G = (V, E)$ می گوئیم ، به عبارت دیگر ، گرافی که از وصل کردن رأس های به هم متصل نشده گراف G بدست می آید.

مثال : مکمل گراف $G = (\{a, b, c, d\}, \{ac \text{ و } bd\})$ را مشخص کرده ، نمودار هر دو گراف را در یک شکل رسم کنید؟

پاسخ : مکمل گراف عبارت است از : $\bar{G} = (\{a, b, c, d\}, \{ab, ad, bc, dc\})$



توجه کنید که نمودار $\bar{G}$ ، به صورت خط چین رسم شده است.

✓ نکته : هرگاه $\bar{G}$ مکمل گراف G باشد و $|V(G)| = P$ ، آنگاه همواره داریم :

$$G \cup \bar{G} = K_P$$

$$G \cup \bar{G} = K_4$$

این مطلب در نمودار مثال قبل کاملاً مشهود است در این مثال :

✓ نکته مهم :

$$q(G) + q(\bar{G}) = \frac{P(P-1)}{2} \quad \text{یا} \quad q(G) + q(\bar{G}) = q(K_P)$$

تست : گرافی 10 رأسی ، 15 یال دارد ، مکمل آن چند یال دارد؟

30 (۴)

24 (۳)

20 (۲)

15 (۱)

پاسخ :

$$q(G) + q(\bar{G}) = \frac{P(P-1)}{2} \Rightarrow 15 + q(\bar{G}) = \frac{10 \times 9}{2} \Rightarrow q(\bar{G}) = 45 - 15 = 30$$

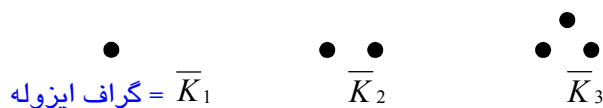
✓ نکته :

$$\Delta(G) + \delta(\bar{G}) = P - 1 \quad , \quad \delta(G) + \Delta(\bar{G}) = P - 1$$

گراف تهی : گراف از مرتبه P ی $G = (V, E)$ را گراف تهی می نامیم هرگاه مجموعه E ی آن تهی باشد ، به عبارت دیگر بدون یال باشد . (به بیان دیگر گراف از مرتبه P ، $0 -$ منتظم را گراف تهی می نامیم) ، گراف تهی از مرتبه P را با $\bar{K}_P$ نمایش می دهند.

✓ **تذکر مهم :** دقت کنید که گراف تهی با گراف ایزوله یا منفرد فرق دارد ، در واقع گراف تهی ، وقتی ایزوله یا منفرد است که مرتبه آن یک باشد.

مثال : در زیر گراف های تهی با P رأس ($1 \leq P \leq 3$) رسم شده اند.



✓ **نکته مهم :** تنها گراف تهی کامل ، $\bar{K}_1$ است ، به عبارت دیگر ، گراف تهی ، زمانی کامل است که مرتبه آن یک باشد.

تعریف دو رأس مجاور : دو رأس را مجاور گوئیم هرگاه بین آنها یالی وجود داشته باشد.

مسیر و دور

مقدمه :

گردش :

یک دنباله از رؤس و یال های گراف را یک گردش (walk) می نامیم هرگاه یال ها و رؤس به دنبال هم واقع باشند و از یک رأس شروع و به رأسی دیگر ختم شده باشد.

تعقیب :

یک گردش که در آن هیچ یالی بیش از یک بار تکرار نشده باشد را یک تعقیب (trail) می گوئیم.

مسیر :

یک تعقیب که در آن هیچ رأسی نیز تکرار نشود ، یک مسیر (path) نامیده می شود.

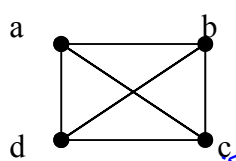
تعریف دیگر مسیر :

یک مسیر به طول m از رأس a به رأس b از گراف G ، دنباله ای است متشکل از $m+1$ رأس دو به دو متمایز که از a شروع و به b ختم می شود و هر دو رأس متوالی در آن مجاورند . (دقت کنید که از هیچ رأس و هیچ یالی نباید بیش از یک بار عبور کنیم).

طول مسیر : در تعریف فوق ، تعداد یال هایی که از a به b ، طی می شوند (یعنی عدد m) را طول مسیر می گوئیم.

✓ **نکته مهم :** در هر گراف برحسب قرار داد ، بین هر رأس و خودش مسیری به طول صفر تعریف می شود.

مثال : در گراف مقابل ، کلیه مسیر های از a به b را به صورت دنباله بنویسید؟

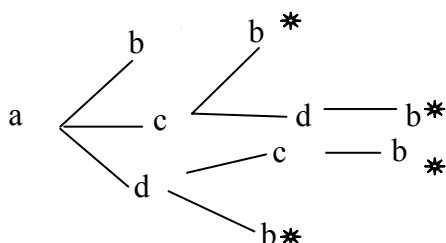


(۱) ab ← مسیر به طول 1

(۲) $acdb$ و adb ← مسیر های به طول 2

(۳) $acdb$ و $adcb$ ← مسیر های به طول 3

✓ **تذکر :** برای نوشتن مسیر های از a به b می توان از روش درختی به صورت زیر استفاده کنیم.



✓ **نکته مهم :** طول هر مسیر در گراف ساده P رأسی ، حداقل صفر و حداکثر می تواند $P-1$ باشد.

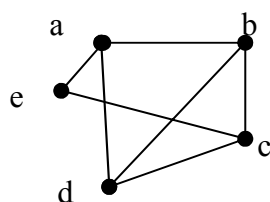
یعنی : $0 \leq \text{طول مسیر} \leq P-1$ ، به عبارت دیگر ، طول بلندترین مسیر در هر گراف ساده P رأسی (در صورت وجود) $P-1$ می باشد.

✓ نکته مهم : رابطه وجود مسیر بین دو رأس در یک گراف ، یک رابطه هم ارزی است (یعنی دارای خواص بازتابی ، تقارنی و ترایی است).

✓ نکته مهم : برای بدست آوردن تعداد مسیر های یک گراف ، در حالت کلی ، فرمول خاصی وجود ندارد و باید تک تک مسیر ها را شناسایی کرد ، اما در گراف های کامل و همچنین در درخت ها ، فرمول هایی برای محاسبه تعداد مسیر ها وجود دارد.

✓ نکته : ملاک تفاوت دو مسیر متفاوت ، لااقل یک یال در دنباله مسیر می باشد.

تست : در گراف شکل مقابل چند مسیر به طول 3 از a به b وجود دارد؟



5 (۴)

2 (۳)

3 (۲)

4 (۱)

پاسخ : از a باید شروع کرد ، اما از a مستقیماً نمی توان به b رفت ، بنابراین مطابق شکل از a باید به d رفت و یا به e رفت بنابراین مسیر های به طول 3 عبارتند از $adcb - aecb$ ، بنابراین گزینه ۳ صحیح است.

✓ نکته بسیار بسیار مهم : تعداد کل مسیر های با طول های مختلف بین دو رأس مشخص و متمایز a و b در گراف کامل K_P ($P \geq 3$) ، از یکی از دو فرمول زیر بدست می آید :

فرمول (۱)

$$\rightarrow \sum_{i=0}^{P-2} (P-2)_i = (P-2)_0 + (P-2)_1 + \dots + (P-2)_{P-2}$$

تعداد مسیر های به طول $P-1$ تعداد مسیر های به طول 2 تعداد مسیر های به طول 1

یادآوری : منظور از نماد $(n)_r$ همان فرمول جایگشت های r تایی n می باشد یعنی :

$$(n)_r = P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

فرمول (۲) $\rightarrow \lfloor (P-2)! e \rfloor$

یادآوری : نماد $\lfloor \rfloor$ ، علامت جزء صحیح است و عدد e ، همان عدد اویلر می باشد (که به عدد نپر هم معروف است) و تقریباً برابر است با : $e \approx 2.718$.

تذکر : دقت کنید که فرمول (۲) را می توان از فرمول (۱) به صورت زیر نتیجه گرفت :

$$\sum_{i=0}^{P-2} (P-2)_i = (P-2)_0 + (P-2)_1 + \dots + (P-2)_{P-2} = (P-2)! \times \sum_{i=0}^{P-2} \frac{1}{i!}$$

از طرفی می دانیم : $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} = e$

$$\sum_{i=0}^{P-2} (P-2)_i = \lfloor (P-2)! e \rfloor$$

پس :

مثال : تعداد مسیر های به طول های مختلف بین دو رأس متمایز و مشخص a و b از گراف K_4 را بدست آورید؟

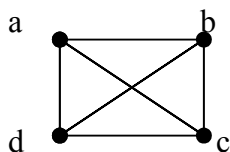
پاسخ :

$$(۱) \text{ از طریق فرمول } = \sum_{i=0}^{P-2} (P-2)_i = \sum_{i=0}^{4-2} (4-2)_i = \sum_{i=0}^2 (2)_i = (2)_0 + (2)_1 + (2)_2$$

$$= \frac{2!}{(2-0)!} + \frac{2!}{(2-1)!} + \frac{2!}{(2-2)!} = 1 + 2 + 2 = 5$$

$$\rightarrow \text{از طریق فرمول (۲)} \quad \lfloor (P-2)!e \rfloor = \lfloor (4-2)! \times 2/718 \rfloor = \lfloor 5/436 \rfloor = 5$$

با توجه به نمودار K_5 (نمودار مقابل) این 5 مسیر عبارتند از :



- مسیر به طول 1 $ab \rightarrow$
- مسیر های به طول 2 $acb - adb \rightarrow$
- مسیر های به طول 3 $acdb - adcb \rightarrow$

✓ (۲) نکته مهم : تعداد کل مسیر های با طول های مختلف غیر صفر بین هر دو رأس متمایز دلخواه (نه هر دو رأس خاص و از قبل مشخص شده) در گراف K_P ($P \geq 3$) برابر است با :

$$\left(\frac{P}{2} \right) \times \sum_{i=0}^{P-2} (P-2)_i \quad \text{یا} \quad \left(\frac{P}{2} \right) \lfloor (P-2)!e \rfloor$$

البته برای محاسبه تعداد کل مسیر های با طول های مختلف غیر صفر بین دو رأس متمایز دلخواه در گراف K_P ($P \geq 3$) از دو فرمول زیر نیز می توان استفاده کرد.

$$\frac{1}{2} \left(P! \sum_{i=0}^{P-1} \frac{1}{i!} - P \right) \quad \text{یا} \quad \left(\frac{P}{2} \right) \sum_{K=0}^{P-2} K! \left(\frac{P-2}{K} \right)$$

تذکر : در واقع در این حالت بایستی ابتدا 2 رأس از میان P رأس انتخاب کرد (که می دانیم این کار به $\left(\frac{P}{2} \right)$ طریق امکان پذیر است) و سپس این انتخاب ها را در فرمول قبل ضرب کرد.

✓ (۳) نکته مهم : اگر بخواهیم مسیر های به طول صفر را نیز به فرمول بالا اضافه کنیم آنگاه تعداد کل مسیر های به طول های مختلف بین هر دو رأس دلخواه در گراف K_P ($P \geq 3$) برابر است با :

$$\left(\frac{P}{2} \right) \times \sum_{i=0}^{P-2} (P-2)_i + P$$

↓
تعداد مسیر های به طول صفر

دقت کنید که چون P رأس داریم ، پس P مسیر به طول صفر داریم.

مثال : تعداد کل مسیر های موجود در گراف کامل K_5 را بیابید؟

$$\begin{aligned} \left(\frac{5}{2} \right) \sum_{i=0}^3 (3)_i + 5 &= 10((3)_0 + (3)_1 + (3)_2 + (3)_3) + 5 \\ &= 10(1 + 3 + 6 + 6) + 5 = 165 \end{aligned}$$

✓ (۴) نکته مهم : هرگاه بخواهیم تعداد مسیر های به طول m ($1 \leq m \leq P-1$) بین دو رأس متمایز و مشخص a و b را بدست آوریم (یعنی دو رأس مشخص و طول مسیر هم مشخص باشد) از فرمول $(P-2)_{m-1}$ استفاده می کنیم.

مثال : در گراف K_5 ، چند مسیر به طول 3 وجود دارد؟

$$(P-2)_{m-1} = (5-2)_{(3-1)} = (3)_2 = 6$$

✓ (۵) نکته مهم : هرگاه بخواهیم تعداد مسیر های به طول m را در گراف K_P بدست آوریم (یعنی دو رأس مشخص

نباشند و دلخواه باشند ، اما طول مسیر مشخص باشد) ، کافی است از فرمول $\left(\frac{P}{2} \right) \times (P-2)_{m-1}$ استفاده کنیم ، چرا که

باید ابتدا تعداد حالت هایی را که می توان 2 رأس از بین P رأس را انتخاب کرد یعنی $\binom{P}{2}$ را بدست آورده سپس در $(P-2)_{m-1}$ ضرب کنیم.

تست : در گراف کامل مرتبه 6 (K_6) ، چند مسیر به طول 2 وجود دارد؟

30 (۱) 60 (۲) 90 (۳) 120 (۴)

پاسخ :

$$\text{راه حل اول} \rightarrow \binom{P}{2} \times (P-2)_{m-1} = \binom{6}{2} \times (4)_1 = 15 \times 4 = 60$$

راه حل دوم : چون گراف کامل است ، پس بین تمام رئوس ، یال وجود دارد ، لذا برای ایجاد مسیر به طول 2 ، کافی است 3 رأس مانند a و b و c را انتخاب کنیم و به صورت زیر عمل کنیم :

$$\begin{array}{ccc} a & b & c \\ \square & \square & \square \\ \text{طریق 6} \times & \text{طریق 5} \times & \text{طریق 4} = 120 \end{array}$$

اما چون دو مسیر a b c و a c b یکی هستند لذا :

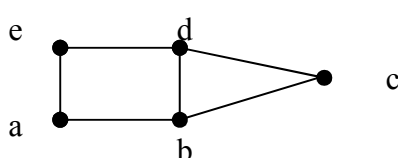
$$\frac{120}{2} = 60$$

دور :

یک مسیر از a به a ، که در آن هیچ رأس و یالی تکراری نباشند را دور می نامیم (در حقیقت دور ، یک مسیر بسته است) به عبارت دیگر یک دور از گراف G ، دنباله ای است مانند $\underbrace{V_1, V_2, V_3, \dots, V_m, V_1}_{\text{تعداد} = m+1}$ (با شرط $m \geq 3$) متشکل از $m+1$

رأس ، به طوریکه در آن V_i ها ($1 \leq i \leq m$) دو به دو متمایزند و هر 2 رأس متوالی در این دنباله در G مجاورند ، عدد m را طول این دور از گراف G می نامند.

مثال : در گراف زیر ، سه دور یکی به طول 3 ، دیگری به طول 4 و سومی به طول 5 بیابید؟



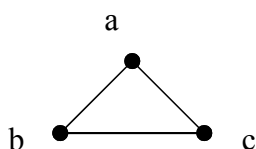
دوری به طول 3 $b, c, d, b \rightarrow$

دوری به طول 4 $b, a, e, d, b \rightarrow$

دوری به طول 5 $b, a, e, d, c, b \rightarrow$

✓ **نکته :** هر دور به طول m را می توان به $2m$ طریق نمایش داد که همگی حکم یک دور را دارند.

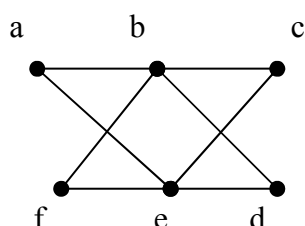
مثال : در گراف مقابل ، هر شش مورد زیر حکم یک دور به طول سه را دارند.



a, b, c, a - b, c, a, b - c, a, b, c - b, a, c, b - a, c, b, a - c, b, a, c

✓ **نکته مهم :** کوتاهترین دور به 3 می باشد که یک مثلث است و بلندترین دور در صورت وجود ، به طول P است که شامل همه رئوس است.

مثال : در گراف مقابل چند دور به طول 4 وجود دارد؟



a, e, d, b, a - a, b, c, e, a - b, f, e, c, b
b, d, e, c, b - a, e, f, b, a - b, f, e, d, b

نکات مهم :

- (۱) دور نمی تواند شامل رأس تکراری باشد.
(۲) حداقل طول دور ≥ 3 است ($m \geq 3$) و حداکثر آن P است یعنی: $3 \leq \text{طول دور} \leq P$.
(۳) گراف تهی فاقد دور است.
(۴) در گراف کامل K_P ($P \geq 3$)، به ازاء هر عدد طبیعی $3 \leq m \leq P$ ، دوری به طول m وجود دارد.
تست : در گراف کامل K_{27} ، دوری به طول ... وجود دارد؟
(۱) 3 (۲) 9 (۳) 27 (۴) هر سه

پاسخ : طبق نکته قبل، پاسخ صحیح گزینه ۴ می باشد.

- (۵) تعداد دور های متفاوت به طول m در گراف کامل K_P ($P \geq 3$)، از رابطه زیر بدست می آید :

$$\frac{(m-1)!}{2} \binom{P}{m} \quad \text{یا} \quad \frac{(P)_m}{2m}$$

دقت کنید که دو فرمول فوق، یکی هستند.

$$\frac{(m-1)!}{2} \binom{P}{m} = \frac{(m-1)!}{2} \times \frac{P!}{m!(P-m)!} = \frac{1}{2m} \times \frac{P!}{(P-m)!} = \frac{(P)_m}{2m}$$

✓ **تذکر :** ملاک متفاوت بودن دو دور، تفاوت در لااقل یک یال می باشد.

مثال : تعداد دور های به طول ۳ را در گراف K_7 بدست آورید؟

$$\begin{cases} P = 7 \\ m = 3 \end{cases} \Rightarrow \frac{(7)_3}{2 \times 3} = \frac{4!}{6} = 35$$

پاسخ :

- (۶) تعداد کل دور های متمایز (با طول های مختلف) موجود در گراف کامل K_P از رابطه زیر بدست می آید.

$$\sum_{m=3}^P \frac{(P)_m}{2m}$$

↓

حداقل طول دور ۳ است.

یادآوری :

مثال : در گراف کامل K_5 ، به طور کلی چند دور وجود دارد؟

$$3 \leq m \leq P \xrightarrow{P=5} 3 \leq m \leq 5 \Rightarrow \begin{cases} m = 3 \rightarrow \frac{(5)_3}{2 \times 3} = 10 \\ m = 4 \rightarrow \frac{(5)_4}{2 \times 4} = 15 \\ m = 5 \rightarrow \frac{(5)_5}{2 \times 5} = 12 \end{cases}$$

بنابراین تعداد کل دور ها برابر است با :

$$\sum_{m=3}^5 \frac{(5)_m}{2m} = 10 + 15 + 12 = 37$$

$$\frac{(m-1)!}{2}$$

(۷) تعداد دورهای به طول m که از m راس خاص بگذرند ($m \geq 3$) برابر است با :

زیرا در این حالت ، دیگر نیازی به انتخاب m راس از p راس یعنی $\binom{p}{m}$ نیست .

$$\frac{(P-1)!}{2}$$

(۸) تعداد دور های به طول P (دورهای همیلتنی) در گراف کامل K_P ($P \geq 3$) برابر است با :

اثبات:

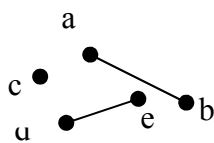
$$K_P \text{ در } P \text{ طول به تعداد دورهای} = \binom{P}{P} \times \frac{(P-1)!}{2} = 1 \times \frac{(P-1)!}{2} = \frac{(P-1)!}{2}$$

تذکر : با دور همیلتنی در قسمت های بعدی آشنا خواهید شد.

بخش های گراف :

در گراف $G = (V, E)$ ، فرض می کنیم $V_1 \subset V$ باشد ، در این صورت V_1 را یک بخش از گراف G می نامیم ، هرگاه هیچ یالی ، رأس های V_1 را به رأس های $V - V_1$ وصل نکند.

مثال : گراف زیر از چند بخش تشکیل شده است ، آنها را مشخص کنید؟



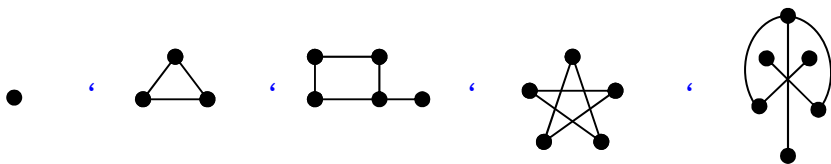
پاسخ : از سه بخش تشکیل شده است که عبارتند از :

$$V_1 = \{a, b\}, V_2 = \{c\}, V_3 = \{d, e\}$$

گراف همبند :

گراف ساده G را همبند گوئیم ، هرگاه بین هر دو رأس دلخواه آن ، دست کم یک مسیر وجود داشته باشد ، به عبارت دیگر ، هرگاه هر رأس به رئوس دیگر ، یا به طور مستقیم توسط یک یال و یا به طور غیر مستقیم توسط رئوس دیگر متصل شده باشد ، همچنین می توان گفت که گراف همبند ، گرافی است که فقط از یک بخش تشکیل شده باشد ، در غیر این صورت گراف را نا همبند می گوئیم ، از دید شهودی گراف همبند به گونه ای است که با گرفتن یکی از رئوس و بلند کردن گراف از صفحه کاغذ ، کل گراف از صفحه بلند می شود.

مثال : گراف های زیر همگی همبندند.

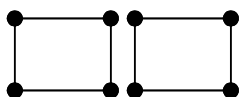


مثال : گراف های زیر ، همگی نا همبندند.



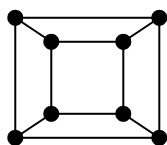
نا همبند دو بخشی نا همبند چهار بخشی نا همبند سه بخشی نا همبند دو بخشی

مثال : گرافی نا همبند از مرتبه 8 رسم کنید که 2 منتظم باشد؟ این گراف از چند بخش تشکیل شده است؟

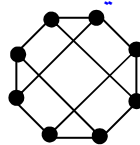


پاسخ : این گراف از 2 بخش تشکیل شده است.

مثال : دو گراف یکی همبند و دیگری نا همبند رسم کنید که 3 منتظم از مرتبه 8 باشد؟



یا



پاسخ :

همبند

نا همبند

نکات مهم :

(۱) هر گراف کامل همبند است (در واقع گراف کامل ، قوی ترین همبندی را دارد).

(۲) فقط گراف تهی از مرتبه 1 (گراف 0- منتظم از مرتبه 1) همبند است (زیرا بر حسب قرار داد ، بین هر رأس و خودش ، مسیری به طول صفر وجود دارد).

(۳) گراف های تهی از مرتبه 1 P ، همگی نا همبندند.

(۴) هر گراف که از چند بخش جدا از هم تشکیل شده باشد ، نا همبند است.

(۵) در هر گراف همبند از مرتبه 2 $P \geq 2$ ، همواره داریم :

$$\forall i: 1 \leq i \leq P \Rightarrow \deg V_i \geq 1$$

یعنی درجه هر رأس حداقل 1 است

(۶) برای هر گراف همبند از مرتبه P ، حداقل تعداد یال ها برابر $P-1$ است . یعنی :

$$q \geq p-1$$

$$q \geq p-1$$

بنابراین اگر G همبند باشد داریم:

(۷) به عبارت دیگر در هر گراف ساده از مرتبه P ، اگر $q < P-1$ باشد ، آنگاه گراف حتما نا همبند است.

(۸) در هر گراف همبند همواره داریم :

$$P-1 \leq q \leq \frac{P(P-1)}{2}$$

یا

$$\frac{1 + \sqrt{1 + 8q}}{2} \leq P \leq q + 1$$

تست : در گراف همبند G ، مرتبه برابر 8 است، هرگاه q اندازه این گراف باشد، کدام گزینه درست است؟

- (۱) $0 \leq q \leq 72$ (۲) $8 \leq q \leq 28$ (۳) $7 \leq q \leq 28$ (۴) $8 \leq q \leq 72$

پاسخ :

$$P - 1 \leq q \leq \frac{P(P-1)}{2} \Rightarrow 7 \leq q \leq 28$$

(۹) اگر گرافی P رأسی و ساده، نا همبند باشد و بیشترین یال ممکن را داشته باشد، باید تعداد یال هایش $\binom{P-1}{2}$ باشد (زیرا یک رأس را ایزوله (از درجه‌ی صفر) در نظر گرفته و با $P-1$ رأس باقی مانده، یک گراف کامل می‌سازیم).

بنابراین اگر در گرافی $\binom{P-1}{2} > q$ باشد، گراف حتماً همبند است، ضمناً ممکن است در یک گراف، $q \geq \binom{P-1}{2}$ باشد و گراف همبند نیز باشد.

تست : گرافی از مرتبه 10، از دو بخش جدا از هم تشکیل شده است (نا همبند است) این گراف حداکثر چند یال دارد؟

- (۱) 20 (۲) 45 (۳) 36 (۴) 28

پاسخ :

طبق نکته‌ی (۹) بیشترین تعداد یال در گراف نا همبند ساده‌ی P رأسی برابر است با :

$$\binom{P-1}{2} = \frac{(P-1)(P-2)}{2}$$

لذا داریم :

$$q_{Max} = \frac{(P-1)(P-2)}{2} = \frac{9 \times 8}{2} = 36$$

تست : گرافی 6 رأس و 11 یال دارد، این گراف چگونه است؟

- (۱) کامل (۲) همبند (۳) نا همبند (۴) هیچ کدام

پاسخ :

$$\begin{cases} P = 6 \\ q = 11 \end{cases} \Rightarrow \binom{P-1}{2} = \binom{5}{2} = 10 \Rightarrow q > \binom{P-1}{2}$$

لذا گراف همبند است.

تست : گرافی 6 رأسی دارای 7 یال است و نا همبند است، حداقل تعداد یالی که با اضافه کردن آن به گراف، گراف به گرافی صددرصد همبند تبدیل می‌شود، کدام است؟

- (۱) 3 (۲) 4 (۳) 5 (۴) 6

پاسخ : برای اینکه گراف به گرافی همبند تبدیل شود لازم است :

$$\binom{P-1}{2} > q \text{ یا } \binom{5}{2} = 10 > q \text{ بنابراین باید داشته باشیم :}$$

$$q + x > 10$$

$$\Rightarrow 7 + x > 10 \Rightarrow \min(x) = 4$$

(۱۰) اگر در گراف G ، هر یک از شرایط زیر برقرار باشد، گراف حتماً همبند است.

$$(1) \binom{P-1}{2} q$$

$$(2) \delta \geq \frac{P}{2}$$

(۱۱) حداقل تعداد یال ها در گراف نا همبند $P-2$ و حداکثر تعداد یال ها برابر $\binom{P-1}{2}$ می باشد.

(۱۲) هر گراف از مرتبه P که حداقل $1 + \binom{P-1}{2}$ یال داشته باشد ، همبند است.

تست : کمترین مقدار q که به ازاء آن گراف ساده G از مرتبه 14 همواره همبند باشد ، کدام است؟

(۱) 79 (۲) 78 (۳) 14 (۴) 12

پاسخ :

$$q = \binom{14-1}{2} + 1 = 78 + 1 = 79$$

تست : با حداقل چند یال می توان گرافی از مرتبه 10 و همبند ساخت؟

(۱) 35 (۲) 36 (۳) 37 (۴) 34

پاسخ :

$$\binom{P-1}{2} + 1 = \binom{9}{2} + 1 = 36 + 1 = 37$$

(۱۳) اگر $q < P-1$ باشد G حتماً دور دارد.

(۱۴) اگر G فاقد دور باشد $q \leq P-1$.

(۱۵) برای یافتن Max و Min بخش های جدا از هم در یک گراف ، از رابطه زیر استفاده می کنیم.

$$\frac{1 + \sqrt{1 + 8q}}{2} \leq P \leq q + 1$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 Max بخش Min بخش

تست : اگر مرتبه و اندازه گراف ساده G به ترتیب 10 و 6 باشند ، حداقل و حداکثر مؤلفه همبندی G (بخش های گراف G) ، کدام یک از گزینه های زیر می تواند باشد؟

(۱) 3 و 7 (۲) 4 و 8 (۳) 4 و 6 (۴) 4 و 7

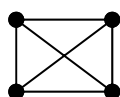
پاسخ :

$$\frac{1 + \sqrt{1 + 8q}}{2} \leq P \leq q + 1 \Rightarrow \frac{1 + \sqrt{1 + 48}}{2} \leq P \leq 6 + 1 \Rightarrow 4 \leq P \leq 7$$

و لذا گزینه 4 صحیح است در واقع داریم :

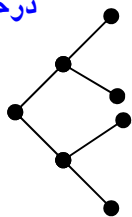
1 بسته 4 تایی + 6 رأس منفرد = Max بخش $\rightarrow$ 7 بخش

گراف کامل



1 بسته 7 تایی

درخت



+

Min بخش $\rightarrow$ 4 بخش = 3 رأس منفرد

(درخت گراف همبندی است که دور ندارد).

با مفهوم درخت و ویژگی های آن در قسمت های بعدی بیشتر آشنا خواهید شد.

تست : مرتبه گراف ساده ای 13 می باشد ، حداکثر مقدار اندازه گراف چقدر باشد تا بتواند 6 بخش جدا از هم تشکیل دهد؟

29 (4)

28 (3)

27 (2)

26 (1)

پاسخ :

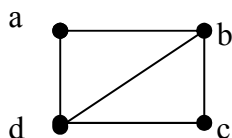
$$q = \frac{8 \times 7}{2} = 28 \Rightarrow \text{گراف کامل } 8 = 13 - 5 \text{ رأس منفرد}$$

6 بخش

بنابراین گزینه 3 صحیح است.

فاصله و قطر :

هرگاه u و v دو رأس از گراف $G = (V, E)$ باشند ، فاصله u از v در این گراف که با $d(u, v)$ نمایش داده می شود برابر است با طول کوتاهترین مسیری در G که از u به v وجود دارد و طول بلندترین مسیری که از u به v وجود دارد قطر نامیده می شود.

**مثال :** در گراف مقابل ، فاصله و قطر بین a و b چقدر است؟1 = فاصله $\rightarrow$ کوتاهترین مسیر a, b 3 = قطر $\rightarrow$ بلندترین مسیر a, d, c, b ✓ **نکته :** اگر دو رأس بر هم منطبق باشند ، فاصله آنها صفر خواهد بود.✓ **نکته :** اگر دو رأس توسط هیچ مسیری به هم متصل نشده باشند ، فاصله بین آنها را بی نهایت تعریف می کنیم.✓ **نکته :** همواره داریم :

$$(1) \quad d(u, u) = 0$$

$$(2) \quad u = v \Leftrightarrow d(u, v) = 0$$

$$(3) \quad \text{به ازاء هر } u \text{ و } v \in V(G) : d(u, v) = d(v, u)$$

$$(4) \quad \text{به ازاء هر } u, v, w \in V(G) : d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$$

(نا مساوی مثلثی)

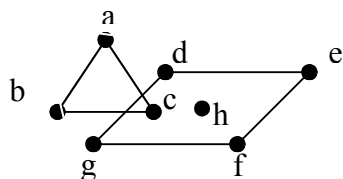
✓ **نکته :** هرگاه به ازاء هر u و v متعلق به $V(G)$ رابطه R را به صورت زیر تعریف کنیم :

$$u R v \Leftrightarrow \text{بین } u \text{ و } v \text{ مسیری موجود باشد}$$

به سادگی می توان ثابت کرد که این رابطه ، روی $V(G)$ یک رابطه هم ارزی است ، لذا این رابطه قادر است مجموعه $V(G)$ (یعنی مجموعه رئوس گراف G) را به دسته های هم ارزی افراز کند . به هر کدام از این دسته های هم

ارزی یک بخش می‌گوییم (با تعریف بخش قبلاً آشنا شدید)، در واقع هر دسته هم‌ارزی، مجموعه‌ای از رئوس می‌باشد که بینشان حداقل یک مسیر وجود داشته باشد.

مثال: کلیه دسته‌های هم‌ارزی را که توسط رابطه R تعریف شده در زیر در گراف مقابل، ایجاد می‌شوند را بنویسید؟



بین u و v مسیری موجود باشد. $u R v \Leftrightarrow$

$\{a, b, c\} = [a] = [b] = [c]$ بین a و x مسیری وجود داشته باشد: $[a] = \{x \in V(G) : \text{دسته هم‌ارزی } a\}$

به همین ترتیب: $[d] = \{d, e, f, g\} = [e] = [f] = [g]$ دسته هم‌ارزی d

$[h] = \{h\}$ دسته هم‌ارزی h

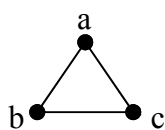
مسیر و دور همیلتنی (هامیلتونی):

مسیری که از همه رئوس یک گراف (نه همه یال‌های آن) فقط یک بار عبور نماید مسیر همیلتنی نامیده می‌شود، اگر چنین مسیری دور باشد، آن را دور همیلتنی می‌نامیم.

گراف همیلتنی (هامیلتونی):

گراف ساده G از مرتبه P ($P \geq 3$) را همیلتنی می‌گوییم، هرگاه دوری به طول P گذرنده از تمام رئوس (نه تمام یال‌ها) داشته باشد، به عبارت دیگر هرگاه دوری همیلتنی داشته باشد.

مثال: گراف‌های زیر همگی همیلتنی هستند.

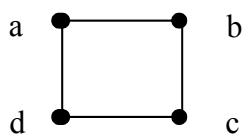


$$P = 3$$



دوری به طول 3

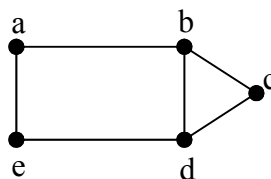
→ a, b, c, a



$$P = 4$$



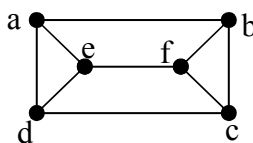
دوری به طول 4 → a, b, c, d, a



$$P = 5$$



دوری به طول 5 → a, b, c, d, e, a

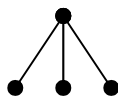


$$P = 6$$

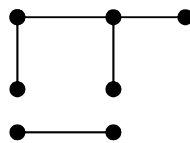


دوری به طول 6 → a, b, c, f, e, d, a

مثال : گراف های زیر همیلتنی نیستند.



دوری به طول 4 ندارد ، $P = 4$



دوری به طول 5 ندارد ، $P = 5$

✓ **نکته مهم :** راه قطعی تشخیص همیلتنی بودن یک گراف مانند G ، یافتن دور همیلتنی در آن است.

✓ **نکته :** هرگاه G همیلتنی باشد حتماً :

(i) همبند است.

(ii) رأس درجه صفر و یک ندارد (یعنی $\delta \geq 2$).

(iii) با حذف هر رأسش ، باز هم همبند می ماند.

(iv) با حذف هر یالش ، باز هم همبند می ماند.

نکاتی مهم :

(۱) هر گراف همیلتنی حتماً همبند است.

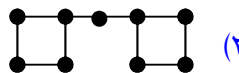
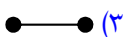
اثبات : فرض می کنیم $G = (V, E)$ گرافی همیلتنی و از مرتبه P باشد ، لذا طبق تعریف دوری به طول P دارد که از همه رئوس می گذرد ، بنابراین بین هر دو رأس آن مسیری وجود دارد لذا این گراف همبند است.

(۲) عکس مطلب فوق نادرست است.

مثال : گراف همبند است ولی هامیلتونی نیست زیرا دوری به طول 4 ندارد.

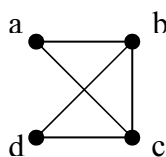


تست : کدام گراف همیلتنی است؟



پاسخ : گزینه 4 صحیح است ، زیرا دوری به طول $P = 4$ دارد ، این دور عبارتست از :

a , b , d , c , a

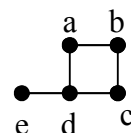


(۳) اگر G همیلتنی باشد ، درجه هر رأس آن حداقل 2 است ، به عبارت دیگر رأس درجه 0 و 1 ندارد یعنی :

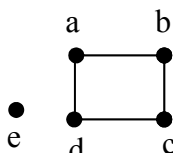
$$\forall i: 1 \leq i \leq P \Rightarrow \deg V_i \geq 2$$

زیرا دوری همیلتنی دارد که از همه رئوس می گذرد ، بنابراین لازم است که درجه هر رأس آن حداقل 2 باشد چرا که از یک یال به آن رأس وارد و از یال دیگر خارج شویم.

(۴) در هر گراف همیلتنی ، با حذف هر یال دلخواه ، گراف ، همبند باقی می ماند ، به عبارت دیگر هرگاه گرافی با حذف یک یال نا همبند شود ، همیلتنی نبوده است.

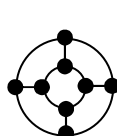


مثال : گراف

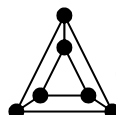
همیلتنی نیست زیرا اگر یال $e d$ را حذف کنیم ، نا همبند می شود ، توجه کنید :

(۵) در هر گراف همیلتنی ، با حذف هر رأس دلخواه ، گراف همبند باقی می ماند ، به عبارت دیگر هرگاه گرافی با حذف یک رأس نا همبند شود ، همیلتنی نبوده است.

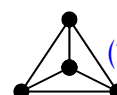
تست : کدام گراف همیلتنی نیست؟



(۴)



(۳)



(۲)



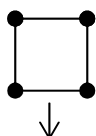
(۱)

پاسخ : گزینه ۱ صحیح است . زیرا اگر رأس وسط را حذف کنیم ، گراف نا همبند می شود ، توجه کنید.

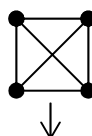
(۶) همه گراف های کامل K_P ($P \geq 3$) ، همیلتنی هستند.(۷) گراف های کامل K_1 و K_2 همیلتنی نیستند.

(۸) حداقل مرتبه و اندازه یک گراف همیلتنی ، ۳ می باشد.

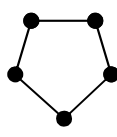
(۹) کوچکترین گراف همیلتنی از لحاظ مرتبه ، گراف ۲ - منتظم و بزرگترین گراف همیلتنی از لحاظ مرتبه ، گراف کامل است.



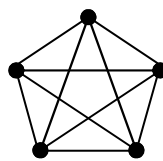
کوچکترین گراف همیلتنی از مرتبه ۴
= گراف ۲ - منتظم از مرتبه ۴



بزرگترین گراف همیلتنی از مرتبه ۴
= گراف کامل K_4



کوچکترین گراف همیلتنی از مرتبه ۵
= گراف ۲ - منتظم از مرتبه ۵



بزرگترین گراف همیلتنی از مرتبه ۵
= گراف کامل K_5

مثال :

تست : چند گراف همیلتنی از مرتبه ۱۰ با اندازه های مختلف وجود دارد؟

(۴) ۳۷

(۳) ۳۶

(۲) ۳۴

(۱) ۳۵

$$\text{اندازه کوچکترین همیلتنی} = q = \frac{\text{Pr}}{2} = \frac{10 \times 2}{2} = 10 \Rightarrow \text{۲- منتظم از مرتبه ی } 10 = \text{کوچکترین همیلتنی}$$

$$\text{اندازه بزرگترین همیلتنی} = q = \frac{P(P-1)}{2} = \frac{10 \times 9}{2} = 45 \Rightarrow \text{گراف کامل } K_{10} = \text{بزرگترین همیلتنی}$$

$$\text{تعداد} = 45 - 10 + 1 = 36$$

تست : در گراف کامل K_5 ، چند مسیر همیلتنی داریم؟

80 (۴)

40 (۳)

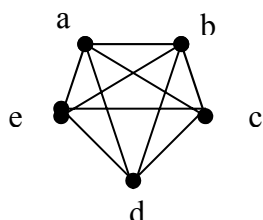
60 (۲)

20 (۱)

پاسخ : مسیر همیلتنی مسیری است که از همه رئوس فقط یک بار بگذرد. کافی است تعداد کل مسیر های به طول 4 را بیابیم بنابراین لازم است ابتدا 2 رأس را انتخاب و سپس مسیر های به طول 4 را محاسبه کنیم.
یعنی :

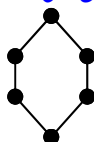
$$\binom{P}{m} (P-2)_{m-1} = \binom{5}{2} (3)_3 = 10 \times 6 = 60$$

به عنوان مثال در گراف زیر (گراف کامل K_5) مسیر a, c, d, e, b از a به b است.



۱۰. قضیه دیراک : اگر در گرافی از مرتبه $P \geq 3$ ، بدانیم $\deg V_i \geq \frac{P}{2}$ یا $\delta \geq \frac{P}{2}$ ، آنگاه این گراف حتماً همیلتنی است ،

اما عکس این مطلب درست نیست ، یعنی ممکن است گرافی ، همیلتنی باشد، ولی $\delta < \frac{P}{2}$ باشد به عنوان مثال گراف مقابل را در نظر بگیرید :



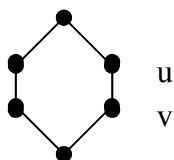
مرتبه این گراف $P = 6$ است ، ضمناً دوری به طول 6 دارد که از همه رئوس می گذرد ، به بیان دیگر ، این گراف همیلتنی است ولی :

$$\delta = 2 < \frac{6}{2}$$

✓ **تذکر :** هر قدر ، درجهی رئوس ، بزرگتر شود ، احتمال همیلتنی شدن گراف نیز زیادتر می شود (زمانی که درجهی هر رأس حداقل به $\frac{P}{2}$ برسد (قضیهی دیراک) ، گراف ، همیلتنی می گردد).

۱۱. **قضیه اور:** اگر در گرافی از مرتبه P ، $P \geq 3$ برای هر دو رأس غیر مجاورمانند u و v داشته باشیم : $\deg u + \deg v \geq P$ آنگاه این گراف حتماً همیلتنی است ، اما عکس این مطلب ، درست نیست ، یعنی ممکن است گرافی همیلتونی باشد ولی $\deg u + \deg v < P$ باشد.

مثال : گراف مقابل هامیلتونی است ، زیرا $P = 6$ و دوری به طول 6 دارد،



اما :

$$\deg u = 2$$

$$\deg v = 2 \quad , \quad 2 + 2 < 6$$

گراف پترسن :

گراف مقابل ، گراف پترسن نام دارد.

این گراف :

(۱) گرافی 3- منتظم از مرتبه 10 است. ($P = 10$, $r = 3$)

(۲) 15 یال دارد. ($q = 15$)

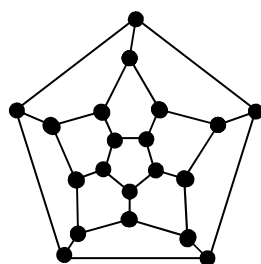
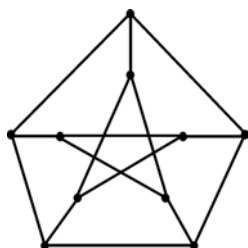
(۳) کامل نیست. (البته این مطلب واضح است).

(۴) دوری به طول 10 ندارد و بنابراین همیلتونی نیست.

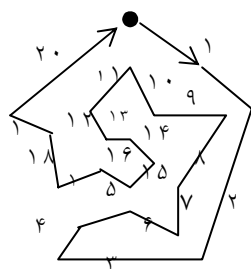
(۵) در این گراف می توان دورهایی به طول 5 ، 6 ، 8 ، 9 پیدا کرد.

(۶) این گراف را می توان با حذف یک رأس و یا با افزودن یک یال به یک گراف همیلتنی تبدیل کرد.

نکته : گراف مقابل همیلتنی است ، زیرا دوری به طول 20 دارد.



این دور در شکل زیر نمایش داده شده است.

**مسیر و دور اویلری :**

مسیری که از همه یال های یک گراف (نه همه رأس آن) فقط یک بار عبور نماید مسیر اویلری نامیده می شود و اگر چنین مسیری دور باشد ، آن را دور اویلری می گویند.

تذکر مهم : لازم است که به تفاوت بین مسیر و دور همیلتنی با مسیر و دور اویلری توجه کرد.

گراف اویلری :

هرگاه در یک گراف (ساده یا چندگانه) بتوان با شروع از هر رأس ، از همه یال ها (نه همه رأس) فقط یک بار گذشته و به همان رأس بازگشت ، در این صورت آن گراف را یک گراف اویلری می نامیم ، به عبارت دیگر ، گراف اویلری ، گرافی است که شامل یک دور اویلری باشد.

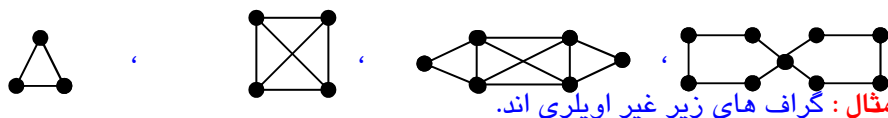
قضیه اویلر :

گراف G ، اویلری است اگر و فقط اگر که همبند باشد و درجه همه رأسش زوج باشد.

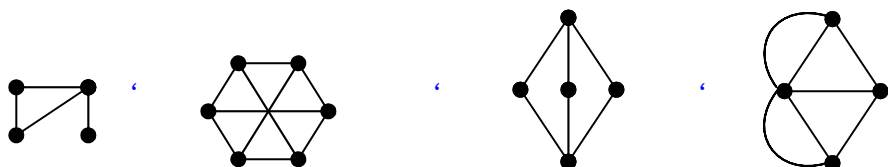
تعریف دیگر (تعریف معادل) گراف اویلری :

گراف اویلری ، گراف همبندی است که درجهٔ همهٔ رئوسش زوج باشد ، این ملاک ، ملاک خوبی برای تشخیص اویلری بودن گراف است.

مثال : گراف های زیر همگی اویلری اند.



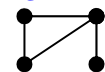
مثال : گراف های زیر غیر اویلری اند.



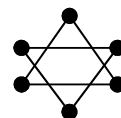
گراف پل کونیگسبرگ

✓ **تذکر مهم :** هر یک از دو شرط همبند بودن و زوج بودن درجهٔ همهٔ رئوس به تنهایی برای اویلری بودن یک گراف ، شرطی لازم بوده ولی کافی نیستند.

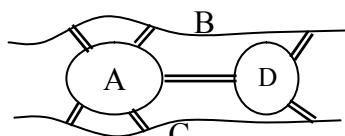
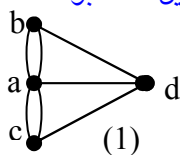
مثال : گراف همبند است ولی اویلری نیست.



مثال : درجهٔ همهٔ رئوس گراف زوج است ولی اویلری نیست ، زیرا همبند نیست .



مثال : در قرن هیجدهم میلادی ، شهر کونیگسبرگ (شهری در پروس شرقی قدیم و در سواحل رودخانهٔ پرگل) از دو ساحل یک رودخانه (نواحی B و C در شکل زیر) و دو جزیره (نواحی A و D در شکل زیر) تشکیل شده بود.



در آن زمان هفت پل ، این چهار منطقه را به هم وصل می کردند ، معمای زیر سال ها ، شهروندان را سرگرم کرده بود : آیا امکان دارد با آغاز از یکی از مناطق در شهر گشتی زد ، از هر پل یک بار و تنها یک بار گذشت و به مکان اول بازگشت؟

ریاضی دان معروف لئونارد اویلر در سال 1736 ، با حل مسألهٔ پل های کونیگسبرگ نظریهٔ گراف ها را بنیان گذاشت ، وی به هر یک از این چهار منطقه ، نقطه ای از صفحه را نسبت داد و به ازاء هر پل بین دو منطقه ، پاره خطی یا کمانی بین دو نقطهٔ متناظر با آنها رسم کرد ، به این ترتیب مطابق شکل (۱) به مدلی ریاضی دست یافت و به سادگی پاسخ معما را که منفی است ، دریافت . در واقع گراف شکل (۱) ، گرافی غیر اویلری است.

تست : کدام گراف اویلری است؟



پاسخ : گزینهٔ 2 صحیح است زیرا ، هم همبند است و هم درجهٔ همهٔ رئوسش زوج است.

✓ **نکتهٔ ۱ :** هر گراف اویلری همبند است و لذا هر گرافی که همبند نباشد اویلری نیست (طبق عکس نقیض) ، اما همانطور که دیدیم عکس نکتهٔ فوق درست نیست.

✓ **نکته ۲:** هر گراف کامل K_P ($P \geq 3$)، از مرتبه فرد اویلری است. (زیرا اگر P فرد باشد، با توجه به اینکه گراف کامل است و درجه هر رأس آن $P-1$ است، نتیجه می شود که درجه هر رأس آن زوج است).

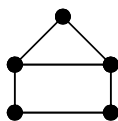
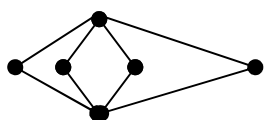
تست: اگر گراف کامل K_P ، اویلری باشد، P کدام عدد می تواند باشد؟

- (۱) 21 (۲) 30 (۳) 58 (۴) 64

پاسخ: با توجه به نکته قبل، پاسخ صحیح گزینه ۱ می باشد.

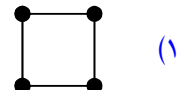
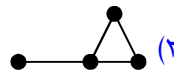
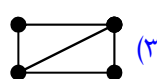
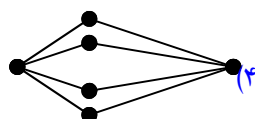
✓ **نکته ۳:** لزومی ندارد که هر گراف اویلری همیلتنی باشد.

مثال: گراف مقابل اویلری است ولی همیلتنی نیست.



✓ **نکته ۴:** لزومی ندارد که هر گراف همیلتنی، اویلری باشد.

مثال: گراف مقابل همیلتنی است ولی اویلری نیست.



تست: کدام گراف زیر نه اویلری است نه همیلتنی؟

پاسخ: گزینه 2 صحیح است. گراف گزینه (1) هم اویلری است هم همیلتنی، گراف گزینه (3) همیلتنی هست ولی اویلری نیست، گراف گزینه (۴) اویلری هست ولی همیلتنی نیست.

تست: چند گراف اویلری و منتظم از مرتبه 10 داریم؟

- (۱) 4 (۲) 3 (۳) 5 (۴) 6

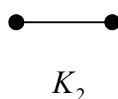
پاسخ: چون اویلری است لذا باید درجه هر رأس زوج باشد بنابراین اگر قرار باشد r - منتظم نیز باشد باید r برابر 0 یا 2 یا 4 یا 6 یا 8 باشد، اما r ، صفر نمی تواند باشد زیرا در این صورت نا همبند شده و لذا غیر اویلری می شود، بنابراین گزینه ۱ صحیح است.

درخت:

گراف همبندی است که دور ندارد.

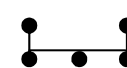
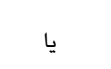
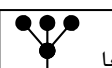
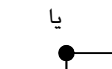
تعریف دیگر درخت: گرافی است که بین هر دو رأس دلخواه آن، فقط و فقط یک مسیر وجود داشته باشد. (چرا که اگر بین دو رأس بیش از یک مسیر باشد آنگاه بین آن دو رأس یک دور به وجود می آید).

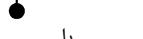
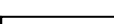
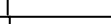
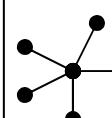
✓ **نکته:** فقط گراف های کامل K_1 و K_2 درخت هستند (زیرا دور ندارند).



مثال : تمام درخت های از مرتبه ۱ تا ۶ را رسم کنید؟

درخت از مرتبه 1		درخت از مرتبه 2		درخت از مرتبه 3		درختهای از مرتبه 4	
			 یا 	 یا  یا  یا 			
دنبالهٔ درجات رئوس	0	1,1	2,1,1	2,2,1,1	3,1,1,1		

درختهای از مرتبه 5			
 یا  یا 	 یا 	 یا  یا  یا 	
دنبالهٔ درجات رئوس	2,2,2,1,1	4,1,1,1,1	3,2,1,1,1

درختهای از مرتبه 6						
 یا  یا  یا  یا 	 یا  یا  یا  یا 	 یا  یا  یا  یا  یا 	 یا  یا  یا  یا  یا 	 یا  یا  یا  یا  یا 		
دنبالهٔ درجات رئوس	2,2,2,2,1,1	3,2,2,1,1,1	3,2,2,1,1,1	3,3,1,1,1,1	4,2,1,1,1,1	5,1,1,1,1,1

(۱) تعداد درختان از مرتبه ی ۱، ۲، ۳، یکی است.

(۲) تعداد درختان از مرتبه ی ۴، دو تا است

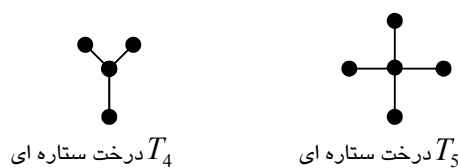
(۳) تعداد درختان از مرتبه ی ۵، سه تا است.

(۴) تعداد درختان از مرتبه ی ۶، شش تا است.

نکته :

(۵) تعداد درختان از مرتبه ی ۷، یازده تا است.

درخت ستاره ای : درخت ستاره ای درختی است که در آن یکی از رأس ها به تمام رؤوس دیگر وصل شده باشد ، مانند شکل های زیر :



چند نکته :

- ۱- در درخت های ستاره ای ، با وصل کردن هر دو رأس غیر مجاور ، یک دور به طول 3 ایجاد می شود.
- ۲- اگر درخت T ، ستاره ای و از مرتبه P باشد ، در آن صورت یکی از رأس ها (هسته ی ستاره) از درجه ی Max (یعنی از درجه ی $P-1$) و سایر رأس ها (یعنی $P-1$ رأس دیگر) از درجه ی Min (یعنی از درجه ی 1) خواهند بود.
- ۳- در درخت های ستاره ای فاصله ی هسته از سایر رأس ها 1 و فاصله ی رأس های دیگر از یکدیگر 2 می باشد ، لذا در درخت های ستاره ای طول کوتاهترین مسیر 1 و طول بلندترین مسیر 2 می باشد ، (به عبارت دیگر هیچ مسیری با طول های 3 ، 4 ، ... وجود ندارد).

قبل از بیان نکات و ویژگی های درخت به بیان و اثبات چند قضیه مهم می پردازیم.

قضیه : بین هر دو رأس هر درخت ، دقیقاً یک مسیر وجود دارد.

اثبات : در حالتی که دو رأس متمایز نباشند مطلب واضح است ، زیرا بین هر رأس و خودش یک مسیر به طول صفر وجود دارد ، لذا فرض می کنیم u و v دو رأس متمایز درختی چون G باشند ، چون G همبند است پس بین u و v دست کم یک مسیر وجود دارد ، حال اگر در گراف G بیش از یک مسیر مثلاً دو مسیر (در واقع دو دنباله مختلف از رأس های متمایز G) از u به v وجود داشته باشد (فرض خلف) آنگاه این دو مسیر مختلف بین u و v ، ایجاد می کند که دوری در G وجود داشته باشد (در واقع دوری از u به v) ، چرا که از یک مسیر رفته و از مسیر دیگر بر می گردیم ، اما این با تعریف درخت تناقض دارد ، زیرا در درخت ، دور وجود ندارد.

قضیه : هر درختی که بیش از یک یال داشته باشد ، دست کم دو رأس از درجه یک دارد.

اثبات : از استقراء تعمیم یافته روی مرتبه درخت G استفاده می کنیم ، اگر $P = 2$ باشد ، آنگاه $G = K_2$ و درستی حکم واضح است (زیرا K_2 یعنی گراف $\bullet - \bullet$ دو رأس از درجه یک دارد).

اکنون فرض می کنیم حکم در مورد هر درخت از مرتبه $K \geq 2$ رأس ، درست باشد ، درختی مانند G از مرتبه $K+1$ در نظر می گیریم ، اکنون برای اثبات حکم دو حالت زیر را در نظر می گیریم :

(۱) G رأسی از درجه یک دارد.

(۲) G رأسی از درجه یک ندارد.

اگر G رأسی چون v از درجه یک داشته باشد ، آنگاه با حذف این رأس و تنها یال گذرنده از آن ، گرافی مانند G' بدست می آوریم که اولاً درخت است و ثانیاً $K \geq 2$ رأس دارد . لذا بنا به فرض استقراء ، G' و در نتیجه G ، دست کم دو رأس از درجه یک دارد و بنابراین حکم در این حالت ثابت است ، اکنون فرض می کنیم که درجه هیچ رأسی از G از دو کمتر نباشد ، در این صورت رأسی چون u از G را در نظر می گیریم ، با آغاز از u و انتخاب یالی از G ، که از u می گذرد ، مسیری مانند P به این ترتیب می پیماییم که هر بار پس از رسیدن به رأسی تازه ، یالی از G را پیش می گیریم که اولاً از آن رأس بگذرد ، و ثانیاً قبلاً مورد استفاده قرار نگرفته باشد و ثالثاً انتهای دیگر آن ، رأسی تازه تر از G باشد ، این کار باید در جایی متوقف شود ، اما چون درجه هر رأس ، دست کم دو ، است توقف آن با رسیدن به یکی از رأس های قبلی میسر است ، این بدان معناست که دوری در G وجود دارد که با تعریف درخت در تناقض است زیرا درخت ، دور ندارد ، در نتیجه در این حالت نیز ، حکم ثابت است.

قضیه : فرض کنید Max درجه رؤوس یک درخت مانند T ، برابر K باشد ، ثابت کنید T دست کم K رأس از درجه یک دارد . به عبارت دیگر اگر $\Delta = K$ باشد ، می خواهیم ثابت کنیم ، T حداقل K رأس از درجه یک دارد.

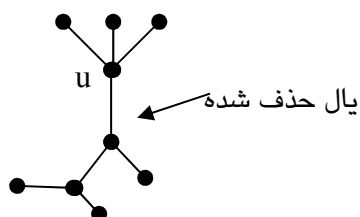
اثبات: از روش استقراء روی K استفاده می کنیم.

$P(1)$: چنانچه $\Delta = 1$ باشد (یعنی Max درجه T برابر یک باشد)، در این صورت درجه تمام رئوس درخت 1 بوده و بنابراین T حداقل یک رأس از درجه 1 دارد، لذا حکم در این حالت ثابت است.

$P(K)$: فرض استقراء: برای $\Delta = K$ ، فرض می کنیم T حداقل دارای K رأس از درجه یک باشد.

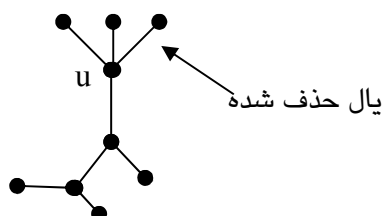
$P(K+1)$: اکنون به ازاء $\Delta = K+1$ ، ثابت می کنیم درخت T دارای $K+1$ رأس از درجه یک است.

اثبات حکم استقراء: فرض می کنیم T' درختی باشد که Max درجه اش $K+1$ باشد، رأسی را که درجه اش $K+1$ است u می نامیم، حال در رأس u یک یال را حذف می کنیم ممکن است یال حذف شده درخت را به دو درخت یعنی گراف نا همبند تبدیل کند (شکل الف).



شکل (الف)

و یا اینکه درخت به یک درخت دیگر و یک نقطه منفرد (ایزوله) تبدیل شود (شکل ب).



شکل (ب)

در هر حالت، چون درخت بدست آمده (درختی که پس از حذف یال متصل به u بدست آمده است)، یک رأس از درجه K دارد، لذا طبق فرض استقراء، حداقل K رأس از درجه یک دارد، در نتیجه T' ، حداقل $K+1$ رأس از درجه یک دارد و حکم ثابت است.

قضیه مهم: هرگاه T درختی با P رأس و q یال باشد آنگاه $P = q + 1$.

(یا $q = P - 1$ یا $p - q = 1$)

اثبات: از روش استقراء ریاضی بر مرتبه درخت یعنی P ، استفاده می کنیم.

$P(1)$: اگر $P = 1$ باشد آنگاه گراف ایزوله بوده، بنابراین $q = 0$ و تساوی $P = q + 1$ در این حالت برقرار است.

$P(K)$: اکنون فرض می کنیم قضیه در مورد هر درختی با $K \geq 1$ رأس برقرار باشد.

$P(K+1)$: حال درختی چون T از مرتبه $K+1$ ($P = K+1$) را در نظر می گیریم برای اثبات حکم یعنی

تساوی $P = q + 1$ ، باید ثابت کنیم T ، K یال دارد، (برای اثبات این مطلب از قضیه قبل استفاده می کنیم)، از قضیه قبل

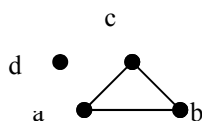
نتیجه می شود که T رأسی مانند v از درجه 1 دارد، با حذف این رأس و تنها یال گذرنده از آن، درختی چون T' بدست

می آید که اولاً مرتبه اش K است ($P = K$) و ثانیاً طبق فرض استقراء، $K-1$ یال دارد ($q = P-1 = K-1$)، لذا

درخت T که از درخت T' ، یک یال بیشتر دارد، دقیقاً K یال دارد، چرا که اگر رأس درجه یک حذف شده و یالش را به درخت برگردانیم، یک یال به یال های قبلی اضافه می شود.

$$(q = K - 1 + 1 = K)$$

تذکر مهم : عکس این مطلب درست نیست ، یعنی اگر در گرافی مانند G داشته باشیم $P = q + 1$ ، ممکن است این گراف ، درخت نباشد ، به مثال زیر توجه کنید :



مثال : در گراف مقابل داریم :

$$\begin{cases} P = 4 \\ q = 3 \end{cases}$$

همان طوری که دیده می شود تساوی $P = q + 1$ برقرار است ولی این گراف ، درخت نیست زیرا ، هم نا همبند است و هم اینکه دور دارد.

نکته مهم : اگر گرافی همبند باشد و در آن تساوی $P = q + 1$ نیز برقرار باشد ، آن گراف حتماً درخت است ، به عبارت دیگر می توان تعریف جدیدی برای درخت به صورت زیر ارائه داد .
درخت ، گراف همبندی است که در آن تساوی $P = q + 1$ برقرار باشد.

نکات مهم مربوط به درخت :

(۱) تنها درختان کامل ، درختان مرتبه ۱ و ۲ یعنی K_1 و K_2 هستند.

(۲) تنها درختان منتظم ، درختان مرتبه ۱ و ۲ می باشند.

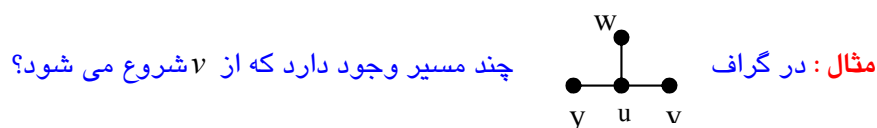
تست : چند درخت منتظم از مرتبه ۶ وجود دارد؟

(۱) ۶ (۲) ۵ (۳) ۴ (۴) ۰

پاسخ : طبق نکته فوق ، گزینه ۴ صحیح است.

(۳) بین هر دو رأس هر درختی فقط یک مسیر وجود دارد.

(۴) در هر درخت از مرتبه P تعداد کل مسیر های آغاز شده از رأس v (بدون احتساب مسیر به طول صفر ، یعنی مسیر از v به v) برابر $P - 1$ است.



پاسخ : طبق نکته فوق $P - 1 = 4 - 1 = 3$ مسیر که عبارتند از :

مسیر های به طول $v, u, w - v, u, y = 2$ و مسیری به طول یک $v, u =$

(۵) تعداد کل مسیر های متمایز (بدون احتساب مسیر های به طول صفر ، یعنی رئوس گراف) یک درخت از مرتبه P برابر

است با : $\binom{P}{2}$ و تعداد مسیر های به طول یک در هر درخت برابر q می باشد.

تست : در درخت از مرتبه ۹ ، کلاً چند مسیر با طول های مخالف صفر وجود دارد؟

(۱) ۱۵ (۲) ۳۶ (۳) ۷۲ (۴) ۶۴

پاسخ : طبق نکته فوق گزینه ۲ صحیح است . زیرا :

$$\binom{9}{2} = 36$$

(۶) تعداد کل مسیر های متمایز (چه با طول صفر چه با طول بزرگتر از صفر) یک درخت از مرتبه P برابر است با :

$$\binom{P}{2} + P$$

↓

مسیر های به طول صفر

$$P - 1 - \deg V$$

= تعداد کل مسیر های متمایز با طول حداقل 2

$$\binom{P}{2} - q = \binom{P}{2} - (P-1) = \frac{P(P-1)}{2} - (P-1) = \frac{(P-1)(P-2)}{2} = \binom{P-1}{2}$$

تست: تعداد مسیرهای موجود در یک درخت 10 رأسی که طول آنها حداقل 2 است برابر است با:

یاسخ: گزینه ۳ صحیح است زیرا:

$$\binom{10}{2} - (10 - 1) = 45 - 9 = 36 \quad \text{یا} \quad \binom{9}{2} = \frac{9 \times 8}{2} = 36$$

تست: کدام یک از دنباله های زیر ، دنباله درجات رئوس یک درخت می باشد؟

3, 2, 2, 1, 1, 1 (५) 2, 2, 1, 1, 1, 1 (३)

گزینه ۳ نیز نادرست است. زیرا در این گزینه $q = 4$ و $P = 6$ و در شرط $P = q + 1$ صدق نمی کند. (یادآوری می کنیم که تعداد حملات دنباله برابر P است و نصف مجموع حملات دنباله برابر q است).

البته تساوی $P = q + 1$ ، در مورد گزینه های 1 و 2 نیز برقرار نیست. بنابراین گزینه 4 صحیح است.

تست: دنباله درجات رئوس یک درخت به صورت $1, 1, \dots, 1, 2, 3, 4, 5$ است، n کدام است؟

9 (۴) 8 (۳) 7 (۲) 6 (۱)

پاسخ: چون Max درجهٔ رئوس، $\Delta = 5$ است لذا درخت باید حداقل 5 رأس از درجهٔ 1 داشته باشد اما n فرد نمی تواند باشد، زیرا در این صورت با توجه به دو عدد 3 و 5، تعداد رئوس فرد، فرد می شود، بنابراین n زوج است، ضمناً $n = 6$ هم نمی تواند باشد. زیرا در این حالت $P = q$ می شود (می دانیم در درخت باید رابطهٔ $P = q + 1$ برقرار باشد).

لذا گزینه 3 صحیح است.

۸- در هر درخت از مرتبه P و اندازه q داریم :

$$P = q + 1 \quad \text{یا} \quad q = P - 1$$

تست : هر درخت از مرتبه 7 چند یال دارد؟

- (۱) 7 (۲) 8 (۳) 6 (۴) 5

پاسخ : طبق نکته فوق گزینه ۳ صحیح است . زیرا :

$$q = P - 1 = 7 - 1 = 6$$

تست : دنباله درجات رئوس یک درخت به صورت 1، 1، 1، 2، 3 است ، این درخت چند یال دارد؟

- (۱) 4 (۲) 5 (۳) 6 (۴) 7

پاسخ :

راه اول :

$$q = P - 1 = 5 - 1 = 4$$

راه دوم :

$$q = \frac{3+2+1+1+1}{2} = 4$$

۹- حاصل ضرب مرتبه و اندازه هر درخت ، همواره عددی زوج است ، زیرا با توجه به رابطه $P = q + 1$ داریم :

$$\text{زوج} = 2K = \text{حاصل ضرب دو عدد متوالی} = q(q+1)$$

تست : بین هر دو رأس گراف همبند G ، یک مسیر وجود دارد ، حاصل ضرب مرتبه و اندازه آن کدام است؟

- (۱) 21 (۲) 15 (۳) 12 (۴) 25

پاسخ : واضح است که G ، درخت است لذا طبق نکته فوق گزینه 3 صحیح است.

۱۰- مجموع مرتبه و اندازه یک درخت ، همواره عددی فرد است ، زیرا با توجه به رابطه $P = q + 1$ داریم :

$$p + q = (q + 1) + q = 2q + 1 = \text{فرد}$$

تست : گراف همبند G فاقد دور است ، مجموع مرتبه و اندازه آن کدام است؟ (کنکور ۷۷)

- (۱) 12 (۲) 15 (۳) 18 (۴) 20

پاسخ : واضح است که G ، درخت است لذا با توجه به نکته فوق ، گزینه 2 صحیح است.

۱۱- درخت گراف همبندی است که با افزایش یک یال بین هر دو رأس آن ، فقط و فقط یک دور در آن به وجود می آید.

نتیجه : اگر در یک گراف همبند ، داشته باشیم $P = q = n$ ، آنگاه G فقط یک دور دارد.

اثبات : چون G همبند بوده و $P = q = n$ است ، لذا تساوی $P = q + 1$ برقرار نیست . بنابراین G یک درخت نیست ، پس

دست کم یک دور دارد ، حال اگر از این دور یک یال حذف کنیم گراف همبندی با $P = n$ رأس و $q = n - 1$ یال به وجود

آید ، چون گراف حاصل همبند بوده و ضمناً تساوی $P = q + 1$ برای آن برقرار است ، لذا این گراف یک درخت می باشد

که فاقد دور است ، بنابراین گراف اصلی یعنی G دقیقاً یک دور دارد.

۱۲- درخت گراف همبندی است که حداقل یک یال را ، دارد به عبارت دیگر در بین گراف های همبند P رأسی ، کمترین یال ممکن را درخت دارد ، یعنی اگر در یک گراف ، داشته باشیم $P-1 < q$ ، آن گراف مطمئناً نا همبند است.

تست : گرافی 10 رأس و 8 یال دارد ، کدام مطلب درباره آن درست است؟

- (۱) درخت است (۲) کامل است (۳) همیلتنی است (۴) نا همبند است

پاسخ : طبق نکته فوق گزینه 4 صحیح است.

تست : اگر در گراف G با 8 رأس ، از هر رأس به رأس دیگر ، مسیری وجود داشته باشد ، حداقل چند یال وجود دارد؟ (آزاد ۸۰)

- (۱) 6 (۲) 7 (۳) 15 (۴) 9

پاسخ : حداقل یال در گراف همبند ، زمانی است که گراف درخت باشد لذا داریم :

$$q = P - 1 = 8 - 1 = 7$$

۱۳- **یادآوری :** تعداد یال های مورد نیاز برای آنکه گرافی از مرتبه P :

الف) حتماً همبند باشد برابر است با :

$$q = \binom{P-1}{2} + 1$$

ب) بتواند همبند باشد برابر است با :

$$q = P - 1$$

نتیجه : در گرافی همبند با اندازه q ، حداکثر مرتبه ، حالتی است که درخت رخ دهد یعنی :

$$P = q + 1$$

تست : بیشترین تعداد رئوس گراف همبند G با 20 یال کدام است؟

- (۱) 21 (۲) 20 (۳) 19 (۴) 22

پاسخ : طبق نکته فوق گزینه 1 صحیح است.

۱۴- مجموع درجات رئوس یک درخت از مرتبه P برابر است با :

$$2P - 2$$

زیرا :

$$\sum_{i=1}^P \deg V_i = 2q = 2(P-1) = 2P - 2$$

تست : بین هر دو رأس گراف G ، دقیقاً یک مسیر وجود دارد ، این گراف شامل 7 رأس از درجه یک ، 5 رأس از درجه 2 ، K رأس از درجه 3 است ، K کدام است؟

- (۱) 6 (۲) 5 (۳) 4 (۴) 3

پاسخ : چون بین هر دو رأس گراف G ، دقیقاً یک مسیر وجود دارد لذا اولاً این گراف همبند است و ثانیاً این گراف ، درخت است بنابراین داریم :

$$\sum_{i=1}^P \deg V_i = 2P - 2 \Rightarrow 7(1) + 5(2) + K(3) = 7 + 5 + K$$

$$\Rightarrow 17 + 3K = 22 + 2K \Rightarrow K = 5$$

۱۵- میانگین درجات رئوس یک درخت از فرمول $\frac{2q}{P} = \frac{2(P-1)}{P} = \frac{2P-2}{P} = 2 - \frac{2}{P}$ بدست می آید.

تست : اگر در درختی ، میانگین درجات $1/98$ باشد ، اندازه آن چیست؟

- ۹۹ (۱) ۱۰۰ (۲) ۱۹۹ (۳) ۲۰۰ (۴)

پاسخ :

$$\frac{2q}{P} = 1/98 \Rightarrow \frac{2P-2}{P} = 1/98 \Rightarrow P = 100 \Rightarrow q = P-1 = 99$$

تست : اگر در درختی ، $P^2 - q^2 = 19$ باشد ، آنگاه اندازه این درخت برابر است با :

- ۹ (۱) ۱۰ (۲) ۸ (۳) ۱۱ (۴)

پاسخ :

$$P^2 - q^2 = 19 \Rightarrow \underbrace{(P-q)}_1 \underbrace{(P+q)}_{2q+1} = 19 \Rightarrow 2q+1 = 19 \Rightarrow q = 9$$

۱۶- اگر دنباله درجات رئوس یک درخت به صورت $\{d_1, d_2, \dots, d_p\}$ باشد ، تعداد درخت هایی که می توان رسم کرد از

$$\text{رابطه} \frac{(P-2)!}{(d_1-1)!(d_2-1)! \dots (d_p-1)!} \text{ بدست می آید.}$$

تست : اگر دنباله درجات رئوس یک درخت ، به صورت $1, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3$ باشد ، با این دنباله ، چند درخت می توان رسم کرد؟

- ۶۰ (۱) ۱۲۰ (۲) ۱۸۰ (۳) ۷۲ (۴)

$$\frac{(8-2)!}{2!2!1!1!0!0!0!0!} = \frac{720}{4} = 180$$

پاسخ :

۱۷- **قضیه :** احکام زیر معادلند ، یعنی هر کدام از آنها ، دیگری را نتیجه می دهد.

(۱) G درخت است.

(۲) G دور ندارد و $P = q + 1$.

(۳) G همبند است و $P = q + 1$.

(۴) G همبند است ولی با حذف هر یال ، نا همبند می شود.

(۵) G دور ندارد ولی با افزودن هر یال ، دارای دور می شود.

(۶) بین هر دو رأس G دقیقاً یک مسیر وجود دارد.

- گراف کامل $\equiv$ بین هر دو رأس حداقل (یا دقیقاً) یک یال وجود دارد.
- گراف همبند $\equiv$ بین هر دو رأس حداقل یک مسیر وجود دارد.
- گراف درخت $\equiv$ بین هر دو رأس دقیقاً یک مسیر وجود دارد.

جنگل :

فرض می کنیم گرافی از چند بخش تشکیل شده باشد (یعنی همبند نباشد)، به طوریکه هر یک از این بخش ها، به تنهایی درخت باشند، در این صورت این گراف را جنگل می گوئیم و آن را با J نمایش می دهیم.

قضیه : اگر جنگلی از P رأس و K درخت تشکیل شده باشد، آنگاه این جنگل $P - K$ یال دارد، یعنی: $q = P - K$.

اثبات : فرض می کنیم J یک جنگل P رأسی باشد که از K درخت $T_1, T_2, \dots, T_K$ تشکیل شده باشد، در این صورت طبق قضیه ای از قبل ($q = P - 1$) در مورد هر درخت داریم :

$$\begin{aligned} T_1 &\rightarrow q_1 = P_1 - 1 \\ T_2 &\rightarrow q_2 = P_2 - 1 \\ &\vdots \\ T_K &\rightarrow q_K = P_K - 1 \end{aligned}$$

$$+ \frac{\sum_{i=1}^K q_i = \sum_{i=1}^K (P_i - 1) = \sum_{i=1}^K P_i - \sum_{i=1}^K 1}{\Rightarrow q = P - K}$$

تست : اگر گرافی از K درخت مجزا تشکیل شده باشد، رابطه بین P و q در این گراف چیست؟

$$(1) \quad P = q + 1 \quad (2) \quad q = P + 1 \quad (3) \quad P = q + K \quad (4) \quad q = P + K$$

پاسخ : طبق قضیه قبل، گزینه 3 صحیح است.

ماتریس مجاورت یک گراف :

اگر $G = (V, E)$ یک گراف ساده از مرتبه P باشد، ماتریس مجاورت گراف G که آن را با $A(G)$ یا به اختصار به A نمایش می دهیم، به صورت زیر تعریف می شود :

$$A(G) = A = [V_{ij}]_{P \times P} \quad \text{و} \quad V_{ij} = \begin{cases} 1, & (V_i V_j \in E) \\ 0, & (V_i V_j \notin E) \end{cases}$$

این ماتریس، ماتریسی است مربعی $(P \times P)$ و درایه های آن را صفر اختیار می کنیم هرگاه بین رأس های سطر و ستون آن درایه، یالی وجود نداشته باشد (روی قطر اصلی، بین هر رأس و خودش، مسیری به طول صفر تعریف می شود و بنابراین درایه های روی قطر اصلی همگی صفرند) و یک تعریف می کنیم هرگاه بین رأس های سطر و ستون آن درایه، یال وجود داشته باشد.

مثال : ماتریس مجاورت گراف های مقابل را بنویسید؟

(الف) $a \text{ --- } b \xrightarrow{P=2} A = \begin{matrix} & a & b \\ \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}_{2 \times 2}$

(ب) $\begin{matrix} & a & b \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}_{4 \times 4} \xrightarrow{P=4}$

ویژگی های ماتریس مجاورت یک گراف ساده :

(۱) این ماتریس ، ماتریسی مربعی است.

(۲) درایه های روی قطر اصلی ، همگی صفرند (زیرا گراف ساده بوده و فاقد طوقه است).

(۳) درایه های ماتریس فقط 0 و 1 هستند (زیرا گراف ساده است و چندگانه نیست).

(۴) این ماتریس متقارن است یعنی $A = A^T$ یا $(A = A')$ یعنی اعضای متناظر در دو طرف قطر اصلی با یکدیگر مساوی اند (قطر اصلی نقش یک آینه تخت را بازی می کند) ، البته علت این موضوع آن است که رابطه وجود مسیر بین دو رأس ، یک رابطه هم ارزی بوده و خاصیت تقارنی دارد.

نکته : هر ماتریس که چهار ویژگی فوق را داشته باشد می تواند ماتریس مجاورت یک گراف ساده باشد و اگر حداقل یکی از چهار ویژگی فوق را نداشته باشد ، نمی تواند ماتریس مجاورت یک گراف ساده باشد.

نکته : به هر ماتریس با ویژگی های چهارگانه فوق می توان یک گراف نسبت داد ، بنابراین یک گراف با P رأس ، در واقع چیزی جز یک ماتریس $P \times P$ با شرایط چهارگانه بالا نیست ، لذا برای مطالعه گراف ها می توان صرفاً ماتریس های مربعی متقارنی را مطالعه کرد که درایه های آنها از مجموعه $\{0,1\}$ انتخاب می شوند و درایه های روی قطر اصلی آنها صفرند ، بنابراین نظریه گراف ها را می توان شاخه ای از جبر تلقی کرد.

نکات مهم ماتریس مجاورت :

(۱) مرتبه این ماتریس ، برابر تعداد رؤس گراف یا همان P است ، به عبارت دیگر ، ماتریس مجاورت هر گراف از مرتبه P ، یک ماتریس مربعی $P \times P$ است.

(۲) تعداد کل یک ها در ماتریس مجاورت گراف ساده ، برابر تعداد یال ها یعنی $2q$ است.

تست : در گرافی از مرتبه 7 ، اگر بدانیم 44 درایه یک وجود دارد ، اندازه آن کدام است؟

(۱) 44 (۲) 22 (۳) 21 (۴) هیچ کدام

پاسخ : می دانیم حداکثر تعداد یال های گرافی 7 رأسی برابر $21 = \frac{P(P-1)}{2} = \frac{7 \times 6}{2}$ است ، از طرفی داریم :

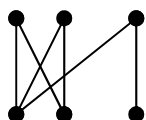
$44 = 2q$ یک ها و لذا $q = 22$ و این امکان ندارد ، لذا گزینه ی ۴ صحیح است .

(۳) جمع درایه های هر سطر یا هر ستون این ماتریس ، برابر است با درجه رأس مربوط به آن رأس یا آن ستون.

مثال : هرگاه $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ، مطلوب است درجه رئوس a و b و c .
پاسخ :

$$\begin{cases} \deg a = 1 + 1 = 2 \\ \deg b = 1 \\ \deg c = 1 \end{cases}$$

(۴) تعداد صفرهای موجود در این ماتریس برابر $P^2 - 2q$ می باشد.
تست : در ماتریس مجاورت گراف زیر ، چند درایه صفر وجود دارد؟



(۴) 18

(۳) 48

(۲) 36

(۱) 24

$$\text{تعداد صفرها} = P^2 - 2q = 6^2 - 2(6) = 24$$

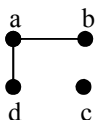
پاسخ :

(۵) در ماتریس مجاورت هر گراف از مرتبه P ، حداقل P درایه صفر وجود دارد (درایه های روی قطر اصلی) و لذا حداکثر $P^2 - P$ ($P > 1$) درایه $\perp$ وجود دارد.

(۶) اگر رأسی منفرد باشد ، درایه های سطر و ستون مربوط به آن رأس ، همگی صفرند ، از این نکته برای تشخیص همبند یا نا همبند بودن گراف استفاده می شود.

تست : اگر $A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ماتریس مجاورت یک گراف باشد ، آنگاه این گراف :
 (۱) همبند است (۲) کامل است (۳) نا همبند است (۴) هیچ کدام

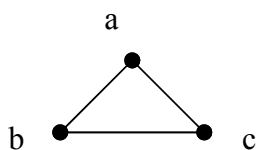
پاسخ : چون درایه های یک سطر آن کلاً صفرند ، لذا این گراف نا همبند است ، در واقع رأس C ی آن ایزوله است.
 به نمودار این گراف توجه کنید :



(۷) در ماتریس مجاورت کامل گراف K_P ، تمام درایه ها ، به جز درایه های قطر اصلی ، همگی $\perp$ می باشند . بنابراین تعداد کل یک ها در چنین گراف هایی برابر است با :

$$P^2 - P$$

مثال : ماتریس مجاورت گراف کامل K_3 را بنویسید؟

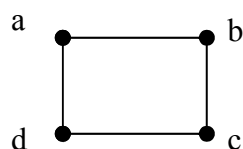


$$\xrightarrow{P=3} A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

۸) تعداد کل صفر ها در ماتریس مجاورت گراف کامل K_p برابر است با P ، زیرا فقط درایه های قطر اصلی این ماتریس صفرند.

۹) در ماتریس مجاورت گراف r - منتظم از مرتبه P ، همواره تعداد یک ها و صفر ها در هر سطر یا هر ستون برابر r است، به عبارت دیگر مجموع درایه های هر سطر یا هر ستون برابر r و تعداد کل یک ها برابر Pr است.

مثال: ماتریس مجاورت گراف 2 - منتظم از مرتبه 4 را رسم کنید؟



$$\xrightarrow{P=4} A = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

تست: اگر ماتریس مجاورت گراف G به صورت زیر باشد، کدام صحیح است؟

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

۱) G همبند و منتظم است.

۲) G نا همبند و منتظم است.

۳) G گراف کامل K_4 است.

۴) G همبند است ولی منتظم نیست.

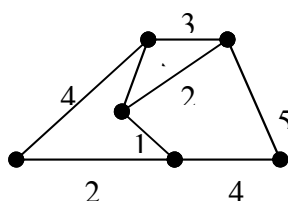
پاسخ: گزینه یک صحیح است.

۱۰) اگر $A = \bar{0}$ ، ماتریس مجاورت یک گراف باشد، آنگاه این گراف، گراف تهی بوده است.

گراف برچسب دار:

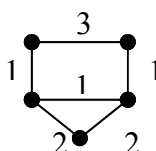
در بعضی از گراف ها به یال ها، وزن (برچسب) داده می شود، برچسب یا وزن یک یال می تواند طول آن یا هزینه رفتن از یک سر به سر دیگر آن و یا چیز های دیگری باشد که ما آن را تعریف می کنیم.

مثال:



برچسب جادویی:

عبارت است از متناظر کردن اعدادی (معمولاً صحیح و مثبت) به یال های گراف، به طوری که مجموع اعداد متناظر به یال های گذرنده از هر رأس، ثابت باشد، در گراف زیر، حاصل جمع اعداد متناظر به یال های گذرنده بر هر رأس، 4 است.



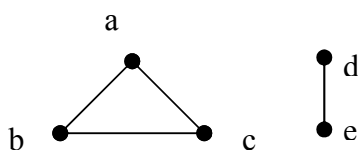
۱۱) هرگاه بتوان، به وسیله محور های مختصات، ماتریس مجاورت یک گراف ساده را به چهار ناحیه مساوی (به صورت بلوکی) چنان تقسیم کرد که همه درایه های نواحی فرد و یا نواحی زوج، صفر باشند، در این صورت گراف متناظر با آن حداقل از 2 بخش جدا از هم تشکیل شده است، به عبارت دیگر، گراف حتماً نا همبند است.

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & \overline{O} \\ \overline{O} & A_2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d & e \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

مثال : هرگاه ماتریس A ماتریس مجاورت یک گراف ساده باشد ، آنگاه این گراف صد در

صد نا همبند است ، نمودار این گراف به صورت مقابل است.



(۱۲) هرگاه A ماتریس مجاورت گراف ساده G و $\overline{A}$ ماتریس مجاورت گراف $\overline{G}$ (مکمل گراف G) باشد ، در این صورت $A + \overline{A}$ برابر است با ماتریس مجاورت گراف کامل.

مثال : هرگاه $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ماتریس مجاورت یک گراف ساده مانند G باشد مطلوب است :

(۱) رسم گراف متناظر با آن.

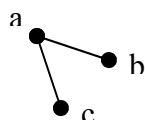
(۲) رسم گراف مکمل اش.

(۳) ماتریس گراف مکمل.

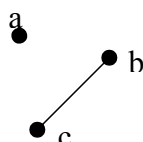
(۴) تحقیق درستی نکته فوق.

پاسخ :

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \rightarrow$$



(۱) نمودار $G \leftarrow$



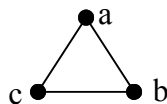
(۲) نمودار $\overline{G} \leftarrow$

$$\overline{A} = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

(۳) ماتریس گراف مکمل

$$A + \bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (۴)$$

همانطور که دیده می شود ، ماتریس مجموع دو گراف فوق ، ماتریس مجاورت گراف کامل K_3 می باشد.



(۱۳) تعداد کل یک ها در ماتریس مجاورت هر درخت از مرتبه P ، برابر است با :

$$2P - 2$$

زیرا تعداد کل یک ها در ماتریس مجاورت درخت برابر $2q$ بوده و می دانیم در درخت $q = P - 1$ است لذا:

$$2q = 2(P - 1) = 2P - 2 = \text{تعداد یک های درخت}$$

(۱۴) تعداد کل صفر ها در ماتریس مجاورت هر درخت از مرتبه P ، برابر است با :

$$P^2 - (2P - 2) = P^2 - 2P + 2 = (P - 1)^2 + 1$$

تست : در ماتریس مجاورت یک درخت ، 26 درایه صفر وجود دارد ، مرتبه درخت کدام است؟

8 (۴)

7 (۳)

6 (۲)

4 (۱)

پاسخ :

$$P^2 - 2P + 2 = 26 \Rightarrow P(P - 2) = 24$$

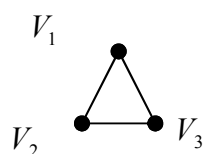
$$\Rightarrow P(P - 2) = 6 \times 4 \Rightarrow P = 6$$

۱۵- قضیه : هرگاه A ماتریس مجاورت گراف G باشد و $V(G) = \{V_1, V_2, \dots, V_P\}$ ، آنگاه درایه واقع بر سطر i ام و ستون i ام ماتریس A^2 برابر است با درجه رأس V_i در گراف G .

اثبات : درایه واقع در سطر i ام و ستون i ام ماتریس A^2 برابر است با مجموع حاصل ضرب های درایه های نظیر به نظیر سطر i ام A ، در ستون i ام A ، چون A متقارن است . لذا این درایه ، از مجموع حاصل ضرب سطر i ام A در سطر i ام A حاصل می شود ، می دانیم تعداد یک های موجود در سطر i ام A برابر است با درجه رأس V_i و لذا برای محاسبه درایه مورد نظر از ماتریس A^2 ، باید به اندازه $\deg V_i$ ، عدد $1 \times 1 = 1$ را با هم جمع کنیم.

تذکر : قضیه فوق بیانگر آن است که عناصر روی قطر اصلی مربع ماتریس مجاورت برابر درجه رؤس متناظر گراف است و مجموع عناصر قطر اصلی آن برابر $2q$ یعنی اندازه گراف است.

مثال : گراف مقابل را در نظر بگیرید :



داریم :

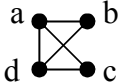
$$\begin{cases} \deg V_1 = 2 \\ \deg V_2 = 1 \\ \deg V_3 = 1 \end{cases}$$

ماتریس مجاورت این گراف عبارت است از :

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} V_1 & V_2 & V_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$\Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{درایه های روی قطر اصلی ماتریس } A^2 \text{ عبارتند از } 2, 1, 1 \Rightarrow \begin{cases} \deg V_1 = 2 \\ \deg V_2 = 1 \\ \deg V_3 = 1 \end{cases}$$

مثال : هرگاه نمودار یک گراف به صورت  بوده و A ماتریس مجاورت این گراف باشد آنگاه داریم :

$$A^2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{bmatrix} 3 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 2 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 3 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

یعنی درایه های روی قطر اصلی A^2 عبارتند از 3، 2، 2، 3 که به ترتیب درجه رؤس a، b، c، d می باشند.

(۱۶) هرگاه A، ماتریس مجاورت گراف کامل K_p باشد، در این صورت طبق قضیه قبل هر درایه واقع بر قطر اصلی ماتریس A^2 برابر $P-1$ بوده، ضمناً سایر درایه ها برابر $P-2$ می باشد، یعنی در گراف کامل K_p داریم :

$$A^2 = \begin{bmatrix} P-1 & P-2 & P-2 & \dots & P-2 \\ P-2 & P-1 & P-2 & \dots & P-2 \\ P-2 & P-2 & P-1 & \dots & P-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P-2 & P-2 & P-2 & \dots & P-1 \end{bmatrix}$$

(۱۷) مجموع درایه های هر سطر یا هر ستون ماتریس A^2 از گراف K_p ، همواره برابر است :

$$(P-1)^2$$

زیرا: در هر سطر یا هر ستون 1 درایه برابر $P-1$ و بقیه درایه ها (که تعدادشان برابر $P-1$ است) برابر $P-2$ می باشند) لذا :

$$\begin{aligned} A^2 \text{ مجموع درایه های هر سطر یا هر ستون} &= 1(P-1) + (P-1)(P-2) = (P-1)(1+P-2) \\ &= (P-1)(P-1) = (P-1)^2 \end{aligned}$$

تست : مجموع تمام درایه های ماتریس A^2 از گراف K_{10} چیست؟

1000 (۴)

900 (۳)

810 (۲)

720 (۱)

پاسخ : واضح است که ماتریس A^2 ، ماتریسی 10×10 است به طوریکه مجموع درایه های هر سطر آن برابر $(P-1)^2 = 81$ است چون $P = 10$ است ، بنابراین 10 سطر دارد لذا مجموع تمام درایه های ماتریس A^2 برابر است با :

$$10 \times 81 = 810$$

تست : هرگاه A ماتریس مجاورت یک گراف ساده بوده و A^2 به صورت زیر باشد.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

نوع گراف کدام است؟

- (۱) کامل (۲) همیلتنی (۳) بازه ای (۴) همه موارد

پاسخ : با توجه به نکته قبل ، واضح است که ماتریس A^2 ی فوق ، مربوط به گراف K_4 می باشد . بنابراین این گراف ، گراف کامل بوده و می دانیم هر گراف کامل ، هم همیلتنی بوده و هم بازه ای لذا ، گزینه ۴ صحیح است.

(۱۸) هرگاه A ماتریس مجاورت گراف ساده G باشد ، در این صورت ، مجموع درایه های روی قطر اصلی ماتریس A^2 برابر است با $2q$ و در حالت خاص در گراف کامل این مجموع برابر است با :
 $P(P-1)$
 $2P-2$ و در درخت این مجموع برابر است با :

تست : اگر A ، ماتریس مجاورت گراف K_9 باشد ، مجموع درایه های روی قطر اصلی A^2 کدام است؟

- (۱) 36 (۲) 72 (۳) 64 (۴) 38

پاسخ : $P(P-1) = 9 \times 8 = 72$

تست : اگر A ماتریس مجاورت گراف ساده G از مرتبه P و اندازه q باشد و داشته باشیم :

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

P + q کدام است؟

- (۱) 6 (۲) 8 (۳) 7 (۴) 9

پاسخ : چون ماتریس 4×4 است لذا $P = 4$ و چون درایه های روی قطر اصلی A^2 ، درجه رئوس گراف می باشند لذا:

$$\sum_{i=1}^4 \deg v_i = 3 + 2 + 2 + 1 = 8 = 2q \Rightarrow q = 4 \Rightarrow P + q = 8$$

تست : هرگاه A ماتریس مجاورت یک درخت باشد و داشته باشیم :

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & 1 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & 1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & x \end{bmatrix}_{4 \times 4}$$

مقدار x کدام است؟

- (۱) 1 (۲) 2 (۳) 3 (۴) 4

$$1 + 1 + 1 + x = 2P - 2 \Rightarrow 3 + x = 2(4) - 2 \Rightarrow x = 3$$

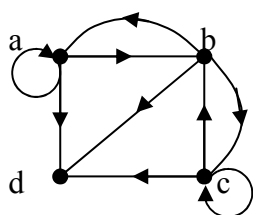
ماتریس مجاورت گراف جهت دار :

اگر G گرافی جهت دار باشد، ماتریس مجاورت آن را با $A(G)$ یا به اختصار با A نمایش داده و آن را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$A(G) = A = [v_{ij}]_{P \times P} \quad \text{و} \quad v_{ij} = \begin{cases} 1, & (\overrightarrow{v_i v_j} \in E) \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

این ماتریس، ماتریسی است مربعی $(P \times P)$ و درایه های آن صفر یا یک می باشند، در واقع هرگاه یال جهت داری رأس V_i را به رأس V_j وصل کند و جهت آن از V_i به V_j باشد، درایه v_{ij} برابر 1 و در غیر این صورت برابر صفر است.

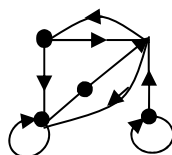
مثال : ماتریس مجاورت گراف جهت دار مقابل را بنویسید؟



$$\Rightarrow \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

ویژگی های ماتریس مجاورت گراف جهت دار :

- (۱) این ماتریس، ماتریسی مربعی است.
 - (۲) هر درایه ماتریس، صفر یا 1 است.
 - (۳) تعداد یک های موجود در سطر a ، برابر تعداد یال های جهت داری است که از رأس a خارج شده $(\text{out deg } a)$ و تعداد یک های موجود در ستون a ، برابر تعداد یال های جهت داری است که به رأس a وارد شده $(\text{in deg } a)$.
 - (۴) تعداد یک های موجود در ماتریس، برابر تعداد یال های گراف یعنی q است (دقت داشته باشید که هر طوقه نیز یک یال محسوب می شود).
 - (۵) تعداد 0 های موجود در ماتریس برابر $P^2 - q$ می باشد.
- تست :** در ماتریس مجاورت گراف رو به رو، چند درایه صفر وجود دارد؟



(۴) 6

(۳) 10

(۲) 7

(۱) 8

پاسخ :

$$P^2 - q = 4^2 - 8 = 8$$

نظریه‌ی اعداد

بخشی از علم ریاضی است که بیشتر به خواص اعداد طبیعی ($\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$) و اعداد صحیح نسبی ($\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$) می‌پردازد.

می‌دانیم رابطه‌ی کوچکتر یا مساوی بودن ($\leq$) روی این مجموعه‌یک رابطه‌ی ترتیب است در واقع دارای سه شرط

$$\forall a \in \mathbb{Z} : a \leq a$$

(۱) بازتابی (انعکاسی)

$$\forall a, b \in \mathbb{Z} : a \leq b, b \leq a \rightarrow a = b$$

(۲) پاد تقارنی (ضد تقارنی)

$$\forall a, b, c \in \mathbb{Z} : a \leq b, b \leq c \Rightarrow a \leq c$$

(۳) تراییبی (تراگذاری یا تعدی)

است، بوسیله‌ی این رابطه می‌توان اعداد صحیح را به شکل زیر مرتب نمود :

$$\dots \leq -(n+1) \leq -n \leq \dots \leq -2 \leq -1 \leq 0 \leq 1 \leq 2 \leq \dots \leq n \leq n+1 \leq \dots$$

مجموعه‌ی مرتب

هر مجموعه را که در آن یک رابطه‌ی ترتیب تعریف شده باشد، یک مجموعه‌ی مرتب می‌گوئیم، به عبارت دیگر اگر R یک رابطه‌ی ترتیب روی مجموعه‌ی A باشد آنگاه زوج (A, R) را یک مجموعه‌ی مرتب می‌گوئیم، به عنوان مثال $(\mathbb{Z}, \leq), (\mathbb{N}, \leq)$ مجموعه‌هایی مرتب می‌باشند.

تعریف عضو ابتدا (min) و عضو انتهای (max) یک مجموعه :

به کوچکترین عضو یک مجموعه در صورت وجود، عضو ابتدا و به بزرگترین عضو یک مجموعه در صورت وجود، عضو انتهای آن مجموعه می‌گوئیم.

مثال : عضو ابتدا و انتهای مجموعه‌های زیر را، در صورت وجود مشخص کنید؟

$$1) A = \{-5, -2, 7, 9, 10\} \rightarrow \begin{cases} \text{عضو ابتدا} = -5 \\ \text{عضو انتها} = 10 \end{cases}$$

$$2) \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\} \rightarrow \begin{cases} \text{عضو ابتدا} = 1 \\ \text{ندارد} = \text{عضو انتها} \end{cases}$$

$$3) \mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} \rightarrow \begin{cases} \text{ندارد} = \text{عضو ابتدا} \\ \text{ندارد} = \text{عضو انتها} \end{cases}$$

$$4) B = [6, 10) \rightarrow \begin{cases} \text{عضو ابتدا} = 6 \\ \text{ندارد} = \text{عضو انتها} \end{cases}$$

اصل خوش ترتیبی :

هر زیر مجموعه غیر خالی (نا تهی) از اعداد طبیعی، دارای عضو ابتدا است. (دارای کوچکترین عضو است)

مجموعه‌ی خوش ترتیب :

مجموعه‌ای را خوشترتیب گوئیم که هر زیر مجموعه‌ی غیر خالی از آن، دارای عضو ابتدا باشد

✓ نکته : بنابر اصل خوشترتیبی، مجموعه‌ی اعداد طبیعی ($\mathbb{N}$) یک مجموعه‌ی خوشترتیب است، در صورتی که $\mathbb{Z}$ خوشترتیب نیست، زیرا مجموعه‌ی $A = \{\dots, -2, -1, 0\}$ ، زیر مجموعه‌ای از آن است که عضو ابتدا ندارد، به همین ترتیب مجموعه‌ی $[2, 5]$ نیز خوشترتیب نیست زیرا مجموعه‌ی $B = (2, 3)$ ، زیر مجموعه‌ای از آن است که عضو ابتدا ندارد، یادتان نرود که مجموعه‌ی اعداد حقیقی ($\mathbb{R}$) نیز خوشترتیب نیست، به طور کلی هر مجموعه که شامل $\mathbb{Z}$ باشد خوشترتیب نیست.

✓ نکته : هر مجموعه‌ی متناهی خوشترتیب است.

تست : کدام مجموعه‌ی زیر خوشترتیب است؟

$$(۲) \{x \in \mathbb{Z} : -x \in \mathbb{N}\}$$

(۱) مجموعه‌ی اعداد گویای مثبت

$$(۴) \{x \in \mathbb{Z} : x \leq 4\}$$

(۳) مجموعه‌ی اعداد اول سه رقمی

پاسخ : طبق نکته‌ی فوق گزینه 3 صحیح است.

نکته : فرض کنید $A \subset B$ آنگاه

الف) اگر B خوشترتیب باشد، A نیز خوشترتیب است.

ب) اگر A خوشترتیب نباشد، B نیز خوشترتیب نیست.

✓ نکته : اگر B خوشترتیب باشد، آنگاه $A \cup B, A \cap B$ نیز خوشترتیب هستند.

کران پائین (بند پائین) یک مجموعه :

عدد $\ell \in \mathbb{R}$ را یک کران پائین مجموعه‌ی $A \subseteq \mathbb{R}$ گوئیم، هرگاه ℓ از همه‌ی اعضای A ، کوچکتر یا مساوی باشد یعنی :

$$\forall a \in A : \ell \leq a$$

واضح است که ℓ می‌تواند عضو A باشد یا نباشد، ضمناً اگر ℓ یک کران پائین مجموعه‌ی A باشد، هر عدد حقیقی کوچکتر از ℓ نیز، یک کران پائین مجموعه‌ی A خواهد بود.

کران بالای (بند بالای) یک مجموعه :

عدد $u \in \mathbb{R}$ را یک کران بالای مجموعه‌ی $A \subseteq \mathbb{R}$ گوئیم، هرگاه u از همه‌ی اعضای A بزرگتر یا مساوی باشد یعنی :

$$\forall a \in A : u \geq a$$

واضح است که u نیز می‌تواند عضو A باشد یا نباشد، ضمناً اگر u یک کران بالای مجموعه‌ی A باشد، هر عدد حقیقی بزرگتر از u نیز، یک کران بالای مجموعه‌ی A خواهد بود.

مثال : برای مجموعه‌ی $A = \{-2, 3, 7, 20\}$ عدد -2 و هر عدد حقیقی کوچکتر از آن یک کران پائین و عدد 20 و هر عدد حقیقی بزرگتر از آن، یک کران بالای A می‌باشند.

چند نکته‌ی مهم

(۱) کران پائین هر مجموعه مانند A ، ممکن است عضو A باشد یا نباشد، همین طور در مورد کران بالا

(۲) هر زیر مجموعه‌ی دلخواه از اعداد طبیعی مانند A ، یا کران پائین (کران بالا) ندارد یا اگر داشته باشد بی شمار کران پائین (کران بالا) دارد.

(۳) عضو ابتدای یک مجموعه در صورت وجود، بزرگترین کران پائین آن نیز هست و عضو انتهای یک مجموعه نیز در صورت وجود، کوچکترین کران بالای آن است.

(۴) بزرگترین کران پائین یک مجموعه را اینفیم و کوچکترین کران بالای آنرا، سوپریم آن مجموعه می‌گویند، توجه داشته باشید که اینفیم و سوپریم یک مجموعه ممکن است عضو آن مجموعه باشند یا نباشند، البته اگر باشند، در این صورت اینفیم، همان عضو ابتدا یا Min و سوپریم، همان عضو انتها یا max خواهد بود.

(۵) عضو ابتدا و انتهای هر مجموعه در صورت وجود منحصر به فردند.

(۶) اگر مجموعه‌ای حداقل یک کران پائین داشته باشد، می‌گوئیم از پائین کراندار است (از پائین محدود است)

(۷) اگر مجموعه‌ای حداقل یک کران بالا داشته باشد، می‌گوئیم از بالا کراندار است (از بالا محدود است)

(۸) اگر مجموعه‌ای حداقل یک کران بالا و حداقل یک کران پائین داشته باشد، می‌گوئیم کراندار است (محدود است)

(۹) اگر مجموعه‌ای از پائین کراندار نباشد، عضو ابتدا ندارد، به همین ترتیب اگر مجموعه‌ای از بالا کراندار نباشد، عضو انتها ندارد.

قضیه : هر زیر مجموعه‌ی غیر خالی از اعداد صحیح که کراندار از پائین باشد، دارای عضو ابتداست.

برهان : فرض می‌کنیم S زیر مجموعه‌ای غیر خالی از $\mathbb{Z}$ و $a \in \mathbb{Z}$ یک کران پائین آن باشد، در این صورت بنابر تعریف کران

پائین داریم: $\forall s \in S: s \geq a$ ، با توجه به اینکه بحث ما در $\mathbb{Z}$ است، لذا بلافاصله نتیجه می‌شود: $s > a - 1$ یا $s - (a - 1) > 0$ ، یعنی $s - (a - 1)$ مقداری مثبت و طبیعی است، حال مجموعه‌ی T را چنین تعریف می‌کنیم:

$T = \{t \mid t = s - (a - 1), s \in S\}$ واضح است که T زیر مجموعه‌ای غیر خالی از اعداد طبیعی است (چون S غیر خالی است پس T نیز غیر خالی است)، بنابراین طبق اصل خوشترتیبی، T دارای عضوی ابتدا مانند $t_0 \in T$ است. چون $t_0 \in T$ است، پس طبق تعریف T ، s_0 ای در S وجود دارد به طوریکه: $t_0 = s_0 - (a - 1)$ و چون t_0 عضو ابتدای T است لذا:

$$\forall t \in T: t_0 \leq t$$

$$s_0 - (a - 1) \leq s - (a - 1)$$

$$s_0 \leq s$$

$$\forall s \in S: s_0 \leq s$$

در نتیجه داریم:

این بدان معناست که s_0 عضو ابتدای مجموعه‌ی S است و حکم ثابت است.

قضیه: هر زیر مجموعه‌ی غیر خالی از اعداد صحیح که از بالا کراندار باشد، دارای عضو انتهاست.

برهان: مشابه قضیه‌ی قبل، فرض می‌کنیم S زیر مجموعه‌ای غیر خالی از $\mathbb{Z}$ و $a \in \mathbb{Z}$ یک کران بالای آن باشد، در این صورت بنابر تعریف کران بالا داریم:

$$\forall s \in S: s \leq a$$

$$(a + 1) - s > 0 \text{ یا } s < a + 1$$

با توجه به اینکه بحث ما در $\mathbb{Z}$ است، لذا بلافاصله نتیجه می‌شود:

یعنی $(a + 1) - s$ مقداری مثبت و طبیعی است، حال مجموعه‌ی K را چنین تعریف می‌کنیم:

$$K = \{k \mid k = (a + 1) - s, s \in S\}$$

واضح است که K زیر مجموعه‌ای غیر خالی از اعداد طبیعی است (چون S غیر خالی است پس K نیز غیر خالی است)، بنابراین طبق اصل خوشترتیبی، K دارای عضوی ابتدا مانند $k_0 \in K$ است، چون $k_0 \in K$ است پس طبق تعریف K ، s_0 ای در S وجود دارد به طوریکه $k_0 = (a + 1) - s_0$ ، چون k_0 عضو ابتدای K است، لذا

$$\forall k \in K: k_0 \leq k$$

$$(a + 1) - s_0 \leq (a + 1) - s$$

$$-s_0 \leq -s$$

$$\forall s \in S: s_0 \geq s$$

این بدان معناست که s_0 عضو انتهای مجموعه‌ی S است و حکم ثابت است.

اصل استقراء ریاضی ضعیف

برای هر زیر مجموعه از اعداد طبیعی که عدد 1 متعلق به آن بوده و تالی (عدد بعدی) هر عضو آن نیز عضو باشد، با مجموعه‌ی اعداد طبیعی برابر است، به بیان دیگر، هرگاه S زیر مجموعه‌ای از $\mathbb{N}$ بوده و دارای دو خاصیت زیر باشد:

$$\text{الف) } 1 \in S$$

$$\text{ب) برای هر } k \in S, \text{ داشته باشیم: } (k + 1) \in S$$

$$\text{آنگاه } S = \mathbb{N}$$

✓ تذکر: می‌توان ثابت کرد، اصل خوشترتیبی و اصل استقراء ریاضی معادلند، یعنی می‌توان به دلخواهی یکی را اصل گرفت (فرض کرد که درست است) و به کمک دیگری را ثابت کرد، در اینجا ما، اصل خوشترتیبی را به عنوان اصل فرض کرده، به کمک اصل استقراء ریاضی را به عنوان یک قضیه ثابت می‌کنیم.

قضیه: با استفاده از اصل خوشترتیبی، اصل استقراء ریاضی (اصل بالا را) را ثابت کنید؟

اثبات: فرض می‌کنیم S' (متمم S) مجموعه‌ی همه‌ی اعداد طبیعی باشند که متعلق به S نیستند یعنی $S' = \mathbb{N} - S$ ، برای اثبات حکم (مساوی بودن S با $\mathbb{N}$)، کافی است ثابت کنیم: $S' = \emptyset$ ، برای اثبات این مطلب از روش برهان خلف استفاده می‌کنیم، لذا فرض می‌کنیم $S' \neq \emptyset$ باشد، چون $S' \subseteq \mathbb{N}$ بوده، لذا S' زیر مجموعه‌ای غیر خالی از اعداد طبیعی است و بنابراین طبق اصل

خوشترتیبی، S' عضوی ابتدا مانند n_0 دارد، چون طبق فرض الف)، $1 \in S$ لذا $1 \notin S'$ ، بنابراین $n_0 > 1$ است، در نتیجه $n_0 - 1$ عددی است طبیعی که نمی‌تواند عضو S' باشد (چرا که $n_0 - 1$ از n_0 کوچکتر است و n_0 عضو ابتدای S' بوده است) بنابراین $n_0 - 1 \in S$ و از آنجا طبق فرض (ب) داریم: $(n_0 - 1) + 1 \in S$ یا $n_0 \in S$ که این امکان ندارد، زیرا $n_0 \in S'$ بوده است، پس فرض خلف باطل و حکم ثابت است، یعنی $S = \mathbb{N}$

گزاره نمای استقرائی یا حکم استقرائی :

گزاره نمای p_n یا $p(n)$ را که به عدد طبیعی n بستگی داشته باشد، گزاره نمای استقرائی می‌گوئیم، مثالهای زیر، گزاره نمای استقرائی هستند :

$$p(n) : 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$p(n) : \log_a^{x^n} = n \log_a^x, (x > 0, a > 0, a \neq 1)$$

$$p(n) : (1 + \sqrt{2})^n \geq 1 + \sqrt{2}n$$

صورت دیگر قضیه‌ی استقراء ریاضی ضعیف :

فرض می‌کنیم $p(n)$ یک گزاره نمای استقرائی در مجموعه‌ی اعداد طبیعی باشد و در شرایط زیر صدق کند :

الف) $p(1)$ درست باشد.

ب) اگر $p(k)$ درست باشد، آنگاه $p(k+1)$ نیز درست باشد.

در این صورت $p(n)$ ، برای هر عدد طبیعی n درست است.

در این قضیه، $p(1)$ را شروع استقراء یا ابتدای استقراء، $p(k)$ را فرض استقراء و $p(k+1)$ را حکم استقرامی‌گوئیم، دقت کنید که برای نوشتن $p(k+1)$ ، به جای k در $p(k)$ ، $k+1$ می‌گذاریم.

مثال : با استفاده از اصل استقراء ریاضی ثابت کنید :

$$p(n) : 2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n+1), (\forall n \in \mathbb{N})$$

$$p(1) : 2 = 1(1+1) \Rightarrow 2 = 2$$

$$p(k) : 2 + 4 + 6 + \dots + 2k = k(k+1)$$

$$p(k+1) : 2 + 4 + 6 + \dots + 2k + 2(k+1) = (k+1)(k+2)$$

برای اثبات حکم استقراء به طرفین فرض استقراء عبارت $2(k+1)$ را اضافه می‌کنیم، در این صورت داریم :

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2k + 2(k+1) = k(k+1) + 2(k+1) = (k+1)(k+2) \quad \checkmark$$

لذا طبق اصل استقراء ریاضی، $p(n)$ ، به ازاء هر $n \in \mathbb{N}$ برقرار است. (درست است)

نکته : در اثبات به روش استقراء ریاضی، درستی $p(1)$ باید حتماً بررسی شود. ✓

مثال : با استفاده از استقراء ثابت کنید :

$$p(n) : 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 < \frac{n^3}{3} + n^2, (\forall n \in \mathbb{N})$$

$$p(1) : 1^2 < \frac{1}{3} + 1 \Rightarrow 1 < 1 + \frac{1}{3} \quad \checkmark$$

$$p(k) : 1^2 + 2^2 + \dots + k^2 < \frac{k^3}{3} + k^2$$

$$p(k+1) : \underbrace{1^2 + 2^2 + \dots + k^2}_a + (k+1)^2 < \underbrace{\frac{k^3}{3} + k^2}_b + (k+1)^2$$

به طرفین فرض استقراء، جمله‌ی $(k+1)^2$ را اضافه می‌کنیم، در این صورت داریم :

$$\underbrace{1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2}_a < \underbrace{\frac{k^3}{3} + k^2 + (k+1)^2}_c \quad (۱)$$

اکنون برای اثبات حکم استقراء یعنی نامساوی $a < b$ ، کافی است ثابت کنیم: $c \leq b$ زیرا:

$$\begin{cases} a < c & \text{طبق (۱) داریم} \\ c \leq b & \text{اگر ثابت کنیم} \end{cases} \Rightarrow a < b$$

لذا داریم:

$$\begin{aligned} \frac{k^3}{3} + k^2 + (k+1)^2 &< \frac{(k+1)^3}{3} + (k+1)^2 \\ \frac{k^3}{3} + k^2 &< \frac{k^3 + 3k^2 + 3k + 1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \times 3 \quad k^3 + 3k^2 &< k^3 + 3k^2 + 3k + 1 \\ 3k + 1 &> 0 \end{aligned}$$

و این نامساوی بدیهی است زیرا:

لذا طبق اصل استقراء ریاضی، $p(n)$ به ازاء هر $n \in \mathbb{N}$ برقرار است.

در برخی از مسائل استقراء به جای اینکه ابتدای استقرا از 1 شروع شود، ممکن است از 2 یا 3 یا ... شروع شود، به اصل زیر توجه کنید:

اصل استقراء ریاضی تعمیم یافته:

هرگاه $p(n)$ یک گزاره نمایی استقرائی باشد، به طوریکه در دو شرط زیر صدق کند:

الف) عددی طبیعی مانند $m > 1$ وجود داشته باشد به طوریکه $p(m)$ درست باشد

ب) به ازاء هر عدد طبیعی $k \geq m$ ، اگر $p(k)$ درست باشد، آنگاه $p(k+1)$ نیز درست باشد

در این صورت $p(n)$ ، برای تمام اعداد طبیعی $n \geq m$ برقرار است.

مثال: با استفاده از اصل استقراء ریاضی تعمیم یافته، ثابت کنید:

$$p(n) : 2^n < n!$$

$$p(1) : 2 < 1 \quad \text{برقرار نیست}$$

$$p(2) : 4 < 2 \quad \text{برقرار نیست}$$

$$p(3) : 8 < 6 \quad \text{برقرار نیست}$$

$$p(4) : 16 < 24 \quad \text{برقرار است}$$

لذا $m=4$ است، اکنون فرض می‌کنیم که حکم به ازاء $k \geq 4$ برقرار باشد، ثابت می‌کنیم به ازاء $k+1$ نیز برقرار است.

$$p(k) : 2^k < k!$$

$$p(k+1) : 2^{k+1} < (k+1)!$$

برای اثبات حکم استقراء، طرفین فرض استقرا را در 2 ضرب می‌کنیم، در این صورت داریم:

$$2 \times 2^k < 2 \times k!$$

$$2^{k+1} < 2(k+1)!$$

اکنون کافی است ثابت کنیم:

$$2(k!) < (k+1)!$$

$$2(k!) < (k+1)k!$$

$$\div k! \quad 2 < k+1$$

اما این نامساوی به ازاء $k \geq 4$ بدیهی است، لذا طبق اصل استقراء ریاضی تعمیم یافته حکم به ازاء هر $n \geq 4$ برقرار است.

تست : هرگاه $\forall k \in \mathbb{N} : k \in S \Rightarrow k+1 \in S, 4 \in S, S \subseteq \mathbb{N}$ ، آنگاه :

$$S = \mathbb{N} \quad (1) \quad 10 \notin S \quad (2)$$

(3) S مجموعه‌ی اعداد طبیعی بزرگتر یا مساوی 4 است (4) S مجموعه‌ی اعداد طبیعی بزرگتر یا مساوی 3 است.

پاسخ : طبق اصل استقراء ریاضی تعمیم یافته، گزینه 3 صحیح است.

اصل استقراء قوی ریاضی :

هر زیر مجموعه S از $\mathbb{N}$ که دارای دو خاصیت زیر باشد، با مجموعه‌ی $\mathbb{N}$ برابر است.

الف) $1 \in S$

ب) اگر تمام اعداد طبیعی کوچکتر از n ، در S باشند، آنگاه $n \in S$ ،

به عبارت دیگر، عدد n به شرطی عضو S خواهد بود که تمام اعداد طبیعی کوچکتر از n ، عضو S باشند

✓ نکته: اصل استقراء قوی ریاضی با اصل استقراء ریاضی (استقراء ضعیف) و در نتیجه با اصل خوشترتیبی معادل است.

صورت دیگر اصل استقراء قوی ریاضی

هرگاه $p(n)$ گزاره نمایی استقرایی راجع به عدد طبیعی n بوده و داشته باشیم :

الف) $p(1)$ درست باشد.

ب) هرگاه $p(n)$ به ازاء همه‌ی اعداد طبیعی کمتر از n درست باشد، آنگاه $p(n)$ نیز درست باشد.

در این صورت $p(n)$ به ازاء هر عدد طبیعی n درست است.

دنباله‌ی لوکا :

$$\text{دنباله‌ی بازگشتی} \quad \begin{cases} L_1 = 1 \\ L_2 = 3 \\ L_n = L_{n-1} + L_{n-2}, (n \geq 3) \end{cases} \quad \text{را دنباله‌ی لوکامی گویند، چند جمله‌ی اول این دنباله عبارتند از:}$$

$$1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, \dots$$

مثال : با استفاده از اصل استقراء قوی ریاضی، ثابت کنید هر عدد از دنباله‌ی بازگشتی لوکا در رابطه‌ی زیر صدق می‌کند :

$$p(n) : L_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n$$

$$p(1) : L_1 < \frac{7}{4} \Rightarrow 1 < \frac{7}{4} \quad \checkmark$$

$$p(2) : L_2 < \frac{49}{16} \Rightarrow 3 < \frac{49}{16} = 3 \frac{1}{16} \quad \text{خورده ای} \quad \checkmark$$

حال فرض می‌کنیم به ازاء هر k که $3 \leq k < n$ است، حکم برقرار باشد ثابت می‌کنیم حکم به ازاء خود n نیز درست است.

$$(1) \quad L_{n-1} < \left(\frac{7}{4}\right)^{n-1} \quad \text{طبق فرض چون } n-1 < n \text{ لذا داریم :}$$

$$(2) \quad L_{n-2} < \left(\frac{7}{4}\right)^{n-2} \quad \text{همچنین طبق فرض چون } n-2 < n \text{ لذا داریم :}$$

$$\underbrace{L_{n-1} + L_{n-2}}_{L_n} < \left(\frac{7}{4}\right)^{n-1} + \left(\frac{7}{4}\right)^{n-2} \quad \text{از جمع روابط (1) و (2) داریم :}$$

$$L_n < \left(\frac{7}{4}\right)^{n-2} \left(\frac{7}{4} + 1\right) < \left(\frac{7}{4}\right)^{n-2} \left(\frac{7}{4}\right)^2 < \left(\frac{7}{4}\right)^n$$

$$L_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n$$

بنابراین با استفاده از اصل استقرای قوی ریاضی، حکم به ازاء هر عدد طبیعی n برقرار است.

توجه داشته باشید که نامساوی $\frac{7}{4} + 1 < \left(\frac{7}{4}\right)^2$ بدیهی است.

مثال : دنباله‌ی بازگشتی زیر را در نظر بگیرید :

$$\begin{cases} t_1 = 2 \\ t_2 = 4 \\ t_n = t_{n-1} + 2t_{n-2} \end{cases}$$

ثابت کنید : $t_n = 2^n$

اثبات : از اصل استقرای قوی ریاضی استفاده می‌کنیم :

$$p(n) : t_n = 2^n$$

$$p(1) : t_1 = 2 \quad \checkmark$$

$$p(2) : t_2 = 4 \quad \checkmark$$

اکنون فرض می‌کنیم حکم به ازاء هر k که $3 \leq k < n$ برقرار باشد، ثابت می‌کنیم حکم به ازاء n نیز درست است.

طبق فرض استقرا داریم :

$$\begin{aligned} \begin{cases} n-1 < n \Rightarrow t_{n-1} = 2^{n-1} \\ n-2 < n \Rightarrow t_{n-2} = 2^{n-2} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} t_{n-1} = 2^{n-1} \\ 2t_{n-2} = 2^{n-1} \end{cases} \\ &\quad \times 2 \quad + \quad \underbrace{t_{n-1} + 2t_{n-2}}_{= 2^{n-1} + 2^{n-1}} \\ &\quad t_n = 2(2^{n-1}) = 2^n \Rightarrow t_n = 2^n \end{aligned}$$

بنابراین بنابر اصل استقرای قوی ریاضی، حکم به ازاء هر عدد طبیعی n درست است.

مثال : برای اعداد طبیعی n و r بطوریکه $0 \leq r \leq n$ ثابت کنید ترکیب $\binom{n}{r}$ همواره عددی است طبیعی.

اثبات : از اصل استقرای قوی ریاضی بر روی n استفاده می‌کنیم.

$$p(n) : \binom{n}{r} \in \mathbb{N}$$

$$p(1) : \binom{1}{r} \in \mathbb{N}$$

چون $0 \leq r < 1$ لذا باید داشته باشیم : $r = 0$ یا $r = 1$ اما :

$$\begin{cases} \binom{1}{0} = 1 \in \mathbb{N} & \checkmark \\ \binom{1}{1} = 1 \in \mathbb{N} & \checkmark \end{cases}$$

اکنون فرض می‌کنیم حکم برای هر $k < n$ برقرار باشد یعنی $\binom{k}{r} \in \mathbb{N}$ ، ثابت می‌کنیم حکم به ازاء n نیز درست است یعنی :

$$\binom{n}{r} \in \mathbb{N}$$

با استفاده از فرض داریم :

$$n-1 < n \Rightarrow \begin{cases} \binom{n-1}{r} \in \mathbb{N} \\ \binom{n-1}{r-1} \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}}_{\binom{n}{r} \in \mathbb{N}} \in \mathbb{N}$$

لذا طبق اصل استقرای قوی ریاضی، حکم به ازاء تمام اعداد طبیعی برقرار است.

یادآوری : (قانون پاسکال)

$$\binom{n}{\underset{\substack{\downarrow \\ \text{کوچیکه}}}{r-1}} + \binom{n}{\underset{\substack{\downarrow \\ \text{بزرگه}}}{r}} = \binom{n+1}{r} = \binom{+1 \text{ بالایی}}{\text{بزرگه}}$$

نمونه مسائل استقراء ریاضی

با استفاده از استقرای (ضعیف، تعمیم یافته و قوی) ثابت کنید :

$$1) 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

$$2) 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$3) 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

$$4) \forall n \in \mathbb{N} : \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \in \mathbb{N}$$

$$5) (1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n) \geq 1+a_1+a_2+\dots+a_n, \quad (-1 \leq a_i \leq 0, \quad a_i \text{ ها اعدادی حقیقی هستند})$$

$$6) (1+a)^n \geq 1+na, \quad (a \geq -1) \quad \text{نامساوی برنولی}$$

$$7) n^3 < 3^n, \quad (n \geq 4)$$

$$8) (x^n)' = nx^{n-1}$$

$$9) \frac{n(n-3)}{2} : \text{تعداد اقطار هر } n \text{ ضلعی محدب برابر است با}$$

$$10) 1 \times 1! + 2 \times 2! + \dots + n(n!) = (n+1)!$$

$$11) \binom{n}{r} \leq \frac{n^r}{r!}, \quad (r \geq 2)$$

$$12) \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n+1} > 1$$

$$13) (1 \times 2) + (2 \times 5) + \dots + n(3n-1) = n^2(n+1)$$

$$14) (n!)^2 \geq n^n, \quad (n > 1)$$

$$15) 1 + 2 + 3 + \dots + n < \frac{1}{8}(2n+1)^3$$

$$16) 1 \times 3 + 2 \times 5 + 3 \times 7 + \dots + n(2n+1) = \frac{4n^3 + 9n^2 + 5n}{6}$$

$$17) n! < \left(\frac{n+1}{2} \right)^n$$

$$18) 2^{\frac{n(n+1)}{2}} > n!$$

$$19) 1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1) \leq n^n$$

$$20) \left(\frac{x+y}{2} \right)^n \leq \frac{x^n + y^n}{2}, \quad (x, y \in \mathbb{R}, x+y \geq 0, n \in \mathbb{N})$$

$$21) 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2^n-1} < \frac{n}{2}, \quad (n \geq 3)$$

$$22) 4 + 9 + 14 + \dots + (5n-1) = \frac{n(5n+3)}{2}$$

$$23) \frac{1}{1 \times 4} + \frac{1}{4 \times 7} + \frac{1}{7 \times 10} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+2)} = \frac{n}{3n+1}$$

$$24) 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

$$25) 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2 \left(\frac{n}{n+1} \right)$$

$$26) \frac{1}{2^2-1} + \frac{1}{3^2-1} + \dots + \frac{1}{n^2-1} < 2 - \frac{2}{n}$$

$$27) 2 + 5 + 8 + \dots + (3n-1) = \frac{3n^2 + n}{2}$$

$$28) \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

$$29) \frac{1}{5 \times 6} + \frac{1}{6 \times 7} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n-4}{5(n+1)}$$

$$30) 1 + \frac{3}{2} + \frac{5}{4} + \frac{7}{8} + \dots + \frac{2n-1}{2^{n-1}} = \frac{3(2^n-1)-2n}{2^{n-1}}$$

$$31) 2^n \geq 1+n$$

$$32) \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{i}} > \sqrt{n}$$

$$33) n^{n+1} > (n+1)^n, (n > 3)$$

$$34) (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k, (n \in \mathbb{N})$$

$$35) 0 < a < b \Rightarrow a^n < b^n$$

$$36) \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \dots + \sin nx = \frac{\sin \frac{n+1}{2} x}{\sin \frac{x}{2}} \sin nx$$

$$37) \cos \alpha + \cos 3\alpha + \dots + \cos(2n-1)\alpha = \frac{\sin 2n\alpha}{2 \sin \alpha}$$

$$38) f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \quad (\text{منظور از } f^{(n)} \text{ یعنی مشتق مرتبه } n \text{ ام})$$

$$39) f(x) = \sin ax \Rightarrow f^{(n)}(x) = a^n \sin(ax + \frac{n\pi}{2})$$

$$40) f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}} \quad \begin{matrix} (f_n = \text{fof}_{n-1}) \\ \downarrow \\ f_2 = \text{fof} \quad \text{مثلاً} \end{matrix}$$

$$41) a^n + b^b > a^{n-1}b + ab^{n-1}, (a, b > 0, n \in \mathbb{N}, n > 1)$$

$$42) a + (a+d) + (a+2d) + \dots + (a+(n-1)d) = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d)$$

$$43) f(x) = bx + a \Rightarrow f_n(x) = a \frac{b^n - 1}{b - 1} + b^n x, (b \neq 1, f_n = \text{fof}_{n-1})$$

به ازاء هر عدد طبیعی n ، دو عدد طبیعی مانند k و l وجود دارند به طوریکه: $n = 5k - 7L$

$$45) a|b \Rightarrow a^n|b^n$$

$$46) 8|5^{2n} - 1$$

$$47) 9|n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$$

$$48) 9 \mid 2^{2n} + 15n - 1$$

$$49) 133 \mid 11^{n+1} + 12^{2n-1}$$

$$50) a \equiv b \Rightarrow a^n \equiv b^n$$

$$51) 9^{2n+1} + 8^{n+2} \equiv 0$$

$$52) 3^{8n+4} + 4^{2n+1} \equiv 0$$

$$53) |\sin n\theta| \leq n |\sin \theta|$$

$$54) x + \frac{1}{x} = 2 \cos \theta \Rightarrow x^n + \frac{1}{x^n} = 2 \cos n\theta$$

$$55) AB = BA \Rightarrow AB^n = B^n A$$

(A و B دو ماتریس مربعی هم مرتبه می باشند)

$$56) I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \alpha I + BA \Rightarrow B^n = \alpha^n I + (n\alpha^{n-1}B)A, (n \in \mathbb{N}, \alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

$$57) A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^n = \begin{bmatrix} n+1 & -n \\ n & -n+1 \end{bmatrix}$$

$$58) A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & na \\ 0 & 1 & nb \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

بخش پذیری در $\mathbb{Z}$:

تعریف : عدد صحیح b را بر عدد صحیح مخالف صفر a بخش پذیر گوئیم هرگاه عدد صحیحی مانند q یافت شود به طوریکه $b = aq$ ، در این صورت می نویسیم : $a \mid b$ (بخوانید a ، b را عادی کند)

عبارت $a \mid b$ ، یعنی b بر a بخش پذیر است یا a یک مقسوم علیه b است یا a یک عامل b است یا a ، b را می شمارد یا b یک مضرب a است.

✓ تذکر : هرگاه b بر a بخش پذیر نباشد می نویسیم : $a \nmid b$

$$a^2 - a + 1 \mid a^3 + 1, a + 3 \mid a^2 - 9, 7 \nmid 25, -5 \mid -20, 2 \mid 6$$

مثال :

دقت کنید که $a^2 - 9 = (a-3)(a+3)$ و لذا $a^2 - 9$ بر $a + 3$ بخش پذیر است، همچنین $a^3 + 1 = (a+1)(a^2 - a + 1)$ و لذا $a^3 + 1$ بر $a^2 - a + 1$ بخش پذیر است.

ویژگیهای عاد کردن (بخش پذیری) :

$$(1) \pm 1 \mid a \text{ (تمام اعداد بر } \pm 1 \text{ بخش پذیرند)}$$

$$(2) a \mid a \text{ (رابطه‌ی عاد کردن روی } \mathbb{Z} \text{ خاصیت بازتابی (انعکاسی) دارد.)}$$

$$(3) a \mid 0, 0 \mid 0 \text{ ، بالاحص}$$

$$(4) a \mid b \nRightarrow b \mid a \text{ (رابطه‌ی عاد کردن روی } \mathbb{Z} \text{ ، خاصیت تقارنی ندارد)}$$

$$\text{مثال : } 3 \mid 9 \text{ ولی } 9 \nmid 3$$

$$(5) a \mid b \Rightarrow a \mid -b, -a \mid b, -a \mid -b \text{ (در عاد کردن علامت مهم نمی باشد)}$$

$$(6) a \mid 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

(۷) هر عدد صحیح مخالف صفر و مخالف یک، حداقل 4 مقسوم علیه دارد (1 ±، خودش و قرینه اش)

(۸) $a|b, b|c \Rightarrow a|c$ (رابطه‌ی عاد کردن روی $\mathbb{Z}$ خاصیت تراگذاری (ترایی) دارد)

$$\begin{cases} a|b \\ a|c \end{cases} \Rightarrow a|b \pm c, a|bc \quad (۹)$$

$$a|b \Rightarrow a|mb, (m \in \mathbb{Z}) \quad (۱۰)$$

$$a|b \Rightarrow ma|mb \quad (۱۱)$$

$$\begin{cases} a|b \\ a|c \end{cases} \Rightarrow a|mb \pm nc \quad (۱۲)$$

$$a|b \Rightarrow a|b \pm ma \quad (۱۳)$$

مثال : هرگاه $5|2a-3b$ ، ثابت کنید $5|7a+12b$

اثبات : چون $5|2a-3b$ ، لذا کافی است 5، تفاضل حکم و $2a-3b$ را نیز عاد کند

یعنی : $5|(7a+12b)-(2a-3b)$ یا $5|5a+15b$ که این بدیهی است زیرا $5|5(a+3b)$

در واقع می‌توان نوشت :

$$\begin{array}{r} 5|2a-3b \\ 5|5a+15b \\ \hline 5|(2a-3b)+(5a+15b) \Rightarrow 5|7a+12b \end{array}$$

تست : اگر بدانیم a مضربی از $a-b$ می‌باشد، آنگاه کدام گزینه‌ی زیر صحیح می‌باشد؟

$$b|a-b \quad (۱) \quad a+b|a-b \quad (۲) \quad a-b|b \quad (۳) \quad 2a-b|b \quad (۴)$$

پاسخ :

$$\begin{array}{r} a-b|a \\ a-b|a-b \\ \hline a-b|a-(a-b) \Rightarrow a-b|b \end{array}$$

تست : به ازاء چند عدد طبیعی n ، کسر $\frac{4n+6}{n+3}$ ، همواره عددی صحیح می‌باشد؟

$$1(۱) \quad 2(۲) \quad 3(۳) \quad 0(۴)$$

پاسخ : برای اینکه کسر $\frac{4n+6}{n+3}$ عددی صحیح باشد باید داشته باشیم : $n+3|4n+6$

اکنون n را حذف می‌کنیم :

$$\begin{cases} n+3|4n+6 \\ n+3|4(n+3) \end{cases} \quad -$$

$$n+3|-6 \Rightarrow n+3|6$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n+3=\pm 1 \rightarrow n=-2 \text{ یا } -4 & \text{غیر قابل قبول} \\ n+3=\pm 2 \rightarrow n=-1 \text{ یا } -5 & \text{غ ق ق} \\ n+3=\pm 3 \rightarrow n=0 \text{ یا } -6 & \text{غ ق ق} \\ n+3=\pm 6 \rightarrow n=3 \text{ یا } -9 & \text{قابل قبول} \end{cases}$$

لذا گزینه ی 1 درست است.

$$a|b \pm ma \Rightarrow a|b \quad (۱۴)$$

اثبات:

$$\begin{cases} a|b+ma \\ a|ma \end{cases}$$

$$a|b$$

$$m|m^3+4m+19$$

تست : چند عدد طبیعی مانند m یافت میشود به طوریکه

$$1(۴)$$

$$3(۳)$$

$$2(۲)$$

$$1(\text{بیشمار})$$

$$m|m^3+4m+19 \rightarrow m|\underbrace{m(m^2+4)}_{\text{مضرب } m}+19 \Rightarrow m|19$$

$$\Rightarrow m = \pm 1 \quad \text{یا} \quad \pm 19 \xrightarrow{m \in \mathbb{N}} m = 1 \quad \text{یا} \quad 19$$

لذا گزینه ی 2 صحیح است

$$2|n(n-1) \quad \text{یا} \quad 2|n(n+1) \quad (۱۵)$$

به عبارت دیگر حاصلضرب دو عدد متوالی همواره بر 2 بخش پذیر است.

$$3|n^3-n \quad \text{یا} \quad 3|n(n-1)(n+1) \quad (۱۶)$$

حاصلضرب 3 عدد متوالی همیشه بر 3 بخش پذیر است (البته حاصلضرب 3 عدد متوالی بر 2 نیز بخش پذیر است) و لذا حاصلضرب 3 عدد متوالی بر $3! = 6$ نیز بخش پذیر است

(۱۷) حاصلضرب هر چهار عدد متوالی بر $4! = 24$ و کلیه مقسوم علیه های 24 بخش پذیر است.

(۱۸) تعمیم نکات 15 و 16 و 17: حاصلضرب هر k عدد متوالی همیشه بر $k!$ و کلیه مقسوم علیه های $k!$ بخش پذیر است.

مثال : عدد $19 \times 20 \times 21 \times 22 \times 23$ مضرب $5! = 120$ است (ضمناً این عدد مضرب کلیه مقسوم علیه های 120 نیز هست)

$$a|b, b|a \not\Rightarrow a=b \quad (۱۹)$$

یعنی اگر دو عدد یکدیگر را عاد کنند نمیتوان نتیجه گرفت که حتماً مساوی بوده اند، چرا که ممکن است قرینه ی هم بوده باشند مثال : $-5 \neq 5 \not\Rightarrow -5|5, -5|-5$ بر طبق نکته ی فوق می توان گفت که رابطه ی عاد کردن روی $\mathbb{Z}$ ، خاصیت پاد تقارنی را ندارد.

$$a|b, b|a \Rightarrow a=b \quad \text{یا} \quad a=-b \quad (۲۰)$$

یعنی اگر دو عدد یکدیگر را عاد کنند، ممکن است مساوی هم بوده باشند و ممکن هم هست که قرینه ی هم بوده باشند.

(۲۱) هیچگاه یک عدد از لحاظ قدر مطلق بزرگتر، یک عدد مخالف صفر از خود کوچکتر را عاد نمی کند، یعنی

$$a|b \xrightarrow{b \neq 0} |a| \leq |b|$$

$$a|b \xrightarrow{b=0} |a| \geq |b| \quad (۲۲)$$

$$a|b, |a| > |b| \Rightarrow b=0 \quad (۲۳)$$

$$\begin{cases} a|b \\ c|d \end{cases} \Rightarrow ac|bd \quad (۲۴)$$

اثبات :

$$a|b \Rightarrow \exists q_1 \in \mathbb{Z} : b = aq_1$$

$$c|d \Rightarrow \exists q_2 \in \mathbb{Z} : d = cq_2$$

$$bd = ac \underbrace{q_1 q_2}_{q_3} \Rightarrow \begin{cases} bd = acq_3 \\ q_3 \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow ac|bd$$

$$a|b \Rightarrow a^n|b^n \quad (25)$$

روش اول (استقراء)

$$p(n) : a|b \Rightarrow a^n|b^n$$

$$p(1) : a|b \Rightarrow a|b$$

$$p(k) : a|b \Rightarrow a^k|b^k$$

$$p(k+1) : a|b \Rightarrow a^{k+1}|b^{k+1}$$

$$\begin{cases} a|b \\ a^k|b^k \end{cases} \times$$

$$a^{k+1}|b^{k+1}$$

$$a|b \Rightarrow \exists q \in \mathbb{Z} : b = aq$$

$$\text{به توان } n \quad b^n = a^n \underbrace{q^n}_{q'}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b^n = a^n q' \Rightarrow a^n|b^n \\ q' \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

روش دوم

$$a|b \rightarrow a|b^n \quad (26)$$

$$a|b^n \not\rightarrow a|b \quad (27)$$

مثال : $4|2^3$ ولی $4 \nmid 2$

$$a^n|b^n \Rightarrow a|b \quad (28)$$

$$a^n|b^n \Rightarrow \exists q \in \mathbb{Z} : b^n = qa^n \quad \underline{\div a^n} \quad \left(\frac{b}{a}\right)^n = q$$

اثبات :

چون q صحیح است لذا $\left(\frac{b}{a}\right)^n$ و در نتیجه $\frac{b}{a}$ نیز صحیح است، اکنون از طرفین ریشه ی n ام می گیریم، داریم :

$$\frac{b}{a} = \sqrt[n]{q} \Rightarrow \begin{cases} \frac{b}{a} = q' \Rightarrow b = aq' \Rightarrow a|b \\ q' \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a|b \\ a|c \end{cases} \Rightarrow a|b^n \pm c^n, \quad a|b^n c^n, \quad a|rb^n \pm sc^n \quad (29)$$

(30) $a \nmid 0$ ($a \neq 0$) عدد مخالف صفر بر صفر بخش پذیر نیست

$$a|b \pm c \not\rightarrow a|b \vee a|c \quad (31)$$

$$(۳۲) \quad a|bc \not\Rightarrow a|b \text{ یا } a|c$$

$$12|4 \times 6 \quad \text{ولی} \quad 12 \nmid 4, 12 \nmid 6$$

مثال :

$$(۳۳) \quad \text{لم اقلیدس : } \begin{cases} a|bc \\ (a,b)=1 \end{cases} \Rightarrow a|c$$

، نماد (a,b) علامت ب.م.م است.

یعنی اگر عددی، حاصلضرب دو عدد را عاد کند و با یکی شون متباین باشد، باید حتماً دیگری را عاد کند. اثبات لم اقلیدس را بعداً ملاحظه خواهید کرد.

✓ تذکر : دو عدد را متباین (نسبت به هم اول گوئیم) هرگاه ب.م.م آنها 1 باشد مانند 8 و 15

مثال :

$$\begin{cases} 5|3 \times 10 \\ (5,3)=1 \end{cases} \Rightarrow 5|10$$

$$(۳۴) \quad p|bc \Rightarrow p|b \text{ یا } p|c \quad , \quad p \text{ اول}$$

$$(۳۵) \quad p|b^n \Rightarrow p|b \quad , \quad p \text{ اول}$$

تست : هرگاه p عددی اول باشد و $p|2^7 \times 11^{15}$ ، کدام یک همواره صحیح است؟

$$p=11 \text{ (۴)}$$

$$p=2 \text{ یا } 11 \text{ (۳)}$$

$$p=1 \text{ یا } 2 \text{ (۲)}$$

$$p=2 \text{ (۱)}$$

$$p|2^7 \times 11^{15} \Rightarrow p|2^7 \text{ یا } p|11^{15}$$

پاسخ : طبق دو نکته‌ی فوق داریم :

گزینه‌ی 3 صحیح است

$$(۳۶) \quad a|b \Rightarrow (a,b) = |a|$$

$$(۳۷) \quad a|b \Rightarrow [a,b] = |b|$$

نماد $[a,b]$ علامت ک.م.م است.

$$(۳۸) \quad a|c, b|c \not\Rightarrow ab|c$$

$$4|12, 6|12 \not\Rightarrow 24|12$$

$$a|c, b|c, (a,b)=1 \Rightarrow ab|c$$

$$5|30, 3|30, (5,3)=1 \Rightarrow 5 \times 3|30$$

مثال :

مثال :

$$(۳۹) \quad a|b_1, a|b_2, \dots, a|b_n \Rightarrow a|b_1 + b_2 + \dots + b_n$$

$$(۴۰) \quad a-b|a^n - b^n \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

یعنی عبارت $a^n - b^n$ همواره (همیشه) بر عبارت $a-b$ بخش پذیر است، بالاخص $a^n - 1$ همواره بر $a-1$ بخش پذیر است یعنی:

$$a-1|a^n - 1$$

اثبات می‌دانیم :

$$a^n - b^n = (a-b) \underbrace{(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})}_q$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^n - b^n = (a-b)q \\ q \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow a-b|a^n - b^n$$

$$a-1|a^3 - 1, a-b|a^3 - b^3$$

مثال :

تست : عدد $10^n - 3^n$ بر کدام عدد زیر همواره $(\forall n \in \mathbb{N})$ بخش پذیر است؟

- 10(۱) 3(۲) 7(۳) 5(۴)

پاسخ : گزینه ی 3 $10 - 3 \mid 10^n - 3^n \Rightarrow 7 \mid 10^n - 3^n$

تست : عدد $5^{51} - 3^{34}$ بر کدام عدد زیر همواره بخش پذیر است؟

- 17(۱) 34(۲) 116(۳) 134(۴)

پاسخ : $5^{51} - 3^{34} = (5^3)^{17} - (3^2)^{17} = 125^{17} - 9^{17}$

لذا $125^{17} - 9^{17}$ بر 125-9 یا 116 بخش پذیر است.

$$(۴۱) \quad a + b \mid a^n - b^n \quad (n \in \mathbb{N}, n \text{ زوج})$$

یعنی $a^n - b^n$ هرگاه n زوج باشد بر $a+b$ بخش پذیر است.

مثال :

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \quad \text{زیرا} \quad a + b \mid a^2 - b^2 \quad \text{بر} \quad a+b \text{ بخش پذیر است}$$

$$a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) \quad \text{زی} \quad a + b \mid a^4 - b^4 \quad \text{ولذا} \quad a^4 - b^4 \text{ بر} \quad a^2 - b^2 \text{ و در نتیجه بر} \quad a+b \text{ بخش پذیر است}$$

$$\text{ضمناً} \quad a + b \nmid a^3 - b^3$$

$$(۴۲) \quad a - b \nmid a^n + b^n$$

یعنی $a^n + b^n$ هرگز بر $a-b$ بخش پذیر نیست.

$$\text{مثال :} \quad a - b \nmid a^3 + b^3, \quad a - b \nmid a^2 + b^2$$

$$(۴۳) \quad a + b \mid a^n + b^n \quad (n \in \mathbb{N}, n \text{ فرد})$$

یعنی $a^n + b^n$ ، هرگاه n فرد باشد بر $a+b$ بخش پذیر است.

$$\text{مثال :} \quad 20 \mid 7^3 + 13^3, \quad a + 1 \mid a^3 + 1, \quad a + b \mid a^3 + b^3$$

تست : عدد $4^{2n+1} + 1$ بر کدام عدد زیر، به ازاء هر $n \in \mathbb{N}$ بخش پذیر است؟

- 3(۱) 4(۲) 5(۳) 6(۴)

پاسخ : گزینه ی 3 $4 + 1 \mid 4^{2n+1} + 1^{2n+1} \Rightarrow 5 \mid 4^{2n+1} + 1$

راه دوم : راه عددگذاری : در بین گزینه ها ، فقط 65 بر 5 بخش پذیر است و $n = 1 \Rightarrow 4^3 + 1 = 65$

(۴۴) جمع بندی چهار نکته ی قبل

$$\begin{cases} a - b \mid a^n - b^n & \text{همیشه} \\ a - b \nmid a^n + b^n & \text{هرگز} \\ a + b \mid a^n - b^n & n \text{ زوج} \\ a + b \mid a^n + b^n & n \text{ فرد} \end{cases}$$

$$(۴۵) \quad a^p + b^q \mid a^n + b^m \Leftrightarrow \frac{n}{p} = \frac{m}{q} = \text{فرد}$$

بالاخص هنگامی $a^m + b^m \mid a^n + b^n$ که، $\frac{n}{m}$ فرد باشد و هنگامی $a + b \mid a^n + b^n$ که n فرد باشد.

تست : عبارت $a^{12} + b^{12}$ بر $a^m + b^m$ بخش پذیر است، m کدام است؟

2(۱)

4(۲)

3(۳)

6(۴)

پاسخ : طبق نکته‌ی قبل باید $\frac{12}{m}$ فرد باشد لذا با توجه به گزینه‌ها m باید 4 باشد.

تست : $a^{12} + 1$ بر کدام عبارت زیر بخشپذیر است؟

1(۱) $a^4 + 1$ 2(۲) $a^3 + 1$ 3(۳) $a^2 + 1$ 4(۴) $a^6 + 1$

پاسخ : طبق نکته‌ی قبل گزینه‌ی 1 صحیح است.

تست : اگر $a^2 \mid b + c$ ، کدام گزینه‌ی زیر، الزاماً صحیح است؟

1(۱) $a^2 \mid b^2 + c^2$ 2(۲) $a^2 \mid b^n + c^n$ (n زوج)3(۳) $a^2 \mid b^n - c^n$ (n زوج)4(۴) $a^2 \mid b^2 - c^2$

پاسخ :

$$a^2 \mid b + c \xrightarrow{b+c \mid b^n - c^n, (n \text{ زوج})} a^2 \mid b^n - c^n (n \text{ زوج})$$

لذا گزینه‌ی 3 صحیح است.

$$a^p - b^q \mid a^n - b^m \Leftrightarrow \left(\frac{n}{p} = \frac{m}{q} \in \mathbb{N} \right) \quad (46)$$

بالاخص هنگامی $a^m - b^m \mid a^n - b^n$ که $\frac{n}{m}$ عددی طبیعی باشد و لذا همواره داریم: $a - b \mid a^n - b^n$

مثال : ثابت کنید : $a^2 - b^3 \mid a^4 - b^6$

پاسخ : طبق نکته‌ی فوق چون $\frac{4}{2} = \frac{6}{3} = 2 \in \mathbb{N}$ لذا رابطه‌ی فوق درست است از طرفی طبق اتحاد مزدوج داریم:

$$a^4 - b^6 = (a^2 - b^3)(a^2 + b^3)$$

که دلیل دیگری برای درستی رابطه‌ی داده شده‌می‌باشد.

تست : عدد $3^{52} - 2^{39}$ بر کدام عدد زیر بخشپذیر است؟

71(۱)

72(۲)

73(۳)

19(۴)

پاسخ : اعداد 39 و 52 هر دو مضرب 13 اند، در واقع داریم : $\begin{cases} 39 = 3 \times 13 \\ 52 = 4 \times 13 \end{cases}$ لذا $\frac{52}{4} = \frac{39}{3} = 13$ ، بنابراین طبق نکته‌ی فوق

داریم :

$$3^4 - 2^3 \mid 3^{52} - 2^{39} \Rightarrow 81 - 8 = 73 \mid 3^{52} - 2^{39}$$

بنابراین گزینه‌ی 3 صحیح است.

$$a^p + b^q \mid a^n - b^m \Leftrightarrow \frac{n}{p} = \frac{m}{q} = \text{زوج} \quad (47)$$

بالاخص $a^n - b^n$ زمانی بر $a^m + b^m$ بخشپذیر است که، $\frac{n}{m}$ زوج باشد و هنگامی $a + b \mid a^n - b^n$ که n زوج باشد.

$$a^2 + b^4 \mid a^4 - b^8 \quad \text{یا} \quad a^3 + b^3 \mid a^6 - b^6$$

مثال :

$$a^6 - b^6 = (a^3 + b^3)(a^3 - b^3)$$

در واقع داریم :

$$a^4 - b^8 = (a^2 + b^4)(a^2 - b^4)$$

$$a^p - b^q \nmid a^n + b^m \quad (48)$$

بالاخص $a^n + b^n$ هرگز بر $a^m - b^m$ بخش پذیر نیست، همچنین $a^n + b^n$ هرگز بر $a - b$ بخشپذیر نیست.

$$a - b \nmid a^2 + b^2, a^2 - b^3 \nmid a^4 + b^6$$

مثال :

$$ab \mid (a+b)^n - (a^n + b^n) \quad \begin{cases} ab \mid (a+b)^2 - (a^2 + b^2) & (1) \\ ab \mid (a+b)^3 - (a^3 + b^3) & (2) \end{cases} \quad (49) \quad \text{و به طور کلی}$$

$$ab \mid (a+b)^2 - (a^2 + b^2) \Rightarrow ab \mid a^2 + 2ab + b^2 - a^2 - b^2 \Rightarrow ab \mid 2ab \quad \text{اثبات (1)}$$

لذا طبق اثبات بازگشتی حکم ثابت است، اثبات (2) نیز مشابه است. $5 \times 3 \mid (5+3)^2 - (5^2 + 3^2)$ یا $15 \mid 8^2 - (5^2 + 3^2)$

تست : کدام گزینه‌ی زیر درست است؟

$$(1) \quad 17 \mid 72^n - (8^n + 9^n) \quad (2) \quad 72 \mid 17^n - (8^n + 9^n) \quad (3) \quad 5 \mid 6^n - (2^n + 3^n) \quad (4) \quad \text{گزینه‌های 1 و 3}$$

پاسخ : طبق نکته‌ی قبل گزینه‌ی 2 صحیح است زیرا :

$$\begin{cases} ab \mid (a-b)^2 - (a^2 + b^2) \\ ab \mid (a-b)^n - (a^n + b^n), \quad (n \text{ زوج}) \end{cases} \quad (50)$$

$$\begin{cases} ab \mid (a-b)^3 - (a^3 - b^3) \\ ab \mid (a-b)^n - (a^n - b^n), \quad (n \text{ فرد}) \end{cases} \quad (51)$$

$$(52) \quad \text{تعریف همنهشتی} \quad m \mid a - b \Leftrightarrow a \equiv b^m$$

در بخش همنهشتی، با این موضوع بیشتر آشنا خواهید شد.

$$(53) \quad \text{قضیه‌ی فرما : } p \mid a^{p-1} - 1 \quad \text{یا} \quad p \nmid a \Rightarrow a^{p-1} \equiv 1^p \quad \text{یا} \quad (a, p) = 1 \quad p, \text{ اول}$$

با قضیه‌ی فرما در بخش همنهشتی آشنا خواهید شد.

$$\text{مثال : } 7 \mid 2^6 - 1$$

$$(54) \quad \text{نتیجه‌ی قضیه‌ی فرما} \quad p \mid a^p - a \quad p \Rightarrow a^p \equiv a \quad \text{اول}$$

$$\text{مثال : } \checkmark \quad 5 \mid 4^5 - 4 \Rightarrow 5 \mid 1024 - 4 \rightarrow 5 \mid 1020$$

$$(55) \quad \text{قضیه‌ی ویلسون} \quad p \mid (p-1)! + 1 \quad \text{یا} \quad p \nmid (p-1)! \Rightarrow (p-1)! \equiv -1 \quad \text{اول}$$

$$\text{مثال : } \checkmark \quad 5 \mid (5-1)! + 1 \Rightarrow 5 \mid 24 + 1 \Rightarrow 5 \mid 25$$

$$(56) \quad p, k < p \Rightarrow p \mid \binom{p}{k} \quad \text{اول}$$

$$5 \mid \binom{5}{2} \Rightarrow 5 \mid 10 \quad \left(\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!} = 10 \right) \quad \text{یادآوری}$$

مثال :

$$(57) \quad m!n! \mid (m+n)!$$

$$\binom{m+n}{m} \in \mathbb{N} \quad \text{لذا} \quad \binom{n}{r} \in \mathbb{N}$$

اثبات می‌دانیم :

$$\Rightarrow \frac{(m+n)!}{m!(m+n-m)!} \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{(m+n)!}{m!n!} \in \mathbb{N} \quad (1)$$

رابطه‌ی (۱) نشانگر آنست که $\frac{(m+n)!}{m!n!}$ عددی طبیعی است، این بدان معنا است که صورت بر مخرج بخشپذیر است، یعنی

$$m!n! \mid (m+n)!$$

$$(n!)^2 \mid (2n)! \quad (58)$$

اثبات : با فرض $m = n$ از رابطه‌ی (۵۷) مستقیماً به دست می‌آید.

(۵۹) همواره $60 \mid abc$ ، که در آن a, b, c اعداد فیثاغورثی می‌باشند، اعداد فیثاغورثی سه تایی‌هایی به صورت $(3k, 4k, 5k)$ می‌باشند که در قضیه‌ی فیثاغورث صدق می‌کند : مثال : $3, 4, 5$ - $6, 8, 10$ - $9, 12, 15$ - ...

دقت کنید :

$$5^2 = 3^2 + 4^2$$

$$10^2 = 8^2 + 6^2$$

$$15^2 = 9^2 + 12^2$$

چند تمرین مهم :

(۱) به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ ثابت کنید :

از روش استقرا استفاده می‌کنیم :

$$15 \mid 2^{4n} - 1$$

$$p(n) : 15 \mid 2^{4n} - 1$$

$$p(1) : 15 \mid 2^4 - 1 \Rightarrow 15 \mid 15$$

$$p(k) : 15 \mid 2^{4k} - 1$$

$$p(k+1) : 15 \mid 2^{4(k+1)} - 1$$

$$15 \mid 2^{4k} - 1 \Rightarrow 15 \mid 16(2^{4k} - 1) \Rightarrow 15 \mid 2^4(2^{4k} - 1)$$

$$\begin{array}{r} 15 \mid 2^{4k+4} - 16 \\ \Rightarrow \quad 15 \mid \quad 15 \end{array} +$$

$$15 \mid 2^{4k+4} - 1 \Rightarrow 15 \mid 2^{4(k+1)} - 1$$

$$a \mid b \Rightarrow \exists q \in \mathbb{Z} : b = aq \xrightarrow{\text{به توان 3}} = a^3 q^3$$

$$b^3 = a^2 \underbrace{(aq^3)}_{q'} \Rightarrow b^3 = a^2 q' \Rightarrow a^2 \mid b^3$$

(۲) هرگاه $a \mid b$ ، ثابت کنید : $a^2 \mid b^3$

(۳) هرگاه $5 \mid 2n+1$ ، ثابت کنید : $25 \mid 14n^2 + 19n + 6$

$$5 \mid 2n+1 \Rightarrow 5^2 \mid (2n+1)^2 \Rightarrow 25 \mid 4n^2 + 4n + 1 \quad (1)$$

$$5 \mid 2n+1 \Rightarrow 5 \times 5 \mid 5(2n+1) \Rightarrow 25 \mid 10n + 5 \quad (2)$$

$$25 \mid 2n+1 \Rightarrow 25 \mid 5(2n+1) \Rightarrow 25 \mid 10n + 5 \Rightarrow 25 \mid n(10n + 5) \Rightarrow 25 \mid 10n^2 + 5n \quad (3)$$

$$25 \mid (4n^2 + 4n + 1) + (10n + 5) + (10n^2 + 5n)$$

$$\Rightarrow 25 \mid 14n^2 + 19n + 6$$

از جمع روابط ۱ و ۲ و ۳ داریم :

$$\begin{cases} a|b \\ a|c \Rightarrow a|b+c+d \\ a|d \end{cases}$$

یادآوری :

✓ نکته : تعداد مضارب طبیعی k ، که کوچکتر یا مساوی n هستند برابر است با: $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$

مثال : چند عدد طبیعی مضرب 7 کوچکتر یا مساوی 100 وجود دارد؟
این 13 عدد عبارتند از : 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91

✓ نکته : تعداد مضارب طبیعی k به طوریکه از m بزرگتر یا مساوی و از n کوچکتر یا مساویند، $(m < n)$ عبارتست از :

$$\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{m-1}{k} \right\rfloor$$

تست : چند عدد دو رقمی مضرب 2 وجود دارد؟

44(۱) 45 (۲) 46 (۳) 43 (۴)

پاسخ: اولین عدد دو رقمی 10 و آخرین عدد دو رقمی 99 است لذا داریم: $\left\lfloor \frac{99}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{9}{2} \right\rfloor = 49 - 4 = 45$ ، $\{10, 11, \dots, 99\}$

راه دیگر : $49 - 4 = 45$ = تعداد مقادیر $n \Rightarrow 4 < n \leq 49 \Rightarrow \left\lfloor \frac{99}{2} \right\rfloor < n \leq \left\lfloor \frac{99}{2} \right\rfloor \Rightarrow 9 < 2n \leq 99 \Rightarrow 9 < 2n \leq 99 \Rightarrow 4 < n \leq 49$

تست : چند عدد سه رقمی مضرب 31 وجود دارد؟

28(۱) 30 (۲) 29 (۳) 32 (۴)

پاسخ :

$$99 < 31n \leq 999 \Rightarrow \left\lfloor \frac{99}{31} \right\rfloor < n \leq \left\lfloor \frac{999}{31} \right\rfloor$$

$$\Rightarrow 3 < n \leq 32 \Rightarrow n \text{ تعداد مقادیر } = 32 - 3 = 29$$

تست : چند عدد سه رقمی مربع کامل مضرب 5 وجود دارد؟

7(۱) 4 (۲) 6 (۳) 5 (۴)

پاسخ :

$$99 < (5n)^2 \leq 999 \xrightarrow{\text{جذر}} \sqrt{99} < 5n \leq \sqrt{999}$$

$$\Rightarrow \left\lfloor \frac{\sqrt{99}}{5} \right\rfloor < n \leq \left\lfloor \frac{\sqrt{999}}{5} \right\rfloor \Rightarrow 1 < n \leq 6 \Rightarrow n \text{ تعداد مقادیر } = 6 - 1 = 5$$

این 5 عدد عبارتند از :

$$1 < n \leq 6 \Rightarrow \begin{cases} n = 2 \rightarrow (5n)^2 = 100 \\ n = 3 \rightarrow (5n)^2 = 225 \\ n = 4 \rightarrow (5n)^2 = 400 \\ n = 5 \rightarrow (5n)^2 = 625 \\ n = 6 \rightarrow (5n)^2 = 900 \end{cases}$$

قضیه‌ی تقسیم (قضیه‌ی آگوریتیم تقسیم):

هرگاه a یک عدد صحیح و b یک عدد طبیعی باشد، آنگاه اعداد صحیح منحصر به فردی مانند q و r وجود دارند، به طوریکه :

$$a = bq + r, (0 \leq r < b)$$

در این قضیه a را مقسوم، b را مقسوم علیه، q را خارج قسمت و r را باقیمانده‌ی تقسیم می‌گوئیم.

✓ نکته : آگوریتیم که از نام الخوارزمی (وفات حدود 225 هجری شمسی) ریاضی دان معروف ایرانی گرفته شده است، به مجموعه‌ی اعمال متوالی و ترتیبی اطلاق می‌شود که در آن هر عمل از عمل قبلی خود به دست آمده باشد.

مثال : در تقسیم $100 - 17$ بر 17 ، خارج قسمت و باقی مانده را در آگوریتیم تقسیم بیابید؟

$$\begin{array}{r} 100 \quad \overline{)17} \\ 85 \quad \underline{5} \\ 15 \end{array}$$

$$85 \quad 5$$

$$15$$

$$\Rightarrow 100 = 17(5) + 15$$

$\times(-1)$

$$\Rightarrow -100 = 17(-5) - 15$$

$$-100 = 17(-5) - 15 + 17 - 17$$

$$-100 = 17(-5-1) + 2$$

$$-100 = 17(-6) + 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} q = -6 \leftarrow \text{خارج قسمت} \\ r = 2 \leftarrow \text{باقی مانده} \end{cases}$$

✓ نکته : با توجه به قضیه‌ی تقسیم داریم :

$$a = bq + r, (0 \leq r < b)$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = q + \frac{r}{b} \Rightarrow \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor = \left\lfloor q + \frac{r}{b} \right\rfloor \Rightarrow \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor = q + \left\lfloor \frac{r}{b} \right\rfloor$$

$$\Rightarrow \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor = q + 0 \Rightarrow q = \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor$$

دقت کنید که چون $0 \leq r < b$ لذا $0 \leq \frac{r}{b} < 1$ و بنابراین $\left\lfloor \frac{r}{b} \right\rfloor = 0$ بنابراین می‌توان گفت که : $\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor = \frac{\text{مقسوم}}{\text{مقسوم علیه}} = \text{خارج قسمت}$

تست : خارج قسمت و باقی مانده‌ی تقسیم $100 - 17$ به ترتیب عبارتند از :

$$-15 \text{ و } -5(4)$$

$$-15 \text{ و } 5(3)$$

$$2 \text{ و } -6(2)$$

$$2 \text{ و } 6(1)$$

پاسخ : طبق نکته‌ی فوق داریم :

$$\Rightarrow \text{خارج قسمت } q = \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{-100}{17} \right\rfloor = \left\lfloor -5 \frac{5}{17} \right\rfloor = -6$$

$$\Rightarrow \text{باقیمانده } a = bq + r \Rightarrow r = a - bq = -100 - (17)(-6) = -100 + 102 = 2$$

لذا گزینه‌ی 2 صحیح است.

تست : هرگاه باقیمانده‌ی تقسیم a بر 9 برابر 4 باشد، باقی مانده‌ی تقسیم a^2 بر 9 کدام است؟

7(۱)

1 (۲)

4 (۳)

6 (۴)

پاسخ :

$$a = 9q + 4 \Rightarrow a^2 = (9q + 4)^2 \Rightarrow a^2 = \underbrace{81q^2 + 8(9q) + 16}_{\text{مضرب 9}}$$

$$a^2 = 9q' + 9 + 7 = 9(\underbrace{q' + 1}_{q''}) + 7 = 9q'' + 7 \Rightarrow r = 7$$

✓ نکته: هرگاه باقیمانده‌ی تقسیم a بر b برابر r باشد ($a = bq + r$)، آنگاه باقیمانده‌ی تقسیم a^n بر b برابر است با باقیمانده‌ی تقسیم r^n بر b ، بر طبق این نکته، برای حل تست فوق، کافی است باقی مانده $4^2 = 16$ را بر 9 بیابیم که برابر 7 است.

✓ نکته‌ی مهم: باقیمانده تقسیم a بر b ($b \neq 0$)، برابر است با عضو ابتدای (کوچکترین عضو) مجموعه‌ی

$$S = \{a - bq > 0 : q \in \mathbb{Z}\}$$

تست : عضو Min مجموعه‌ی $S = \{-42 + 5q > 0 : q \in \mathbb{Z}\}$ ، کدام است؟

1 (۴)

4 (۳)

3 (۲)

2(۱)

$$S = \{-42 + 5q > 0 : q \in \mathbb{Z}\} = \left\{ -42 - 5(\underbrace{-q}_{q'}) > 0 : q \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$= \{-42 - 5q' : q' \in \mathbb{Z}\}$$

لذا طبق نکته‌ی فوق کافی است باقیمانده‌ی تقسیم -42 را بر 5 بیابیم

$$\Rightarrow q = \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{-42}{5} \right\rfloor = \left\lfloor -8 \frac{2}{5} \right\rfloor = -9 \quad \text{خورده ای } -8 / \text{ خارج قسمت}$$

$$\Rightarrow r = a - bq = -42 - (-5)(-9) = 3 \quad \text{باقیمانده}$$

✓ تذکر: البته دقت داشته باشید که به طور ذهنی نیز می‌توانستیم عضو Min مجموعه‌ی S را به دست آوریم، کافی است به جای q ، عدد یا اعدادی قرار دهیم که $-42 + 5q$ ، مثبت شود، مثلاً به جای q ، 9 قرار دهیم.

تست : هرگاه باقیمانده‌ی تقسیم a بر 11 برابر 9 باشد باقیمانده‌ی تقسیم $4a + 8$ بر 11 کدام است؟

5 (۴)

2 (۳)

9 (۲)

0(۱)

پاسخ :

$$a = 11q + 9 \xrightarrow{\times 4} 4a = 44q + 36$$

$$\xrightarrow{+8} 4a + 8 = 44q + 44 = 11(\underbrace{4q + 4}_{q'}) + 0$$

$$\Rightarrow 4a + 8 = 11q' + 0 \Rightarrow r = 0$$

تست : هرگاه باقیمانده‌ی a بر 7 و 8 به ترتیب 3، 5 باشد، باقیمانده‌ی a بر 56 برابر است با :

52 (۴)

45 (۳)

37 (۲)

15(۱)

پاسخ :

$$\begin{cases} 8 \{ a = 7q + 3 \\ 7 \{ a = 8q' + 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8a = 56q + 24 \\ 7a = 56q' + 35 \end{cases}$$

$$a = 56(q - q') - 11 = 56(q - q') - 11 + 56 - 56$$

$$\Rightarrow a = 56(\underbrace{q - q' - 1}_{q''}) + 45 \Rightarrow a = 56q'' + 45 \Rightarrow r = 45$$

تست : هرگاه باقیمانده‌ی عدد فرد a بر 17 برابر 6 باشد، باقیمانده‌ی a بر 34 کدام است؟

0(۱) 23 (۲) 6 (۳) 28 (۴)

$$a = 17q + 6$$

پاسخ: طبق فرض داریم :

چون a فرد و 6 زوج است، لذا $17q$ باید فرد باشد و بنابراین q باید فرد باشد لذا داریم :

$$a = 17(2k+1) + 6 = 34k + 23 \Rightarrow r = 23$$

تست : اگر در یک تقسیم 100 واحد به مقسوم و 4 واحد به مقسوم علیه بیفزائیم، خارج قسمت تغییری نکرده، اما باقیمانده 8 واحد کم میشود، خارج قسمت کدام است؟

23(۱) 27 (۲) 31 (۳) 29 (۴)

پاسخ :

$$\begin{cases} a = bq + r \\ a + 100 = (b + 4)q + r - 8 \end{cases}$$

$$100 = 4q - 8 \Rightarrow 4q = 108 \Rightarrow q = 27$$

تست : اگر در یک تقسیم، باقیمانده 19 و خارج قسمت 5 باشد، حداکثر چند واحد می‌توان به مقسوم علیه اضافه کرد تا مقسوم و خارج قسمت تغییر نکند؟

2(۱) 4 (۲) 3 (۳) 6 (۴)

پاسخ :

$$\begin{cases} a = 5b + 19 \\ a = 5(b + x) + r' \end{cases}$$

$$0 = 5x + r' - 19 \Rightarrow \begin{cases} r' = -5x + 19 \\ 0 \leq r' \end{cases} \Rightarrow -5x + 19 \geq 0$$

$$\Rightarrow 5x \leq 19 \Rightarrow x \leq \frac{19}{5} = 3 / \text{خورده ای} \Rightarrow x \leq 3 \Rightarrow x = 3 \quad \text{حداکثر مقدار } x$$

البته برای حل تست قبل می‌توانستیم از نکته‌ی زیر که در حالت کلی برقرار است نیز استفاده کرد.

✓ نکته‌ی مهم : حداکثر تعداد واحدهایی که می‌توان به مقسوم علیه اضافه کرد تا مقسوم و خارج قسمت تغییر نکنند، برابر

$$\text{است با جزء صحیح } \frac{r}{q}, \text{ لذا در تست قبل داریم : } \left\lfloor \frac{r}{q} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{19}{5} \right\rfloor = \left\lfloor 3 / \text{خورده ای} \right\rfloor = 3 = \text{بیشترین مقدار } x$$

تست: بزرگترین عدد طبیعی به طوریکه اگر بر 100 تقسیم شود، باقیمانده‌ی تقسیم، مکعب خارج قسمت باشد، کدام است؟

464(۱) 808 (۲) 327 (۳) 216 (۴)

پاسخ :

$$a = 100q + q^3, q^3 < 100 \Rightarrow q < \sqrt[3]{100} = 4 / \text{خورده ای}$$

$$\xrightarrow{q \in \mathbb{Z}} q \leq 4 \Rightarrow q = 1, 2, 3, 4 \Rightarrow \text{Max}(a) = 100(4) + 4^3 = 464$$

تست : در یک عمل تقسیم، مقسوم علیه 5 است، اگر ۳۰ واحد به مقسوم، اضافه شود، خارج قسمت چه تغییری می‌کند؟

۵ واحد کم می‌شود (۱) ۶ واحد کم می‌شود (۲) ۶ واحد اضافه می‌شود (۳) ۴ تغییری نمی‌کند (۴)

$$\begin{cases} a = 5q + r \\ a + 30 = 5q + r + 30 \Rightarrow a + 30 = 5(\underbrace{q+6}_{q'}) + r \end{cases}$$

پاسخ :

6 واحد اضافه میشود.

البته در حل تست قبل می‌توانستیم از نکته‌ی زیر که در حالت کلی برقرار است نیز استفاده کنیم.

✓ نکته : هرگاه مضربی از مقسوم علیه را به مقسوم اضافه کنیم، باقیمانده‌ی تقسیم تغییری نمی‌کند ولی خارج قسمت با همان مضرب، جمع میشود.

تست: در یک تقسیم، مقسوم علیه 11 و خارج قسمت 9 است، اگر 33 واحد به مقسوم اضافه شود، خارج قسمت جدید کدام است؟

12 (۱) 9 (۲) 6 (۳) 3 (۴)

پاسخ : طبق نکته‌ی فوق، خارج قسمت با 3، جمع میشود (زیرا سه برابر مقسوم علیه به مقسوم اضافه شده است).

تست : در یک تقسیم، مقسوم علیه 42 و باقیمانده برابر 25 است، بزرگترین عددی که می‌توان به مقسوم اضافه کرد تا خارج قسمت تغییری نکند، کدام است؟

15 (۱) 17 (۲) 24 (۳) 16 (۴)

پاسخ :

$$a = 42q + 25$$

$$a + x = 42q + 25 + x \Rightarrow 25 + x < 42 \Rightarrow x < 17$$

$$\Rightarrow \text{Max}(x) = 16$$

البته برای حل تست فوق می‌توانستیم از نکته‌ی زیر که در حالت کلی نیز برقرار است، استفاده کنیم.

✓ نکته : همواره در تقسیم a بر b ($a = bq + r$)، حداکثر به اندازه‌ی $x = b - r - 1$ واحد می‌توان به مقسوم اضافه کرد تا خارج قسمت تغییری نکند.

$$x = 42 - 25 - 1 = 16$$

لذا در تست قبل داریم :

✓ نکته‌ی مهم : یکی از کاربردهای قضیه‌ی آگوریتم تقسیم، دسته بندی اعداد بر حسب باقیمانده‌ی تقسیمشان بر عدد طبیعی و ثابت m است، طبق قضیه‌ی فوق، هر عدد صحیح، نمایش منحصر به فردی به صورت $nm + r$ (m و n به ترتیب b و q می‌باشند) دارد که در آن r ، یعنی باقیمانده‌ی تقسیم می‌تواند یکی از اعداد $0, 1, 2, \dots, m-1$ باشد، بنابراین هر عدد صحیح مانند a را می‌توان به یکی و فقط یکی از صورتهای زیر نوشت :

$$nm, nm + 1, nm + 2, \dots, nm + (m - 1)$$

به عبارت دیگر هر عدد صحیح را می‌توان در یکی از دسته‌های هم ارزی زیر، (که افزاری برای $\mathbb{Z}$ هستند) گنجاند، مجموعه‌ی

$$\mathbb{Z}_m = \{[0], [1], [2], \dots, [m-1]\}$$

همه‌ی دسته‌های هم ارزی مورد بحث را با $\mathbb{Z}_m$ نمایش می‌دهیم

مثال : هرگاه $m=2$ باشد، آنگاه اگر عدد صحیح a را بر 2 تقسیم کنیم، یا a بر 2 بخش پذیر است (که در این حالت $r=0$ خواهد بود) و یا بخش‌پذیر نیست (که در این حالت $r=1$ خواهد بود)، بنابراین a به یکی از دو صورت زیر خواهد بود :

$$a = 2n \quad \text{یا} \quad a = 2n + 1$$

به این ترتیب مجموعه‌ی $\mathbb{Z}$ به دو مجموعه، یکی مجموعه‌ی اعداد زوج و دیگری مجموعه‌ی اعداد فرد افزا می‌شود، در این حالت می‌گوئیم $\mathbb{Z}$ به دو دسته‌ی هم ارزی (یک دسته‌ی هم ارزی $[0]_2$ یا $\bar{0}$ و دسته‌ی هم ارزی دیگر $[1]_2$ یا $\bar{1}$) افزا شده است، توجه داشته باشید که :

$$[0]_2 = \{\dots, -2, 0, 2, \dots\} = \{x : x = 2k, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$[1]_2 = \{\dots, -3, -1, 1, 3, \dots\} = \{x : x = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}\}$$

به همین ترتیب اگر $m=3$ باشد آنگاه 2 یا 1 یا $r=0$ خواهد بود و لذا داریم :

$$\begin{cases} a = 3n \\ a = 3n + 1 \\ a = 3n + 2 \end{cases} \quad \text{یا} \quad 3n - 1 \xrightarrow{\text{مثال}} 8 = 3(2) + 2 \quad \text{یا} \quad 3(3) - 1$$

در این حالت $\mathbb{Z}$ به سه دسته‌ی هم ارزی $[0]_3, [1]_3, [2]_3$ افراز میشود که به صورت زیر می‌باشند :

$$\begin{aligned} [0]_3 &= \{\dots, -3, 0, 3, \dots\} = \{x : x = 3k, k \in \mathbb{Z}\} \\ [1]_3 &= \{\dots, -2, 1, 4, \dots\} = \{x : x = 3k + 1, k \in \mathbb{Z}\} \\ [2]_3 &= \{\dots, -1, 2, 5, \dots\} = \{x : x = 3k + 2, k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

در حالت $m = 4$ داریم :

$$\begin{cases} a = 4n \\ a = 4n + 1 \\ a = 4n + 2 \end{cases} \quad \text{یا} \quad 4n - 2 \xrightarrow{\text{مثال}} 10 = 4(2) + 2 \quad \text{یا} \quad 4(3) - 2$$

$$\begin{cases} a = 4n + 3 \\ a = 4n - 1 \end{cases} \quad \text{یا} \quad 4n - 1 \xrightarrow{\text{مثال}} 19 = 4(4) + 3 \quad \text{یا} \quad 4(5) - 1$$

تست : عدد 478 متعلق به کدام دسته‌ی هم ارزی به پیمانه‌ی 9 است؟

$$[1] \quad (۱) \quad [8] \quad (۲) \quad [0] \quad (۳) \quad [5] \quad (۴) \quad \text{روش دوم}$$

روش اول

پاسخ : کافی است باقیمانده‌ی تقسیم 478 را بر 9 بیابیم.

$$\begin{array}{r} 478 \quad | \quad 9 \\ \underline{45} \quad 53 \\ 28 \\ \underline{- 27} \\ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4 + 7 + 8 = 19 \quad | \quad 9 \\ \underline{- 18} \quad 2 \\ 1 \end{array}$$

بنابراین گزینه 1 صحیح است

✓ نکته : برای یافتن باقیمانده‌ی تقسیم هر عدد بر 9، کافی است باقیمانده‌ی تقسیم مجموع ارقامش را بر 9 بیابیم.

$$2 \mid n^2 - n$$

مثال : ثابت کنید :

اثبات : دقت کنید که عبارت $n^2 - n = n(n-1)$ حاصلضرب دو عدد صحیح متوالی است که طبق یکی از نکات قبل مضرب 2 است اما در اینجا این مطلب را ثابت می‌کنیم، برای اثبات گوئیم :

$$\begin{cases} n = 2k \Rightarrow 2 \mid n \Rightarrow 2 \mid (n-1)n \Rightarrow 2 \mid n^2 - n \\ \text{یا} \\ n = 2k + 1 \Rightarrow n - 1 = 2k \Rightarrow 2 \mid n - 1 \Rightarrow 2 \mid n(n-1) \Rightarrow 2 \mid n^2 - n \end{cases}$$

n یا زوج است یا فرد لذا داریم :

✓ نکته : مربع هر عدد فرد، به صورت $8q+1$ است.

اثبات : فرض می‌کنیم $a = 2k+1$ عدد فرد دلخواهی باشد در این صورت داریم :

$$a^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = \underbrace{4k(k+1)}_{\text{حاصلضرب دو عدد متوالی}} + 1 = 4(2q) + 1 = 8q + 1$$

✓ نکته : هر عدد فرد که به صورت $8q+1$ نباشد، مربع کامل نیست.

اثبات با برهان خلف از نکته‌ی قبل بسادگی به دست می‌آید.

مثال : ثابت کنید عدد 308245 مربع کامل نیست؟

اثبات : عدد داده شده فرد است و به صورت $8q+1$ نیست زیرا :

$$308245 = \underbrace{308000 + 240}_{\text{مضرب 8}} + 5 = 8q + 5$$

لذا طبق نکته‌ی قبل این عدد مربع کامل نیست.

مثال : هرگاه m و n فرد باشند، ثابت کنید : $8 \mid m^2 - n^2$

اثبات : فرض می‌کنیم m و n دو عدد فرد باشند لذا طبق نکته‌ی قبل داریم :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} m^2 = 8k + 1 \\ n^2 = 8k' + 1 \end{cases} \\ & - \\ & m^2 - n^2 = 8 \underbrace{(k - k')}_{q} = 8q \Rightarrow 8 \mid m^2 - n^2 \end{aligned}$$

مثال : ثابت کنید : $6 \mid n^3 - n$

اثبات : از استقراء ریاضی استفاده می‌کنیم :

$$p(1) : 6 \mid 0$$

$$p(k) : 6 \mid k^3 - k$$

$$p(k+1) : 6 \mid (k+1)^3 - (k+1)$$

$$(k+1)^3 - (k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k - 1$$

$$= (k^3 - k) + 3k(k+1)$$

$$\begin{aligned} 2 \mid k(k+1) & \xrightarrow{\times 3} \begin{cases} 6 \mid 3k(k+1) \\ 6 \mid k^3 - k \end{cases} + \\ & 6 \mid (k^3 - k) + 3k(k+1) \end{aligned}$$

روش دوم :

$$\begin{cases} n = 3k \Rightarrow 3 \mid n \Rightarrow 3 \mid n(n^2 - 1) \Rightarrow 3 \mid n^3 - n \\ n = 3k + 1 \Rightarrow n - 1 = 3k \Rightarrow 3 \mid n - 1 \Rightarrow 3 \mid n(n+1)(n-1) \Rightarrow 3 \mid n^3 - n \\ n = 3k - 1 \Rightarrow n + 1 = 3k \Rightarrow 3 \mid n + 1 \Rightarrow 3 \mid n(n-1)(n+1) \Rightarrow 3 \mid n^3 - n \end{cases}$$

لذا در هر صورت $3 \mid n^3 - n$ ، از طرفی از قبل می‌دانیم که $2 \mid n^2 - n$ لذا :

$$2 \mid (n+1)(n^2 - n) \Rightarrow 2 \mid n^3 - n \quad (2)$$

$$(1), (2), (2, 3) = 1 \Rightarrow 2 \times 3 \mid n^3 - n \Rightarrow 6 \mid n^3 - n$$

تست : هرگاه a عددی زوج باشد، عبارت $(a^2 - 4)$ بر کدام عدد زیر بخشپذیر است؟

48 (۴)

36 (۳)

32 (۲)

15 (۱)

پاسخ :

$$\begin{aligned}
 a = 2k &\Rightarrow a(a^2 - 4) = 2k(4k^2 - 4) \\
 &= 2k(2k - 2)(2k + 2) \\
 &= 8k \underbrace{(k - 1)(k + 1)}_{\text{مضرب 6}} \\
 &= 8 \times 6q \\
 &= 48q
 \end{aligned}$$

راه دیگر (عددگذاری):
 لذا گزینه‌ی 4 صحیح است.

✓ نکته : از هر n عدد متوالی، دقیقاً یکی از آنها مضرب n است.
 نکته : حاصلضرب هر دو عدد به صورت $4k+1$ ، باز هم به صورت $4k+1$ است.

$$\begin{cases} a = 4k + 1 \\ b = 4k' + 1 \end{cases} \Rightarrow ab = \underbrace{16kk' + 4k + 4k'}_{\text{مضرب 4}} + 1 = 4q + 1$$

اثبات :

✓ نکته : حاصلضرب هر دو عدد به صورت $4k+3$ ، به صورت $4k+1$ است.

اثبات :

$$\begin{cases} a = 4k + 3 \\ b = 4k' + 3 \end{cases} \Rightarrow ab = 16kk' + 12k + 12k' + 9 \\
 = \underbrace{16kk' + 12k + 12k' + 8}_{\text{مضرب 4}} + 1 = 4q + 1$$

✓ نکته : حاصلضرب هر دو عدد به صورت $6k+5$ به صورت $6k+1$ است.

$$\begin{cases} a = 6k + 5 \\ b = 6k' + 5 \end{cases} \Rightarrow ab = 36kk' + 30k + 30k' + 25 = \underbrace{36kk' + 30k + 30k' + 24}_{\text{مضرب 6}} + 1 = 6q + 1$$

اثبات :

✓ نکته : هر عدد فرد را می‌توان به صورت $4q+1$ یا $4q+3$ نوشت.

اثبات : فرض می‌کنیم $a=2k+1$ ، عدد فرد دلخواهی باشد در این صورت بسته به اینکه خود k زوج یا فرد باشد، داریم:

$$a = 2k + 1 \Rightarrow \begin{cases} k = 2k' \Rightarrow a = 2(2k') + 1 = 4k' + 1 = 4q + 1 \\ k = 2k'' + 1 = 2(2k'' + 1) + 1 = 4k'' + 3 = 4q + 3 \end{cases}$$

✓ نکته : هیچ مربع کاملی به اعداد 2, 3, 7, 8 ختم نمیشود، به عنوان مثال اعداد 963, 21788, 4097, 532 مربع کامل نیستند، البته علت این امر به رقم یکان عدد بر می‌گردد، در بحث همنهشتی و در قسمت رقم یکان خواهید دید که اگر رقم یکان عددی 0, 1, 2, ..., 9 باشد، توان زوج هیچکدام از این ارقام، 2, 3, 7, 8 نخواهد شد.

✓ نکته : در سمت راست هیچ مربع کاملی به تعداد فرد، رقم صفر وجود ندارد، مثلاً اعداد 3170، 5579000 مربع کامل نیستند.
 تست : کدامیک از اعداد زیر مربع کامل اند؟

625725 (۱) 373122 (۲) 1409273 (۳) 17424 (۴)

پاسخ : گزینه‌های 2 و 3 نادرستند، زیرا دیدیم هیچ مربع کاملی به 2 و 3 ختم نمیشود، گزینه‌ی 1 نیز نادرست است زیرا عددی است فرد و به صورت $8q+1$ نیست در واقع :

$$625725 = \underbrace{625000 + 720}_{\text{مضرب 8}} + 5 = 8q + 5$$

بنابراین گزینه‌ی 4 درست است، عدد 17424 مربع کامل است و جذرش 132 می‌باشد.

✓ نکته : اگر a مربع کامل باشد و مضرب 3 باشد آنگاه مضرب 9 نیز هست ولی عکس این مطلب درست نمی‌باشد.

✓ نکته : اگر a مربع کامل باشد و مضرب 5 باشد، آنگاه مضرب 25 نیز هست ولی عکس این مطلب درست نمی باشد.

✓ نکته : هر عدد مربع کامل یا به صورت $3k$ است یا به صورت $3k+1$ (ولی عکس آن درست نیست)

✓ نکته : هر عدد مربع کامل یا به صورت $4k$ است یا به صورت $4k+1$ (ولی عکس آن درست نیست)

✓ نکته : شرط اینکه عددی مربع کامل باشد، آنستکه در تجزیه اش به عوامل اول، توان همه ی عوامل اول آن زوج باشد، ضمناً عکس این مطلب نیز درست است.

مثال : اعداد 10000, 625, 81, 36 مربع کامل اند زیرا :

$$36 = 2^2 \times 3^2, \quad 729 = 3^6, \quad 625 = 5^4, \quad 10000 = 2^4 \times 5^4$$

تست : عدد $A = 21^3 \times 15^7 \times 14^2$ ، حداقل در چه عددی ضرب شود تا مربع کامل شود؟

$$21 \times 15 (1) \quad 35 (2) \quad 14 \times 15 (3) \quad 14 \times 21 (4)$$

$$A = (3 \times 7)^3 \times (3 \times 5)^7 \times (2 \times 7)^2 = 2^2 \times 3^{10} \times 5^7 \times 7^5$$

پاسخ :

بنابراین کافی است در یک 5 و در یک 7 یعنی 35 ضرب شود تا توان همه ی عوامل اول آن زوج شده و بنابراین مربع کامل شود.

✓ نکته : عددی مکعب کامل است که در تجزیه اش به عوامل اول، توان همه ی عوامل اول آن مضرب 3 باشند

مثال : اعداد 27, 1000, 216, ... مکعب کامل اند. زیرا:

$$27 = 3^3, \quad 1000 = 2^3 \times 5^3, \quad 216 = 2^3 \times 3^3$$

نمایش اعداد صحیح :

دستگاهی که معمولاً برای نمایش اعداد صحیح به کار می بریم، دستگاه شمارش در مبنای 10 (دستگاه دهدهی) است (دسته بندیها در این دستگاه ده تایی، صدتایی، هزرتایی و ... می باشد) به عنوان مثال وقتی می نویسیم 2536، منظور ما 6 یکی، 3 دسته ی 10 تایی، 5 دسته ی 100 تایی و 2 دسته ی هزارتایی است، در واقع بسط اعشاری یا دهدهی این عدد به صورت زیر می باشد :

$$2536 = 6 \times 10^0 + 3 \times 10^1 + 5 \times 10^2 + 2 \times 10^3$$

البته یکی از مهمترین دلایل نمایش اعداد در دستگاه دهدهی یا به اصطلاح در مبنای 10 (در پایه ی 10) این بوده که تعداد انگشتان دست هر انسان 10 تا بوده است، نمایش اعداد صحیح در مبناهای غیر از ده نیز، هم در گذشته و هم در حال وجود داشته به عنوان مثال می توان از دستگاه شصت شصتی که در ریاضیات دوره ی اسلامی وجود داشته، نام برد که مسلمانها فکر آن را از بابلیها گرفتند و آن را کامل کردند، همچنین می توان از دستگاه دودویی (نمایش اعداد در مبنای 2) نام برد که مبنای محاسبات کامپیوتری می باشد، به عنوان مثال حاصل عدد $1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$ که برابر 22 می باشد، به این معناست که نمایش عدد 22 در مبنای 2 عبارتست از : 10110 لازم به ذکر است که هر عدد طبیعی بزرگتر از 1 می تواند مبنای عدد نویسی قرار بگیرد، در حالت کلی می توان قضیه ی زیر را بیان کرد.

قضیه : اگر $b > 1$ عددی طبیعی باشد، آنگاه هر عدد طبیعی A را می توان به صورت منحصر به فردی به شکل زیر نوشت :

$$A = a_0 + a_1 b + a_2 b^2 + \dots + a_{n-1} b^{n-1} + a_n b^n$$

که در آن n عددی صحیح و نامنفی (عدد صحیح حسابی) $W = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ بوده و برای هر $i = 0, 1, 2, \dots, n$ داریم:

$$a_i \neq 0, 0 \leq a_i \leq b-1$$

نماد $(a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0)_b$ ، استفاده می کنیم.

این قضیه بیانگر آن است که اگر عددی مانند A در مبنای b به صورت $(a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0)_b$ باشد، می توان A را به صورت توانهایی از مبنا یعنی b نوشت.

معمولاً، اگر مبنای عددی 10 باشد، از نوشتن مبنا در گوشه ی سمت راست و پائین عدد خودداری می کنیم.

✓ نکته : برای نمایش هر عدد در مبنای m ($m \in \mathbb{N}$) از ارقام $0, 1, 2, \dots, m-1$ استفاده می کنیم، به عنوان مثال برای نمایش هر عدد در مبنای 2، فقط از ارقام 0 و 1، برای نمایش هر عدد در مبنای 3، فقط از ارقام 0, 1, 2 و به همین ترتیب برای نمایش هر

عدد در مبنای 10 فقط از ارقام 0,1,2,... و 9 استفاده می‌کنیم.

✓ نکته‌ی مهم : در مبناهای بزرگتر از 10، تعداد ارقام مورد استفاده بیش از 10 رقم بوده و از نمادهای متفاوتی برای نمایش ارقام عدد استفاده می‌کنند، اگر مبنا بزرگتر از 10 باشد، ارقام بزرگتر از 9 را به ترتیب با نمادهای A, B, C, D, E, F (به ترتیب نمایش رقم 10، رقم 11، رقم 12، رقم 13، رقم 14 و رقم 15) نمایش می‌دهند.

$$0,1,2,3,\dots,9,A=10,B=11,C=12,D=13,E=14,F=15$$

یعنی :

✓ نکته‌ی مهم : قراردادهای :
 (1) مبنا همیشه عددی طبیعی و بزرگتر یا مساوی 2 است.
 (2) هیچ رقمی نباید بیشتر از مبنا و یا مساوی آن باشد.

مثال : نمایش دهمی عدد $(10A2B)_{13}$ را بیابید؟

$$(10A2B)_{13} = B \times 13^0 + 2 \times 13^1 + A \times 13^2 + 0 \times 13^3 + 1 \times 13^4$$

$$= B + 26 + A(169) + 0 + 1(28561)$$

$$= 11 + 26 + 1690 + 28561 = 30278$$

این بدان معناست که ارزش عدد $10A2B$ در مبنای 13 با ارزش عدد 30278 در مبنای 10 یکی است درست است که ظاهراً دو عدد با هم متمایزند، اما به این نکته هم توجه داشته باشید که هر چه مبنا بزرگتر باشد، ظاهر عدد کوچکتر میشود.

تبدیل دستگاه غیر دهدهی به دهدهی

هرگاه عددی در مبنای غیر از 10 داده شده باشد و بخواهیم آنرا به مبنای دهدهی تبدیل کنیم. کافی است مشابه مثال قبل، عدد را در مبنای داده شده بسط داده، حاصل را جمع کرده تا مقدار عدد در دستگاه دهدهی به دست آید.

تبدیل دستگاه دهدهی به غیر دهدهی

هرگاه عددی در مبنای 10 داده شده باشد و بخواهیم آنرا به مبنایی غیر از ده تبدیل کنیم کافی است از روش تقسیمات متوالی استفاده کنیم.

مثال : عدد 281 را به مبنای 3 ببرید؟

$$\begin{array}{r} 281 \quad | \quad 3 \\ \hline 27 \quad 93 \quad | \quad 3 \\ \hline 11 \quad 93 \quad 31 \quad | \quad 3 \\ \hline 9 \quad 0 \quad 30 \quad 10 \quad | \quad 3 \\ \hline 2 \leftarrow \quad \leftarrow 1 \quad 9 \quad 3 \quad | \quad 3 \\ \hline \quad \leftarrow 1 \quad 3 \quad 1 \quad \rightarrow 281 = (101102)_3 \\ \hline \quad \leftarrow 0 \quad \leftarrow \end{array}$$

دقت کنید که باید حتماً ارقام را از آخر به اول بنویسیم .

$$\rightarrow (101102)_3 = 2(3)^0 + 0(3)^1 + 1(3)^2 + 1(3)^3 + 0(3)^4 + 1(3)^5$$

$$= 2 + 0 + 9 + 27 + 0 + 243 = 281$$

✓ نکته‌ی مهم : برای تبدیل عددی در مبنایی غیر از 10 به مبنای دیگری غیر از 10 ابتدا عدد را به مبنای 10 برده و سپس از مبنای 10 به مبنای خواسته شده می‌بریم.

مثال : عدد $(1011101)_2$ را به مبنای 4 ببرید؟

$$\begin{aligned} 1011101 &= 1(2)^0 + 0(2)^1 + 1(2)^2 + 1(2)^3 + 1(2)^4 + 0(2)^5 + 1(2)^6 \\ &= 1 + 0 + 4 + 8 + 16 + 0 + 64 \\ &= 93 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 93 \quad | \quad 4 \\ \hline 23 \quad | \quad 4 \\ \hline 5 \quad | \quad 4 \\ \hline 1 \end{array} \quad \Rightarrow (1011101)_2 = (1131)_4$$

$$\begin{array}{r} \leftarrow 3 \quad 4 \quad 1 \\ \leftarrow 1 \end{array}$$

تبدیل مستقیم عدد در مبنای 2 به عدد در مبنای 4 :

برای این منظور ارقام عدد را از سمت راست، دو رقم دو رقم جدا کرده، سپس هر دو رقم را در مبنای 2 حساب کرده، عدد به دست آمده را به عنوان یک رقم در مبنای 4 می‌نویسیم، به مثال زیر توجه کنید.

مثال :

$$\begin{aligned} (1011101)_2 &= (?)_4 \\ 1, 01, 11, 01 &= ((\bar{1})_2 (\bar{01})_2 (\bar{11})_2 (\bar{01})_2)_4 \\ &= 1 \quad 1 \quad 3 \quad 1 = (1131)_4 \end{aligned}$$

تبدیل مستقیم عدد در مبنای 2 به عدد در مبنای 8 :

برای این منظور ارقام عدد را از سمت راست، سه رقم سه رقم جدا کرده، سپس هر سه رقم را در مبنای 2 حساب کرده، عدد به دست آمده را به عنوان یک رقم در مبنای 8 می‌نویسیم، به مثال زیر توجه کنید.

$$\begin{aligned} (1011101)_2 &= (?)_8 \\ 1, 011, 101 &= ((\bar{1})_2 (\bar{011})_2 (\bar{101})_2)_8 \\ &= 1 \quad 3 \quad 5 = (135)_8 \end{aligned}$$

✓ نکته‌ی مهم : برای تبدیل مستقیم اعداد از مبنای 2 به مبنای 2^n ، از سمت راست n رقم n رقم جدا نموده و هر n رقم را در مبنای 2 حساب کرده، عدد به دست آمده را به عنوان یک رقم در مبنای 2^n می‌نویسیم.

نکته‌ی مهم : تبدیل مستقیم اعداد از مبنای n به مبنای n^2 یا n^3 و ... مشابه تبدیل اعداد از مبنای 2 به مبنای 4 یا 8 و ... است، به عنوان مثال تبدیل مستقیم عدد از مبنای 3 به مبنای 9 یا تبدیل مستقیم عدد از مبنای 5 به مبنای 25.

تبدیل از مبنای 16 به مبنای 8

مثال:

$$(\overline{A31E})_{16} = (?)_8$$

$$(\overline{A31E})_{16} = (10, 3, 1, 14)_{16}$$

$$(\overline{1010})_2 (\overline{0011})_2 (\overline{0001})_2 (\overline{1110})_2 = (1,010,001,100,011,110)_2 = ()$$

$$\begin{array}{r} 10 \quad | \quad 2 \\ \hline 10 \quad 5 \quad | \quad 2 \\ \hline \boxed{0} \quad 4 \quad 2 \quad | \quad 2 \\ \hline \leftarrow \boxed{1} \quad 2 \quad \boxed{1} \\ \hline \leftarrow \boxed{0} \leftarrow \end{array}$$

$$\Rightarrow 10 = (\overline{1010})_2$$

$$\begin{array}{r} 14 \quad | \quad 2 \\ \hline 14 \quad 7 \quad | \quad 2 \\ \hline \boxed{0} \quad 6 \quad 3 \quad | \quad 2 \\ \hline \leftarrow \boxed{1} \quad 2 \quad \boxed{1} \\ \hline \leftarrow \boxed{1} \leftarrow \end{array}$$

$$\Rightarrow 14 = (\overline{1110})_2$$

$$\stackrel{(1)}{=} (\overline{1})_2 (\overline{010})_2 (\overline{001})_2 (\overline{100})_2 (\overline{011})_2 (\overline{110})_2$$

$$= 1 \quad 2 \quad 1 \quad 4 \quad 3 \quad 6 = (121436)_8$$

تست : عدد 132 در مبنای a به صورت 246 نمایش داده می شود، a کدام است؟

$$6 \text{ (۴)} \quad 7 \text{ (۳)} \quad 9 \text{ (۲)} \quad 8 \text{ (۱)}$$

$$132 = (246)_a \rightarrow 132 = 6 + 4a + 2a^2 \Rightarrow a^2 + 2a - 63 = 0$$

$$(a+9)(a-7) = 0 \Rightarrow \begin{matrix} a=-9 & \text{غ ق ق} \\ a=7 & \text{ق ق} \end{matrix} \rightarrow \text{مبنا نمی تواند منفی باشد}$$

لذا گزینه ی 3 درست است.

تست : عدد 0/56 در مبنای 4، کدام است؟

$$\frac{32}{121} \text{ (۴)}$$

$$\frac{31}{122} \text{ (۳)}$$

$$\frac{32}{123} \text{ (۲)}$$

$$\frac{31}{119} \text{ (۱)}$$

گزینه ۳ درست است .

$$0/56 = \frac{56}{100} = \frac{14}{25} = \frac{(32)_4}{(121)_4} = \left(\frac{32}{121}\right)_4 \Rightarrow$$

$$25 \quad | \quad 4$$

$$24 \quad 6 \quad | \quad 4$$

$$\boxed{1} \quad 4 \quad \boxed{1}$$

$$\leftarrow \boxed{2} \leftarrow$$

$$\rightarrow 25 = (121)_4$$

$$14 \quad | \quad 4$$

$$12 \quad \boxed{3}$$

$$\rightarrow 14 = (32)_4$$

$$\boxed{2} \leftarrow$$

مثال : عدد $(3/12)_4$ را به مبنای 10 ببرید؟

یادآوری: $(3/12)_4 = 3 + 1 \times 4^{-1} + 2 \times 4^{-2} + 2 \times 4^{-3} + \dots \Leftrightarrow 1/23 = 1 + \frac{2}{10} + \frac{3}{100} = 1 + 2(10^{-1}) + 3(10^{-2})$

$$= 3 + \frac{1}{4} + 2\left(\frac{1}{16}\right) + 2\left(\frac{1}{64}\right) + \dots$$

$$= \frac{13}{4} + 2\left(\frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \dots\right)$$

با استفاده از فرمول حد مجموع تصاعد هندسی $= \frac{13}{4} + 2\left(\frac{a}{1-q}\right)$

$$= \frac{13}{4} + 2\left(\frac{\frac{1}{16}}{1 - \frac{1}{4}}\right) = \frac{13}{4} + \frac{1}{12} = \frac{40}{12} = \frac{10}{3}$$

تست : رقم x در تساوی $(3/12)_4 = (3/x)_8$ کدام است؟

- 3(۱) 5(۲) 1(۳) 7(۴)

پاسخ: هر دو عدد را به مبنای 10 می بریم:

$$(3/12)_4 = (3/x)_8$$

$$3 + 1(4)^{-1} + 2(4)^{-2} = 3 + x(8^{-1}) \Rightarrow 3 + \frac{1}{4} + \frac{2}{16} = 3 + \frac{x}{8}$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{x}{8} \Rightarrow \frac{3}{8} = \frac{x}{8} \Rightarrow x = 3$$

تست : هرگاه $(110)_x = (36)_{2x}$ ، x کدام است؟

- 5(۱) 9(۲) 7(۳) 6(۴)

$$(110)_x = (36)_{2x} \Rightarrow 0 + x + x^2 = 6 + 3(2x)$$

$$x^2 - 5x - 6 = 0 \Rightarrow a + c = b \begin{matrix} \text{غ ق} & \text{ق ق} \\ x = -1 & \\ x = \frac{-c}{a} = 6 & \end{matrix}$$

پاسخ :

تست : حاصل جمع $(34)_5 + (23)_5 + (14)_5$ برابر است با :

- (121)₅ (۱) (131)₅ (۲) (221)₅ (۳) (111)₅ (۴)

$$\begin{array}{r} 12 \\ 34 \\ 23 \\ + 14 \\ \hline 131 \end{array}$$

روش مستقیم ←

$$\rightarrow \text{روش غیرمستقیم} \quad (34)_5 + (23)_5 + (14)_5 = 19 + 13 + 9 = 41$$

$$\begin{array}{r} 41 \quad | \quad 5 \\ 40 \quad 8 \quad | \quad 5 \\ \hline \boxed{1} \quad 5 \quad \boxed{1} \end{array} \rightarrow (131)_5$$

← $\boxed{3}$ ←

تست : هرگاه a عددی طبیعی و بزرگتر از 1 باشد، نمایش عدد $a^3 - a^2 + 1$ در مبنای a برابر است با :

- $((a-1)01)_a$ (۴) $((a-1)001)_a$ (۳) $(100(a-1))_a$ (۲) $(10(a-1))_a$ (۱)

پاسخ : عدد $a^3 - a^2 + 1$ در مبنای 10 است و برای تبدیل آن به مبنای a ، از تقسیمات متوالی استفاده می‌کنیم.

$$\begin{array}{r} a^3 - a^2 + 1 \mid a \\ \underline{1} \\ a^2 - a \\ \underline{1} \\ a \\ \underline{a-1} \\ 0 \end{array} \rightarrow ((a-1)01)_a$$

تست : هرگاه حاصلضرب دو عدد طبیعی دو رقمی $\overline{cb}$ و $\overline{ab}$ با عدد طبیعی سه رقمی $\overline{ddd}$ برابر باشد، حاصل $a+b+c+d$ کدام است؟

18 (۱) 15 (۲) 21 (۳) 24 (۴)

پاسخ :

$$\overline{ab} \times \overline{cb} = \overline{ddd} \Rightarrow \overline{ab} \times \overline{cb} = d + 10d + 100d = 111d = d(3 \times 37)$$

$$\Rightarrow \overline{ab} \times \overline{cb} = 37 \times 3 \times d \Rightarrow \begin{cases} \overline{ab} = 37 \Rightarrow a = 3, b = 7 \\ \overline{cb} = 3 \times d \Rightarrow \overline{c7} = 3 \times d \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3 \times 9 = 27 \\ \Rightarrow \end{cases} \begin{cases} c = 2 \\ d = 9 \end{cases} \Rightarrow a + b + c + d = 3 + 7 + 2 + 9 = 21$$

تست : چند عدد 2 رقمی مانند $\overline{ab}$ داریم که $\overline{ab} + \overline{ba}$ مربع کامل باشد؟

7 (۱) 6 (۲) 8 (۳) 9 (۴)

پاسخ :

$$\overline{ab} + \overline{ba} = b + 10a + a + 10b = 11a + 11b = 11(a+b)$$

برای اینکه عبارت $11(a+b)$ مربع کامل باشد باید داشته باشیم $a+b=11$ ، لذا a و b می‌توانند 8 جفت رقم باشند که عبارتند از : (5,6)، (6,5)، (4,7)، (7,4)، (3,8)، (8,3)، (2,9)، (9,2).

✓ نکته : هر مربع کاملی در مبناهای دیگر نیز مربع کامل است.

مثال : عدد 121 در مبنای 10 مربع کامل است و جذرش 11 است.

این عدد در مبنای 5 برابر است با :

$$\begin{array}{r} 121 \mid 5 \\ \underline{10} \\ 21 \mid 5 \\ \underline{20} \\ 1 \end{array} \Rightarrow 121 = (441)_5$$

اما عدد 441 در مبنای 5 مربع کامل است و جذرش برابر 21 است دقت کنید که جذر عدد 121 در مبنای 10 (که برابر 11 است) با جذر عدد متناظرش یعنی 441 در مبنای 5 (که برابر 21 است) برابر است.

اعداد اول

هر عدد طبیعی بزرگتر از یک را که جز بر 1 و خودش، بر هیچ عدد دیگری بخشپذیر نباشد، عدد اول می‌گوئیم، به عبارت دیگر هر عدد طبیعی که تنها دو مقسوم علیه مثبت متمایز داشته باشد را عدد اول می‌گوئیم، برای نمایش یک عدد اول، از حرف p (عدد اول (prime number) استفاده می‌کنیم.

عدد مرکب (تجزیه پذیر)

هر عدد طبیعی بزرگتر از 1 را که اول نباشد، عدد مرکب می‌گوئیم، به عبارت دیگر هر عدد طبیعی که بیش از دو مقسوم علیه مثبت متمایز داشته باشد را عدد مرکب می‌گوئیم.

✓ تذکر مهم : عدد 1 نه اول است و نه تجزیه پذیر.

✓ تذکر مهم : تنها عدد اول زوج 2 است، به عبارت دیگر، کلیه اعداد زوج بزرگتر از 2، غیر اولند و لذا کلیه اعداد اول بزرگتر از 2، فردند.



تست : حاصلضرب دو عدد اول 482 است، مجموع آنها چقدر است؟

243(۱) 327 (۲) 247 (۳) 323 (۴)

پاسخ : چون حاصلضرب دو عدد اول، عدد زوج 482 شده است، پس یکی از دو عدد اول، حتماً زوج و دیگری حتماً فرد بوده است (توجه داشته باشید که زوج = فرد $\times$ زوج)، بنابراین با توجه به نکته‌ی قبل یکی از دو عدد اول حتماً 2 بوده است و لذا دیگری برابر است با: $241 = 482 \div 2$ و بنابراین مجموعشان برابر است با: $2 + 241 = 243$

تست : مجموع دو عدد اول 103 است، حاصلضرب آنها کدام است؟

441(۱) 196 (۲) 321 (۳) 202 (۴)

پاسخ : چون مجموع دو عدد اول، عدد فرد 103 شده است، پس یکی از دو عدد اول، حتماً فرد و دیگری حتماً زوج بوده است (توجه داشته باشید که : فرد = زوج + فرد)، بنابراین با توجه به نکته‌ی فوق یکی از دو عدد اول، حتماً 2 بوده است و لذا دیگری برابر است با: $101 = 103 - 2$

و بنابراین حاصلضربشان برابر است با: $2 \times 101 = 202$

✓ نکته‌ی مهم : هر عدد اول 2 مقسوم علیه طبیعی (مثبت) و 4 مقسوم علیه صحیح دارد.

تست : هرگاه x و y دو عدد طبیعی و $x^2 - y^2 = 17$ باشد، آنگاه xy کدام است؟

27(۱) 17 (۲) 72 (۳) 84 (۴)

پاسخ :

$$x^2 - y^2 = 17 \Rightarrow (x - y)(x + y) = 1 \times 17 \Rightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 17 \end{cases} \xrightarrow{x, y \in \mathbb{N}} \begin{cases} x = 9 \\ y = 8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow xy = 72$$

✓ نکته‌ی مهم : تنها اعداد اول متوالی 2 و 3 می‌باشند.

✓ نکته : هر عدد بین $n! + 1$ و $n! + n$ ، مرکب است.

✓ نکته : هر عدد به صورت $n! + r$ ، وقتی $2 \leq r \leq n$ ، مرکب است زیرا $r | n! + r$

مثال : کلیه اعداد $2 + 100!, 3 + 100!, \dots, 100 + 100!$ مرکبند، زیرا به ترتیب بر 2, 3, ..., 100 بخش پذیرند.

تمرین : ثابت کنید هر عدد اول بزرگتر از 3 را می‌توان به صورت $6k \pm 1$ نوشت.

(عکس این مطلب، درست نیست)

اثبات : طبق قضیه‌ی تقسیم داریم :

اول نیست $\Rightarrow$ مضرب 6 $\Rightarrow a = 6k$

$a = 6k + 1$

اول نیست $\Rightarrow$ مضرب 2 $\Rightarrow a = 6k + 2$

اول نیست $\Rightarrow$ مضرب 3 $\Rightarrow a = 6k + 3$

اول نیست $\Rightarrow$ مضرب 2 $\Rightarrow a = 6k + 4$

$a = 6k - 1$ یا $a = 6k + 5$

بنابراین اگر a یک عدد اول بزرگتر از 3 باشد باید یا به صورت $6k+1$ باشد یا $6k-1$ باشد.
 ✓ نتیجه : باقیمانده‌ی تقسیم هر عدد اول بزرگتر از 3، بر 6 یا 1 است یا 5، لذا اگر $a > 3$ بخواه‌د اول باشد باید یا به صورت $6k+1$ باشد، یا $6k-1$ و در نتیجه هر عدد بزرگتر از 3 که به صورت $6k+1$ یا $6k-1$ نباشد، اول نیست.
 مثال : اعداد 7، 17، 53، ... اعدادی اول و بزرگتر از 3 هستند بنابراین داریم:

$$7 = 6(1) + 1, \quad 17 = 6(3) - 1, \quad 53 = 6(9) - 1$$

✓ نکته : کلیه‌ی اعداد اول بزرگتر از 2 را می‌توان به صورت $4k+1$ یا $4k+3$ نوشت، زیرا کلیه‌ی اعداد اول بزرگتر از 2 فردند و همانطور که قبلاً دیدیم، هر عدد فرد را می‌توان به صورت $4k+1$ یا $4k+3$ نوشت.
 قضیه : هر عدد صحیح به جز 1 یا -1، حداقل یک مقسوم علیه اول دارد.

قضیه‌ی اقلیدس :

مجموعه‌ی اعداد اول نامتناهی است، به عبارت دیگر، بینهایت عدد اول وجود دارد.
 اثبات : (برهان خلف) فرض می‌کنیم مجموعه‌ی اعداد اول متناهی بوده و کل اعداد اول عبارت باشند از $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ ، اکنون حاصلضرب این اعداد اول بعلاوه‌ی 1 را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم : $m = p_1 p_2 \dots p_n + 1$ ، این عدد یک عدد طبیعی و بزرگتر از همه‌ی اعداد اول $p_1, p_2, \dots, p_n$ است، بنابراین طبق فرض خلف، این عدد یک عدد مرکب است، لذا طبق قضیه‌ی قبل، حداقل یک مقسوم علیه اول دارد که آنرا p_j می‌نامیم (دقت کنید که چون فرض کرده بودیم کل اعداد اول عبارتند از $p_1, p_2, \dots, p_n$ ، لذا p_j باید یکی از همین اعداد باشد) اکنون داریم :

$$p_j | p_j \Rightarrow \begin{cases} p_j | p_1 p_2 \dots p_j \dots p_n \\ p_j | m \end{cases}$$

$$p_j | m - p_1 p_2 \dots p_j \dots p_n \Rightarrow p_j | 1$$

دقت کنید که p_j یک عدد اول است و نمی‌تواند 1 را عاد کند، لذا این تناقض است، پس فرض خلف باطل و حکم ثابت است، این قضیه را اقلیدس در حدود 300 سال قبل از میلاد اثبات کرده است.

نکته‌ای تاریخی :

اخیراً (1959 میلادی - 1338 شمسی) ثابت شده است که تعداد اعداد اول کوچکتر از 10^{10} ، مساوی 455,052,512 است. نتایجی از این قبیل می‌تواند در تداعی قضیه‌ی اقلیدس کمک بیشتری بکند.
 قضیه : فرض کنید عدد طبیعی A ، حاصلضرب تمام اعداد اول کوچکتر یا مساوی p ، بعلاوه‌ی 1 باشد، ثابت کنید A یا اول است یا مقسوم علیه اولی بزرگتر از p دارد.
 اثبات : اگر A اول باشد که هیچ، یعنی حکم ثابت است لذا فرض می‌کنیم که A ، مرکب باشد، لذا مقسوم علیه اولی غیر از 2, 3, 5, ... p دارد، چرا که اگر مقسوم علیه اول آن یکی از 2, 3, 5, ... p باشد، آنگاه طبق آنچه در اثبات قضیه قبل دیدیم نتیجه می‌شود که $A | 1$ که تناقض است. بنابراین A مقسوم علیه اول جدیدی دارد که از p بزرگتر است.
 ✓ نکته‌ی مهم : به کمک قضیه‌ی قبل و با ضرب اعداد اول کوچکتر یا مساوی هر عددی که البته به این حاصلضرب یک واحد اضافه کرده ایم، می‌توان اعداد اول جدیدی پیدا کرد.

مثال : اول است $(2 \times 3 \times 5 \times 7) + 1 = 211$ اول است $(2 \times 3 \times 5) + 1 = 31$ اول است $(2 \times 3) + 1 = 7$

دقت داشته باشید که حاصل ضربهای فوق بعلاوه‌ی 1. حتماً اول نیستند، ممکن است اول باشند و ممکن هم هست مرکب باشند که در صورت مرکب بودن، مقسوم علیه اول جدیدی دارند.
 تست : اگر به حاصلضرب تمام اعداد اول کوچکتر یا مساوی 100، یک واحد اضافه شود، تعداد مقسوم علیه‌های غیر از یک و کمتر از 100 آن کدام است؟

0(۱) 1 (۲) 2 (۳) 3 (۴)

پاسخ : طبق قضیه‌ی قبل گفتیم که عدد $N = (2 \times 3 \times 5 \times \dots \times 97) + 1$ یا اول است یا مقسوم علیه اولی بزرگتر از 97 دارد لذا گزینه‌ی 1 صحیح است.

قضیه‌ی مهم : اگر n عددی مرکب باشد، آنگاه حداقل یک مقسوم علیه اول کوچکتر یا مساوی $\sqrt{n}$ (جزرش) دارد، به عبارت دیگر، اگر عددی بخواهد اول نباشد، باید حداقل یک مقسوم علیه اول کوچکتر یا مساوی جزش داشته باشد.

✓ نکته‌ی مهم : (عکس نقیض قضیه‌ی قبل) : هرگاه n عددی طبیعی و بزرگتر از 1 باشد و هیچ مقسوم علیه اول کوچکتر یا مساوی $\sqrt{n}$ (جزرش) نداشته باشد، آنگاه n حتماً اول است.

مثال : آیا 401 عددی اول است؟

$$\sqrt{401} \approx 20$$

$$20 \rightarrow 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 \text{ اعداد اول کوچکتر یا مساوی}$$

چون عدد 401 بر هیچکدام از اعداد اول فوق بخشپذیر نیست لذا اول است.

$$\sqrt{343} \approx 18$$

مثال : آیا عدد 343 اول است؟

چون عدد 343 بر 7 بخش پذیر است لذا اول نیست و مرکب است. $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17$ اعداد اول کوچکتر یا مساوی 18

غربال اراتستن:

با استفاده از قضیه‌ی قبل، می‌توان اعداد اول از 2 تا هر عددی مانند n را یافت، در واقع کافی است مضارب اعداد اول کوچکتر یا مساوی $\sqrt{n}$ را از بین اعداد از 2 تا n حذف کرد، اعداد باقیمانده، همگی اول خواهند بود، این روش غربال کردن اعداد مرکب، از یک جدول اعداد، به غربال اراتستن معروف است.

مثال : اعداد اول از 2 تا 100 را بیابید؟

پاسخ : چون $\sqrt{100} = 10$ لذا اگر از بین اعداد از 2 تا 100، مضارب 2, 3, 5, 7 را حذف کنیم، اعداد باقیمانده همگی اول خواهند بود.

تست : مجموعه‌ی اعداد اول به کدام صورت متناهی است؟

0(۱) $4k+1$ (۲) $4k+2$ (۳) $4k+3$ (۴) $6k-1$

پاسخ : گزینه‌ی 2 صحیح است زیرا $4k+2$ زوج است و تنها عدد اول زوج 2 است که البته می‌توان آنرا به صورت $4k+2$ نوشت : $2=4(0)+2$

✓ نکته : هرگاه p عددی اول و بزرگتر از 3 باشد، آنگاه $p = 3k \pm 1$

عدد مرسن :

عدد $M_n = 2^n - 1$ را عدد مرسن می‌گویند.

نکته : اگر M_n اول باشد، آنگاه n نیز اول است (عکس این مطلب درست نیست، چرا که به ازاء $n=11$ یا $n=23$ عدد M_n مرکب است، در واقع $2^{23}-1, 2^{11}-1$ مرکبند)

عدد فرما :

عدد $F_n = 2^n + 1$ را عدد فرما می‌گویند.

نکته : اگر F_n اول باشد، آنگاه n توانی از 2 است (عکس این مطلب نادرست است، چرا که به ازاء $n=2^5$ ، عدد F_n مرکب است، در واقع $2^{2^5} + 1$ یا $2^{32} + 1$ مرکب است)

تست : کدام عدد اول است؟

0(۱) 137^2+2 (۲) 71^2+2 (۳) $2^{53}+1$ (۴) 2^8+1

پاسخ : گزینه‌های 2,1 اول نیستند ، چون 71 عددی اول و بزرگتر از 3 است لذا طبق نکته‌ی قبل از عدد مرسن باید به صورت $3k \pm 1$ باشد (در واقع $71 = 3(24) - 1$) بنابراین داریم :

$$71^2 = 9k^2 \pm 6k + 1 \Rightarrow 71^2 + 2 = \underbrace{9k^2 \pm 6k + 3}_{\text{مضرب 3 مضرب}} = 3q$$

به همین ترتیب $2 + 137^2$ نیز اول نیست. ضمناً $2^{53} + 1$ نیز اول نیست، چرا که در این صورت 53 باید به صورت توانی از 2 باشد که نیست.

اعداد اول دوقلو:

فاصله‌ی اعداد اول از یکدیگر متفاوت است، گاهی تنها 2 واحد از یکدیگر فاصله دارند مانند اعداد $3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 29, 31, \dots$ ، این چنین اعداد اولی که اختلافشان از یکدیگر 2 واحد است، به اعداد اول دوقلو موسومند، تعداد ازواج اعداد اول دوقلوی کوچکتر از $100,000$ بالغ بر 1000 و نیز دوقلوهای کوچکتر از 10^6 بالغ بر 8000 می‌باشد، بزرگترین زوج اعداد اول دوقلو که تاکنون شناخته شده است، عبارتست از: $1 - 76 \times 3^{139}$ و $76 \times 3^{139} - 1351$ (شمسی)

بسیاری از ریاضی دانان معتقدند که مجموعه‌ی ازواج اعداد اول به صورت فوق، یک مجموعه‌ی نامتناهی است، ولی هنوز کسی قادر به اثبات این مدعا نشده است و این مساله همچنان به عنوان یک مساله‌ی باز (open) باقی مانده است. (حدس گلد – باخ)

کریستیان گلد باخ، ریاضی دان روسی، در سال 1742 طی یک نامه به لئونارد اول، ریاضی دان سوئیسی، احتمال داد که « هر عدد مثبت زوج بزرگتر از 2 ، می‌تواند حاصلجمع دو عدد اول باشد » کامپیوترها این احتمال را تا یک میلیون عدد تأیید کرده اند، اما کسی آن را رسماً تأیید نکرده است، از دوران گلد باخ، ایده‌های او به دو ایده، « احتمال قوی » و « احتمال ضعیف » تقسیم شد. احتمال قوی، ادعای اول بود که در بالا ذکر شد و احتمال ضعیف، بیان می‌کند که « هر عدد بزرگتر از 7 می‌تواند به عنوان حاصلجمع سه عدد اول قرار بگیرد »

بزرگترین مقسوم علیه مشترک (ب.م.م)

مقسوم علیه مشترک یا شمارنده‌ی مشترک دو عدد :

عدد d را یک مقسوم علیه مشترک دو عدد a و b گوئیم هرگاه $d|b, d|a$
مثال : چون $5|20, 5|-45$ ، لذا 5 یک مقسوم علیه مشترک دو عدد 20 و -45 است.

مقسوم علیه مشترک سه عدد :

عدد d را یک مقسوم علیه مشترک سه عدد a و b و c گوئیم هرگاه $d|e, d|b, d|a$
مثال : چون $3|6, 3|9, 3|21$ ، لذا 3 یک مقسوم علیه مشترک سه عدد 6 و 9 و 21 است.

ب.م.م:

عدد طبیعی d را بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد a و b گوئیم هرگاه

(۱) d یک مقسوم علیه مشترک a و b باشد یعنی $d|b, d|a$

(۲) از هر مقسوم علیه مشترک دیگر a و b بزرگتر باشد، یعنی :

$$m \leq d$$

یا

$$\forall m : m|a, m|b \Rightarrow m|d$$

به عبارت دیگر، عضو انتهای مجموعه‌ی مقسوم علیه‌های مثبت دو عدد را ب.م.م آن دو عدد می‌گویند.

بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد b, a را با نمادهای (a, b) یا $a \Pi b$ نمایش می‌دهند و معمولاً آنرا با حرف d نمایش می‌دهند.

مثال : بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد 12 و 44 را بیابید؟

روش اول :

$$\{1, 2, 3, 4, 6, 12\} = \text{مقسوم علیه های مثبت } 12$$

$$\{1, 2, 4, 11, 22, 44\} = \text{مقسوم علیه های مثبت } 44$$

$$\{1, 2, 4\} = \text{مقسوم علیه های مشترک } 12 \text{ و } 44$$

$$4 = \text{بزرگترین مقسوم علیه مشترک } 12 \text{ و } 44$$

$$\begin{cases} 12 = 2^2 \times 3 \\ 44 = 2^2 \times 11 \end{cases} \Rightarrow 2^2 = 4 = \text{عاملهای مشترک با نمای کمتر = ب.م.م}$$

روش دوم :

روش سوم : (الگوریتم اقلیدس یا تقسیمات متوالی) :

$$\begin{array}{r} 44 \overline{)12} \\ \underline{36} \\ 8 \end{array} \quad \begin{array}{r} 12 \overline{)8} \\ \underline{8} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 8 \overline{)4} \\ \underline{8} \\ 0 \end{array} \Rightarrow d=4 \text{ آخرین باقیمانده مخالف صفر}$$

خارج قسمت	3	1	2
44	12	8	4
باقی مانده	8	4	0

توجه کنید که عدد 4 بزرگترین عددی است که هر دو عدد 12 و 44 بر آن بخشپذیرند.

✓ نکته ی مهم : هرگاه $a|b$ ، آنگاه $(a, b) = |a|$

مثال :

$$-6|12 \Rightarrow (-6, 12) = |-6| = 6$$

✓ نکته ی مهم : چون هر عدد اول مانند p ، تنها دو مقسوم علیه مثبت دارد، (یکی 1 و دیگری p)، بنابراین ب.م.م هر عدد اولمانند p با هر عدد صحیح مانند a ، یا 1 است یا p یعنی :

$$\text{مثال : } (3, 8) = 1, (3, 9) = 3, (3, 14) = 1, (3, 33) = 3, \dots$$

نکته : هرگاه p و q دو عدد اول متمایز باشند، آنگاه $(p, q) = 1$

$$\text{مثال : } (7, 11) = 1, \dots, (13, 19) = 1$$

✓ نکته : هرگاه $a \neq 0$ آنگاه $(a, 0) = |a|$

$$\text{مثال : } (-10, 0) = |-10| = 10, (6, 0) = 6$$

✓ قضیه مهم : بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد صحیح a و b که هر دو با هم صفر نیستند، کوچکترین عضومجموعه ی همه ی ترکیبات خطی مثبت a و b یعنی عضو ابتدای مجموعه ی $\{ma + nb > 0 : m, n \in \mathbb{Z}\}$ است، به عبارت

دیگر، ب.م.م دو عدد، کوچکترین ترکیب خطی مثبت آن دو عدد است (ضمناً این ترکیب خطی منحصر به فرد نیست)

تست : عضو ابتدای مجموعه ی $S = \{28x + 42y > 0 : x, y \in \mathbb{Z}\}$ کدام است؟

$$\begin{matrix} 8 & 2 & 7 & 14 \\ & (3) & (2) & (4) \end{matrix}$$

پاسخ : طبق قضیه فوق داریم : $d = \text{Min}(S) = (28, 42) = 14$ **نتیجه ی مهم (قضیه ی بزو) :**هرگاه $(a, b) = d$ ، آنگاه اعداد صحیح نامنحصر به فرد m و s وجود دارند به طوریکه :

$$ma + sb = d$$

مثال :

$$(6, 8) = 2 \Rightarrow \begin{cases} 1(8) + (-1)(6) = 2 \\ (-2)(8) + 3(6) = 2 \end{cases}$$

✓ نکته : هیچگاه نمی توان m و s را به گونه ای یافت که حاصل $ma + sb$ ، بقیه ی مقسوم علیه های مشترک دو عدد a و b را

بسازد.

✓ تذکر مهم : در اعداد بزرگ برای یافتن m و s در قضیه ی بزو، از قضیه ی الگوریتم اقلیدس (اقلیدسی) استفاده می کنیم.

قضیه : هرگاه $a=bq+r$ ، آنگاه $(a,b)=(b,r)$ ، یا (باقیمانده و مقسوم علیه) = (مقسوم علیه و مقسوم)

اثبات : فرض می‌کنیم $(a,b)=d$ ، $(b,r)=d'$ ثابت می‌کنیم : $d=d'$

$$\left\{ \begin{array}{l} (a,b)=d \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} d|a \\ d|b \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} d|a \\ d|bq \end{array} \right. \Rightarrow d|\underbrace{a-bq}_r \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} d|r \\ d|b \end{array} \right. \xrightarrow{(b,r)=d'} d \leq d' \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (b,r)=d' \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} d'|b \\ d'|r \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} d'|bq \\ d'|r \end{array} \right. \Rightarrow d'|\underbrace{bq+r}_a \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} d'|a \\ d'|b \end{array} \right. \xrightarrow{(a,b)=d} d' \leq d \end{array} \right. \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow d = d'$$

تست : اگر در تقسیم عدد a بر 24 ، باقیمانده‌ی تقسیم 18 باشد، ب.م.م مقسوم و مقسوم علیه کدام است؟

$$\begin{array}{llll} 6 \text{ (۱)} & 1 \text{ (۲)} & (a,18) \text{ (۳)} & 72 \text{ (۴)} \\ \text{پاسخ : طبق نکته‌ی قبل داریم :} & & & (a,24)=(24,18)=6 \end{array}$$

قضیه‌ی الگوریتم اقلیدس :

فرض کنید a و b دو عدد طبیعی باشند، در این صورت :

الف) دسته‌هایی از اعداد صحیح نامنفی مانند $r_1, r_2, \dots, r_n, q_0, q_1, \dots, q_n$ وجود دارند به طوریکه :

$$\left\{ \begin{array}{ll} a = bq_0 + r_1 & , \quad 0 \leq r_1 < b \\ b = r_1q_1 + r_2 & , \quad 0 \leq r_2 < r_1 \\ \vdots & \\ r_{n-2} = r_{n-1}q_{n-1} + r_n & , \quad 0 \leq r_n < r_{n-1} \\ r_{n-1} = r_nq_n & , \quad r_{n+1} = 0 \end{array} \right.$$

ب) r_n (یعنی آخرین باقیمانده‌ی مخالف صفر)، ب.م.م اعداد a و b است.

ج) دو عدد m و s وجود دارند به طوریکه : $(a,b)=r_n=ra+sb$
قضیه‌ی بزو

✓ تذکر مهم : این قضیه، روشی برای یافتن ب.م.م دو عدد به دست می‌دهد، در واقع در هر مرحله که به باقیمانده‌ی صفر

برسیم، ب.م.م دو عدد، باقیمانده‌ی غیر صفر قبلی است، به عبارت دیگر، ب.م.م a, b ، آخرین باقیمانده‌ی غیر صفر است.

مثال : با استفاده از قضیه‌ی الگوریتم اقلیدس، ب.م.م دو عدد 150 و 42 را بیابید و سپس به کمک آن، اعداد صحیح s و m را

چنان بیابید به طوریکه داشته باشیم : $m(150)+s(42)=(150,42)$ (قضیه‌ی بزو)

$$\begin{array}{llll} \begin{array}{r} 150 \overline{)42} \\ \underline{126} \\ 24 \end{array} & \begin{array}{r} 42 \overline{)24} \\ \underline{24} \\ 18 \end{array} & \begin{array}{r} 24 \overline{)18} \\ \underline{18} \\ 6 \end{array} & \begin{array}{r} 18 \overline{)6} \\ \underline{18} \\ 0 \end{array} \\ (1) & (2) & (3) & (4) \end{array}$$

$$(1) \quad 150 = 3(42) + 24 \Rightarrow (150, 42) = (42, 24)$$

$$(2) \quad 42 = 1(24) + 18 \Rightarrow (42, 24) = (24, 18)$$

$$(3) \quad 24 = 1(18) + 6 \Rightarrow (24, 18) = (18, 6)$$

$$(4) \quad 18 = 3 \times 6 \Rightarrow (18, 6) = (6, 0) = 6$$

تقسیمات فوق را می‌توان به صورت خلاصه در جدول زیر نمایش داد .

خارج قسمتها	3	1	1	3
150	42	24	18	6
باقیمانده‌ها	24	18	6	0

اکنون به نحوه‌ی یافتن m و s قضیه‌ی بزو توجه کنید.

$$(3) \Rightarrow 24 = 1(18) + 6 \Rightarrow 6 = 24 - 1(18)$$

$$\begin{aligned} & \underline{(2)} \quad 24 - 1(42 - 1(24)) \\ & = 2(24) + (-1)42 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \underline{(3)} \quad 2(150 - 3(42)) + (-1)(42) \\ & = 2(150) + (-7)(42) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow d = (150, 42) = \underset{\substack{\downarrow \\ m}}{2}(150) + \underset{\substack{\downarrow \\ s}}{(-7)}42$$

✓ تذکر: توجه داشته باشید که اعداد m و s را ممکن است خودتان بتوانید حدس بزنید، بخصوص در مواردی که دو عدد بزرگ نیستند.

دو عدد متباین (دو عدد نسبت به هم اول)

دو عدد صحیح a و b را نسبت به هم اول یا متباین گوئیم هرگاه بزرگترین مقسوم علیه مشترکشان 1 باشد، یعنی: $(a, b) = 1$. مثال: $\dots, (13, 20) = 1, (7, 11) = 1, (8, 15) = 1$.

قضیه‌ی بزو در حالت خاص

هرگاه $(a, b) = 1$ ، آنگاه اعداد صحیح، منحصر به فرد m و s وجود دارند به طوریکه $ma + sb = 1$

✓ تذکر مهم: عکس قضیه‌ی بزو در حالت کلی برقرار نیست، یعنی نمی‌توان از تساوی $ma + sb = d$ نتیجه گرفت که d حتماً

$$2(8) + 5(6) = 46 \not\equiv (8, 6) = 46$$

ب.م.م a و b است، به مثال زیر توجه کنید:

اما عکس قضیه‌ی بزو در حالت خاص $(a, b) = 1$ برقرار است یعنی:

عکس قضیه‌ی بزو در حالت خاص

هرگاه اعداد صحیح m و s چنان وجود داشته باشد که داشته باشیم: $ma + sb = 1$ ، آنگاه $(a, b) = 1$

بنابراین می‌توان قضیه‌ی دو شرطی زیر را بیان کرد:

قضیه: دو عدد صحیح a و b نسبت به هم اولند اگر و تنها اگر اعداد صحیح m و s چنان وجود داشته باشند که: $ma + sb = 1$

مثال: ثابت کنید هر دو عدد صحیح متوالی متباین اند یعنی: $(n, n+1) = 1$

اثبات: روش اول: چون $(-1)(n) + (1)(n+1) = 1$ ، لذا طبق عکس قضیه‌ی بزو در حالت خاص نتیجه می‌شود که

$$(n, n+1) = 1$$

روش دوم: فرض می‌کنیم: $(n, n+1) = d$ ثابت می‌کنیم $d = 1$

$$(n, n+1) = d \Rightarrow \begin{cases} d | n+1 \\ d | n \end{cases} \Rightarrow d | n+1 - n \Rightarrow d | 1 \Rightarrow d = 1 \quad d \in \mathbb{N}$$

مثال : ثابت کنید :

$$(n-2, 4n^2-5n-4)=1 \text{ یا } 2$$

اثبات : فرض می‌کنیم : $(n-2, 4n^2-5n-4)=d$ یا $d=1$ یا $d=2$ ثابت می‌کنیم :

$$(n-2, 4n^2-5n-4)=d \Rightarrow \begin{cases} d|n-2 \rightarrow d|4n(n-2) \\ d|4n^2-5n-4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d|4n^2-8n \\ d|4n^2-5n-4 \end{cases}$$

$$d|(4n^2-5n-4)-(4n^2-8n) \Rightarrow d|3n-4$$

$$\Rightarrow d|n-2 \Rightarrow \begin{cases} d|3(n-2) \\ d|3n-4 \end{cases} \Rightarrow \frac{d|3(n-2)}{d|3n-4} \Rightarrow d|(3n-6)-(3n-4) \Rightarrow d|-2 \Rightarrow d|2 \stackrel{d \in \mathbb{N}}{\Rightarrow} d=1 \text{ یا } 2$$

✓ نکته : هرگاه $ma+sb=t$ ، آنگاه $(a,b)|t$

اثبات :

$$(a,b)=d \Rightarrow \begin{cases} d|a \\ d|b \end{cases} \Rightarrow d|ma+sb \Rightarrow d|t$$

مثال : هرگاه $ma+sb=5$ و $m,s \in \mathbb{Z}$ ، ب.م.م a و b کدام است؟

$$(۱) \quad 1 \quad (۲) \quad 5 \quad (۳) \quad 1 \text{ یا } 5 \quad (۴) \quad \text{هیچکدام}$$

پاسخ : طبق نکته‌ی قبل، گزینه‌ی ۳ درست است زیرا : 5 یا $d=1 \Rightarrow d|5 \Rightarrow ma+sb=5$ ✓ نکته‌ی مهم : هرگاه $ma+sb=1$ ($m,s \in \mathbb{Z}$) ، آنگاه :

$$\begin{cases} (a,b)=1 \\ (m,s)=1 \\ (m,b)=1 \\ (a,s)=1 \end{cases}$$

تست : اگر بدانیم $ma+sb=1$ ، کدام نادرست است؟

$$(۱) \quad (a,b)=1 \quad (۲) \quad (m,b)=1 \quad (۳) \quad (a,s)=1 \quad (۴) \quad (a,m)=1$$

پاسخ : گزینه‌ی ۴ نادرست است.

✓ نکته : هرگاه $(a,b)=d$ ، آنگاه طبق قضیه‌ی بزو، اعداد صحیح m و s وجود دارند به طوریکه : $ma+sb=d$ ، ثابت کنید : $(m,s)=1$ ، در واقع ضرائب قضیه‌ی بزو باید نسبت به هم اول باشند

$$ma+sb=d \stackrel{\div d}{\Rightarrow} m \frac{a}{\frac{d}{a'}} + s \frac{b}{\frac{d}{b'}} = 1 \Rightarrow ma' + sb' = 1$$

طبق عکس قضیه‌ی بزو در حالت خاص

$$\Rightarrow (m,s)=1$$

تست : هرگاه $(a,b)=11$ ، کدام گزینه، حتماً درست است؟

$$(۱) \quad 10a+5b=11 \quad (۲) \quad 8a+24b=11 \quad (۳) \quad 4a-8b=11 \quad (۴) \quad 17a-25b=11$$

پاسخ : طبق نکته‌ی قبل، گزینه‌ی 4 صحیح است زیرا : $(17, -25) = 1$

تست : حاصل $(12k+5, 12k-1)$ کدام است؟

(۱) فقط 1 (۲) فقط 6 (۳) فقط 1 یا 3 (۴) 1 یا 2 یا 3 یا 6

پاسخ : راه اول :

$$(12k+5, 12k-1) = d \Rightarrow \begin{cases} d|12k+5 \\ d|12k-1 \end{cases}$$

$$d|(12k+5) - (12k-1) \Rightarrow d|6 \Rightarrow 1 \text{ یا } 2 \text{ یا } 3 \text{ یا } 6$$

اما چون $12k-1$ فرد است لذا $d \neq 2, 6$ بنابراین 3 یا $d=1$

$$a|bc \not\Rightarrow a|b \text{ یا } a|c$$

یادآوری :

$$12|6 \times 4 \text{ ولی } 12 \nmid 6, 12 \nmid 4$$

لم اقلیدس: هرگاه $a|bc$ ، $(a, b) = 1$ ، آنگاه $a|c$

یعنی هرگاه عددی حاصلضرب دو عدد را عاد کند و نسبت به یکی اول باشد (متباین باشد)، حتماً دیگری را عاد می‌کند.

اثبات :

$$(a, b) = 1 \xRightarrow{\text{بزو}} \exists m, s \in \mathbb{Z} : ma + sb = 1$$

$$\xRightarrow{\times c} mac + sbc = c$$

$$\begin{cases} a|a \\ a|bc \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a|mac \\ a|sbc \end{cases}$$

$$a|\underbrace{mac + sbc}_c \Rightarrow a|c$$

نتیجه‌ی مهم : هرگاه p یک عدد اول باشد و داشته باشیم $p|ab$ ، آنگاه $p|a$ یا $p|b$

اثبات : اگر $p|a$ ، حکم ثابت است لذا فرض می‌کنیم که $p \nmid a$ در نتیجه $(p, a) = 1$ ، لذا داریم :

تست: هرگاه $p|ab$ و داشته باشیم $59p - 31a = 1$ ، کوچکترین عضو مثبت مجموعه‌ی $A = \{mp + sb : m, s \in \mathbb{Z}\}$ ، کدام است؟

(۱) b (۲) p (۳) 1 (۴) a

پاسخ :

$$59p - 31a = 1 \xRightarrow{\text{طبق عکس بزو}} \begin{cases} (p, a) = 1 \\ p|ab \end{cases} \xRightarrow{\text{لم اقلیدس}} p|b \Rightarrow (p, b) = 1$$

$$\Rightarrow \text{Min}(A) = (p, b) = 1$$

لذا گزینه‌ی 3 صحیح است

یادآوری : از قبل می‌دانیم ب.م.د دو عدد، کوچکترین عضو مجموعه‌ی همه‌ی ترکیبات خطی مثبت آن دو عدد است.

✓ نکته : هرگاه p اول باشد و $p|a^n$ آنگاه $p|a$

✓ نکته : هرگاه p یک عدد اول باشد و حاصلضرب چند عدد را عاد کند، دست کم یکی از آنها را عاد می‌کند

✓ نکته‌ی مهم : هرگاه $(a, b) = d$ ، $k \in \mathbb{N}$ ، آنگاه $(ka, kb) = kd$

مثال :

$$(6, 8) = 2 \Rightarrow (2 \times 6, 2 \times 8) = 2 \times 2 \Rightarrow (12, 16) = 4$$

مثال : حاصل $(48000, 64000) = 1000(48, 64) = 1000 \times 16(3, 4) = 16000 \times 1 = 16000$ را بیابید ؟اثبات : فرض می‌کنیم $(ka, kd) = d_1$ ثابت می‌کنیم : $d_1 = kd$

$$(a, b) = d \Rightarrow \begin{cases} d|a \\ d|b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} kd|ka \\ kd|kb \end{cases} \xrightarrow{(ka, kb)=d_1} kd \leq d_1 \quad (1)$$

بزو

$$(a, b) = d \Rightarrow \exists m, s \in \mathbb{Z} : ma + sb = d \xrightarrow{\times k} m(ka) + s(kb) = kd \xrightarrow{(ka, kb)=d_1} d_1 | kd \Rightarrow d_1 \leq kd \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow d_1 = kd$$

$$(ka, kb) = |k|d$$

✓ تذکر : اگر k عددی صحیح و منفی باشد آنگاه،

$$\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1 \quad \text{هرگاه } (a, b) = d, \text{ ثابت کنید :}$$

مثال :

$$(12, 20) = 4 \xrightarrow{\text{بزو}} \left(\frac{12}{4}, \frac{20}{4}\right) = \frac{4}{4} \Rightarrow (3, 5) = 1$$

اثبات :

$$(a, b) = d \Rightarrow \exists m, s \in \mathbb{Z} : ma + sb = d$$

$$\xrightarrow{+d} m\left(\frac{a}{d}\right) + s\left(\frac{b}{d}\right) = 1 \xrightarrow{\text{طبق عکس بزو در حالت خاص}} \left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$$

$$\left(\frac{a}{d'}, \frac{b}{d'}\right) = \frac{d}{d'} \quad \text{هرگاه } (a, b) = d \text{ و } d' \in \mathbb{N}, d' | d, \text{ ثابت کنید :}$$

$$\text{اثبات : چون } d' | d \text{ لذا عددی طبیعی مانند } q \text{ هست به طوریکه : } d = d'q \text{ لذا } q = \frac{d}{d'}$$

$$(a, b) = d \Rightarrow \left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1 \quad \text{یا} \quad \left(\frac{a}{d'q}, \frac{b}{d'q}\right) = 1$$

اکنون داریم:

$$\xrightarrow{\times q} \left(\frac{a}{d'}, \frac{b}{d'}\right) = q \xrightarrow{q=\frac{d}{d'}} \left(\frac{a}{d'}, \frac{b}{d'}\right) = \frac{d}{d'}$$

✓ تذکر : در نکته‌ی قبل اگر d' منفی باشد نیز حکم برقرار است.✓ نکته‌ی مهم : هرگاه $(a, b) = 1, (a, c) = 1$ ، ثابت کنید : $(a, bc) = 1$

اثبات :

$$\begin{cases} (a, b) = 1 \xrightarrow{\text{بزو}} \exists m, s \in \mathbb{Z} : & ma + sb = 1 \\ (a, c) = 1 \xrightarrow{\text{بزو}} \exists m', s' \in \mathbb{Z} : & m'a + s'c = 1 \end{cases}$$

$$(ma + sb)(m'a + s'c) = 1 \Rightarrow mm'a^2 + ms'ac + sm'ab + ss'bc = 1$$

$$\underbrace{(mm'a + ms'c + ss'b)}_{m''} a + \underbrace{ss'bc}_{s''} = 1$$

$$\Rightarrow m''a + s''bc = 1 \xrightarrow{\text{طبق عکس بزو در حالت خاص}} (a, bc) = 1$$

✓ نکته : عکس قضیه‌ی قبل نیز برقرار است یعنی هرگاه $(a,bc)=1$ آنگاه $(a,b)=1$ و $(a,c)=1$

اثبات :

$$(a, bc) = 1 \Rightarrow \exists m, s \in \mathbb{Z} : ma + sbc = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ma + \underbrace{(sc)}_{m'} b = 1 \Rightarrow ma + m'b = 1 \xrightarrow{\text{عکس بزو در حالت خاص}} (a, b) = 1 \\ ma + \underbrace{(sb)}_{m''} c = 1 \Rightarrow ma + m''c = 1 \xrightarrow{\text{عکس بزو در حالت خاص}} (a, c) = 1 \end{cases}$$

✓ تذکر :

$$\begin{cases} a|c \\ b|c \end{cases} \not\Rightarrow a \times b|c$$

یعنی اگر عددی مانند c به دو عدد مانند a و b بخشپذیر باشد، نمی‌توان گفت که حتماً به حاصلضربشان نیز بخشپذیر است.

مثال :

$$\begin{cases} 9|18 \\ 3|18 \end{cases} \not\Rightarrow 9 \times 3|18$$

✓ نکته‌ی مهم : هرگاه $a|c$ ، $b|c$ ، $(a,b)=1$ ، آنگاه $ab|c$

یعنی اگر عددی مانند c به دو عدد مانند a و b بخشپذیر باشد، بشرطی به حاصلضربشان نیز بخشپذیر است که آن دو عدد نسبت به هم متباین باشند.

اثبات :

$$\begin{cases} a|c \Rightarrow \exists q \in \mathbb{Z} : c = aq & (1) \\ b|c \Rightarrow \exists q' \in \mathbb{Z} : c = bq' & (2) \end{cases}$$

$$(a, b) = 1 \xrightarrow{\text{بزو}} \exists m, s \in \mathbb{Z} : ma + sb = 1 \xrightarrow{\times c} ma + sbc = c$$

$$\begin{matrix} ma + sbc = c \\ \downarrow \quad \quad \downarrow \\ ma + sbc = c \end{matrix} \xrightarrow{(2),(1)} \begin{matrix} ma + sbc = c \\ \downarrow \quad \quad \downarrow \\ ma + sbc = c \end{matrix} \Rightarrow ma + sbc = c$$

حالا ab دارد ، a ندارد ، b ندارد ، a ندارد ، b ندارد

$$ab(mq' + sq) = c \Rightarrow c = abq'' \Rightarrow ab|c$$

مثال : هرگاه عددی بر 4 و 6 بخشپذیر باشد آیا بر 24 نیز بخشپذیر است؟ خیر، به عنوان مثال عدد 12 هم بر 4 و هم بر 6 بخشپذیر است ولی بر 24 بخشپذیر نیست، دلیل این امر آن است که 4 و 6 نسبت به هم اول نیستند.

مثال : آیا درست است که بگوئیم عددی بر 15 بخشپذیر است که هم بر 3 و هم بر 5 بخشپذیر باشد؟ بله

زیرا :

$$\begin{cases} 3|a \\ 5|a \end{cases} \Rightarrow 3 \times 5|a \text{ یا } 15|a$$

$$(3, 5) = 1$$

✓ نکاتی راجع به ب.م.م

$$1) (\pm 1, a) = \pm 1$$

$$2) (2, \text{ عدد فرد }) = 1$$

$$3) a|b \Rightarrow (a, b) = |a| = \text{ قدر مطلق عددک}$$

$$4) (a, b) = (-a, b) = (a, -b) = (-a, -b)$$

علامت در ب.م.م تاثیر ندارد.

$$5) (a, a+1) = 1$$

$$6) (a, b) = d, k \in \mathbb{N} \Rightarrow (ka, kb) = kd$$

$$7) (ka, kb) = kd, k \in \mathbb{N} \Rightarrow (a, b) = d$$

$$8) (a, b) = d, k \in \mathbb{Z} - \{0\} \Rightarrow (ka, kb) = |k|d$$

$$9) (a, b) = d, d' | d \Rightarrow \left(\frac{a}{d'}, \frac{b}{d'}\right) = \frac{d}{d'}$$

$$10) (a, b) = d \Rightarrow \left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$$

$$11) (a, b) = d \Rightarrow (a^n, b^n) = d^n$$

$$12) (a^n, b^n) = d^n \Rightarrow (a, b) = d$$

$$13) (a, b) = 1 \Rightarrow (a^n, b^n) = 1$$

$$14) (a^n, b^n) = 1 \Rightarrow (a, b) = 1$$

$$15) (a, b) = 1 \Rightarrow (a, b^n) = (a^n, b) = 1$$

$$16) (a, b) = 1, (a, c) = 1 \Rightarrow (a, bc) = 1$$

$$17) (a, b_1) = 1, (a, b_2) = 1, \dots, (a, b_n) = 1 \Rightarrow (a, b_1 b_2 \dots b_n) = 1$$

$$18) (a, bc) = 1 \Rightarrow (a, b) = 1, (a, c) = 1$$

$$19) (a, b) = 1 \Rightarrow \begin{cases} (a, a+b) = 1 \\ (b, a+b) = 1 \end{cases} \Rightarrow (ab, a+b) = 1 \Rightarrow \begin{cases} (ab, a+b) = 1 \\ (ab, a-b) = 1 \end{cases} \Rightarrow (ab, a^2 - b^2) = 1$$

$$20) (a, b) = 1, c|a \Rightarrow (c, b) = 1$$

$$21) (a, b) = 1, m|a, n|b \Rightarrow (m, n) = 1$$

$$22) a|c, b|c, (a, b) = 1 \Rightarrow ab|c$$

$$23) a = bq + r \Rightarrow (a, b) = (b, r)$$

$$24) (a, b) = 1, (a, c) = 1, (b, c) = 1 \Rightarrow (abc, ab + ac + bc) = 1$$

$$25) (a, b) = d \Rightarrow (a+b, a-b) = d \text{ یا } 2d$$

$$26) (a, b) = 1 \Rightarrow (a+b, a-b) = 1 \text{ یا } 2$$

$$27) (a, b) = 1 \Rightarrow (a^n + b^m, a^p b^q) = 1$$

$$28) (a, b, c) = (a, (b, c)) = ((a, b), c) \text{ خاصیت شرکت پذیری}$$

$$29) (a, b) = (b, a) \text{ خاصیت جابجایی}$$

$$30) a|bc, (a, b) = 1 \Rightarrow a|c \text{ لم اقلیدس}$$

$$31) b|c \Rightarrow (a, b) = (a+c, b)$$

$$32) (a, b) = 1, c|a+b \Rightarrow (a, c) = (b, c) = 1$$

$$33) (a, 0) = |a|, a \neq 0$$

تعریف نشده $(0,0) = 34$

$$35) (a, ka) = |a|$$

$$36) (a^n, a^m) = a^m, (m \leq n)$$

$$37) (a, b) = d, \begin{vmatrix} m & n \\ m' & n' \end{vmatrix} = \pm 1 \Rightarrow \underbrace{(ma + nb, m'a + n'b)}_{\text{ترکیبات خطی } b, a} = d$$

سطر دوم سطر اول

$$38) (a, b) = (a, b \pm ak) = (a \pm bk', b)$$

این نکته از نکته ی قبل و اینکه $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \pm k & 1 \end{vmatrix} = 1$ به دست می آید.

$$39) m|a, m|b \Rightarrow m|(a, b)$$

$$40) \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, (a, b) = 1, (c, d) = 1 \Rightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$$

$$41) ma + sb = 1 \Rightarrow (m, s) = (m, b) = (a, s) = (a, b) = 1$$

$$42) ma + sb = d \not\Rightarrow (a, b) = d$$

$$43) (a, b) = d \Rightarrow \exists m, s \in \mathbb{Z} : ma + sb = d$$

$$44) (a, b) = 1 \Rightarrow \exists m, s \in \mathbb{Z} : ma + sb = 1$$

$$45) (a, b) = \text{Min} \{ ma + sb > 0 : m, s \in \mathbb{Z} \}$$

$$46) \text{اول } q, p, p \neq q \Rightarrow (p, q) = 1$$

$$47) \text{یا } p \Rightarrow (p, a) = 1$$

$$48) \text{هیچوقت زوج نمی شود} = (\text{عدد فرد و عدد فرد})$$

$$49) \text{به عبارت دیگر ب.م.م دو عدد زوج، حداقل 2 است.} \Rightarrow \text{هیچوقت فرد نمی شود} = (\text{عدد زوج و عدد زوج})$$

$$50) \text{عدد فرد} = (\text{عدد زوج و عدد فرد})$$

تست : اگر بدانیم $(m, n) = 1$ و داشته باشیم : $\frac{m+n}{m-n} = 16$ ، آنگاه m, n کدام است؟

205 (۱)	255 (۲)	225 (۳)	240 (۴)
---------	---------	---------	---------

پاسخ :

$$\frac{m+n}{m-n} = 16 \Rightarrow 16m - 16n = m + n \Rightarrow 15m = 17n$$

$$\Rightarrow \frac{15}{17} = \frac{n}{m} \xrightarrow{\text{طبق نکته 40}} \begin{cases} n = 15 \\ m = 17 \end{cases} \Rightarrow nm = 225$$

قضیه ی اساسی حساب

هر عدد طبیعی بزرگتر از 1 را می توان به صورت منحصر به فردی به حاصلضرب عوامل اول تجزیه کرد (صرف نظر از ترتیب آنها) یعنی عدد طبیعی $n > 1$ را می توان به صورت $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ نوشت که در آن $p_1, p_2, \dots, p_k$ اعداد اول و $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ اعدادی طبیعی اند.

مثال : اعداد 1000,770,36 را تجزیه کنید؟

$$\begin{array}{r|l} 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \Rightarrow 36 = 2^2 \times 3^2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

روش دوم

$$\Downarrow \\ 36 = 4 \times 9 = 2^2 \times 3^2$$

$$770 = 77 \times 10 = 7 \times 11 \times 2 \times 5$$

$$1000 = 10 \times 10 \times 10 = (2 \times 5)^3 = 2^3 \times 5^3$$

به خاطر بسپارید که به ازاء هر 0 می توان یک 2 و یک 5 (یعنی یک 10) گذاشت.

$$28000 = 28 \times 2^3 \times 5^3 = 2^2 \times 7 \times 2^3 \times 5^3 = 2^5 \times 5^3 \times 7$$

مثال : عدد 28000 را تجزیه کنید؟

قضیه مهم : هرگاه a و b به حاصلضرب عوامل اول تجزیه شده باشند، ب.م.م آنها، از فرمول زیر به دست می آید.

عواملهای مشترک با نمای کمتر = (a,b)

مثال : ب.م.م دو عدد 36 و 90 را حساب کنید؟

$$\begin{cases} 36 = 2^2 \times 3^2 \\ 90 = 2 \times 3^2 \times 5 \end{cases} \Rightarrow (36, 90) = 2 \times 3^2 = 18$$

توجه کنید که 18 بزرگترین عددی است که هر دو عدد 36 و 90، مشترکاً بر آن بخشپذیرند.

چند نکته ی بسیار مهم

فرض کنید عدد n را به صورت زیر به حاصلضرب عوامل اول تجزیه کرده باشیم :

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$$

در این صورت :

(۱) تعداد مقسوم علیه های (تعداد شمارنده های) مثبت عدد n از رابطه ی زیر به دست می آید :

$$T(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1) = \text{به توانها یک واحد اضافه کرده، آنها را در هم ضرب می کنیم}$$

✓ تذکر : توجه کنید که عدد n به همین اندازه مقسوم علیه منفی دارد.

مثال : تعداد مقسوم علیه های مثبت 18 را به دست آورده، سپس آنها را بنویسید؟

$$18 = 2 \times 3^2 = 2^1 \times 3^2 \Rightarrow T(18) = (1+1)(2+1) = 6$$

$$\{1, 2, 3, 6, 9, 18\} = \text{مقسوم علیه های 18}$$

هرگاه به نصف عدد رسیدید مقسوم علیه بعدی، خود عدد می باشد.

تست : اگر بدانیم تعداد مقسوم علیه های مثبت عددی، فرد است آنگاه

(۱) این عدد فرد است (۲) این عدد مربع کامل است

(۳) این عدد فرد و مربع کامل است (۴) این عدد مکعب کامل است

پاسخ : می دانیم حاصلضرب چند عدد، هنگامی فرد میشود که همگی فرد باشند، لذا چون $T(n)$ فرد است پس

$$\alpha_n + 1, \dots, \alpha_2 + 1, \alpha_1 + 1 \text{ همگی فردند در نتیجه } \alpha_n, \dots, \alpha_2, \alpha_1 \text{ همگی زوج بوده و بنابراین عدد مربع کامل است}$$

یادآوری : عددی مربع کامل است که توان همه ی عاملهایش در تجزیه اش به عوامل اول، زوج باشد.

تست : تعداد جوابهای معادله ی $(x, 48) = x$ کدام است؟

$$\begin{array}{cccc} 8 & (۲) & 10 & (۳) \\ 16 & (۴) & 20 & (۵) \end{array}$$

پاسخ : چون x ب.م.م است لذا باید حتماً طبیعی باشد، از طرفی چون $(x, 48) = x$ لذا باید $x | 48$ بنابراین کافی است x مقسوم

$$48 = 6 \times 8 = 2 \times 3 \times 2^3 = 2^4 \times 3^1 \rightarrow T(48) = (4+1)(1+1) = 10$$

علیه مثبت 48 باشد لذا :

بنابراین گزینه ی 2 صحیح است.

(۲) حاصلضرب مقسوم علیه های مثبت عدد n از رابطه ی زیر به دست می آید.

$$p(n) = n^{\frac{T(n)}{2}} = \sqrt{n^{T(n)}} = \text{عدد به توان نصف تعداد مقسوم علیه های مثبتش}$$

مثال : حاصلضرب مقسوم علیه های مثبت عدد 12 را بیابید؟

$$12 = 2^2 \times 3^1 \Rightarrow T(12) = (2+1)(1+1) = 6$$

$$\Rightarrow p(n) = 12^{\frac{6}{2}} = 12^3$$

$$12 = \{1, 2, 3, 4, \underset{\text{نصف}}{6}, 12\} \quad \text{مقسوم علیه های مثبت 12} \quad \text{اکنون دقت کنید که :}$$

$$p(12) = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 6 \times 12 = 12 \times 12 \times 12 = 12^3$$

(۳) مجموع مقسوم علیه های مثبت عدد n از رابطه ی زیر به دست می آید :

$$\frac{1-p_1^{\alpha_1+1}}{1-p_1} \times \frac{1-p_2^{\alpha_2+1}}{1-p_2} \times \dots \times \frac{1-p_k^{\alpha_k+1}}{1-p_k}$$

مثال : مجموع مقسوم علیه های مثبت عدد 30 را بیابید؟

$$30 = 2 \times 3 \times 5 = 2^1 \times 3^1 \times 5^1$$

$$s(n) = \frac{1-2^{1+1}}{1-2} \times \frac{1-3^{1+1}}{1-3} \times \frac{1-5^{1+1}}{1-5} = 3 \times 4 \times 6 = 72$$

اکنون دقت کنید که 30، 8 مقسوم علیه مثبت دارد (زیرا $T(30) = (1+1)(1+1)(1+1) = 8$) که عبارتند از :

$$30 = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, \underset{\text{نصف}}{30}\} \rightarrow S(30) = 1 + 2 + 3 + 5 + 6 + 10 + 15 + 30 = 72$$

(۴) تعداد عوامل اول عدد اول p در $n!$ از رابطه ی زیر به دست می آید :

$$\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \dots$$

$$\left\lfloor \frac{10}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{10}{2^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{10}{2^3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{10}{2^4} \right\rfloor + \dots = 5 + 2 + 1 + 0 + 0 + \dots = 8 \quad \text{مثال : تعداد عوامل عدد اول 2 را در 10! حساب کنید؟}$$

اکنون دقت کنید که :

$$10! = 10 \times 9 \times 8 \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$$

$$= (\underset{\downarrow}{2} \times \underset{\downarrow}{5}) \times 9 \times \underset{\downarrow}{2}^3 \times 7 \times (\underset{\downarrow}{2} \times \underset{\downarrow}{3}) \times 5 \times \underset{\downarrow}{2}^2 \times 3 \times \underset{\downarrow}{2} \times 1 = 2^8 \times \text{بقیه}$$

یعنی در $10!$ ، 8 عامل 2 وجود دارد.

تست : حداکثر مقدار n برای آنکه $50! \mid 7^n$ ، کدام است؟

10 (۴)

9 (۳)

8 (۲)

7 (۱)

پاسخ :

$$\left\lfloor \frac{50}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{50}{7^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{50}{7^3} \right\rfloor + \dots = 7 + 1 + 0 + 0 + \dots = 8$$

(۵) تعداد صفرهای سمت راست و قبل از اولین رقم مخالف صفر $n!$ از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{5^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{5^3} \right\rfloor + \dots$$

✓ **تذکر:** در واقع کافی است تعداد عاملهای 5 را بشماریم چرا که برای یافتن تعداد صفرهای سمت راست $n!$ (یا همان تعداد عاملهای 10) کافی است تعداد عوامل 2 و 5 را بشماریم، سپس آن که توان کمتری دارد که مسلماً در اینجا 5 توان کمتری دارد) نشان دهنده‌ی تعداد صفرها خواهد بود.

مثال : تعداد صفرهای سمت راست $10!$ را بیابید؟

$$\left\lfloor \frac{10}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{10}{25} \right\rfloor + \dots = 2 + 0 + 0 + \dots = 2$$

$$10! = 3628800$$

اکنون دقت کنید که :

✓ **تذکر:** در حالت کلی برای یافتن تعداد صفرهای یک عدد، کافی است تعداد عوامل 2 و 5 را حساب کنیم سپس آنکه توان کمتری دارد، توانش نشاندهنده‌ی تعداد صفرها خواهد بود.

مثال : در سمت راست عدد حاصل از ضرب $A = 375 \times 45 \times 80$ چند صفر وجود دارد؟

$$A = (3 \times 5^3) \times (3^2 \times 5) \times (2^4 \times 5) = 2^4 \times 3^3 \times 5^5$$

$$\text{تعداد صفرها} = 4$$

چون توان 2 از توان 5 کمتر است ، لذا

$$A = 2^4 \times 3^3 \times 5^5 = (2 \times 5) \times (2 \times 5) \times (2 \times 5) \times (2 \times 5) \times 3^3 \times 5$$

اکنون توجه کنید که :

$$= 27 \times 5 \times 10^4 = 135 \underbrace{0000}_4$$

کوچکترین مضرب مشترک دو عدد (ک.م.م):

مضرب مشترک دو عدد

عدد c را یک مضرب مشترک دو عدد صحیح a و b گوئیم هرگاه : $b|c, a|c$

مثال : عدد 18 یک مضرب مشترک دو عدد 2 و 9 است زیرا $9|18, 2|18$

مضرب مشترک سه عدد

عدد c را یک مضرب مشترک سه عدد a و b و e گوئیم هرگاه : $e|c, b|c, a|c$

مثال : عدد 90 یک مضرب مشترک سه عدد 2 و 5 و 9 است زیرا $9|90, 5|90, 2|90$

کوچکترین مضرب مشترک دو عدد

عدد طبیعی m را کوچکترین مضرب مشترک دو عدد a و b گوئیم هرگاه :

(۱) m یک مضرب مشترک دو عدد a و b باشد.

(۲) m از هر مضرب مشترک دیگر a و b کوچکتر باشد یعنی :

$$\forall c : a|c, b|c \Rightarrow m|c \text{ یا } m \leq c$$

به عبارت دیگر، عضو ابتدای مجموعه‌ی مضربهای مثبت دو عدد را ک.م.م آن دو عدد می‌گویند. کوچکترین مضرب مشترک دو

عدد a و b را با نمادهای $[a, b]$ یا $a \amalg b$ نمایش می‌دهند و معمولاً آنرا با حرف m نشان می‌دهند.

مثال : کوچکترین مضرب مشترک دو عدد 12 و 18 را بیابید؟

روش اول :

$$\text{مضارب مثبت } 12 = \{12, 24, 36, 48, 60, 72, \dots\}$$

$$\text{مضارب مثبت } 18 = \{18, 36, 54, 72, \dots\}$$

$$\text{مضارب مثبت مشترک } 12 \text{ و } 18 = \{36, 72, \dots\}$$

$$\text{کوچکترین مضرب مشترک } 12 \text{ و } 18 = 36$$

روش دوم :

$$\begin{cases} 12 = 2^2 \times 3 \\ 18 = 2 \times 3^2 \end{cases} \Rightarrow 2^2 \times 3^2 = 36 = \text{عاملهای غیر مشترک} \times \text{عاملهای مشترک با نمای بیشتر} = \text{ک.م.م.}$$

روش سوم :

$$d \times m = ab \Rightarrow m = \frac{ab}{d}$$

حاصلضرب آن دو عدد = ک.م.م همان دو عدد طبیعی $\times$ ب.م.م. دو عدد طبیعی

✓ نکته‌ی مهم :

$$\text{ک.م.م. دو عدد طبیعی} = \frac{\text{حاصلضرب دو عدد}}{\text{ب.م.م.}} = \frac{12 \times 18}{6} = 36$$

توجه کنید که عدد 36 کوچکترین عددی است که بر هر دو عدد 12 و 18 بخشپذیر است.

$$[a, b] = |b| \text{ آنگاه } a | b, \text{ هرگاه } a | b$$

مثال :

$$6 | 18 \Rightarrow [6, 18] = 6$$

قضیه‌ی مهم : هرگاه a و b به حاصلضرب عوامل اول تجزیه شده باشند، ک.م.م آنها، از فرمول زیر به دست می‌آید.

عاملهای غیر مشترک $\times$ عاملهای مشترک با نمای بیشتر = ک.م.م

✓ تذکر : برای محاسبه‌ی ک.م.م سه عدد یا بیشتر عاملهای غیر مشترک را نیز با نمای بیشتری‌نویسیم.

مثال : کوچکترین مضرب مشترک سه عدد 12 و 15 و 20 را بیابید؟

$$\begin{cases} 12 = 2^2 \times 3 \\ 18 = 2 \times 3^2 \Rightarrow \text{ک.م.م} = 2^3 \times 3^2 \times 5 = 360 \\ 40 = 2^3 \times 5 \end{cases}$$

✓ نکته : هرگاه $a | c, a | b, [a, b] = m, m | c$ ، به عبارت دیگر هرگاه عددی بر هر دو عدد a و b بخشپذیر باشد، بر کوچکترین مضرب مشترکشان نیز بخشپذیر است.

تست : هرگاه $6 | c, 15 | c$ ، کدام درست است؟

$$18 | c \quad (۴)$$

$$45 | c \quad (۳)$$

$$30 | c \quad (۲)$$

$$12 | c \quad (۱)$$

پاسخ : طبق نکته‌ی فوق

$$[6, 15] = 30 | c$$

$$(a, b). [a, b] = |ab|$$

قضیه‌ی مهم : برای هر دو عدد صحیح غیر صفر a و b داریم :

$$(a, b)[a, b] = ab$$

و اگر a, b دو عدد طبیعی باشند آنگاه

حاصلضرب دو عدد = ک.م.م همان دو عدد $\times$ ب.م.م دو عدد طبیعی

یعنی :

$$(a, b, c). [a, b, c] \neq abc$$

✓ تذکر مهم : این قضیه برای بیش از 2 عدد، صادق نمی‌باشد، یعنی

✓ نکته‌ی بسیار بسیار مهم :

$$(a, b) = d \Rightarrow \left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1 \quad (1)$$

یادآوری :

با فرض $b' = \frac{b}{d}, a' = \frac{a}{d}$ داریم : $b = b'd, a = a'd$ ، ضمناً از (1) نتیجه می شود که $(a', b') = 1$ لذا داریم :

$$(a, b) = d \Rightarrow (a', b') = 1, \begin{cases} a = a'd \\ b = b'd \end{cases}, (*)$$

در بسیاری از مسائل از مطلب فوق (*) استفاده میشود، اما با توجه به (*) داریم :

$$\text{مجموع و تفاضل دو عدد ۱)} \quad a + b = a'd \pm b'd = (a' \pm b')d$$

$$\text{حاصلضرب دو عدد ۲)} \quad ab = (a'd)(b'd) = a'b'd^2$$

$$\text{ک.م.م دو عدد ۳)} \quad = \frac{\text{حاصلضرب دو عدد}}{\text{ب.م.م}} = \frac{ab}{d} = \frac{a'b'd^2}{d} = a'b'd$$

$$\text{نسبت دو عدد ۴)} \quad = \frac{a}{b} = \frac{a'd}{b'd} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$$

مثال : هرگاه $[a, b] = 90, (a, b) = 15$ و a و b دو عدد طبیعی باشند، a و b را بیابید؟
پاسخ :

$$[a, b] = a'b'd \Rightarrow 90 = a'b' \times 15 \Rightarrow a'b' = 6, (a', b') = 1$$

$$\begin{cases} a' = 1 \\ b' = 6 \end{cases}, \begin{cases} a' = 2 \\ b' = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = a'd = 1 \times 15 = 15 \\ b = b'd = 6 \times 15 = 90 \end{cases} \begin{cases} a = a'd = 2 \times 15 = 30 \\ b = b'd = 3 \times 15 = 45 \end{cases}$$

مثال : مطلوبست تعیین دو عدد، که مجموعشان 26 و کوچکترین مضرب مشترکشان 105 باشد؟
پاسخ :

$$a + b = 26 \Rightarrow (a' + b')d = 26 \quad (1) \xrightarrow{\text{دو رابطه را به هم تقسیم می کنیم}}$$

$$[a, b] = 105 \Rightarrow a'b'd = 105$$

$$\Rightarrow \frac{(a' + b')}{a'b'} = \frac{26}{105}$$

چون صورت و مخرج هر دو کسر نسبت به یکدیگر متباین اند و

$$\Rightarrow \begin{cases} a' + b' = 26 \\ a'b' = 105 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a' = 5 \\ b' = 21 \end{cases} \xrightarrow{(1)} (a' + b')d = 26$$

$$(5 + 21)d = 26 \Rightarrow d = 1 \Rightarrow \begin{cases} a = a'd = 5 \times 1 = 5 \\ b = b'd = 21 \times 1 = 21 \end{cases}$$

مثال : نسبت دو عدد طبیعی $\frac{10}{12}$ و تفاضل ک.م.م آنها از حاصلضربشان برابر 3960 است ، آن دو عدد را بیابید؟

$$\frac{a}{b} = \frac{10}{12} \Rightarrow \frac{a'd}{b'd} = \frac{10}{12} \Rightarrow \frac{a'}{b'} = \frac{5}{6} \Rightarrow \begin{cases} a' = 5 \\ b' = 6 \end{cases}$$

$$ab - [a, b] = 3960 \Rightarrow a'b'd^2 - a'b'd = 3960$$

$$30d^2 - 30d = 3960 \Rightarrow d^2 - d = 132 \Rightarrow d(d-1) = 12 \times 11$$

$$\Rightarrow d = 12 \Rightarrow \begin{cases} a = a'd = 5 \times 12 = 60 \\ b = b'd = 6 \times 12 = 72 \end{cases}$$

تست : اگر بدانیم ab ، مربع کامل است، آنگاه کدامیک مربع کامل است؟

$$\text{(۱) } cd^2 \quad \text{(۲) } c \quad \text{(۳) } \frac{c}{d^2} \quad \text{(۴) } \frac{c}{d}$$

پاسخ : می‌دانیم : $ab = a'b'd^2$ حال چون هر دوی ab و d^2 مربع کامل هستند لذا $a'b'$ نیز باید مربع کامل باشد اما داشتیم :

$$c = a'b'd \quad \text{لذا داریم : } a'b' = \frac{c}{d} \quad \text{و بنابراین } \frac{c}{d} \text{ مربع کامل است.}$$

ویژگیهای مهم ک.م.م

$$1) [a, 0] = 0, (a \neq 0)$$

$$2) a|b \Rightarrow [a, b] = |b| = \text{قدر مطلق عدد بزرگتر}$$

$$3) [a, a] = |a|, (a \neq 0)$$

$$4) [a, na] = n|a|, (a \neq 0)$$

$$5) [a, \pm 1] = |a|, (a \neq 0)$$

$$6) [a, b] = c \Rightarrow [ka, kb] = kc, (k \in \mathbb{N})$$

$$7) [a, b] = c \Rightarrow \left[\frac{a}{d'}, \frac{b}{d'} \right] = \frac{c}{d'}, (d|d')$$

$$8) [a, b] = c \Rightarrow [a^n, b^n] = c^n$$

$$9) [a, b] = c \Rightarrow [-a, b] = [a, -b] = [-a, -b] = c$$

$$10) [a, b, c] = [[a, b], c] = [a, [b, c]]$$

$$11) [a_1, a_2, \pm 1] = [a_1, a_2]$$

$$12) [a^n, a^m] = a^m, (n \leq m)$$

$$13) a, b = |ab|$$

✓ نکته‌ی مهم :

حاصلضرب ک.م.م هر دو عدد در ب.م.م همان دو عدد برابر است با قدر مطلق حاصلضرب آن دو عدد.

نکته‌ی فوق در مورد ۳ عدد یا بیشتر، در حالت کلی صادق نیست یعنی :

$$14) a, b, c \neq |abc|$$

$$15) (a, b) = 1 \Rightarrow [a, b] = |ab|$$

یعنی اگر دو عدد متباین باشند، ک.م.م آنها، همان قدر مطلق حاصلضربشان می‌باشد.

$$16) (a, b) = (b, c) = (a, c) = 1 \Rightarrow [a, b, c] = |abc|$$

تست : هرگاه، $(a, b) = (a, c) = (b, c) = d$ ، حاصل $[a, b, c]$ کدام است؟ $(a, b, c \in \mathbb{N})$

$$abc \quad (۱)$$

پاسخ :

$$\frac{abc}{d} \quad (۲)$$

$$\frac{abc}{d^2} \quad (۳)$$

$$\frac{abc}{d^3} \quad (۴)$$

$$(a, b) = (b, c) = (a, c) = d \Rightarrow \left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = \left(\frac{b}{d}, \frac{c}{d}\right) = \left(\frac{a}{d}, \frac{c}{d}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \left[\frac{a}{d}, \frac{b}{d}, \frac{c}{d}\right] = \frac{a}{d} \times \frac{b}{d} \times \frac{c}{d} = \frac{abc}{d^3}$$

$$[a, b, c] = d \times \left[\frac{a}{d}, \frac{b}{d}, \frac{c}{d}\right] = d \times \frac{abc}{d^3} = \frac{abc}{d^2}$$

راه تستی :

$$a = b = c \Rightarrow [a, a, a] = a \Rightarrow \frac{abc}{d^2} = \frac{aaa}{a^2} = a$$

$$17) [a, a+1] = |a(a+1)|$$

$$18) [p, q] = pq \quad p, q \neq 1 \text{ اول } p \text{ و } q \text{ اول}$$

$$19) [a, b] = [b, a] \text{ خاصیت جابجایی}$$

$$20) (a, [b, c]) = [(a, b), (a, c)] \text{ توزیع پذیری ب.م.م نسبت به ک.م.م}$$

$$21) [a, (b, c)] = ([a, b], [a, c]) \text{ توزیع پذیری ک.م.م نسبت به ب.م.م}$$

$$22) \begin{cases} [a, (a, b)] = |a| \\ (a, [a, b]) = |a| \end{cases} \text{ «خاصیت جذب»}$$

توجه کنید که چون $(a, b) | a$ لذا طبق نکته ی 2 داریم : $[a, (a, b)] = |a|$ ، بهمین ترتیب در مورد دومی

$$\text{مثال : } (6, [6, 8]) = 6$$

در واقع داریم :

$$(6, [6, 8]) = (6, 24) = 6$$

تست : هرگاه $a | c, a | b$ حاصل $[a, (b, c)]$ کدام است؟

$$[a, c] \quad (۴)$$

$$(b, c) \quad (۳)$$

$$|c| \quad (۲)$$

$$|a| \quad (۱)$$

پاسخ :

$$[a, (b, c)] = ([a, b], [a, c])$$

$$= (|b|, |c|) = (b, c)$$

یادآوری :

$$a | b \Rightarrow [a, b] = |b|$$

تست : هرگاه $b | c, a | b$ حاصل $[a, (b, c)]$ کدام است؟

$$[a, b] \quad (۴)$$

$$|b| \quad (۳)$$

$$[a, c] \quad (۲)$$

$$|a| \quad (۱)$$

$$[a, (b, c)] = [a, b] = |b|$$

پاسخ : چون $b | c$ لذا $(b, c) = b$ بنابراین داریم :تست : اگر (a, b) ، ب.م.م و $[a, b]$ ، ک.م.م دو عدد a ، b باشند، حاصل $[(a^2, a), (a, b)]$ کدام است؟

(۸) $|b|$
پاسخ :(۲) $|a|$ (۳) b (۴) a

$$[(a^2, a), (a, b)] = [a, (a, b)] = [a, d] = |a|$$

$$23) \begin{cases} (a, b) \leq |a| \leq [a, b] \\ (a, b) \leq |b| \leq [a, b] \end{cases}$$

همنهشتی (هم باقیمانده‌گی)

فرض می‌کنیم m عددی طبیعی باشد، دو عدد صحیح a و b را به پیمانه‌ی m با یکدیگر همنهشت گوئیم هرگاه $a-b$ مضرب m باشد یا $a-b$ بر m بخشپذیر باشد همنهشت بودن دو عدد a و b به پیمانه‌ی m را به صورتهای زیر نمایش می‌دهیم :

$$a \equiv b^m \quad \text{یا} \quad a \equiv b \quad (m \text{ به پیمانه‌ی})$$

بخوانید a با b به پیمانه‌ی m ، همنهشت است.

بنابراین می‌توان گفت :

$$a \equiv b^m \Leftrightarrow m | a - b$$

در تعریف فوق، عدد طبیعی m را پیمانه یا سنج یا هنگ یا مدول و یا میزان می‌گویند .

مثال :

$$25 \equiv 21^2 \xRightarrow{\text{زیرا}} 2 | 25 - 21 \quad \text{یا} \quad 2 | 4$$

$$31 \equiv -1^8 \xRightarrow{\text{زیرا}} 8 | 31 - (-1) \quad \text{یا} \quad 8 | 32$$

$$a^2 \equiv b^2 \xRightarrow{\text{زیرا}} a - b | a^2 - b^2 \xRightarrow{\text{توجه کنید}} a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$a^3 \equiv 1^{a^2+a+1} \xRightarrow{\text{زیرا}} a^2 + a + 1 | a^3 - 1 \xRightarrow{\text{توجه کنید}} a^3 - 1 = (a - 1)(a^2 + a + 1)$$

تعریف دیگر همنهشتی (هم باقیمانده‌گی)

هرگاه باقیمانده‌های تقسیم دو عدد صحیح a و b بر عدد طبیعی m با یکدیگر برابر باشند، گوئیم a با b به پیمانه‌ی m همنهشت است، به مثال زیر توجه کنید :

$$\begin{array}{r} 27 \overline{) 6} \\ 24 \quad 4 \\ \hline 3 \end{array} \quad \begin{array}{r} 39 \overline{) 6} \\ 36 \quad 6 \\ \hline 3 \end{array}$$

چون :

$$39 \equiv 27^6$$

لذا داریم :

البته توجه کنید که در این حالت $39 - 27$ یا 12 بر 6 بخشپذیر است.

تذکر : هرگاه $a-b$ بر m ، در این صورت $a \not\equiv b^m$ ، «بخوانید a با b به پیمانه‌ی m همنهشت نیست».

✓ نکته‌ی مهم : رابطه‌ی همنهشتی به پیمانه‌ی m روی $\mathbb{Z}$ ، یک رابطه‌ی هم ارزی است.

مثال :

$$16 \not\equiv 10^4 \xRightarrow{\text{زیرا}} 4 \nmid 16 - 10$$

خاصیت بازتابی

$$1) \forall a \in \mathbb{Z} : a \equiv^m a \Rightarrow m | a - a \text{ یا } m | 0$$

خاصیت تقارنی

$$2) \forall a, b \in \mathbb{Z} : a \equiv^m b \Rightarrow b \equiv^m a$$

$$\Rightarrow a \equiv^m b \Rightarrow m | a - b \Rightarrow m | b - a \Rightarrow b \equiv^m a$$

خاصیت ترایی

$$3) \forall a, b, c \in \mathbb{Z} : (a \equiv^m b, b \equiv^m c) \Rightarrow a \equiv^m c$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a \equiv^m b \Rightarrow m | a - b \\ b \equiv^m c \Rightarrow m | b - c \end{cases} \Rightarrow m | a - b + b - c \Rightarrow m | a - c \Rightarrow a \equiv^m c$$

✓ نکته مهم : چون رابطه‌ی هم‌نهشتی به پیمانه‌ی m روی $\mathbb{Z}$ ، یک رابطه‌ی هم‌ارزی است، لذا رابطه‌ی هم‌نهشتی به پیمانه‌ی m ، $(\equiv^m)$ ، مجموعه‌ی $\mathbb{Z}$ را به کلاسهای هم‌ارزی (رده‌های هم‌ارزی یا دسته‌های هم‌ارزی) افراز می‌کند، مجموعه‌ی تمام دسته‌های هم‌ارزی در هم‌نهشتی به پیمانه‌ی m را با $\mathbb{Z}/m$ یا $\mathbb{Z}_m$ و مجموعه‌ی تمام اعداد صحیحی که با a به پیمانه‌ی m هم‌نهشتند را با $[a]$ یا $\bar{a}$ نمایش می‌دهند. توجه کنید که $[a]$ یک دسته‌ی هم‌ارزی است و a نماینده‌ی این دسته است، اگر b عضو دیگری از این دسته‌ی هم‌ارزی باشد، آنگاه داریم: $[a] = [b]$ یعنی :

$$a \in [b] \Leftrightarrow b \in [a] \Leftrightarrow [a] = [b]$$

$$a \equiv^m b \Leftrightarrow [a] = [b] \text{ به طور کلی می‌توان ثابت کرد که :}$$

در این حالت داریم :

$$a \equiv^m b \Rightarrow m | a - b \Rightarrow \exists q \in \mathbb{Z} : a - b = mq \text{ یا } a = b + mq$$

یعنی تمام اعداد صحیحی که با b به پیمانه‌ی m هم‌نهشتند با افزودن مضربی از m به b به دست می‌آیند، بنابراین:

$$[b]_m = \{b + mk : k \in \mathbb{Z}\}$$

مثال : مجموعه‌ی تمام اعداد صحیحی که با 5 به پیمانه‌ی 3 هم‌نهشتند عبارتند از :

$$[5]_3 = \{5 + 3k : k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -4, -1, 2, 5, 8, 11, \dots\}$$

نماینده‌ی دسته

توجه کنید که هر دو عضو این مجموعه به پیمانه‌ی 3 با یکدیگر هم‌نهشتند.

مثال : به کمک رابطه‌ی هم‌نهشتی به پیمانه‌ی 3 $(\equiv^3)$ مجموعه‌ی $\mathbb{Z}$ را افراز کرده و دسته‌های هم‌ارزی را مشخص کنید؟

$$[0]_3 = \{0 + 3k : k \in \mathbb{Z}\} = \{3k : k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots\}$$

$$[1]_3 = \{1 + 3k : k \in \mathbb{Z}\} = \{3k + 1, k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -5, -2, 1, 4, 7, \dots\}$$

$$[2]_3 = \{2 + 3k : k \in \mathbb{Z}\} = \{3k + 2, k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -4, -1, 2, 5, 8, \dots\}$$

بنابراین:

$$\mathbb{Z}_3 = \mathbb{Z}/3 = \{[0], [1], [2]\}$$

دقت کنید که :

$$\dots = [-3] = [0] = [3] = [6] = \dots$$

مثال: عدد 371 متعلق به کدام دسته‌ی همنهشتی به پیمانه‌ی 3 قرار دارد؟
پاسخ: کافی است باقیمانده‌ی تقسیم 371 بر 3 را بیابیم.

$$\begin{array}{r} 371 \quad | \quad 3 \\ 2 \quad 123 \end{array} \Rightarrow 371 = 123(3) + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{باقیمانده}}}{2} \Rightarrow 371 \in [2]$$

✓ تذکر مهم: توجه داشته باشید که دسته‌ی هم ارزی $[0]$ در همنهشتی به پیمانه‌ی 3 با دسته‌ی هم ارزی $[0]$ در همنهشتی به

$$[0]_3 = \{3k : k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -3, 0, 3, 6, \dots\}$$

پیمانه‌ی 2 با یکدیگر فرق دارند، در واقع

$$[0]_2 = \{2k : k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -2, 0, 2, 4, \dots\}$$

✓ تذکر: اگر چه در دسته‌های هم ارزی، هر عدد از یک دسته‌ی هم ارزی می‌تواند نماینده‌ی آن دسته انتخاب شود، اما معمولاً کوچکترین عدد صحیح نامنفی متعلق به هر دسته‌ی هم ارزی را به عنوان نماینده‌ی دسته برمیگزینند.

✓ نکته‌ی مهم: تعداد دسته‌های هم ارزی در رابطه‌ی همنهشتی به پیمانه‌ی m ، دقیقاً m تا است

چند نکته‌ی مهم:

$$1) [a]_m = [b]_m \Leftrightarrow a \equiv b^m$$

$$2) a \in [b]_m \Leftrightarrow b \in [a]_m \Leftrightarrow a \equiv b^m$$

$$3) [a]_m \cap [b]_m = [c]_m, ([a, b] = c)$$

✓ نکته‌ی مهم: با توجه به آنچه که بیان شد، گزاره‌های زیر همگی معادلند.

(۱) a با b به پیمانه‌ی m همنهشت است.

$$(۲) a \equiv b^m$$

$$(۳) [a]_m = [b]_m$$

(۴) a و b در یک دسته‌ی هم ارزی در رابطه‌ی همنهشتی به پیمانه‌ی m قرار دارند

$$(۵) m | a - b$$

(۶) باقیمانده‌های تقسیم a و b بر m برابرند.

(۷) باقیمانده‌های تقسیم a و b بر m برابرند

اثبات معادل بودن (۷) با (۱): می‌دانیم:

اکنون فرض می‌کنیم:

$$a \equiv b^m \Rightarrow m | a - b$$

$$\begin{cases} a = mq + r, & (0 \leq r < m) \\ b = mq' + r', & (0 \leq r' < m) \end{cases}$$

$$a - b = m(q - q') + r - r' \quad (1)$$

اکنون داریم :

$$m \mid a - b$$

$$m \mid m(q - q')$$

$$m \mid (a - b) - m(q - q') \stackrel{(1)}{\Rightarrow} m \mid r - r' \quad (2)$$

$$0 \leq r < m$$

اما :

$$0 \leq r' < m$$

$$0 \leq |r - r'| < m \quad (3)$$

$$(2), (3) \Rightarrow r - r' = 0$$

یادآوری : $a \mid b, |b| < |a| \Rightarrow b = 0$ اثبات عکس :باقیمانده‌های a و b بر m برابرند : فرض

$$\text{حکم : } \begin{cases} a \equiv b \end{cases}$$

اثبات : فرض می‌کنیم :

$$\begin{cases} a = mq + r \\ b = mq' + r \end{cases}$$

$$a - b = m(q - q') \Rightarrow m \mid a - b \Rightarrow a \equiv b$$

$$[a]_m = [a \mp mk]_m$$

✓ نکته :

ویژگیهای رابطه‌ی همزهشتی به پیمانه‌ی m :

$$1) a \equiv b \Leftrightarrow m \mid a - b \Leftrightarrow a - b \equiv 0$$

$$2) a \equiv a$$

$$3) a \equiv b \Rightarrow b \equiv a$$

$$4) a \equiv b, b \equiv c \Rightarrow a \equiv c$$

$$5) a \equiv b \Rightarrow a + c \equiv b + c$$

یعنی به طرفین یک رابطه‌ی همزهشتی می‌توان یک عدد ثابت اضافه کرد، همچنین کم کرد یا ضرب کرد، بدون آنکه پیمانه

$$6) a \equiv b \Rightarrow a - c \equiv b - c$$

$$7) a \equiv b \Rightarrow ac \equiv bc$$

تغییر نکند.

$$8) ac \equiv bc, (m, c) = d \Rightarrow a \equiv \frac{m}{d} b$$

یعنی طرفین یک رابطه‌ی همزهشتی را می‌توان بر یک عدد تقسیم کرد، البته ممکن است پیمانه تغییر کند.

اثبات :

$$ac \equiv bc \Rightarrow m \mid ac - bc \Rightarrow \frac{m}{d} \mid \frac{c}{d}(a - b) \quad (1)$$

$$(m, c) = d \Rightarrow \left(\frac{m}{d}, \frac{c}{d}\right) = 1 \quad (2)$$

از طرفی داریم :

$$(1), (2) \xrightarrow{\text{طبق لم اقلیدس}} \frac{m}{d} \mid a - b \Rightarrow a \equiv b \pmod{\frac{m}{d}}$$

$$9) ac \equiv bc, (m, c) = 1 \Rightarrow a \equiv b \pmod{m}$$

در این حالت پیمانه تغییری نمی‌کند .

$$42 \equiv -8 \xrightarrow{+2} 21 \equiv -4$$

مثال :

دقت کنید که : $(5, 2) = 1$

$$10) \begin{cases} a \equiv b \pmod{m} \\ c \equiv d \pmod{m} \end{cases} \Rightarrow a + c \equiv b + d \pmod{m}$$

این نکته قابل تعمیم است.

$$11) \begin{cases} a \equiv b \pmod{m} \\ c \equiv d \pmod{m} \end{cases} \Rightarrow a - c \equiv b - d \pmod{m}$$

$$12) \begin{cases} a \equiv b \pmod{m} \\ c \equiv d \pmod{m} \end{cases} \Rightarrow ac \equiv bd \pmod{m}$$

این نکته قابل تعمیم است

$$13) a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a^n \equiv b^n \pmod{m}, (n \in \mathbb{N})$$

توجه کنید که عکس این مطلب در حالت کلی برقرار نمی‌باشد.

$$10^2 \equiv 5^2 \pmod{25} \quad \text{ولی} \quad 10 \not\equiv 5 \pmod{25}$$

مثال :

$$14) m \equiv 0$$

هر عدد طبیعی به پیمانه‌ی خودش با صفر همنهشت است

$$15) km \equiv 0$$

مضارب هر عدد به پیمانه آن عدد با صفر همنهشتند

$$16) m^n \equiv 0$$

$$17) a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a \equiv b \pm mk \pmod{m}$$

$$18) a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a \pm mp \equiv b \pm mq \pmod{m}, (p, q \in \mathbb{Z})$$

$$19) \begin{cases} a \equiv b \pmod{m} \\ a \equiv b \pmod{n} \end{cases} \Rightarrow a \equiv b \pmod{[m, n]}$$

تست : اگر بدانیم $x^2 \equiv y^2 \pmod{12}$ و $x \equiv y \pmod{8}$ کدام یک همواره صحیح است؟

$$x^2 \equiv y^2 \pmod{18} \quad (۴)$$

$$x \equiv y \pmod{24} \quad (۳)$$

$$x^4 \equiv y^4 \pmod{24} \quad (۲)$$

$$x^3 \equiv y^3 \pmod{16} \quad (۱)$$

پاسخ :

$$x \equiv y \Rightarrow \begin{cases} x^2 \equiv y^2 \\ x^{12} \equiv y^{12} \end{cases} \Rightarrow x^2 \equiv y^2 \Rightarrow x^{24} \equiv y^{24} \Rightarrow x^4 \equiv y^4$$

$$20) \begin{cases} a \equiv b \\ a \equiv b \\ (m, n) = 1 \end{cases} \Rightarrow a \equiv b$$

تست : هرگاه بدانیم $x \equiv 18$ ، $x \equiv 7$ و $x \equiv 3$ ، آنگاه رقم وسط اولین عدد سه رقمی x چیست؟

3 (۱) 4 (۲) 5 (۳) 6 (۴)

مثال :

$$\begin{cases} x \equiv 18 \xrightarrow{+5} x+5 \equiv 0 \\ x \equiv 7 \xrightarrow{+5} x+5 \equiv 0 \\ x \equiv 3 \xrightarrow{+5} x+5 \equiv 0 \end{cases} \Rightarrow x+5 \equiv 0 \Rightarrow x+5 \equiv 0 \Rightarrow x+5 \equiv 0$$

$$\Rightarrow x+5 = 552k \xrightarrow{k=1} x+5 = 552 \Rightarrow x = 547 \Rightarrow \text{رقم وسط} = 4$$

$$21) a+c \equiv b \Rightarrow a \equiv b-c$$

$$22) a \equiv b, n|m \Rightarrow a \equiv b$$

$$23) a \equiv b \Rightarrow \begin{cases} a \equiv b \\ a \equiv b \end{cases},$$

$$13 \equiv -5 \Rightarrow \begin{cases} 13 \equiv -5 \\ 13 \equiv -5 \end{cases}$$

مثال :

$$24) a^n \equiv b^n$$

$$\begin{cases} a^2 \equiv b^2 \\ a^3 \equiv b^3 \end{cases}$$

بالاخص :

$$25) a^n \equiv b^n, (n \text{ زوج})$$

$$a^2 \equiv b^2$$

بالاخص :

$$26) a^n \not\equiv b^n, (n \text{ فرد})$$

$$a^3 \not\equiv -b^3 \Leftrightarrow a-b \nmid a^3 + b^3$$

مثال:

$$27) a^n \equiv -b^n \quad , (n \text{ فرد})$$

$$a^3 \equiv -b^3 \Leftrightarrow a+b \mid a^3+b^3$$

مثال:

$$28) a^n \equiv 1 \quad , (n \in \mathbb{N})$$

$$\begin{cases} a^2 \equiv 1 \\ a^3 \equiv 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{نظرا}} \begin{cases} a-1 \mid a^2-1 \\ a-1 \mid a^3-1 \end{cases}$$

مثال:

$$29) a^n \equiv 1 \quad , (n \text{ زوج})$$

$$a^2 \equiv 1 \Rightarrow a+1 \mid a^2-1$$

مثال:

$$30) a^n \not\equiv -1 \quad , (n \text{ فرد})$$

$$a^3 \not\equiv -1 \Leftrightarrow a-1 \nmid a^3+1$$

مثال:

$$31) a^n \equiv -1 \quad , (n \text{ فرد})$$

$$a^3 \equiv -1 \Leftrightarrow a+1 \mid a^3+1$$

مثال:

$$32) (a+b)^n \equiv a^n + b^n$$

$$\begin{cases} (a+b)^2 \equiv a^2 + b^2 \\ (a+b)^3 \equiv a^3 + b^3 \end{cases}$$

بالاخص:

$$33) (a-b)^n \equiv a^n - b^n \quad , (n \text{ زوج})$$

$$(a-b)^2 \equiv a^2 - b^2$$

بالاخص:

$$34) (a-b)^n \equiv a^n - b^n \quad , (n \text{ فرد})$$

$$(a-b)^3 \equiv a^3 - b^3$$

بالاخص:

$$35) a \equiv b \Rightarrow (a, m) = (b, m) \leftarrow \text{ب.م.م}$$

تست : هرگاه $4(3x+6)-2 \equiv 11(x+3)-4 \pmod{12}$ ، ب.م.م $(x, 12)$ کدام است؟

(۱)

(۲)

(۳)

(۴)

$$12x + 24 - 2 \equiv 11x + 33 - 4 \Rightarrow 12x + 22 \equiv 11x + 29 \Rightarrow x \equiv 7 \quad \text{طبق نکته‌ی فوق} \Rightarrow (x, 12) = (12, 7) = 1$$

پاسخ :

$$36) a \equiv r \Rightarrow$$

در حالت کلی نمیتوان گفت که باقیمانده‌ی تقسیم a بر r, m است.

$$37) a \equiv r, \quad 0 \leq r \leq m-1 \Rightarrow$$

باقیمانده‌ی تقسیم a بر r, m استمثال : هرگاه $a \equiv -7$ ، باقیمانده‌ی a بر 10 چیست؟

$$\Rightarrow a \equiv -7, -7 \equiv 3 \Rightarrow a \equiv 3 \quad (\text{خاصیت تراییی}),$$

پاسخ : باقیمانده‌ی a بر 10 برابر 3 است.تست : باقیمانده‌ی تقسیم $15^n + 6^n - 9^n$ بر 54 کدام است؟

(۴) 53

(۳) 15

(۲) 0

(۱) 1

پاسخ : می‌دانیم :

$$(a + b)^n \equiv a^n + b^n$$

$$\Rightarrow (9 + 6)^n \equiv 9^n + 6^n \Rightarrow 15^n - 9^n - 6^n \equiv 0$$

و لذا باقیمانده‌ی عبارت داده شده بر 54، صفر است.

تست : باقیمانده‌ی $3^{2m+2} - 2^{m+1}$ بر 7 کدام است؟

(۴) 6

(۳) 2

(۲) 0

(۱) 1

$$3^{2m+2} - 2^{m+1} \equiv (3^2)^{m+1} - 2^{m+1} \equiv 9^{m+1} - 2^{m+1} \equiv 2^{m+1} - 2^{m+1} = 0$$

پاسخ :

و لذا گزینه‌ی 2 صحیح است، البته دقت کنید که $9 \equiv 2$

$$m = 1 \Rightarrow 3^4 - 2^2 = 81 - 4 = 77 \equiv 0$$

راه دوم (راه عدد گذاری):

تست : باقیمانده‌ی 2^{21} بر 17 کدام است؟

(۴) 15

(۳) 4

(۲) 1

(۱) 12

$$2^4 = 16 \equiv -1 \xrightarrow{\text{به توان 5}} (2^4)^5 \equiv (-1)^5$$

پاسخ :

$$2^{20} \equiv -1 \xrightarrow{\times 2} 2^{21} \equiv -2 \equiv 15$$

لذا باقیمانده‌ی تقسیم 221 بر 17 برابر 15 است.

$$2^{21} \equiv (2^4)^5 \times 2 \equiv (-1)^5 (2) = -2 \equiv 15$$

راه کوتاه تست قبلی :

مثال : ثابت کنید $13 \mid 3^{113} + 4^3 + 5$

$$3^3 \equiv 1 \Rightarrow (3^3)^{37} \equiv 1 \Rightarrow 3^{111} \equiv 1$$

اثبات :

$$\xrightarrow{\times 3^2} 3^{113} \equiv 9$$

$$+ \quad 4^3 \equiv -1 \quad 4^3 = 64 \equiv -1$$

$$3^{113} + 4^3 \equiv 8$$

$$\Rightarrow 3^{113} + 4^3 + 5 \equiv 13 \equiv 0 \Rightarrow 13 \mid 3^{113} + 4^3 + 5$$

تست : باقیماندهی $29^{29} + 27^{27}$ بر 7 کدام است؟

- (۱) 1 (۲) 0 (۳) 1 (۴) 2

پاسخ :

$$29^{29} + 27^{27} \equiv 1^{29} + (-1)^{27} \equiv 1 + (-1) = 0$$

تست : اگر باقیماندهی تقسیم اعداد صحیح a و b بر 37 به ترتیب 15 و 29 باشد، باقیماندهی تقسیم $3a-2b$ بر 37 کدام است؟

- (۱) 24 (۲) 13 (۳) 1 (۴) 31

پاسخ :

$$\begin{array}{r} \left\{ \begin{array}{l} a \equiv 15 \\ b \equiv 29 \end{array} \right. \xrightarrow{\begin{array}{l} \times 3 \\ \times 2 \end{array}} \left\{ \begin{array}{l} 3a \equiv 45 \\ 2b \equiv 58 \end{array} \right. \\ \hline 3a - 2b \equiv -13 \equiv 24 \end{array}$$

مثال : درستی همنهشتی زیر را ثابت کنید؟

$$a^{6n+2} + b^{3n+1} + 1 \equiv 0 \quad a^2+a+1$$

$$a^3 \equiv 1 \quad a^2+a+1$$

پاسخ : طبق اتحاد $a^3-1=(a-1)(a^2+a+1)$ داریم : $a^2+a+1 \mid a^3-1$ لذا داریم :

$$a^3 \equiv 1 \xrightarrow[\text{به توان } 2n]{\times a^{a^2+a+1}} a^{6n} \equiv 1 \xrightarrow[\times a^2]{\times a^{a^2+a+1}} a^{6n+2} \equiv a^2$$

$$a^3 \equiv 1 \xrightarrow[\text{به توان } n]{\times a^{a^2+a+1}} a^{3n} \equiv 1 \xrightarrow[\times a]{\times a^{a^2+a+1}} a^{3n+1} \equiv a$$

$$\xRightarrow{\text{بعلاوه ی 1}} a^{6n+2} + a^{3n+1} + 1 \equiv a^2 + a + 1 \equiv 0$$

یادآوری : هر عدد، به پیمانهی خودش با صفر همنهشت است.

تست : باقیماندهی 65^{40} بر 9 چیست؟

- (۱) 7 (۲) 2 (۳) 1 (۴) 3

$$65 \equiv 2 \Rightarrow 65^{40} \equiv 2^{40} \equiv (2^3)^{13} \times 2$$

$$65^{40} \equiv (-1)^{13} \times 2$$

$$65^{40} \equiv -2 \equiv 7$$

$$\overline{ab} + \overline{ba} \equiv 0$$

مثال : هرگاه $\overline{ab}$ نمایش یک عدد دو رقمی باشد، ثابت کنید :

اثبات :

$$\overline{ab} + \overline{ba} = (b+10a) + (a+10b) = 11a + 11b$$

$$\overline{ab} + \overline{ba} \equiv 11(a+b) \equiv 0$$

یادآوری : مضارب هر عدد به پیمانهی آن عدد با صفر همنهشتند.

مثال : باقیماندهی تقسیم عدد $A = 2^{2(18n+1)} + 10^{n+1} + 4$ بر 9 را بیابید؟

پاسخ :

$$\begin{aligned}
 A &= 2^{36n+2} + 10^{n+1} + 4 \\
 &= (2^3)^{12n} \times 2^2 + 10^{n+1} + 4 \\
 &\equiv (-1)^{12n} \times 4 + (1)^{n+1} + 4 \quad \begin{cases} 8 \equiv -1 \\ 10 \equiv 1 \end{cases} \\
 &\equiv 4 + 1 + 4 \\
 &\equiv 9 \\
 &\equiv 0
 \end{aligned}$$

مثال : هرگاه k عددی فرد باشد، ثابت کنید عبارت $11^{2k} + 19^{2k}$ بر 241 بخشپذیر است؟

پاسخ :

$$\begin{aligned}
 11^{2k} + 19^{2k} &= (11^2)^k + (19^2)^k \\
 &= 121^k + 361^k \\
 &= (121 + 361) \underbrace{(\dots)}_A \\
 &= 482A \\
 &= 241 \times 2A
 \end{aligned}$$

و لذا بر 241 بخشپذیر است.

یادآوری :

$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots + b^{n-1}) \quad (n \text{ فرد})$$

مثال : ثابت کنید : $641 \mid 2^{32} + 1$

اثبات :

$$\begin{aligned}
 2^8 &= 256 \equiv 256 \pmod{641} \Rightarrow (2^8)^2 \equiv 256^2 \pmod{641} \\
 \Rightarrow 2^{16} &\equiv 65536 \equiv 65536 - 100(641) = 1436 \pmod{641} \\
 2^{16} &\equiv 1436 - 2(641) = 154 \pmod{641} \\
 (2^{16})^2 &\equiv 154^2 = 23716 \Rightarrow 2^{32} + 1 \equiv 23717 \pmod{641} \\
 2^{32} + 1 &\equiv 0 \pmod{641} \Rightarrow 641 \mid 2^{32} + 1
 \end{aligned}$$

اما عدد 23717 بر 641 بخشپذیر است در واقع $23717 = 37 \times 641$ و بنابراینمثال : ثابت کنید : $160^n + 96^n - 3^n - 5^n \equiv 0 \pmod{62}$

پاسخ : برای اثبات حکم، از نکته‌ی زیر استفاده می‌کنیم :

$$\begin{cases} a \equiv b \pmod{m} \\ a \equiv b \pmod{n} \\ (m, n) = 1 \end{cases} \Rightarrow a \equiv b \pmod{mn}$$

لذا با توجه به اینکه $2 \times 31 = 62$ داریم :

$$160^n + 96^n - 3^n - 5^n \stackrel{2}{\equiv} 0 + 0 - 1^n - 1^n = -2 \stackrel{2}{\equiv} 0 \quad (1)$$

$$160^n + 96^n - 3^n - 5^n \stackrel{31}{\equiv} 5^n + 3^n - 3^n - 5^n \stackrel{31}{\equiv} 0 \quad (2)$$

$$(1), (2), (2, 31) = 1 \Rightarrow 160^n + 96^n - 3^n - 5^n \stackrel{62}{\equiv} 0$$

مثال : هرگاه $19 \mid 11a + 2b$ ، ثابت کنید $19 \mid 18a + 5b$ ، $(a, b \in \mathbb{Z})$

$$19 \mid 11a + 2b \Rightarrow 11a + 2b \stackrel{19}{\equiv} 0 \Rightarrow 11a \stackrel{19}{\equiv} -2b$$

اثبات :

$$\Rightarrow -2b \stackrel{19}{\equiv} 11a \stackrel{19}{\equiv} -8a \Rightarrow 8a \stackrel{19}{\equiv} 2b \xrightarrow{+2}$$

$$4a \stackrel{19}{\equiv} b \xrightarrow{\times 5} 20a \stackrel{19}{\equiv} 5b$$

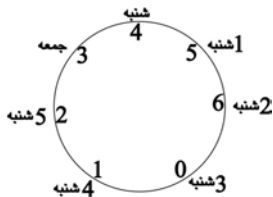
$$5b \stackrel{19}{\equiv} 20a \stackrel{19}{\equiv} -18a \Rightarrow 5b \stackrel{19}{\equiv} -18a$$

$$\Rightarrow 19 \mid 5b + 18a$$

تست : هرگاه سال نو با روز چهارشنبه آغاز شود ، در این سال 15 آبان چه روزی است؟ (آزاد ریاضی - ۶۹)

(۱) دوشنبه (۲) سه شنبه (۳) چهارشنبه (۴) پنجشنبه

پاسخ : ابتدا روز مشخص شده را به عنوان مبدا فرض کرده و عدد یک را به آن نسبت می دهیم، سپس بقیه روزهای هفته را مطابق با دایره ی روبرو شماره گذاری می کنیم.



حال فاصله ی تاریخ مشخص شده تا تاریخ خواسته شده را به روز حساب می کنیم که از اول سال نو (اول فروردین) تا 15 آبان به طور دقیق 231 روز است زیرا

$$\underbrace{6 \times 31}_{\text{بهار و تابستان}} + \underbrace{30}_{\text{مهر}} + \underbrace{15}_{\text{نصف آبان}} = 186 + 45 = 231$$

اکنون عدد 231 را به پیمانه ی 7 می سنجیم ، داریم : $231 \stackrel{7}{\equiv} 0$

لذا با توجه به جدول فوق عدد 0 ، متناظر با روز سه شنبه است.

قوانین بخش پذیری و پیدا کردن باقیمانده ها :

- (۱) کلیه ی اعداد صحیح بر 1 بخش پذیرند و لذا باقیمانده ی هر عدد صحیح بر 1 ، صفر است.
- (۲) عددی بر 2 بخش پذیر است که یکانش زوج باشد یعنی 0، 2، 4، 6 یا 8 باشد، لذا باقیمانده ی تقسیم هر عدد بر 2 برابر است با باقیمانده ی تقسیم رقم یکانش بر 2
- (۳) عددی بر 3 یا 9 بخش پذیر است که مجموع ارقامش بر 3 یا 9 بخش پذیر باشد و لذا باقیمانده ی تقسیم هر عدد بر 3 یا 9 بترتیب برابر است با باقیمانده ی تقسیم مجموع ارقامش بر 3 یا 9
- (۴) عددی بر 4 یا 25 بخش پذیر است که عدد حاصل از دو رقم سمت راستش بر 4 یا 25 بخش پذیر باشد و لذا باقیمانده ی تقسیم هر عدد بر 4 یا 25 برابر است با باقیمانده ی تقسیم عدد حاصل از دو رقم سمت راست آن عدد بر 4 یا 25 .

تذکر : نکته ی فوق در مورد دو عدد 20 و 50 نیز برقرار است.

✓ تذکر : اگر دو رقم سمت راست عددی هر دو صفر باشند، عدد مزبور هم بر 4 و هم بر 25 بخش پذیر است.

مثال : اعداد 88024 ، 99000 ، 188 بر 4 بخش پذیر و اعداد 25350 ، 3075 و ... بر 25 بخش پذیرند.

✓ تذکر : عددی بر 25 بخش پذیر است که دو رقم سمت راستش 00 ، 25 ، 50 یا 75 باشد.

(۵) عددی بر 5 بخشپذیر است که رقم یکانش 0 یا 5 باشد و لذا باقیمانده‌ی تقسیم هر عدد بر 5 برابر است با باقیمانده‌ی تقسیم رقم سمت راست عدد بر 5

(۶) عددی بر 6 بخشپذیر است که هم بر 2 و هم بر 3 بخشپذیر باشد.

✓ نکته : باقیمانده‌ی عدد $A = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0}$ بر 6 برابر است با باقیمانده‌ی تقسیم عدد حاصل از مجموع رقم یکان A بعلاوه‌ی 4 برابر مجموع بقیه‌ی ارقامش

$$A \equiv a_0 + 4(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \pmod{6}$$

یعنی :

مثال : باقیمانده‌ی عدد 2030047 بر 6 را بیابید؟

$$2030047 \equiv 7 + 4(4 + 0 + 0 + 3 + 0 + 2) = 43 \equiv 1 \pmod{6}$$

پاسخ :

بنابراین باقیمانده‌ی عدد 2030047 بر 6 یک است.

(۷) عددی بر 7 بخشپذیر است که اگر دو برابر رقم یکانش را از بقیه‌ی ارقامش کم کنیم، عدد حاصل بر 7 بخشپذیر باشد.

مثال : آیا عدد 497 بر 7 بخشپذیر است؟

پاسخ : بله بخشپذیر است زیرا : $49 - 2 \times 7 = 35$ و 35 بر 7 بخشپذیر است.

✓ تذکر : در مورد اعداد بزرگ، عمل فوق را متوالیاً تکرار می‌کنیم.

مثال : آیا عدد 4303 بر 7 بخشپذیر است.

$430 - 2 \times 3 = 424$ ، $42 - 2 \times 4 = 34$ ، خیر، زیرا 34 بر 7 بخشپذیر نیست.

✓ نکته : برای یافتن باقیمانده‌ی تقسیم هر عدد مانند $A = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0}$ بر 7 یا 13 یا 1001 ($1001 = 7 \times 11 \times 13$) ، کافی

است ارقام عدد A را از سمت راست، سه رقم سه رقم جدا کرده و سپس یکی در میان بعلاوه منها کرده و باقیمانده‌ی عدد حاصل را بر 7 یا 13 یا 1001 به دست آوریم، به عبارت دیگر باقیمانده‌ی تقسیم A بر 7 یا 13 یا 1001 برابر است با

باقیمانده‌ی $\dots - \overline{a_8 a_7 a_6} - \overline{a_5 a_4 a_3} - \overline{a_2 a_1 a_0}$ بر 7 یا 13 یا 1001 ، در واقع دقت کنید که : $1000 \equiv -1 \pmod{7}$ یا $1000 \equiv -1 \pmod{13}$

مثال : باقیمانده‌ی تقسیم عدد 1625731 بر 13 را بیابید؟

$$1,625,731 = 731 - 625 + 1 = 107 \equiv 3 \pmod{13}$$

$$\begin{array}{r} 107 \quad | \quad 13 \\ 104 \quad 8 \\ \hline 3 \end{array}$$

(۸) عددی بر 8 یا 125 ($8 \times 125 = 1000$) بخشپذیر است که عدد حاصل از سه رقم سمت راست آن عدد بر 8 یا 125 بخشپذیر باشد و لذا باقیمانده‌ی تقسیم هر عدد بر 8 یا 125 برابر است با باقیمانده‌ی تقسیم عدد حاصل از سه رقم سمت راست آن عدد بر 8 یا 125

✓ تذکر : اگر سه رقم سمت راست عددی هر سه، صفر باشند، عدد مزبور هم بر 8 و هم بر 125 بخشپذیر است.

مثال : اعداد 17888 ، 25000 و ... بر 8 بخشپذیرند و اعداد 31375 ، 220000 ، 471250 و ... بر 125 بخشپذیرند.

✓ نکته : برای یافتن باقیمانده‌ی تقسیم هر عدد مانند $A = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0}$ بر 8 ، طبق نکته‌ی فوق داریم :

$$A \equiv \overline{a_2 a_1 a_0} = a_0 + 10a_1 + 100a_2 \pmod{8}$$

$$A \equiv a_0 + 2a_1 + 4a_2 \pmod{8}$$

البته دقت کنید که $100 \equiv 4$ ، $10 \equiv 2 \pmod{8}$

لذا می توان گفت که باقیمانده ی تقسیم هر عدد بر 8 برابر است با باقیمانده ی تقسیم عدد حاصل از مجموع رقم یکان و دو برابر رقم دهگان و چهار برابر رقم صدگان آن عدد بر 8

مثال : باقیمانده ی تقسیم عدد 321897 را بر 8 بیابید؟

$$321897 \equiv 897 \equiv 7 + 2 \times 9 + 4 \times 8 \equiv -1 + 2(1) + 0 = 1$$

البته شاید گفته شود که چرا این همه زحمت بکشیم تا باقیمانده ی عدد 321897 را بر 8 اینگونه بیابیم، خوب می آئیم عدد 897 را بر 8 تقسیم می کنیم، اصلاً چرا این کار را انجام دهیم، می آئیم عدد 321897 را بر 8 تقسیم می کنیم، پاسخ شما این خواهد بود که خوب شما مختارید، اما روش ارائه شده، قابل تعمیم بوده و از آن برای بخش پذیری بر عدد 16، 32، ... به صورت زیر استفاده می کنیم.

✓ نکته : عددی بر $16=2^4$ بخش پذیر است که عدد حاصل از چهار رقم سمت راست عدد بر 16 بخش پذیر باشد، این مطلب

را می توان به صورت زیر با همنهستی نیز بیان کرد.

$$A = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_3 a_2 a_1 a_0} \equiv \overline{a_3 a_2 a_1 a_0} \pmod{16}$$

(۹) عددی بر 10 بخش پذیر است که رقم یکانش صفر باشد و بنابراین باقیمانده ی تقسیم هر عدد بر 10، همان رقم یکان عدد می باشد.
 مثال : رقم یکان عدد 19^{29} را بیابید؟

پاسخ : کافی است باقیمانده ی تقسیم عدد را بر 10 بیابیم، لذا داریم :

$$19^{29} \equiv (-1)^{29} = -1 \equiv 9 \pmod{10} \Rightarrow 19^{29} \equiv 9 \pmod{10}$$

(۱۰) عددی بر 11 بخش پذیر است که هرگاه ارقامش را از سمت راست، یکی در میان با یکدیگر جمع و تفریق کنیم، حاصل بر 11 بخش پذیر باشد، لذا باقیمانده ی تقسیم عدد $A = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0}$ بر 11 برابر است با باقیمانده ی تقسیم عدد

$$A \equiv a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots \pmod{11}$$
 یعنی : $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots$ بر 11.

$$A \equiv (a_0 + a_2 + a_4 + \dots) - (a_1 + a_3 + a_5 + \dots) \pmod{11}$$

ارقام با مکانهای فرد ارقام با مکانهای زوج

مثال : باقیمانده ی تقسیم عدد 77121 بر 11 را بیابید؟

پاسخ :

$$77121 \equiv (1+1+7) - (2+7) = 0 \pmod{11}$$

نتیجه : هر عدد به صورت $\overline{abcabc}$ بر 7 و 11 و 13 بخش پذیر است.

مثال : عدد 137137 بر 7 و 11 و 13 بخش پذیرند.

(۱۱) عددی بر 12 بخش پذیر است که بر 3 و 4 بخش پذیر باشد

عددی بر 14 بخش پذیر است که بر 2 و 7 بخش پذیر باشد

عددی بر 15 بخش پذیر است که بر 3 و 5 بخش پذیر باشد.

عددی بر 16 بخش پذیر است که چهار رقم سمت راستش بر 16 بخش پذیر باشد.

عددی بر 20 بخش پذیر است که بر 4 و 5 بخش پذیر باشد (نه البته بر 2 و 10)، زیرا 2 و 10 متباین نیستند.

عددی بر 30 بخش پذیر است که بر 2 و 3 و 5 بخش پذیر باشد.

(۱۲) باقیمانده ی تقسیم هر عدد مانند $A = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0}$ بر 27 یا 37 یا 999 ($999=27 \times 37$)، برابر است با باقیمانده تقسیم

عدد $\overline{a_8 a_7 a_6} + \overline{a_5 a_4 a_3} + \overline{a_2 a_1 a_0}$ بر 27 یا 37 یا 999

مثال : باقیمانده ی تقسیم عدد 421060 را بر 37 بیابید؟

پاسخ :

$$421060 \equiv 060 + 421 = 481 \equiv 0 \pmod{37}$$

دقت کنید که $481=13 \times 37$

(۱۳) باقیمانده ی تقسیم هر عدد مانند $A = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0}$ بر 101، برابر است با باقیمانده تقسیم عدد $\overline{a_1 a_0} - \overline{a_3 a_2} + \overline{a_5 a_4} \dots$ بر 101

مثال : آیا عدد 101202 بر 101 بخشپذیر است؟

پاسخ: بله، زیرا : $101202 \equiv 02 - 12 + 10 \equiv 0 \pmod{101}$

(۱۴) باقیمانده تقسیم هر عدد مانند $A = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0}$ بر 11 یا 33 یا 99 برابر است با باقیمانده تقسیم

$\overline{a_1 a_0} + \overline{a_3 a_2} + \overline{a_5 a_4} + \dots$ بر 11 یا 33 یا 99

مثال : باقیمانده عدد 37219 بر 33 را بیابید؟

$$37219 \equiv 19 + 72 + 3 \equiv 19 + 6 + 3 \equiv 28 \pmod{33}, (72 \equiv 6)$$

تست: به ازاء کدام مقدار b، عدد 5 رقمی $\overline{alaba}$ بر 7 بخشپذیر است؟ (سراسری ریاضی - 77)

(۱) 2 (۲) 5 (۳) 6 (۴) 8

پاسخ :

$$\overline{alaba} \equiv \overline{aba} - a1$$

$$= a + 10b + 100a - (1 + 10a)$$

$$\equiv 91a + 10b - 1$$

$$\equiv 0 + 3b - 1 \equiv 3b - 1 \equiv 0 \pmod{7}?$$

با امتحان کردن گزینه‌ها، $b = 5$ به دست می‌آید.

تست : چند عدد 9 رقمی، با رقمهای مساوی وجود دارد که بر 37 بخشپذیر باشد؟

(۱) 2 (۲) 3 (۳) 9 (۴) 4

$$\overline{aaaaaaaaa} \equiv \overline{aaa} + \overline{aaa} + \overline{aaa}$$

پاسخ :

$$= 3\overline{aaa}$$

$$= 3(a + 10a + 100a)$$

$$= 3(111a)$$

$$= 3 \times 3 \times 37a = 37 \text{ مضرب}$$

$$\equiv 0 \pmod{37}$$

یادآوری : مضارب هر عدد به پیمانه‌ی آن عدد، با صفر همنهشت اند.

پس a هر رقم غیر صفر می‌تواند باشد و بنابراین گزینه‌ی 3 صحیح است، در واقع کلیه‌ی اعداد 9 رقمی با ارقام مساوی، یعنی اعداد 111111111، 222222222، ...، 999999999، همگی بر 37 بخشپذیرند، ضمناً عدد 000000000، عددی 9 رقمی نیست و یک رقمی است.

✓ نتیجه : هر عدد 9 رقمی به صورت aaaaaaaaa هم بر 27 و هم بر 37 بخشپذیر است.

تست : به ازاء کدام مقدار x، عدد $\overline{12x572}$ بر 11 بخشپذیر است؟

(۱) 1 (۲) 2 (۳) 4 (۴) 0

پاسخ :

$$\begin{aligned} \overline{12x572}^{11} &\equiv (2+5+2) - (7+x+1) \\ &\equiv 1-x \end{aligned}$$

اکنون باید داشته باشیم : $1-x \equiv 0$ و بنابراین $x \equiv 1$ باشد در نتیجه $x=1$

تست : عدد 6 رقمی $\overline{5a7b24}$ بر 44 بخشپذیر است، باقیمانده‌ی تقسیم آن بر 9 کدام است؟ (سراسری ریاضی ۸۰)

(۱) 4 (۲) 3 (۳) ۲ (۴) ۱

✓ نکته : عددی بر 44 بخشپذیر است که هم بر 4 و هم بر 11 بخشپذیر باشد، اما عدد داده شده بر 4 بخشپذیر است (زیرا دو رقم سمت راستش بر 4 بخشپذیر است)، لذا کافی است بر 11 نیز بخشپذیر باشد یعنی :

$$\begin{aligned} \overline{5a7b24}^{11} &\equiv (4+b+a) - (2+7+5) \\ &\equiv a+b-10 \end{aligned}$$

$$a+b-10 \equiv 0$$

اکنون باید داشته باشیم :

$$a+b \equiv 10$$

حال برای یافتن باقیمانده تقسیم عدد داده شده بر 9، کافی است باقیمانده مجموع ارقام عدد را بر 9 بیاییم یعنی :

$$\begin{aligned} \overline{5a7b24}^9 &\equiv 5+7+2+4+a+b \\ &= 18+10 = 28 \equiv 1 \end{aligned}$$

و لذا گزینه‌ی 1 صحیح است .

(۱۵) باقیمانده تقسیم عدد $(a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0)_m$ در مبنای m بر $m-1$ برابر است با باقیمانده عدد $a_n + \dots + a_2 + a_1 + a_0$ بر $m-1$ مثال : باقیمانده تقسیم عدد $(15111311)_{11}$ بر 10 چیست؟

$$(15111311)_{11} \equiv 1+1+3+1+1+1+5+1 \equiv 14 \equiv 4$$

$$(23)_5 \equiv 2+3 = 5 \equiv 1$$

مثال : باقیمانده تقسیم عدد $(23)_5$ بر 4 چیست؟

$$(23)_5 \equiv 3+2 \times 5^1 = 13 \equiv 1$$

البته دقت کنید که :

(۱۶) باقیمانده تقسیم عدد $(a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0)_m$ بر $m+1$ برابر است با باقیمانده عدد $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots$ بر $m+1$.

مثال : باقیمانده تقسیم عدد 1497 بر 11 چیست؟

پاسخ :

$$1497 \equiv (7+4) - (9+1) \equiv 0 - 10 = -10 \equiv 1$$

یادآوری : قبلاً دیدیم که رابطه‌ی همنهشتی به پیمانه‌ی m روی $\mathbb{Z}$ ، یک رابطه‌ی هم ارزی است و مجموعه‌ی دسته‌های هم

$$\mathbb{Z}_m = \{[0]_m, [1]_m, \dots, [m-1]_m\}$$

ارزی در رابطه‌ی همنهشتی به پیمانه‌ی m عبارت بود از :

✓ نکته (قضیه) : هیچ دو عضوی از مجموعه‌ی $\{0, 1, 2, \dots, m-1\}$ با یکدیگر به پیمانه‌ی m در $\mathbb{Z}$ همنهشت نیستند (m یک عدد

طبیعی است)

✓ نتیجه : بنابر نکته‌ی فوق، تعداد دسته‌های هم ارزی در رابطه‌ی همنهشتی به پیمانه‌ی m ، حداقل m تاست.

✓ نکته : هر عدد صحیح a ، تنها با یکی و فقط یکی از اعضای مجموعه‌ی $X = \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$ به پیمانه‌ی m همنهشت

است زیرا، طبق قضیه تقسیم داریم : $a = mq + r, 0 \leq r < m \Leftrightarrow a \equiv r \pmod{m}$

✓ نکته : تعداد دسته‌های هم ارزی در رابطه‌ی هم‌نهشتی به پیمانه‌ی m دقیقاً، m تاست.

دسته‌ی کامل مانده‌ها (دسته‌ی کامل باقیمانده‌ها) :

مجموعه‌ای از اعداد صحیح مانند $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ را یک دسته‌ی کامل مانده‌ها در رابطه‌ی هم‌نهشتی به پیمانه‌ی m گوئیم هرگاه هر یک از اعضای X یک عضو از یک دسته‌ی هم‌نهشتی به پیمانه‌ی m باشد، به عبارت دیگر اگر ما از هر دسته‌ی هم ارزی در رابطه‌ی هم‌نهشتی به پیمانه‌ی m ، یک نماینده انتخاب کنیم، مجموعه‌ی متشکل از این نماینده‌ها، یک دسته‌ی کامل مانده‌ها در رابطه‌ی هم‌نهشتی به پیمانه‌ی m خواهد بود.

✓ نکته : مجموعه‌ی $C = \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$ ، یک دسته‌ی کامل مانده‌ها در رابطه‌ی هم‌نهشتی به پیمانه‌ی m می‌باشد، واضح است که اگر عدد m را به هر یک از اعضای C ، اضافه کنیم (یا کم کنیم)، مجموعه‌ی حاصل، یعنی مجموعه‌ی $\{m, m+1, \dots, 2m-1\}$ نیز یک دسته‌ی کامل مانده‌ها در رابطه‌ی هم‌نهشتی به پیمانه‌ی m خواهد بود.

مثال : به ازاء $m=5$ ، هر یک از مجموعه‌های $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ ، $\{5, 6, 7, 8, 9\}$ و $\{-5, -4, -3, -2, -1\}$ و ... یک دسته‌ی کامل مانده‌ها در هم‌نهشتی به پیمانه‌ی 5 می‌باشد.

✓ نتیجه : فرض می‌کنیم $m \in \mathbb{N}$ ، شرط لازم و کافی برای آنکه مجموعه‌ی $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ یک دسته‌ی کامل مانده‌ها در رابطه‌ی هم‌نهشتی به پیمانه‌ی 5 باشد، آنستکه هیچ دو عضوی از آن، به پیمانه‌ی m ، با یکدیگر هم‌نهشت نباشند.

تست : کدام یک از مجموعه‌های زیر یک دسته‌ی کامل مانده‌ها در هم‌نهشتی به پیمانه‌ی 5 می‌باشد؟

$$(1) \{0, 11, 13, 21, 32\} \quad (2) \{10, 21, 32, 43, 54\}$$

$$(3) \{3, 7, 11, 20\} \quad (4) \{2, 8, 9, 42, 53, 70\}$$

پاسخ : واضح است که گزینه‌ی 2 صحیح می‌باشد.

✓ نکته (قضیه) : فرض کنید $m \in \mathbb{N}$ و a و b دو عدد صحیح و نسبت به m اول باشد، a و m متباین باشند، در این صورت اگر مجموعه‌ی $C = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$ یک دسته‌ی کامل مانده‌ها در هم‌نهشتی به پیمانه‌ی m باشد آنگاه مجموعه‌ی زیر،

یعنی مجموعه‌ی $C' = \{ac_1 + b, ac_2 + b, \dots, ac_m + b\}$ نیز یک دسته‌ی کامل مانده‌ها در هم‌نهشتی به پیمانه‌ی m خواهد بود.

✓ تذکر : در حالت خاص اگر $b=0$ باشد، مجموعه‌ی $C' = \{ac_1, ac_2, \dots, ac_m\}$ ، یک دسته‌ی کامل مانده‌ها در هم‌نهشتی به پیمانه‌ی m خواهد بود.

مثال : اگر $m=5$ ، $a=8$ و $b=-3$ ، در این صورت، چون مجموعه‌ی $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ یک دسته‌ی کامل مانده‌ها، در هم‌نهشتی به

پیمانه‌ی 5 است و $(8, 5)=1$ ، لذا مجموعه‌ی $\{8(0)-3, 8(1)-3, 8(2)-3, 8(3)-3, 8(4)-3\}$ یا مجموعه‌ی

$\{-3, 5, 13, 21, 29\}$ نیز یک دسته‌ی کامل مانده‌ها در هم‌نهشتی به پیمانه‌ی 5 است.

تست : مجموعه‌ی همه‌ی دسته‌های هم ارزی در هم‌نهشتی به پیمانه‌ی 5، چنین است : $\{[0], [a], [a^2], [a^3], [a^4]\}$ ، مقدار a

کدام است؟

$$(1) 1 \quad (2) 2 \quad (3) 5 \quad (4) 4$$

پاسخ : با جایگذاری گزینه‌ها، به جای a ، پاسخ صحیح گزینه‌ی 2 می‌باشد.

تست : اگر مجموعه‌ی A یک دسته‌ی کامل مانده‌ها در هم‌نهشتی به پیمانه‌ی 9 باشد، به ازاء کدام مقدار a ، مجموعه‌ی

$\{ax + 7 : x \in A\}$ ، یک دسته‌ی کامل مانده‌ها در این هم‌نهشتی است؟

$$(1) 3 \quad (2) 6 \quad (3) 5 \quad (4) 12$$

پاسخ : چون $(5, 9)=1$ ، لذا طبق نکته قبل، گزینه‌ی 3 صحیح می‌باشد.

تست : هرگاه $[3x-1]_{10} = [7]_{10}$ ، در این صورت x کدام است؟

(۱) $10k+8$ (۲) $10k+7$ (۳) $10k+6$ (۴) $10k+5$

یادآوری : $[a]_m = [b]_m \Leftrightarrow a \equiv b^m$

پاسخ : $[3x-1]_{10} = [7]_{10} \Rightarrow 3x-1 \equiv 7^{10}$

$\Rightarrow 3x \equiv 8 \Rightarrow 3x \equiv 8+10 \Rightarrow 3x \equiv 18^{10}$

$\xrightarrow{(3,10)=1} x \equiv 6^{10} \Rightarrow x = 10k+6$

یادآوری : $a \equiv b^m \Rightarrow a \equiv b \pm mk$

تست : هرگاه $[2]_7$ دسته‌ی هم ارزی 2 در هم‌نهشتی به پیمانه‌ی 7 و $[5]_3$ دسته‌ی هم ارزی 5 در هم‌نهشتی به پیمانه‌ی 3 باشند،

$[2]_7 \cap [5]_3$ کدام است؟

(۱) $x=21k+1$ (۲) $x=21k+2$ (۳) $x=21k+3$ (۴) $x=21k+7$

یادآوری : $[a]_m \cap [a]_n = [a]_c, (c=[m,n])$

پاسخ : $5 \equiv 2 \Rightarrow [5]_3 = [2]_3 \Rightarrow$

$[5]_3 \cap [2]_7 = [2]_3 \cap [2]_7 = [2]_{21}$

$= \{x : x \equiv 2^{21}\} = \{x : x = 21k+2\}$

قضیه‌ی اوایلر : هرگاه m عددی طبیعی و a عددی صحیح باشد ، به طوریکه $(a,m)=1$ ، آنگاه $a^{\varphi(m)} \equiv 1^m$

✓ **تذکر :** با تابع φ (φ ی اوایلر) در مبحث ترکیبیات آشنا خواهید شد ، در واقع هرگاه m عددی طبیعی باشد، منظور از $\varphi(m)$ تعداد اعداد طبیعی کوچکتر از m است که با m متباین باشند.

مثال: $\varphi(6)=2$ زیرا اعداد طبیعی کوچکتر از 6 عبارتند از: $\{1,2,3,4,5\}$ و از بین این اعداد فقط دو عدد 1 و 5 هستند که با 6 متباین‌اند.

تست : باقیمانده تقسیم عدد 803^{82} بر 24 چیست؟

(۱) 23 (۲) 0 (۳) 1 (۴) 15

پاسخ : $(24, 803) = 1, \varphi(24) = 8 \xrightarrow{\text{طبق اوایلر}} 803^{\varphi(24)} \equiv 1^{24}$

$\Rightarrow 803^8 \equiv 1 \xrightarrow{\text{به توان 10}} 803^{80} \equiv 1 \xrightarrow{\times (803)^2} 803^{82} \equiv 803^2$

اما $803 \equiv 11^{24}$ لذا $803^2 \equiv 121 \equiv 1^{24}$ ، بنابراین $803^{82} \equiv 1$ و در نتیجه باقیمانده تقسیم عدد 803^{82} بر 24 ، برابر 1 است .

✓ **نکته :** اگر p عددی اول باشد ، آنگاه $\varphi(p)=p-1$

قضیه‌ی فرما : (نتیجه‌ی قضیه‌ی اوایلر)

هرگاه p عددی اول و a عددی صحیح باشد ، به طوریکه $(a,p)=1$ ، آنگاه :

$a^{p-1} \equiv 1^p$ یا $a^{p-1} - 1$ بر p بخش پذیر است.

یا باقیمانده‌ی a^{p-1} بر p برابر 1 است.

اثبات : روش اول : با توجه به قضیه اوایلر و نکته قبل، اثبات بدیهی است.

روش دوم : می‌دانیم مجموعه‌ی $X = \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$ یک دسته‌ی کامل مانده‌ها در هم‌نهشتی به پیمانه‌ی p است، اما با توجه به اینکه $(a, p) = 1$ ، نتیجه می‌شود که مجموعه‌ی $Y = \{0, a, 2a, \dots, (p-1)a\}$ نیز یک دسته کامل مانده‌ها در این هم‌نهشتی است. بنابراین هر عضو X با یک و فقط یک عضو Y به پیمانه‌ی p هم‌نهشت است و بالعکس، چون 0 در هر دو مجموعه مشترک است 0 را حذف کرده و لذا نتیجه می‌شود که هر یک از اعداد $1, 2, 3, \dots, p-1$ با یک و فقط یکی از اعداد $a, 2a, \dots, (p-1)a$ هم‌نهشت است و بالعکس، بنابراین حاصلضربشان نیز با یکدیگر به پیمانه‌ی p هم‌نهشتند، یعنی :

$$1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (p-1) \equiv a \times 2a \times \dots \times (p-1)a$$

$$(p-1)! \equiv (p-1)! a^{p-1}$$

$$\xrightarrow[\div (p-1)!]{(p, (p-1)!) = 1} a^{p-1} \equiv 1$$

توجه کنید که $(p-1)! \nmid p$ ، لذا $(p, (p-1)!) = 1$

تست: باقیمانده‌ی تقسیم $4^{21} + 7$ بر 11 کدام است؟

1 (۴)

10 (۳)

2 (۲)

0 (۱)

$$\stackrel{\text{فرما}}{\Rightarrow} 4^{11-1} \equiv 1 \Rightarrow 4^{10} \equiv 1 \Rightarrow (4^{10})^2 \equiv 1^2$$

پاسخ :

$$\Rightarrow 4^{20} \equiv 1 \xrightarrow{\times 4} 4^{21} \equiv 4 \xrightarrow{+7} 4^{21} + 7 \equiv 4 + 7$$

$$4^{21} + 7 \equiv 11$$

تست: باقیمانده‌ی عبارت $A = 1^{12} + 2^{12} + \dots + 20^{12}$ بر 13 کدام است؟

7 (۴)

11 (۳)

1 (۲)

4 (۱)

$$A \equiv 1^{13} + 1 + \dots + 1 + 0 + \dots + 1 \equiv 19 \equiv 6$$

پاسخ : طبق قضیه‌ی فرما داریم :

$$m^n \equiv 0 \quad \text{یادآوری:}$$

$$P \mid a^p - a \quad \text{یا} \quad a^p \equiv a$$

نتیجه قضیه‌ی فرما : هرگاه P عددی اول و a عددی صحیح باشد، آنگاه :

تست : باقیمانده‌ی عدد $A = 2^7 + 3^7 + 4^7$ بر 7 کدام است؟

5 (۴)

1 (۳)

0 (۲)

2 (۱)

پاسخ :

$$2^7 \equiv 2$$

$$3^7 \equiv 3$$

$$4^7 \equiv 4$$

$$+ \quad A \equiv 2 + 3 + 4 \Rightarrow A \equiv 9 \equiv 2$$

$$A \equiv 2 + 3 + 4 = 9 \equiv 2$$

راه کوتاه

تست : باقیمانده‌ی عدد $A = 1^{19} + 2^{19} + \dots + 18^{19}$ بر 19 کدام است؟

0 (۴)

9 (۳)

1 (۲)

18 (۱)

پاسخ : طبق نتیجه فرما داریم :

$$\begin{aligned} A &\equiv 1 + 2 + \dots + 18 \\ &= \frac{18 \times 19}{2} = 9 \times 19 \equiv 0 \end{aligned}$$

لذا گزینه ی ۴ صحیح است.

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{یادآوری :}$$

یادآوری : مضارب هر عدد به پیمانه ی همان عدد با صفر همنهشتند.

مثال : هرگاه $(n, 17) = (m, 17) = 1$ ، ثابت کنید: $17 \mid m^{16} - n^{16}$

اثبات : طبق قضیه ی فرما داریم :

$$\begin{aligned} \begin{cases} m^{17-1} \equiv 1 \\ n^{17-1} \equiv 1 \end{cases} &\equiv \begin{cases} m^{16} \equiv 1 \\ n^{16} \equiv 1 \end{cases} \\ m^{16} - n^{16} &\equiv 0 \equiv 17 \mid m^{16} - n^{16} \quad \text{آنگاه} \end{aligned}$$

مثال : هرگاه p و q دو عدد اول متمایز باشند، ثابت کنید :

$$p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1 \quad p, q$$

$$\begin{cases} \text{اول } p \\ (p, q) = 1 \end{cases} \xRightarrow{\text{فرما}} \begin{cases} q^{p-1} \equiv 1 \\ p^{q-1} \equiv 0 \end{cases}$$

اثبات:

$$p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1 \quad \text{آنگاه}$$

$$p \mid p^{q-1} + q^{p-1} - 1 \quad (1)$$

$$\begin{cases} \text{اول } q \\ (p, q) = 1 \end{cases} \xRightarrow{\text{فرما}} \begin{cases} p^{q-1} \equiv 1 \\ q^{p-1} \equiv 0 \end{cases}$$

$$p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1$$

$$\Rightarrow q \mid p^{q-1} + q^{p-1} - 1 \quad (2)$$

$$(1), (2), (p, q) = 1 \Rightarrow pq \mid p^{q-1} + q^{p-1} - 1$$

$$\Rightarrow p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1 \quad p, q$$

قضیه ی ویلسون :

$$P \mid (p-1)! + 1 \quad \text{یا} \quad (p-1)! \equiv -1 \quad p$$

هرگاه عدد p عددی اول باشد ، آنگاه :

$$5 \mid (5-1)! + 1$$

مثال :

تست : باقیمانده‌ی تقسیم $A = 2^{18!} - 1 + 5(18!)$ بر 19 کدام است؟

12 (۱) 14 (۲) 13 (۳) 11 (۴)

پاسخ :

$$p = 19 \xRightarrow{\text{ویلسون}} (19-1)! \equiv -1 \Rightarrow 18! \equiv -1$$

$$p = 19, (2, 19) = 1 \xRightarrow{\text{فرما}} 2^{19-1} \equiv 1 \Rightarrow 2^{18} \equiv 1$$

$$\Rightarrow A = 2^{18!} - 1 + 5(18!) \equiv (2^{18})^{17!} - 1 + 5(18!)$$

$$\equiv 1^{17!} - 1 + 5(-1)$$

$$\equiv 1 - 1 - 5$$

$$\equiv -5$$

$$\equiv 14$$

رقم یکان : همانطور که قبلاً نیز دیدیم، رقم یکان هر عدد (رقم سمت راست هر عدد)، همان باقیمانده‌ی تقسیم عدد بر 10 است. مثال :

باقیمانده عدد بر 10	رقم یکان	عدد
1	1	371
2	2	792
0	0	70050

بنابراین برای یافتن رقم یکان هر عدد، کافی است باقیمانده‌ی تقسیم آن عدد بر 10 را بیابیم.

مثال : رقم یکان عدد $9^{10} + 11$ را بیابید؟

پاسخ :

$$9^{10} + 11 \equiv (-1)^{10} + 11 = 12 \equiv 2$$

نکاتی راجع به رقم یکان یک عدد

(۱) برای تعیین رقم یکان هر عدد، کافی است باقی مانده‌ی تقسیم عدد بر 10 را بیابیم

(۲) هرگاه رقم یکان عددی 0 یا 1 یا 5 یا 6 باشد، به هر توانی که برسد، رقم یکانش ثابت می‌ماند.

تست: رقم یکان $555^{666} + 666^{555}$ کدام است؟

1 (۱) 0 (۲) 9 (۳) 2 (۴)

پاسخ :

$$555^{666} + 666^{555} \equiv 5 + 6 = 11 \equiv 1$$

(۳) اگر رقم یکان عددی 4 باشد، به توان زوج که برسد، رقم یکانش 6 و به توان فرد که برسد، رقم یکانش مجدداً 4 می‌شود.

تست: رقم یکان 4^{n^2+n} کدام است؟

6 (۱) 1 (۲) 4 (۳) 7 (۴)

پاسخ :

$$4^{n^2+n} = 4^{n(n+1)} = 4^{\text{زوج}} \equiv 6$$

یادآوری: حاصلضرب دو عدد متوالی، همیشه زوج است.

(۴) اگر رقم یکان عددی 9 باشد، به توان زوج که برسد، رقم یکانش 1 و به توان فرد که برسد، رقم یکانش مجدداً 9 میشود.

(۵) برای بدست آوردن رقم یکان توان n ام هر عدد چند رقمی، مثلاً رقم یکان $abcd^n$ ، کافی است رقم یکان d^n را حساب کنیم

۶) اگر رقم یکان عددی 7 باشد، برای تعیین رقم یکان 7^n از همنهشتی $7^2 \equiv -1$ استفاده می‌کنیم.
تست: رقم یکان 7^{19} را بیابید؟

7 (۱) 1 (۲) 9 (۳) 3 (۴)

پاسخ: $77^{19} \equiv 7^{19} \equiv (7^2)^9 \times 7 \equiv (-1)^9 \times 7 \equiv -7 \equiv 3$

۷) اگر رقم یکان عددی 3 باشد، برای تعیین رقم یکان 3^n از همنهشتی $3^2 \equiv -1$ استفاده می‌کنیم (البته می‌توانیم از قاعده‌ی 9 به صورت زیر استفاده کنیم)

تست: رقم یکان 3^{21} کدام است؟

9 (۱) 3 (۲) 1 (۳) 7 (۴)

پاسخ:

$$\longrightarrow 3^{21} = (3^2)^{10} \times 3 \equiv (-1)^{10} \times 3 \equiv 3$$

$$\longrightarrow 3^{21} = (3^2)^{10} \times 3 \equiv 9^{10} \times 3 \equiv 9^{\text{زوج}} \times 3 \equiv 1 \times 3 = 3$$

۸) اگر رقم یکان عددی 2 یا 8 باشد، برای محاسبه‌ی رقم یکان 2^n ، 8^n می‌توانیم از قاعده‌ی 4 به صورت زیر استفاده کنیم.
تست: رقم یکان عدد 238^{17} کدام است؟

8 (۱) 2 (۲) 4 (۳) 6 (۴)

$$238^{17} \equiv 8^{17} \equiv (2^3)^{17} \equiv 2^{51} \equiv (2^2)^{25} \times 2$$

$$\equiv 4^{\text{فرد}} \times 2 \equiv 4 \times 2 \equiv 8$$

۹) قضیه‌ی نیوتن (بسیار بسیار مهم): رقم یکان هر عدد، با رقم یکان توان پنجم آن عدد برابر است، به عبارت دیگر رقم

یکان اعداد توان دار، هر 4 مرتبه یک بار تکرار میشود، یعنی $\forall a \in \mathbb{N} : a^{n+4} \equiv a^n$

۱۰) نتیجه‌ی قضیه‌ی نیوتن (بسیار بسیار مهم): هرگاه بخواهیم باقیمانده‌ی تقسیم a^n بر 10 را بیابیم (رقم سمت راست یا رقم یکان a^n را بیابیم)، کافی است عدد n را بر 4 تقسیم کرده، در صورتی که باقیمانده‌ی تقسیم 1 یا 2 یا 3 شود، رقم یکان a^n ، به ترتیب همان رقم یکان a^1 ، a^2 ، a^3 بوده و اگر باقیمانده‌ی تقسیم n بر 4، صفر شود، رقم یکان a^n ، همان رقم یکان a^4 خواهد بود، به عبارت دیگر، ابتدا n را بر 4 تقسیم کرده، باقیمانده‌ی تقسیم n را بر 4 بدست آورده، آن را r می‌نامیم، اکنون به صورت زیر عمل می‌کنیم.

الف) اگر $r=1$ باشد، آنگاه رقم یکان a^n با رقم یکان a^1 برابر میشود.

ب) اگر $r=2$ باشد، آنگاه رقم یکان a^n با رقم یکان a^2 برابر میشود.

ج) اگر $r=3$ باشد، آنگاه رقم یکان a^n با رقم یکان a^3 برابر میشود.

د) اگر $r=0$ باشد، آنگاه رقم یکان a^n با رقم یکان a^4 برابر میشود.

تست: رقم یکان 8^{17} کدام است؟

8 (۱) 2 (۲) 6 (۳) 4 (۴)

$$\begin{array}{r} 17 \overline{)4} \\ -16 \\ \hline 1 \end{array} \longrightarrow 8^{17} \equiv 8^1 = 8$$

پاسخ:

تست : رقم یکان 152^{28} کدام است؟

- (۱) 7 (۲) 3 (۳) 6 (۴) 9

پاسخ :

$$\begin{array}{r} 28 \overline{) 4} \\ 28 \overline{) 7} \\ 0 \leftarrow \end{array}$$

$$\Rightarrow 152^{28} \equiv 152^4 \equiv 2^4 = 16 \equiv 6$$

تست : رقم یکان 1383^{1384} کدام است؟

- (۱) 1 (۲) 3 (۳) 9 (۴) 6

پاسخ :

$$\begin{array}{r} 1384 \overline{) 4} \\ 0 \overline{) \dots} \leftarrow \end{array}$$

$$\Rightarrow 1383^{1384} \equiv 1383^4 \equiv 3^4 = 81 \equiv 1$$

(۱۱) رقم یکان $n!$ به ازاء $n \geq 5$ ، برابر صفر است، دقت کنید :

$$5! = 120, 6! = 720, \dots$$

تست : هرگاه $s = \sum_{n=0}^{200} n!$ ، رقم یکان s^2 ، کدام است؟

- (۱) 4 (۲) 1 (۳) 7 (۴) 6

پاسخ :

$$s = 0! + 1! + 2! + 3! + 4! + 5! + 6! + \dots + 200!$$

$$\equiv 1 + 1 + 2 + 6 + 24 + 0 + 0 + \dots + 0$$

$$= 34$$

$$\equiv 4 \Rightarrow s \equiv 4 \Rightarrow s^2 \equiv 16 \equiv 6$$

(۱۲) هرگاه دو عدد a و b رقم یکان مساوی داشته باشند، در این صورت باقیمانده‌ی تقسیمشان بر 10 ، با یکدیگر برابر خواهد بود.تست : هرگاه دو عدد $3a+5$ و $4a-1$ ، رقم یکان مساوی داشته باشند، رقم یکان $8a+7$ چیست؟

- (۱) 0 (۲) 2 (۳) 5 (۴) 1

پاسخ : طبق نکته‌ی قبل داریم :

$$4a - 1 \equiv 3a + 5$$

$$4a - 3a \equiv 5 + 1$$

$$a \equiv 6 \xrightarrow{\times 8} 8a \equiv 48 \xrightarrow{+7}$$

$$8a + 7 \equiv 55 \equiv 5$$

چند تست جالبتست : رقم یکان عدد 9^{9^9} کدام است؟

- (۱) 1 (۲) 9 (۳) 8 (۴) 3

پاسخ :

$$9^9 = \Rightarrow 9^{9^9} \equiv 9^{10} \equiv 9$$

تست : رقم یکان 7^{7^7} کدام است؟

- (۱) 4 (۲) 7 (۳) 3 (۴) 9

پاسخ : ابتدا باقیمانده‌ی 7^7 بر 4 را به دست آورده، سپس از قضیه نیوتن استفاده می‌کنیم.

$$7^2 \equiv 1 \xrightarrow{\text{به توان 3}} 7^6 \equiv 1 \xrightarrow{\times 7} 7^7 \equiv 7 \equiv 3$$

$$\Rightarrow 7^7 \equiv 3 \xrightarrow{\text{طبق نیوتن}} 7^{7^{10}} \equiv 3^{10} \equiv 7^2 \times 7$$

$$\Rightarrow 7^{7^{10}} \equiv -1 \times 7 = -7 \equiv 3$$

تست : رقم یکان عدد $823^{513^{709}}$ کدام است؟

- (۱) 9 (۲) 3 (۳) 1 (۴) 7

پاسخ : ابتدا باقیمانده‌ی تقسیم 513^{709} بر 4 را به دست آورده، سپس از قضیه‌ی نیوتن استفاده می‌کنیم.

$$513 \equiv 13 \equiv 1 \Rightarrow 513^{709} \equiv 1^{709} \Rightarrow 513^{709} \equiv 1$$

$$\xrightarrow{\text{طبق نیوتن}} 823^{513^{709}} \equiv 823^1 \equiv 3$$

تست : رقم یکان عدد $A = 1^{1385} + 2^{1385} + \dots + 1385^{1385}$ چیست؟

- (۱) 0 (۲) 6 (۳) 5 (۴) 1

پاسخ :

$$\begin{aligned} 1385 \overline{)4} & \longrightarrow A \equiv 1^{10} + 2^1 + 3^1 + \dots + 1385^1 \\ 1 \quad \dots & \\ A & \equiv \frac{10 \cdot 1385 \times 1386}{2} \\ & \equiv 5 \times 693 \equiv 5 \times 3 \equiv 5 \end{aligned}$$

تست : رقم یکان عدد $3127^{(1801)!}$ کدام است؟

- (۱) 7 (۲) 3 (۳) 9 (۴) 1

پاسخ : می‌دانیم باقیمانده $3127^{(1801)!}$ بر 4 ، صفر است لذا طبق قضیه‌ی نیوتن برای محاسبه‌ی رقم یکان ، کافی

$$3127^4 \equiv 7^4 \equiv (7^2)^2 \equiv 9^2 \equiv 81 \equiv 1$$

است رقم یکان 3127^4 را حساب کنیم بنابراین داریم :

تست : باقیمانده‌ی تقسیم عدد $A = 1! + 2! + 3! + \dots + 100!$ بر 12 کدام است؟

- (۱) 0 (۲) 3 (۳) 2 (۴) 9

پاسخ : دقت کنید که عدد $n!$ به ازاء $n \geq 4$ بر 12 بخشپذیر است (زیرا 4 و 3 دارد)

$$A \equiv 1^{12} + 2 + 6 + 0 + 0 + \dots + 0 \equiv 9$$

لذا داریم :

معادله‌ی سیاله‌ی خطی درجه‌ی اول دو مجهولی $ax+by=c$:

هر معادله به فرم $ax+by=c$ را که در آن $a, b, c \in \mathbb{Z}$ اعداد ثابت و x, y اعداد صحیح مجهول هستند را، یک معادله‌ی سیاله‌ی خطی درجه‌ی اول دو مجهولی می‌گوئیم، هدف از حل این معادله در $\mathbb{Z}$ ، یافتن دو عدد صحیح مانند x_0 و y_0 است که در معادله صدق کنند، یعنی $ax_0+by_0=c$

$$\begin{cases} x_0 = 3 \\ y_0 = 1 \end{cases}$$

مثال : یکی از جوابهای معادله‌ی سیاله‌ی $2x+3y=9$ عبارتست از :

✓ نکته : هر معادله‌ی سیاله‌ی خطی، مانند $ax+by=c$ ، در $\mathbb{R}$ بی شمار جواب دارد در واقع کافی است به جای یکی از متغیرها، عدد گذاشته و مقدار متغیر دیگر را به دست آوریم

مثال : تعدادی از جوابهای معادله سیاله‌ی خطی $3x+6y=7$ در $\mathbb{R}$ عبارتند از : $\dots, (-1, \frac{10}{6}), (1, \frac{4}{6}), (0, \frac{7}{6})$

اما همانطور که تا چند لحظه‌ی دیگر خواهید دید، معادله‌ی فوق در $\mathbb{Z}$ ، اصلاً جواب ندارد، اما چگونه می‌توان فهمید که یک معادله‌ی سیاله مانند $ax+by=c$ در $\mathbb{Z}$ جواب دارد یا ندارد، به قضیه زیر توجه کنید :

✓ نکته : قضیه : شرط لازم و کافی برای آنکه معادله‌ی سیاله‌ی خطی $ax+by=c$ در $\mathbb{Z}$ جواب داشته باشد آنستکه بزرگترین مقسوم علیه مشترک a و b ، عدد c را عاد کند

✓ تذکر مهم : در معادله‌ی $ax+by=c$ ، هرگاه $(a,b)=1$ ، آنگاه معادله صد در صد در $\mathbb{Z}$ جواب دارد.

تست : کدام معادله در $\mathbb{Z}$ جواب دارد؟

$$(1) \quad 12x+30y=70 \quad (2) \quad 4x+8y=2 \quad (3) \quad 8x+9y=1 \quad (4) \quad 5x+25y=11$$

پاسخ : با توجه به قضیه‌ی قبل، پاسخ صحیح گزینه‌ی ۳ می‌باشد، زیرا : $(8,9)|1$

تست : به ازاء کدام مقدار b ، معادله‌ی سیاله‌ی $(15+b)x+by=20$ ، در مجموعه‌ی اعداد صحیح، جواب دارد؟

$$(1) \quad 3 \quad (2) \quad 5 \quad (3) \quad 15 \quad (4) \quad 30$$

پاسخ : باید بزرگترین مقسوم علیه مشترک $15+b$ و b ، عدد 20 را عاد کند، با امتحان کردن گزینه‌ها، پاسخ صحیح، $b=5$ می‌باشد.

تست : به ازاء کدام مقدار n ، معادله‌ی سیاله‌ی $60x+84y=5n-1$ در $\mathbb{Z}$ دارای جواب است؟

$$(1) \quad 33 \quad (2) \quad 23 \quad (3) \quad 29 \quad (4) \quad 13$$

پاسخ : باید داشته باشیم :

$$(60,84)|5n-1 \quad \text{و لذا :} \quad 12|5n-1$$

با امتحان کردن گزینه‌ها، پاسخ صحیح $n=29$ می‌باشد.

✓ نکته : قضیه : هرگاه x_0 و y_0 یک جواب معادله‌ی سیاله‌ی $ax+by=c$ در $\mathbb{Z}$ باشد، آنگاه کلیه‌ی جوابهای معادله‌ی مزبور

در $\mathbb{Z}$ از دستور زیر به دست می‌آیند که در آن $(a,b)=d, k \in \mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z} \quad ax+by=c \quad \text{جوابهای کلی معادله ی سیاله ی} \quad : \quad \begin{cases} x = x_0 + k \frac{b}{d} \\ y = y_0 - k \frac{a}{d} \end{cases}$$

به عبارت دیگر برای یافتن جوابهای عمومی (کلی)، ابتدا به روش جست و جو یکی از جوابها مثلاً (x_0, y_0) را حدس زده، سپس در دو فرمول بالا قرار می‌دهیم.

✓ تذکر : در معادله‌ی $ax+by=c$ ، هرگاه $(a,b)=1$ ، آنگاه فرمولهای قبل به صورت ساده شده‌ی زیر درمی‌آیند :

$$\begin{cases} x = x_0 + kb \\ y = y_0 - ka \end{cases}$$

مثال : جوابهای کلی (عمومی) معادله‌ی سیاله‌ی $2x+3y=7$ را بیابید؟

پاسخ: بابتی تأمل، دیده میشود که $x_0=-1$ و $y_0=3$ ، یکی از جوابهای صحیح معادله است، لذا با توجه به اینکه $d=(2,3)=1$ داریم:

$$\begin{cases} x = x_0 + kb \\ y = y_0 - ka \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 + 3k \\ y = 3 - 2k \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$$

این توجه را نیز داشته باشید که این جوابها در معادله‌ی داده شده صدق می‌کنند، دقت کنید :

$$2x + 3y = 7 \Rightarrow 2(-1 + 3k) + 3(3 - 2k) = 7$$

$$-2 + 6k + 9 - 6k = 7 \Rightarrow 7 = 7$$

✓ نکته : معادله سیاله‌ای $ax+by=c$ در $\mathbb{Z}$ یا اصلاً جواب ندارد $((a,b) \nmid c)$ و یا اگر جواب داشته باشد، بیشمار جواب دارد که برای یافتن آن بیشمار جواب کافی است، در جوابهای کلی، به جای k ، مقادیر صحیح قرار دهیم.

حل معادله سیاله در $\mathbb{Z}$

هرگاه معادله سیاله‌ای در $\mathbb{Z}$ دارای جواب باشد، ابتدا ضرایب معادله را در صورت ساده شدن، ساده کرده، سپس متغیری را که ضریبش از لحاظ قدر مطلق کوچکتر است، بر حسب متغیر دیگر به دست آورده، قسمت صحیح کسر حاصل را جدا نموده و قسمت باقیمانده را برابر عددی صحیح مانند k قرار می‌دهیم، معادله جدید را به طریق مشابه حل می‌کنیم و این عمل را تا آنجا ادامه می‌دهیم که در معادلات به دست آمده، قسمت کسری باقی نماند.

مثال : معادله $4x + 6y = 10$ را در $\mathbb{Z}$ حل کنید؟

$$\xrightarrow{+2} 2x + 3y = 5 \Rightarrow 2x = 5 - 3y \Rightarrow x = \frac{5-3y}{2}$$

$$x = \frac{4+1-2y-y}{2} = 2 - y + \frac{1-y}{2} \quad (1)$$

اکنون فرض می‌کنیم : $\frac{1-y}{2} = k$ و $k \in \mathbb{Z}$ در این صورت داریم :

$$1 - y = 2k \Rightarrow y = 1 - 2k, k \in \mathbb{Z}$$

$$(1) \Rightarrow x = 2 - (1 - 2k) + k = 3k + 1$$

$$\begin{cases} x = 3k + 1 \\ y = 1 - 2k \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$$

بنابراین جوابهای کلی معادله فوق در $\mathbb{Z}$ ، عبارتند از :

راه کوتاه : یک جواب را حدس زده در فرمولهای کلی قرار می‌دهیم.

$$2x + 3y = 5 \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 1 \end{cases}, (2, 3) = 1$$

$$\begin{cases} x = x_0 - kb \\ y = y_0 + ka \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - 3k \\ y = 1 + 2k \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$$

ممکن است این تصور پیش آید که چرا این جوابها، با جوابهای قبلی، کمی تفاوت دارند، برای رفع این ابهام، اگر فرض کنید

$$\begin{cases} x = 1 - 3k = 1 + 3k' \\ y = 1 + 2k = 1 - 2k' \end{cases}, (k' \in \mathbb{Z})$$

$k' = -k$ آنگاه داریم :

که همان جوابهای قبلی می‌باشند.

مثال : ریشه‌های صحیح معادله زیر را بیابید؟

$$7x + 11y = 9 \Rightarrow x = \frac{9-11y}{7} = \frac{7+2-14y+3y}{7}$$

$$\Rightarrow x = 1 - 2y + \frac{3y+2}{7} \quad (1)$$

$$\frac{3y+2}{7} = k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow 3y+2 = 7k$$

$$y = \frac{7k-2}{3} = \frac{6k+k-3+1}{3} = 2k - 1 + \frac{k+1}{3} \quad (2)$$

$$\frac{k+1}{3} = t, t \in \mathbb{Z} \Rightarrow k+1 = 3t$$

$$\Rightarrow k = 3t - 1 \quad (3)$$

$$(2) \xrightarrow{(3)} y = 2(3t-1) - 1 + t = 7t - 3$$

$$(1) \xrightarrow{(2)} x = 1 - 2(7t-3) + 3t - 1$$

$$\Rightarrow x = -11t + 6$$

$$\begin{cases} x = -11t + 6 \\ y = 7t - 3 \end{cases}, t \in \mathbb{Z}$$

لذا جوابهای عمومی معادله عبارتند از :

برای اطمینان از صحت جوابهای به دست آمده، کافی است جوابها را در معادله امتحان کنید.

✓ نکته : هرگاه در معادله سیاله‌ی $ax+by=c$ ، c بر a یا b بخشپذیر باشد، روش جست و جو بهترین راه حل برای یافتن یک جواب و در نتیجه جوابهای کلی معادله است در واقع در این حالت داریم :

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{c}{a} \\ y_0 = 0 \end{cases} \quad \text{(یک جواب معادله)} \quad \checkmark \text{ اگر } c \text{ بر } a \text{ بخشپذیر باشد}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = \frac{c}{b} \end{cases} \quad \text{(یک جواب معادله)} \quad \checkmark \text{ اگر } c \text{ بر } b \text{ بخشپذیر باشد}$$

مثال : جوابهای کلی معادله‌ی $2x+3y=9$ را بیابید؟

پاسخ : چون 9 بر 3 بخشپذیر است لذا، کافی است به $x=0$ دهیم و y را حساب کنیم :

$$x=0 \Rightarrow y_0=3 \Rightarrow \begin{cases} x_0=0 \\ y_0=3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + kb \\ y = y_0 - ka \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 + 3k \\ y = 3 - 2k \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$$

تست : هرگاه x و y جوابهای معادله‌ی سیاله‌ی $11x+9y=18$ باشند، $x+y$ کدام است؟

$$2-2k \quad (1) \qquad 3-2k \quad (2) \qquad 2-3k \quad (3) \qquad 3-3k \quad (4)$$

پاسخ :

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 + 9k \\ y = 2 - 11k \end{cases} \quad + \quad \begin{matrix} x + y = 2 - 2k \end{matrix}$$

معادله‌ی همنهشتی درجه‌ی اول :

هر معادله به صورت $ax \equiv b^m$ را که در آن a و b اعداد صحیح، m عددی طبیعی و x مجهول معادله است، یک معادله‌ی همنهشتی درجه‌ی اول گویند، اگر x_0 ای صحیح وجود داشته باشد که در معادله صدق کند، گوئیم معادله در $\mathbb{Z}$ دارای جواب است.

مثال : معادله‌ی همنهشتی $4x \equiv 5^7$ دارای جواب است زیرا $x=3$ در معادله صدق می‌کند.

✓ نکته : هر معادله‌ی همنهشتی با یک معادله‌ی سیاله هم ارز است.

$$ax \equiv b^m \Leftrightarrow m|ax - b \Leftrightarrow ax - b = my \Leftrightarrow ax - my = b$$

توجه کنید :

✓ نتیجه : معادله‌ی همنهشتی $ax \equiv b^m$ در $\mathbb{Z}$ دارای جواب است اگر و تنها اگر که معادله‌ی سیاله‌ی $ax-my=b$ در $\mathbb{Z}$ دارای جواب باشد (اما از قبل می‌دانیم که معادله‌ی $ax-my=b$ در $\mathbb{Z}$ هنگامی جواب دارد که $(a, -m) = (a, m) | b$ ، بنابراین می‌توان گفت:

✓ نکته‌ی مهم : معادله‌ی $ax \equiv b^m$ دارای جواب است $\Leftrightarrow (a, m) | b$

مثال : آیا معادله‌ی $3x \equiv 1^6$ در $\mathbb{Z}$ دارای جواب است؟

پاسخ : خیر، زیرا $1 \nmid (3, 6)$

✓ نکته : در معادله‌ی $ax \equiv b^m$ ، هرگاه $(a, m) = 1$ ، معادله صد در صد در $\mathbb{Z}$ جواب دارد.

مثال : آیا معادله‌ی $2x \equiv 1^5$ در $\mathbb{Z}$ جواب دارد.

پاسخ : بله، طبق نکته‌ی قبل معادله‌ی داده شده در $\mathbb{Z}$ جواب دارد، زیرا $1 = (2, 5)$

✓ نکته : هرگاه x_0 جوابی برای معادله‌ی همنهشتی $ax \equiv b^m$ در $\mathbb{Z}$ باشد آنگاه جواب کلی معادله از دستور

$x = x_0 + mk, (k \in \mathbb{Z})$ به دست می‌آید، به عبارت دیگر هرگاه x_0 جوابی برای معادله‌ی همنهشتی $ax_0 \equiv b^m$ در $\mathbb{Z}$ باشد، آنگاه هر عضو از دسته‌ی هم ارزی x_0 در رابطه‌ی همنهشتی به پیمانه‌ی m ، نیز یک جواب معادله خواهد بود، در واقع در این حالت $[x_0]$ جواب کلی معادله در $\mathbb{Z}$ خواهد بود.

روشهای حل یک معادله‌ی همنهشتی :

(۱) یک جواب معادله را به روش جست و جو به دست آورده و سپس از نکته‌ی قبل استفاده می‌کنیم.

(۲) معادله را به معادله‌ای سیاله تبدیل نموده، سپس آنرا حل می‌کنیم.

(۳) به سمت راست معادله، ضربی از پیمانه را اضافه (یا کم) نموده تا سمت راست نیز به صورت ضربی از a درآید، سپس

با توجه به قضیه‌ی تقسیم در همنهشتی یعنی قضیه‌ی $(ab \equiv ac, (a, m) = d \Rightarrow b \equiv c^{\frac{m}{d}})$ ، دو طرف معادله را بر a تقسیم کرده و x را به دست می‌آوریم.

(۴) تبدیل معادله به معادله‌ی سیاله و سپس حل آن معادله‌ی سیاله به کمک الگوریتم اقلیدس به مثال زیر توجه کنید.

مثال : آیا معادله‌ی $2x \equiv 1^5$ در $\mathbb{Z}$ دارای جواب است، اگر که بله، جوابهای کلی آنرا بیابید؟

پاسخ : چون $1 = (2, 5)$ ، لذا معادله‌ی داده شده در $\mathbb{Z}$ جواب دارد.

راه حل اول : به روش جست و جو دیده میشود که $x_0 = 3$ یک جواب معادله است، لذا جواب کلی معادله عبارتست از :

$$[3]_5 = \{x \in \mathbb{Z} : x = 5k + 3\}$$

راه حل دوم : تبدیل معادله به معادله‌ای سیاله

$$2x \equiv 1^5 \Rightarrow 5 | 2x - 1 \Rightarrow 2x - 1 = 5y, y \in \mathbb{Z} \quad x = \frac{5y+1}{2} = \frac{4y+y+1}{2} = 2y + \frac{y+1}{2} \quad (1)$$

$$\frac{y+1}{2} = k \in \mathbb{Z} \Rightarrow y = 2k - 1$$

$$(1) \Rightarrow x = 2(2k - 1) + k = 5k - 2$$

لذا جواب معادله عبارتست از $x = 5k - 2$ ، البته این جواب با جواب قبلی یکی است توجه کنید :

$$x = 5k - 2 = 5k - 5 + 3 = 5(k - 1) + 3 = 5k' + 3, k' \in \mathbb{Z}$$

$$2x \equiv 1 \Rightarrow 2x \equiv 1 + 5 \Rightarrow 2x \equiv 6 \xrightarrow[(3,5)=1]{+2} x \equiv 3 \Rightarrow x = 5k + 3, k \in \mathbb{Z}$$

راه حل سوم :

مثال : معادله‌ی همنهشتی $73x \equiv 1$ را به کمک الگوریتم اقلیدس حل کنید؟

پاسخ :

$$73x \equiv 1 \Rightarrow 23 \mid 73x - 1 \Rightarrow 73x - 1 = 23y \Rightarrow 73x - 23y = 1 \quad (*)$$

حال با استفاده از الگوریتم اقلیدس، یک جواب معادله را به دست آورده و سپس به کمک آن، جواب عمومی (کلی) معادله را می‌نویسیم:

$$73 = 23 \times 3 + 4 \quad (1) \rightarrow 4 = 73 - (23 \times 3)$$

$$23 = 4 \times 5 + 3 \quad (2) \rightarrow 3 = 23 - (4 \times 5)$$

$$4 = 3 \times 1 + 1 \quad (3)$$

$$(3) \Rightarrow 1 = 4 - (3 \times 1)$$

$$\stackrel{(2)}{=} 4 - (23 - (4 \times 5))$$

$$= 4 - 23 + 4 \times 5$$

$$= 6 \times 4 - 23$$

$$\stackrel{(1)}{=} 6 \times (73 - (23 \times 3)) - 23$$

$$= 6 \times 73 - 19 \times 23$$

$$\Rightarrow 6 \times 73 - 19(23) = 1 \quad (*')$$

بنابراین با مقایسه‌ی دو رابطه $(*)$ و $(*)'$ نتیجه می‌شود که $x = 6$ و بنابراین $x_0 = 6$ یک جواب معادله در $\mathbb{Z}$ است، لذا جواب کلی معادله به صورت $x = 6 + 23k, k \in \mathbb{Z}$ می‌باشد.

تست : جواب کلی معادله‌ی $13x + 39 \equiv 4(1-x) \pmod{8}$ کدام است؟

$$8k+7 \quad (۴)$$

$$8k+5 \quad (۳)$$

$$8k+3 \quad (۲)$$

$$8k+1 \quad (۱)$$

پاسخ :

$$13x + 39 \equiv 4 - 4x \pmod{8} \Rightarrow 17x \equiv -35 \pmod{8} \Rightarrow 17x - 16x \equiv -35 + 40 \pmod{8} \Rightarrow x \equiv 5 \pmod{8} \Rightarrow x = 8k + 5, k \in \mathbb{Z}$$

یادآوری : دقت داشته باشید که می‌توان به طرفین یک رابطه‌ی همنهشتی ضربی از پیمانه را اضافه و یا کم کرد، لزومی هم

$$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a \pm mk \equiv b \pm nk$$

ندارد که مقادیری که به طرفین رابطه اضافه یا کم میشوند، برابر باشند، یعنی :

✓ نکته : هر معادله‌ی سیاله، با دو معادله‌ی همنهشتی، هم ارز است.

$$ax + by = c$$

$$ax = c - by \Rightarrow a \mid c - by \Rightarrow by \equiv c \pmod{a} \quad (1)$$

دقت کنید :

$$by = c - ax \Rightarrow b \mid c - ax \Rightarrow ax \equiv c \pmod{b} \quad (2)$$

مثال : معادله‌ی سیاله‌ی $56x + 19y = 41$ را از طریق تبدیلیش به یک معادله‌ی همنهشتی، حل کنید؟

پاسخ :

$$56x + 19y = 41 \Rightarrow 56x \equiv 41 \pmod{19} \Rightarrow 56x - 57x \equiv 41 - 38 \pmod{19} \Rightarrow -x \equiv 3 \pmod{19} \Rightarrow x \equiv -3$$

$$\Rightarrow x \equiv 16 \pmod{19} \Rightarrow x = 19k + 16, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow 56x + 19y = 41 \Rightarrow 56(19k + 16) + 19y = 41$$

$$19y = 41 - 56(19k) - 56 \times 16 \Rightarrow 19y = -855 - 56(19k) \xrightarrow{\div 19} \Rightarrow y = -45 - 56k, k \in \mathbb{Z}$$

مثال : پستخانه‌ای فقط تمبرهای 140 و 210 ریالی برای فروش دارد، برای چسباندن تمبر به بسته‌هایی که مقدار تمبر لازم برای آنها، هر یک از مقادیر زیر است، در صورت امکان، ترکیبی از این دو نوع تمبر تعیین کنید؟

الف (3500 ریال

ب) 4000 ریال

پاسخ : الف) فرض می‌کنیم x تعداد تمبرهای 140 ریالی و y تعداد تمبرهای 210 ریالی لازم باشد، لذا باید داشته باشیم :

$$140x + 210y = 3500, x \geq 0, y \geq 0 \xrightarrow{\div 10} 14x + 21y = 350 \xrightarrow{\div 7} 2x + 3y = 50$$

چون $(2,3)=1$ است، لذا معادله در $\mathbb{Z}$ جواب دارد، اکنون داریم :

$$x = \frac{50 - 3y}{2} = 25 - 2y + \frac{y}{2} \quad (1)$$

$$\frac{y}{2} = k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow y = 2k, k \in \mathbb{Z}$$

$$(1) \Rightarrow x = 25 - 2(2k) + k \Rightarrow x = 25 - 3k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \geq 0 \Rightarrow 25 - 3k \geq 0 \Rightarrow k \leq \frac{25}{3} \\ y \geq 0 \Rightarrow 2k \geq 0 \Rightarrow k \geq 0 \end{array} \right\} \xrightarrow{\cap} 0 \leq k \leq \frac{25}{3}, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k = 0 \text{ یا } 1 \text{ یا } 2 \text{ یا } 3 \text{ یا } 4 \text{ یا } 5 \text{ یا } 6 \text{ یا } 7 \text{ یا } 8$$

$$\begin{array}{ll} k = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 25 \\ y = 0 \end{cases} & k = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 22 \\ y = 2 \end{cases} \\ k = 2 \Rightarrow \begin{cases} x = 19 \\ y = 4 \end{cases} & \dots \quad k = 8 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 16 \end{cases} \end{array}$$

لذا جوابهای معادله عبارتند از :

$$140x + 210y = 4000$$

$$\xrightarrow{\div 10} 14x + 21y = 400$$

ب) باید داشته باشیم :

چون $(14,21)=7 \nmid 400$ ، لذا مساله در این حالت، جواب ندارد.

مثال: می‌خواهیم حجمی به وزن 300kg را با وزنه‌های 15 و 20 کیلوگرمی توزین کنیم الف) تعداد حالات ممکنه چیست؟

پاسخ :

$$15x + 20y = 300 \Rightarrow 3x + 4y = 60$$

چون 60 بر 3 بخشپذیر است، لذا به $y=0$ می‌دهیم، داریم :

$$\begin{cases} x_0 = 20 \\ y_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + kb \\ y = y_0 - ka \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$$

$$\begin{cases} x = 20 + 4k \\ y = 0 - 3k \end{cases}, \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 20 + 4k \geq 0 \\ -3k \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k \geq -5 \\ k \leq 0 \end{cases} \xrightarrow{\cap} -5 \leq k \leq 0$$

لذا تعداد حالات ممکن عبارتند از : $k = 0, -1, -2, -3, -4, -5$

(ب) اگر از هر وزنه حداقل 2 بار استفاده شود، تعداد حالات ممکن چیست؟

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ y \geq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4k + 20 \geq 2 \\ -3k \geq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k \geq -4/5 \\ k \leq -2/3 \end{cases} \xrightarrow{\cap} -4/5 \leq k \leq -2/3$$

لذا تعداد حالات ممکن در این حالت برابر است با : $k = -1, -2, -3, -4$

مثال : چند جفت عدد صحیح مثبت وجود دارد به طوریکه یکی مضرب 7 و دیگری مضرب 13 بوده و مجموعشان 74 باشد؟

پاسخ :

$$\left. \begin{array}{l} \text{عدد اول} = a = 7x \\ \text{عدد دوم} = b = 13y \\ a, b \in \mathbb{N} \end{array} \right\} \Rightarrow 7x + 13y = 74$$

در واقع جوابهای طبیعی این معادله، مورد نظرمی باشند :

$$x = \frac{74 - 13y}{7} = \frac{70 + 4 - 14y + y}{7} = 10 - 2y + \frac{y + 4}{7} \quad (1)$$

$$\frac{y + 4}{7} = k \in \mathbb{Z} \Rightarrow y = 7k - 4, k \in \mathbb{Z}$$

$$(1) \Rightarrow x = 10 - 2(7k - 4) + k \Rightarrow \begin{cases} x = 18 - 13k \\ y = 7k - 4 \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} x > 0 \Rightarrow 18 - 13k > 0 \\ y > 0 \Rightarrow 7k - 4 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k < \frac{18}{13} \\ k > \frac{4}{7} \end{cases} \xrightarrow{\cap} \frac{4}{7} < k < \frac{18}{13} \xrightarrow{k \in \mathbb{N}} k = 1$$

پس فقط یک جفت عدد طبیعی وجود دارد که در معادله صدق می کنند ، این دو عدد عبارتند از :

$$\begin{cases} x = 18 - 13(1) \\ y = 7(1) - 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \end{cases}$$

تست : جواب معادله ی همنهشتی $x^5 + 8x \equiv 1$ کدام است؟

$$x = 5k + 3 \quad (۴)$$

$$x = 5k + 4 \quad (۳)$$

$$x = 5k + 1 \quad (۲)$$

$$x = 5k - 3 \quad (۱)$$

پاسخ : طبق نتیجه ی قضیه ی فرما به ازاء $p = 5$ داریم :

$$x^5 \equiv x \quad (1)$$

$$x^5 + 8x \equiv 1 \xrightarrow{(1)} x + 8x \equiv 1$$

$$9x \equiv 1 \Rightarrow 9x - 10x \equiv 1 \Rightarrow -x \equiv 1 \Rightarrow x \equiv -1 \Rightarrow x = 5k - 1 \quad x = 5k + 4$$

$$17x^{12} + 5x^7 - 14x^{40} \equiv 6$$

مثال : معادله‌ی زیر را حل کنید؟

$$0 + 0 - 0 \equiv 6$$

پاسخ : با توجه به صورت معادله واضح است که $x \not\equiv 7$ زیرا در غیر این صورت باید داشته باشیم :

که غیر ممکن است، لذا با توجه به اینکه 7 عددی اول بوده و $(x, 7) = 1$ ، طبق قضیه‌ی فرما داریم :

$$x^{7-1} \equiv 1 \quad x^6 \equiv 1$$

$$x^6 \equiv 1 \Rightarrow x^{12} \equiv 1 \quad (1)$$

$$-14x^{40} \equiv 0 \quad (2)$$

از طرفی داریم :

$$(1), (2) \Rightarrow 17x^{12} + 5x^7 - 14x^{40} \equiv 6$$

$$17(1) + 5x + 0 \equiv 6$$

$$5x \equiv -11$$

$$-7x + 5x \equiv -11 + 14$$

$$-2x \equiv 3$$

$$-2x \equiv 3 - 7$$

$$-2x \equiv -4$$

$$x \equiv 2 \Rightarrow x = 7k + 2, k \in \mathbb{Z}$$

✓ نکته : برای حل معادلاتی که به صورت $(ax+b)^2 - (cy+d)^2 = e$ می‌باشند، با استفاده از اتحاد مزدوج و تجزیه‌ی عدد e به عاملهای اول و متناظر قرار دادن عاملها می‌توان معادله را حل نمود.

مثال : جوابهای طبیعی معادله‌ی $x^2 - y^2 = 60$ را به دست آورید؟

پاسخ :

$$(x - y)(x + y) = 1 \times 60 = 2 \times 30 = 3 \times 20 = 4 \times 15 = 5 \times 12 = 6 \times 10$$

اما مجموع و تفاضل دو عدد صحیح یا هر دو زوجند و یا هر دو فردند، لذا در تجزیه‌ی عدد 60 به حاصلضرب دو عامل،

حالات 1×60 ، 3×20 ، 4×15 و 5×12 قابل قبول نیستند پس

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 16 \\ y = 14 \end{cases}, \begin{cases} x - y = 6 \\ x + y = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 2 \end{cases}$$

منطق ریاضی

منطق ریاضی، دستور زبان ریاضی و علم مطالعه ساختمان انواع جملاتی است که در علوم ریاضی به کار می‌رود.

گزاره

جمله‌ای است خبری که درست یا نادرست باشد، حتی اگر درستی یا نادرستی آن بر ما معلوم نباشد. گزاره‌ها را معمولاً با حروف p, q, r, s و ... نمایش می‌دهیم.

ارزش یک گزاره

واضح است که هر جمله خبری دارای ارزش درست (د) و یا ارزش نادرست (ن) می‌باشد، بنابراین ارزش هر گزاره دلخواه مانند p را می‌توان مطابق جدول زیر نشان داد.

p	
د	
ن	

مثال : کدام یک از جملات زیر یک گزاره است، ارزش جملاتی که گزاره اند را تعیین کنید؟

(الف) ۲ زوج است $\leftarrow$ یک گزاره درست است.

(ب) ۱ عددی اول است $\leftarrow$ یک گزاره نادرست است.

(ج) سینوس 30° برابر $\frac{\sqrt{3}}{2}$ است $\leftarrow$ یک گزاره نادرست است.

(د) به چه هوای خوبی $\leftarrow$ گزاره نیست.

(ه) احمد کتابم را بیاور $\leftarrow$ گزاره نیست.

نقیض یک گزاره

هرگاه p یک گزاره دلخواه باشد، نقیض آن را با نماد $\sim p$ نمایش داده و ارزش آن نقیض ارزش گزاره p است، یعنی:

p	$\sim p$
د	ن
ن	د

گزاره‌های مرکب

همان طور که می‌توان با جملات خبری و با حروف ربط «و»، «یا»، «اگر ... آنگاه» و ... جملات مرکبی ساخت، در اینجا نیز می‌توان به طریق مشابه، گزاره‌هایی مرکب به صورت زیر ساخت.

(۱) ترکیب فصلی دو گزاره $(p \vee q)$

هرگاه بین دو گزاره p و q نماد $\vee$ «به معنای یا» قرار گیرد، گزاره مرکب $p \vee q$ بدست می‌آید که به آن ترکیب فصلی دو گزاره p و q می‌گوییم جدول ارزش ترکیب فصلی به صورت زیر است:

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

دقت کنید که ترکیب فصلی دو گزاره، هنگامی درست است که حداقل یکی از دو گزاره p و q درست باشند و هنگامی

نادرست است که هر دو گزاره نادرست باشند.

۷ تذکر: نماد $\vee$ را «فاصل» نیز می‌گویند.

مثال: ارزش گزاره‌های زیر را تعیین کنید؟

الف) $\underbrace{2 \text{ زوج نیست}}_p$ یا $\underbrace{\sqrt{25} = \pm 5}_q$ است.

این گزاره نادرست است زیرا هر دو گزاره p و q نادرست اند، لذا کل جمله نادرست است.

ب) $3 \leq 5$

این گزاره درست است زیرا این گزاره یک گزاره مرکب به صورت زیر است.

$3 < 5$ یا $3 = 5$

$3 < 5$ درست است، $3 = 5$ نادرست است، اما ارزش کل گزاره، درست است.

یای منطقی

نماد $\vee$ را یای منطقی می‌گوییم و وقتی بین دو گزاره قرار می‌گیرد، در صورت درستی حداقل یکی از دو گزاره، ارزش

گزاره مرکب حاصل درست می‌باشد، در این حالت، هر دو گزاره می‌توانند درست باشند.

یای مانع الجمع

نماد $\wedge$ را یای مانع الجمع می‌گوییم و وقتی بین دو گزاره قرار می‌گیرد، در صورت درستی دقیقاً یکی از دو گزاره،

ارزش گزاره مرکب حاصل درست می‌باشد، در این حالت هر دو گزاره نمی‌توانند با هم درست باشند.

مثال: هر عدد طبیعی زوج یا فرد است. $\leftarrow$ در این گزاره، یای مانع الجمع می‌باشد، زیرا یک عدد طبیعی نمی‌تواند

در آن واحد، هم زوج باشد و هم فرد.

مثال: هرگاه $x \in A \cup B$ باشد آنگاه x عضو A یا عضو B بوده است. $\leftarrow$ در این گزاره، یای منطقی می‌باشد، زیرا

در آن واحد، x می‌تواند عضو هر دو مجموعه باشد.

مثال: هرگاه $x \in A \Delta B$ باشد، آنگاه x فقط عضو A یا فقط عضو B بوده است. $\leftarrow$ در این گزاره، یای مانع الجمع

می‌باشد، زیرا در آن واحد، x نمی‌تواند هم عضو A باشد و هم عضو B .

تذکر: بعداً خواهید دید که: $\vee$ Δ تفاضل متقارن A و B $= (A \cup B) - (A \cap B)$

جدول ارزش یای مانع الجمع به صورت زیر است:

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

دقت کنید که $p \vee q$ ، هنگامی درست است که دقیقاً یکی از p یا q درست باشند و هنگامی نادرست است که هر دو گزاره

درست و یا هر دو نادرست باشند.

ترکیب عطفی دو گزاره $(p \wedge q)$

هرگاه بین دو گزاره p و q نماد $\wedge$ «به معنای و» قرار گیرد، گزاره مرکب $p \wedge q$ بدست می‌آید که به آن ترکیب عطفی دو گزاره p و q می‌گوییم، جدول ارزش ترکیب عطفی به صورت زیر است :

p	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

دقت کنید که ترکیب عطفی دو گزاره، هنگامی نادرست است که حداقل یکی از دو گزاره p و q نادرست باشند و هنگامی درست است که هر دو گزاره، درست باشند.

✓ تذکر : نماد $\wedge$ را «عاطف» نیز می‌گویند.

مثال : ارزش گزاره زیر را تعیین کنید؟

۱۲ عددی فرد است و جمعه تعطیل است.

این گزاره درست است زیرا هر دو گزاره p و q درست می‌باشند.

۴) ترکیب شرطی دو گزاره $(p \Rightarrow q)$

هرگاه بین دو گزاره p و q نماد $\Rightarrow$ (به معنای اگر ... آنگاه ...) قرار گیرد، گزاره مرکب $p \Rightarrow q$ بدست می‌آید که به آن ترکیب شرطی دو گزاره p و q می‌گوییم، جدول ارزش ترکیب شرطی به صورت زیر است :

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

دقت کنید که ترکیب شرطی دو گزاره، هنگامی نادرست است که مقدم درست و تالی نادرست باشد، به عبارت دیگر از یک گزاره درست، نمی‌شود یک گزاره نادرست نتیجه گرفت و در بقیه حالات درست می‌باشد.

✓ تذکر : دقت کنید که از یک گزاره نادرست می‌توان یک گزاره درست را نتیجه گرفت اگرچه که می‌توان از یک گزاره نادرست، یک گزاره نادرست را نیز نتیجه گرفت، به عبارت دیگر از یک گزاره نادرست می‌توان هر گزاره‌ای چه درست، چه نادرست را نتیجه گرفت. (این قانون را قانون نفی مقدم یا قانون انتفاء مقدم می‌گویند).

✓ نکته : قانون نفی مقدم یا انتفاء مقدم کاربردهای فراوانی دارد که از آن جمله، تشخیص پاد متقارن بودن و متعدی بودن رابطه‌ها است.

الف) اگر ۵ زوج باشد، آنگاه ۸ فرد است، این گزاره درست است زیرا مقدم نادرست و تالی نیز نادرست است، در واقع اگر کار دنیا به اینجا برسد که بگویند، ۵ زوج است، ما هم می‌گوییم پس ۸ فرد است.

ب) اگر $4^1 = 81$ باشد، آنگاه هفته، هفت روز است.

این گزاره درست است زیرا مقدمش نادرست است.

✓ نکته : اگر ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ ، همیشه درست باشد، در این صورت می‌توان آن را به صورت‌های زیر نیز بیان کرد :

الف) p نتیجه می‌دهد q را

ب) q اگر p

ج) q شرط لازم برای p است

د) p شرط کافی برای q است

ه) شرط لازم برای p آن است که q

و) شرط کافی برای q آن است که p

ه) عکس یک ترکیب شرطی

هرگاه در ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ ، جای مقدم و تالی (q و p) را عوض کنیم، ترکیب شرطی دیگری به صورت $q \Rightarrow p$ بدست می‌آید که آن را عکس ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ می‌گویند، عکس یک ترکیب شرطی با خود آن ترکیب همواره هم ارز (هم ارزش) نیست، به جدول توجه کنید:

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$
د	د	د	د
د	ن	ن	د
ن	د	د	ن
ن	ن	د	د

همان طور که مشاهده می‌کنید ارزش دو ستون آخر، با یکدیگر یکسان نیست.

۶) عکس نقیض یک ترکیب شرطی

ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ را در نظر بگیرید، ترکیب شرطی $\sim q \Rightarrow \sim p$ را عکس نقیض ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ می‌گویند، عکس نقیض یک ترکیب شرطی، همواره با خود آن ترکیب هم ارز است، به جدول توجه کنید :

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim q$	$\sim p$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
د	د	د	ن	ن	د
د	ن	ن	د	ن	ن
ن	د	د	ن	د	د
ن	ن	د	د	د	د

همان طور که مشاهده می‌کنید، هر ترکیب شرطی با عکس نقیضش هم ارزش است.

مثال: آیا گزاره شرطی زیر درست است، عکس نقیض آن را نوشته و ارزش عکس نقیض آن را نیز تعیین کنید؟

«اگر $5^0 = 1$ آنگاه $5^1 = 5$ »، ارزش این گزاره نادرست است زیرا مقدمش درست و تالیش نادرست است.

عکس نقیض این گزاره شرطی عبارت است از: «اگر $5^1 \neq 5$ ، آنگاه $5^0 \neq 1$ »، ارزش این گزاره نیز نادرست است. زیرا باز هم مقدمش درست و تالیش نادرست است.

۷) ترکیب دو شرطی $(p \Leftrightarrow q)$

هرگاه بین دو گزاره p و q نماد $\Leftrightarrow$ (به معنای اگر و تنها اگر) قرار گیرد، گزاره مرکب $p \Leftrightarrow q$ بدست می‌آید که به آن ترکیب دو شرطی p و q می‌گوییم، جدول ارزش ترکیب دو شرطی به صورت زیر است:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	د

دقت کنید که ترکیب دو شرطی، هنگامی نادرست است که دقیقاً یکی از دو گزاره درست و دیگری نادرست باشد و هنگامی درست است که هر دو درست یا هر دو نادرست باشند. ترکیب دو شرطی همانند قول و قرار می‌ماند، اگر هر دو طرف به قول خود عمل کنند و یا هر دو طرف به قول خود عمل نکنند، این قول و قرار، به قوت خودش باقی می‌ماند و هیچ کدام از طرفین، از دست دیگری ناراحت نمی‌شوند اما اگر یکی به قول خود عمل کند و دیگری عمل نکند، این قول و قرار دیگر بی‌ارزش می‌شود.

نکته: ترکیب دو شرطی $p \Leftrightarrow q$ اگر همیشه درست باشد، در این صورت می‌توان آن را به صورت‌های زیر بیان کرد:

الف) اگر p آنگاه q و بالعکس (ب) p اگر و فقط اگر q یا q اگر و فقط اگر p

ج) p شرط لازم و کافی است برای q (د) q شرط لازم و کافی است برای p

گزاره‌های همیشه درست

یک گزاره مرکب را همیشه درست گوئیم هرگاه ارزش آن مستقل از ارزش مؤلفه‌هایش همیشه درست باشد، به عنوان مثال چه p درست و چه نادرست باشد گزاره‌های $p \vee \sim p$ ، $p \Rightarrow p$ ، $p \Leftrightarrow p$ و ... گزاره‌هایی همیشه درست اند.

تعریف استلزام منطقی

اگر گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ ، همیشه درست باشد، آن را یک استلزام منطقی می‌گوییم.

واضح است که هر استلزام منطقی، یک گزاره شرطی است، اما هر گزاره شرطی همواره یک استلزام منطقی نمی‌باشد.

قضیه شرطی

هر استلزام منطقی را یک قضیه شرطی می‌گوییم، به عبارت دیگر هر ترکیب شرطی همیشه درست را یک استلزام منطقی می‌گوییم، اگر $p \Rightarrow q$ یک قضیه شرطی باشد، p را فرض و q را حکم قضیه می‌گوییم.

مثال : هر نقطه دلخواه روی عمود منصف یک پاره خط، از دو سر آن پاره خط به یک فاصله است همان طور که از هندسه می‌دانیم، این یک قضیه شرطی است، فرض و حکم آن عبارتند از :

فرض : نقطه M روی عمود منصف پاره خط AB است.

حکم : $MA = MB$

قضیه دو شرطی

هرگاه عکس یک قضیه شرطی، خود یک قضیه شرطی باشد، در این صورت این قضیه شرطی و عکسش را با هم، یک قضیه دو شرطی می‌گوییم، به عبارت دیگر هر قضیه دو شرطی یک ترکیب شرطی همیشه درست است که عکسش نیز همیشه درست باشد.

مثال : یک مثلث، متساوی الساقین است اگر و فقط اگر که دو ضلع آن با یکدیگر برابر باشند.

گزاره نما

جمله یا عبارتی است که روی یک مجموعه مانند A تعریف شده و در آن حداقل یک حرف یا یک متغیر مانند x به کار رفته است، یک گزاره نما را معمولاً با $P(x)$ نمایش می‌دهیم و بسته به مقادیر مختلف $x \in A$ ، ارزش آن، ممکن است درست یا نادرست باشد.

مثال : فرض کنید $P(x)$ گزاره نمایی روی اعداد طبیعی به صورت زیر باشد :

$$P(x) : x^2 - 9 = 0$$

این گزاره نما فقط به ازاء $x = 3 \in \mathbb{N}$ تبدیل به گزاره‌ای درست می‌شود، به عبارت دیگر مجموعه جواب این گزاره نما در

اعداد طبیعی عبارت است از : $\{3\} = \text{مجموعه جواب}$

سورها

الفاظ و یا کلماتی هستند که به ابتدای یک گزاره نما مانند $P(x)$ اضافه شده و آن را به یک گزاره درست یا نادرست تبدیل می‌کنند.

انواع سور۱) سور عمومی

علامت این سور به صورت « $\forall$ » می‌باشد و معنای آن «به ازاء هر» یا «به ازاء همه مقادیر» می‌باشد.

مثال : ارزش گزاره سوری زیر را تعیین کنید؟ $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > x$

ارزش این گزاره نادرست است زیرا اگر $x = \frac{1}{2}$ فرض شود آنگاه $\left(\frac{1}{2}\right)^2 > \frac{1}{2}$.

دقت کنید که اگر به ازاء حداقل یک عضو متعلق به دامنه متغیر (مجموعه مرجع) (که در اینجا $\mathbb{R}$ است) گزاره نما، نادرست باشد، ارزش آن گزاره سوری نادرست می‌شود.

۲) سور وجودی

علامت این سور به صورت « $\exists$ » می‌باشد و معنای آن «وجود دارد» و یا «به ازاء بعضی از مقادیر» می‌باشد.

مثال : ارزش گزاره سوری زیر را تعیین کنید؟
 $\exists x \in \mathbb{R} : x^4 + 81 = 0$

ارزش این گزاره نادرست است، زیرا هیچ عدد حقیقی مانند x وجود ندارد که در معادله $x^4 + 81 = 0$ صدق کند، در واقع این معادله ریشه حقیقی ندارد، توجه کنید : $x^4 = -81$

دقت کنید که گزاره‌های سوری با سور وجودی، هنگامی درست هستند که حداقل به ازاء یک مقدار x درست باشند.

۳) سور صفر

علامت این سور به صورت « $\nexists$ » می‌باشد و معنای آن «وجود ندارد» و یا «به ازاء هیچ مقدار» می‌باشد.

مثال : ارزش گزاره سوری زیر را تعیین کنید؟

$$\nexists x \in \mathbb{Z} : 2x - 5 = 2$$

ارزش این گزاره درست است زیرا هیچ عدد صحیحی مانند x (صحیح نسبی) وجود ندارد که در معادله فوق صدق کند، توجه کنید :

$$2x = 7 \Rightarrow x = \frac{7}{2} \notin \mathbb{Z}$$

دقت کنید که گزاره‌های سوری با سور صفر، هنگامی درست هستند که به ازاء هیچ مقدار x برقرار نباشند.

۴) سور وحدت (یگانه)

علامت این سور به صورت « $\exists!$ » می‌باشد و معنای آن «فقط و فقط یک مقدار وجود دارد» می‌باشد.

دقت کنید که ارزش این گزاره، فقط هنگامی درست است که فقط و فقط (دقیقا) به ازاء یک مقدار x درست باشد.

مثال : ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید؟

$$\exists! x \in \mathbb{R} : x^2 - 5x + 6 = 0$$

ارزش این گزاره نادرست است زیرا دو عدد وجود دارند که در معادله فوق صدق می‌کنند، دقت کنید :

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow (x - 2)(x - 3) = 0 \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases}$$

مثال نقض

به مثالی که نشان دهد یک نتیجه گیری کلی، غلط است، مثال نقض می‌گویند.

مثال : آیا مجموع هر دو عدد گنگ (اصم) عددی گنگ (اصم) می‌شود؟

$$\begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = -\sqrt{2} \end{cases}$$

پاسخ : خیر زیرا اگر x و y را دو عدد گنگ به صورت زیر فرض کنیم:

در این صورت $x + y = 0$ که عددی گنگ نبوده و گویا است.

تذکر : 0 عددی گویا است زیرا مثلا : $0 = \frac{0}{7}$

نکته :

$$\begin{cases} \text{گویا} = \text{گویا} + \text{گویا} \\ \text{گویا} - \text{گویا} = \text{گویا} \\ \text{گویا} \times \text{گویا} = \text{گویا} \\ \frac{\text{گویا}}{\text{گویا}} = \text{معلوم نیست} \end{cases}$$

زیرا ممکن است عدد گویای مخرج ، صفر باشد که در این صورت تعریف نشده ، می شود .

نکته :

$$\begin{cases} \text{اصم یا گویا} = \text{اصم} + \text{اصم} \\ \text{اصم یا گویا} = \text{اصم} - \text{اصم} \\ \text{اصم یا گویا} = \text{اصم} \times \text{اصم} \\ \text{اصم یا گویا} = \frac{\text{اصم}}{\text{اصم}} \end{cases} \xrightarrow{\text{مثال}} \begin{matrix} \sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 6 & \text{گویا} \\ \sqrt{3} \times \sqrt{15} = 3\sqrt{5} & \text{اصم} \end{matrix}$$

نکته :

$$\begin{cases} \text{اصم} = \text{اصم} + \text{گویا} \xrightarrow{\text{مثال}} 3 + \sqrt{2} = 3 + \sqrt{2} \\ \text{اصم} = \text{اصم} - \text{گویا} \\ \text{گویا} = 0 \times \sqrt{7} = 0 & \text{اصم} \\ 2 \times \sqrt{7} = 2\sqrt{7} & \text{اصم} \end{cases} \xrightarrow{\text{مثال}} \begin{matrix} \text{گویا یا اصم} = \text{گویا} \times \text{اصم} \\ \text{گویا یا اصم} = \frac{0}{\sqrt{2}} = 0 & \text{گویا} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{2} & \text{اصم} \end{matrix}$$

برهان خلف (اثبات غیر مستقیم)

برای استفاده از برهان خلف (اثبات غیر مستقیم) گام‌های زیر را بر می‌داریم :

۱. فرض می‌کنیم نتیجه مطلوب (حکم) برقرار نباشد (فرض خلف) (بچه‌ها مواظب باشید که به وقت فرض نکنید که فرض نادرست است چرا که فرض همیشه درست است).

۲. نشان می‌دهیم که این فرض، (فرض خلف) ما را به نتیجه‌ای می‌رساند که یا خلاف فرض است و یا خلاف حقایق است که قبلاً برایمان قابل قبول بوده اند. (این مطلب را تناقض می‌گوییم).

۳. حالا که به یک تناقض رسیده ایم، معلوم می‌شود که فرض خلف نادرست بوده و بنابراین حکم (نتیجه مطلوب) درست است.

مثال : ثابت کنید $3 + \sqrt{2}$ گنگ است؟

برهان خلف : فرض می‌کنیم $3 + \sqrt{2}$ گنگ نبوده و گویا باشد، یعنی $(p, q \in \mathbb{Q}, q \neq 0)$ ، $3 + \sqrt{2} = \frac{p}{q}$ ، در این صورت

داریم :

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} - 3 = \text{گویا} - \text{گویا} = \text{گویا}$$

و این تناقض است زیرا $\sqrt{2}$ عددی اصم است، پس فرض خلف باطل و حکم ثابت است.

نکته :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{اصم} \quad (5)^2 = \sqrt{5} \quad , \quad \text{گویا} \quad (16)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4 \quad \xrightarrow{\text{مثال}} \quad \text{گویا یا اصم} = \text{گویا (گویا)} \\ \text{اصم} \quad (\sqrt{2})^3 = \sqrt{2^3} = \sqrt{8} \quad , \quad \text{گویا} \quad (\sqrt[3]{7})^3 = 7 \quad \xrightarrow{\text{مثال}} \quad \text{گویا یا اصم} = \text{گویا (اصم)} \\ \text{اصم} \quad (\sqrt[3]{7})^3 = 7 \quad , \quad \text{گویا} \quad (\sqrt{2})^3 = \sqrt{2^3} = \sqrt{8} \quad \xrightarrow{\text{مثال}} \quad \text{گویا یا اصم} = \text{اصم (اصم)} \end{array} \right.$$

اثبات بازگشتی :

در برخی از موارد، برای اثبات بعضی از قضایا، به خصوص در مورد تساوی ها، نامساوی ها و تساوی مجموعه ها، فرض می‌کنیم حکم برقرار باشد یا درست باشد، سپس با استفاده از درستی حکم، سعی می‌کنیم خودمان را به یک رابطه‌ی بدیهی یا به فرض قضیه برسانیم، در چنین حالتی، برای تکمیل اثبات، می‌بایستی نشان دهیم که تمام مراحل که ما را از درستی حکم به آن رابطه بدیهی یا به فرض قضیه، رسانده اند برگشت پذیر (بازگشت پذیر) هستند و گرنه درستی اثبات تایید نمی‌شود.

مثال : ثابت کنید مجموع هر عدد مثبت با معکوسش، همواره بزرگتر یا مساوی ۲ است یعنی :

$$\forall a > 0 : a + \frac{1}{a} \geq 2$$

اثبات به روش بازگشتی : فرض می‌کنیم حکم یعنی $a + \frac{1}{a} \geq 2$ درست باشد.

$$a + \frac{1}{a} \geq 2 \xrightarrow{a>0} a^2 + 1 \geq 2a \Rightarrow a^2 - 2a + 1 \geq 0$$

$$\Rightarrow (a-1)^2 \geq 0$$

این رابطه به ازاء هر $a > 0$ برقرار است.

حال چون روابط برگشت پذیرند، لذا کافی است جهت فلشها را عوض کنیم، یعنی از آخر شروع کرده و عقب عقب برویم تا به درستی حکم برسیم.

اصل لانه‌ی کبوتری

هرگاه m کبوتر، n لانه را اشغال کنند و تعداد کبوترها بیش از تعداد لانه ها باشد، $(m > n)$ ، آنگاه حداقل یک لانه وجود دارد که در آن حداقل دو (و یا بیشتر از دو) کبوتر قرار داشته باشد، این اصل را اصل لانه‌ی کبوتری می‌گویند.

مثال : ۱۳ نفر در یک میهمانی حضور دارند، نشان دهید، حداقل ۲ نفر از آنها در یک ماه متولد شده اند؟

پاسخ : می‌دانیم هر سال ۱۲ ماه است حال با فرض :

$$\left\{ \begin{array}{l} m = \text{تعداد کبوترها} = 13 \text{ نفر} \\ n = \text{تعداد لانه ها} = 12 \text{ ماه} \end{array} \right.$$

چون $m > n$ است لذا دست کم ۲ نفر وجود دارند که در یک ماه از سال متولد شده اند.

تست : S یک زیر مجموعه‌ی ۷۰ عضوی از اعداد طبیعی است، اگر اعضای S را بر ۲۵ تقسیم کنیم، دست کم چند عضو S دارای یک باقیمانده اند؟

4 (۴)

3 (۳)

2 (۲)

1 (۱)

$$\begin{array}{r} 70 \overline{) 25} \\ - 50 \\ \hline 20 \end{array}$$

$$\Rightarrow 70 > 2 \times 25 \Rightarrow 2 + 1 = 3$$

پاسخ :

لذا دست کم سه عضو S وجود دارند که بر ۲۵ دارای یک باقیمانده اند.

✓ نکته: $[x]$ را سقف x می‌گویند و به معنی کوچکترین عدد صحیح بزرگتر یا مساوی x است.

مثال: $[-2/5] - -2, [13/01] = 14, [10] = 10, [5/5] = 6$

✓ نکته: اگر m کیوتر و n لانه داشته باشیم، لانه‌ای وجود دارد که در آن حداقل $\left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil$ کیوتر وجود دارد.

تست: مدرسه‌ای دارای ۵۰۰ دانش آموز است، حداقل چند تای آنها در یک روز هفته متولد شده اند؟

- (۱) 70 (۲) 71 (۳) 72 (۴) 73

پاسخ: $\left\lceil \frac{500}{7} \right\rceil = [71, \text{خورده‌ای}] = 72$

✓ نکته ۲: اگر خواستیم برعکس عمل فوق را انجام دهیم داریم:

$1 + (-1 \text{ تعداد کیوترها}) = \text{تعداد لانه‌ها}$

تست: مدرسه‌ای، حداقل چند دانش آموز داشته باشد، تا حداقل 10 نفر آنها در یک روز هفته متولد شده باشند؟

- (۱) 71 (۲) 64 (۳) 74 (۴) 61

پاسخ: روزهای هفته = تعداد لانه $7(10-1) + 1 = 64$

✓ نکته ۳: اگر n کیوتر داشته باشیم و بخواهیم حتماً لانه‌ای وجود داشته باشد که در آن حداقل y کیوتر باشد یا بیشتر،

حداکثر باید $\left\lceil \frac{n-1}{y-1} \right\rceil$ لانه داشته باشیم.

یادآوری: نماد $[]$ ، به معنای جزء صحیح معمولی $([])$ می‌باشد.

تست: 65 کیوتر در حداکثر چند لانه قرار بگیرند تا حداقل در یک لانه، بیش از 2 کیوتر قرار داشته باشد؟ (کنکور - ۸۱)

- (۱) ۳۱ (۲) ۳۲ (۳) ۳۳ (۴) ۳۴

پاسخ: $\left\lceil \frac{65-1}{3-1} \right\rceil = \left\lceil \frac{64}{2} \right\rceil = [32] = 32$

نتیجه گیری از 1 و 2 و 3

(۱) حداکثر تعداد لانه‌ها: از تقسیم تعداد کیوترها بر تعداد لانه‌ها (بدون اضافه کردن یک) بدست می‌آید.

(۲) حداقل تعداد لانه‌ها: از تقسیم تعداد کیوترها بر تعداد لانه‌ها (با اضافه کردن یک) بدست می‌آید.

(۳) اگر برعکس بخواهد: (۱- تعداد کیوترها) تعداد لانه‌ها

تست: در یک مدرسه ۵۰۰ نفری، حداقل چند نفر در روز شنبه متولد شده اند؟

- (۱) 1 (۲) 71 (۳) 72 (۴) 0

پاسخ: گزینه ۴ صحیح است، چون که ممکن است هیچ کدام در روز شنبه متولد نشده باشند.

چند نکته مهم

۱. در مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a، فاصله هر دو نقطه داخل آن، کوچکتر از a است.

۲. در مربع به ضلع b ، فاصله هر دو نقطه داخل آن، کوچکتر از $b\sqrt{2}$ است.

۳. در دایره‌ای به شعاع R ، فاصله هر دو نقطه داخل آن، کوچکتر از $2R$ است.

۴. اگر $n+1$ نقطه داخل مثلث متساوی الاضلاعی به ضلع a بگیریم، حداقل، فاصله دو تای آنها، کمتر از $\frac{a}{\sqrt{n}}$ است.

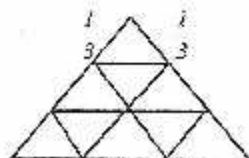
تست: اگر ۱۰ نقطه داخل مثلث متساوی الاضلاعی به ضلع 1cm در نظر بگیریم، حداقل فاصله آنها از یکدیگر کمتر از ... است؟

$$\frac{1}{5} \quad (۱) \qquad \frac{1}{3} \quad (۲) \qquad \frac{1}{10} \quad (۳) \qquad \frac{1}{2} \quad (۴)$$

$$\left. \begin{array}{l} a=1 \\ n+1=10 \Rightarrow n=9 \end{array} \right\} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$$

پاسخ:

برای درک بهتر مطلب به شکل مقابل توجه کنید:

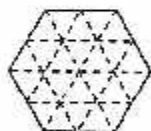


طول ضلع هر کدام از مثلث‌های کوچک $\frac{1}{3}\text{cm}$ است، حال چون ۱۰ نقطه داخل مثلث بزرگ اختیار کرده ایم (کیوترها) و ۹ مثلث کوچک داریم (تعداد لانه‌ها) لذا طبق اصل لانه کیوتری، حداقل یک لانه (یک مثلث کوچک) وجود دارد که در آن حداقل دو کیوتر (دو نقطه) وجود دارد، لذا فاصله این دو نقطه که درون یک مثلث کوچک قرار گرفته اند از طول ضلع مثلث که $\frac{1}{3}$ است، کمتر است.

تست: در یک شش ضلعی منتظم به ضلع ۱، حداقل چند نقطه در نظر بگیریم تا حداقل فاصله دو تای آنها کمتر یا مساوی $\frac{1}{2}$ باشد؟

$$25 \quad (۱) \qquad 17 \quad (۲) \qquad 37 \quad (۳) \qquad 10 \quad (۴)$$

پاسخ: در این گونه تست‌ها، حتماً شکل لازم است، چون طول هر ضلع 1cm است، پس با نصف کردن هر ضلع و به هم وصل کردن نقاط حاصل، ۲۴ مثلث متساوی الاضلاع برابر به ضلع $\frac{1}{2}$ بدست می‌آید لذا داریم:



$$25 = 1 + \text{تعداد لانه‌ها} = \text{تعداد کیوترها} \Rightarrow 24 = \text{تعداد لانه‌ها}$$

مجموعه - ضرب دکارتی - رابطه

مقدمه : مجموعه ها اساس و بنیان کلیه مباحث ریاضیات جدید می باشند، مبتکر نظریه مجموعه ها، جورج کانتور، ریاضی دان فرانسوی می باشد که برای اولین بار در سال 1874، تئوری مجموعه ها را عرضه نمود و از آن به بعد پایه تمام مطالب ریاضی بر آن بنیان نهاده شد، مجموعه از مفاهیم اولیه و تعریف نشده ریاضی می باشد، اما به بیان بسیار ساده می توان گفت که مجموعه دسته ای از اشیاء کاملاً مشخص و دو به دو متمایز می باشد، اشیاء را مشخص گوئیم، زیرا باید بتوانیم بگوئیم هر شیء دلخواه، عضو مجموعه هست یا نه و دو به دو متمایز گوئیم چرا که نمی توان دو شیء یکسان را به عنوان عناصر مختلف یک مجموعه در نظر گرفت.

مثال : کدام دسته زیر نشان گر یک مجموعه می باشد؟

(۱) انسان های پیر : مجموعه نمی باشد، زیرا پیر بودن، نسبی است، ممکن است یک انسان 70 ساله از نظر ما پیر باشد ولی از نظر فردی دیگر، پیر نباشد.

(۲) اعداد طبیعی بین 1 و 2 : مجموعه می باشد، ولی این مجموعه، هیچ عضوی ندارد.

مجموعه تهی (خالی)

مجموعه ای که هیچ عضوی نداشته باشد را مجموعه تهی یا خالی می گوئیم و آن را با $\{\}$ یا ϕ نمایش می دهیم. تذکر : دقت کنید که مجموعه هایی نظیر $\{\phi\}$ ، $\{\{\}\}$ ، $\{0\}$ ، (در اینجا هیچ کس زندگی نمی کند)، {هیشکی خونه نیست} و امثال آنها، مجموعه تهی نمی باشند و همه آنها دارای عضو می باشند.

تعریف : به هر یک از اشیاء، حروف و ... که داخل یک مجموعه می باشند، یک عضو یا یک عنصر آن مجموعه می گویند.

مثال : مجموعه های $A = \{a, b\}$ ، $B = \{\{\}\}$ ، $C = \{0, \{0\}, \{\{0\}\}\}$ به ترتیب 2، 1 و 3 عضو دارند.

عضویت یا تعلق :

اگر A یک مجموعه و a یک عضو آن باشد می نویسیم $a \in A$ و اگر b عضو آن نباشد می نویسیم $b \notin A$

تست : هرگاه $A = \{0, \{0\}, \{\{0\}\}\}$ ، کدام نادرست است؟

$$\begin{array}{llll} 0 \in A & (۱) & \{0\} \in A & (۲) \\ \{0, \{0\}\} \in A & (۳) & \{\{0\}\} \in A & (۴) \end{array}$$

پاسخ : گزینه ۲ صحیح می باشد.

زیر مجموعه یک مجموعه :

هرگاه تمامی عضوهای مجموعه ای مانند A ، عضو مجموعه ای مانند B باشد، گوئیم مجموعه A یک زیر مجموعه، مجموعه B است، در این حالت می نویسیم $A \subset B$ یا $B \supset A$ ، دقت داشته باشید که :

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x \in A \Rightarrow x \in B)$$

مثال : مجموعه $A = \{1, 2, 3\}$ یک زیر مجموعه، مجموعه اعداد طبیعی است.

✓ نکته : هرگاه مجموعه A ، حداقل یک عضو داشته باشد به طوری که در مجموعه B نباشد، در این صورت، واضح است که A زیر مجموعه B نیست، در این حالت می نویسیم $A \not\subset B$ ، دقت داشته باشید که :

$$A \not\subset B \Leftrightarrow \exists x \in A : x \notin B$$

✓ نکته : همان طور که $a \leq b$ به معنای آن است که a یا از b کوچکتر است و یا مساوی آن است، عبارت $A \subseteq B$

معادل آن است که A یا، با B مساوی است و یا زیر مجموعه آن است.

✓ نکته : هر مجموعه، زیر مجموعه خودش می باشد. یعنی : $A \subset A$

✓ نکته : $\emptyset$ زیر مجموعه هر مجموعه ای می باشد. یعنی : $\emptyset \subset A$

✓ نکته : $A \subset B, B \subset C \Rightarrow A \subset C$

دو مجموعه مساوی

هرگاه تمامی اعضای A در B و تمامی اعضای B در A باشند، در این صورت دو مجموعه A و B را با یکدیگر مساوی گوئیم، در این حالت می نویسد : $A = B$

دقت داشته باشید که : $A = B \Leftrightarrow A \subset B$ و $B \subset A$

مثال : دو مجموعه $A = \{1, 2, 7, 3\}$ و $B = \{1, 2, 7, 3\}$ با یکدیگر مساوی اند.

تست : هرگاه دو مجموعه $A = \{3, 5, b+7\}$ و $B = \{5, 4, a-1\}$ با یکدیگر برابر باشند، $a+b$ کدام است؟

1) 2 2) 1 3) -1 4) 6
پاسخ :

$$\begin{cases} a-1=3 \\ b+7=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=-3 \end{cases} \Rightarrow a+b=1$$

دو مجموعه نا مساوی

دو مجموعه A و B را نا مساوی یا نا برابر گوئیم هرگاه، حداقل یک عضو، در یکی از دو مجموعه باشد که در دیگری نباشد، توجه داشته باشید که :

$$A \neq B \Leftrightarrow A \not\subset B \text{ یا } B \not\subset A$$

✓ نکته :

- 1) $A = A$
- 2) $A \subset B \Rightarrow B \supset A$
- 3) $A = B$ و $B = C \Rightarrow A = C$

مجموعه مرجع

تمام مجموعه های مورد بحث در یک موضوع خاص زیر مجموعه هایی از یک مجموعه وسیع تر هستند، این مجموعه را مجموعه مرجع یا مجموعه جهانی می گوئیم، مجموعه مرجع را با M یا U نمایش می دهیم.

متمم یک مجموعه

هرگاه U مجموعه مرجع و A زیر مجموعه ای از آن باشد، متمم مجموعه A را با نماد A' یا A^c نمایش داده و آن را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$A' = \{x \in U : x \notin A\}$$

مثال : هرگاه $U = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ ، $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ ، آنگاه : $A' = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

✓ نکته : متمم مجموعه مرجع، مجموعه تهی می باشد، یعنی : $M' = \emptyset$

✓ نکته : متمم مجموعه تهی، مجموعه مرجع می باشد، یعنی : $\emptyset' = M$

✓ نکته : متمم متمم یک مجموعه، مساوی خود آن مجموعه می‌باشد، یعنی : $(A')' = A$

عدد اصلی یک مجموعه

تعداد عضوهای یک مجموعه را عدد اصلی آن مجموعه می‌گویند، هرگاه A یک مجموعه باشد، تعداد عضوهای A را با $n(A)$ یا $|A|$ نمایش می‌دهند.

مجموعه توانی یک مجموعه

مجموعه کلیه زیر مجموعه‌های یک مجموعه، مانند A را، مجموعه توانی A نامیده و آن را با $P(A)$ نمایش می‌دهند.

✓ نکته مهم : اگر مجموعه‌ای مانند A ، n عضو داشته باشد، آنگاه 2^n زیر مجموعه دارد، به عبارت دیگر، مجموعه توانی A ، 2^n عضو دارد.

مثال : یک مجموعه 3 عضوی مانند $A = \{1, 2, 3\}$ ، چند زیر مجموعه دارد، مجموعه توانی آن را بنویسید؟

پاسخ : $2^3 - 8$ زیر مجموعه دارد و $P(A)$ عبارت است از :

$$P(A) = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

تست : اگر $\Lambda = \{x \text{ و } y\}$ ، مجموعه $P(\Lambda) - \Lambda$ چند عضو دارد؟

- (1) 9 (2) 8 (3) 7 (4) 6

پاسخ :

$P(A)$ ، 8 عضو دارد که فقط یکی از اعضایش یعنی $\{x \text{ و } y\}$ در Λ نیز هست اما 7 عضو دیگرش در A نیستند لذا

$$P(A) - A = 8 - 1 = 7 \text{ عضو دارد.}$$

مثال : مجموعه‌ای 16 زیر مجموعه دارد، این مجموعه، چند عضو دارد؟

پاسخ :

$$2^n = 16 = 2^4 \Rightarrow n = 4$$

تست : اگر $A = \{2, \sqrt{3}, 3, \sqrt{3}, 3, 1\}$ ، تعداد زیر مجموعه‌های مجموعه $\{A\}$ برابر است با :

- (1) 2 (2) 32 (3) 8 (4) 1

پاسخ : چون مجموعه $\{A\}$ ، یک عضو دارد لذا $2^1 = 2$ زیر مجموعه دارد.

مثال : کدام مجموعه است که 31 زیر مجموعه دارد؟

پاسخ : هیچ مجموعه‌ای وجود ندارد زیرا معادله $2^n = 31$ به ازاء هیچ عدد صحیح حسابی، برقرار نیست.

✓ تذکر مهم : دقت کنید که تعداد زیر مجموعه‌های یک مجموعه، برابر توان‌های صحیح حسابی 2 یعنی $2^0 = 1$.

$$2^1 = 2, 2^2 = 4, \dots \text{ می‌باشد.}$$

✓ نکته : تعداد زیر مجموعه‌های یک مجموعه $(n+1)$ عضوی، دو برابر تعداد زیر مجموعه‌های یک مجموعه n عضوی

$$\text{است زیرا: } 2^{n+1} = 2 \times 2^n$$

مثال : یک مجموعه‌ی 4 عضوی، 2 برابر یک مجموعه‌ی 3 عضوی، زیر مجموعه دارد.

۷ نکته: تعداد زیر مجموعه‌های یک مجموعه ی $(n+1)$ عضوی، 2^{n+1} زیر مجموعه از تعداد زیر مجموعه‌های یک مجموعه ی n عضوی، بیشتر است زیرا:

$$2^{n+1} = 2 \times 2^n = 2^n + 2^n$$

مثال: یک مجموعه 5 عضوی، $2^5 = 16$ زیر مجموعه بیشتر از یک مجموعه 4 عضوی دارد.

۸ نکته: تعداد زیر مجموعه‌های یک مجموعه n عضوی، 2^{n-m} برابر تعداد زیر مجموعه‌های یک مجموعه m عضوی

$$\frac{2^n}{2^m} = 2^{n-m}$$

است زیرا:

مثال: یک مجموعه 6 عضوی، چند برابر یک مجموعه 4 عضوی زیر مجموعه دارد؟

$$2^{6-4} = 2^2 = 4$$

۹ نکته: یک مجموعه n عضوی، $2^n - 2^m$ زیر مجموعه از یک مجموعه m عضوی بیشتر دارد.

تست: یک مجموعه 15 عضوی، چند زیر مجموعه از یک مجموعه 10 عضوی، بیشتر دارد؟

$$2^5 \quad (1) \quad 5 \quad (2) \quad 31 \times 2^{10} \quad (3) \quad 32 \quad (4)$$

پاسخ:

$$2^{15} - 2^{10} = 2^{10}(2^5 - 1) = 31 \times 2^{10}$$

تست: یک مجموعه $k+3$ عضوی، 8 برابر یک مجموعه k عضوی زیر مجموعه دارد، k کدام است؟

$$k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad (1) \quad k \in \mathbb{Z} \quad (2) \quad k \in \mathbb{R} \quad (3) \quad k = 3 \quad (4)$$

پاسخ: چون $2^{k+1} = 8 \times 2^k$ یا $2^k \times 2^3 = 2^3 \times 2^k$ لذا k می‌تواند هر عدد صحیح حسابی یعنی، $\mathbb{N} \cup \{0\}$ باشد.

تست: تعداد زیر مجموعه‌های یک مجموعه $4k-5$ عضوی برابر 128 است، k کدام است؟

$$3 \quad (1) \quad 4 \quad (2) \quad 5 \quad (3) \quad 6 \quad (4)$$

پاسخ:

$$2^{4k-5} = 2^{128} = 2^7 \Rightarrow 4k-5 = 7 \Rightarrow k = 3$$

زیر مجموعه‌های محض (سره) یک مجموعه:

به کلیه زیر مجموعه‌های یک مجموعه، غیر از خودش، زیر مجموعه‌های محض یا سره آن مجموعه می‌گویند. به عبارت دیگر هرگاه $A \subset B$ و $A \neq B$ ، آنگاه A را یک زیر مجموعه سره B می‌گویند.

تست: یک مجموعه $(2k)$ عضوی، 56 زیرمجموعه از یک مجموعه k عضوی، بیشتر دارد، در این صورت یک

مجموعه $(k+2)$ عضوی، چند زیر مجموعه محض (سره) دارد؟

$$63 \quad (1) \quad 31 \quad (2) \quad 7 \quad (3) \quad 64 \quad (4)$$

$$2^{(2k)} = 2^k + 56 \Rightarrow (2^k)^2 - 2^k - 56 = 0$$

$$2^k = y \Rightarrow y^2 - y - 56 = 0 \Rightarrow (y-8)(y+7) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y = 8 \Rightarrow 2^k = 8 \Rightarrow k = 3 \\ y = -7 \end{array} \right.$$

غ ق ق

تعداد زیر مجموعه‌های محض یا سره: $\Rightarrow 2^{k+2} - 1 = 2^{3+2} - 1 = 31$

✓ نکته مهم: تنها مجموعه‌ای که زیر مجموعه سره ندارد مجموعه ϕ است.

✓ نکته: تعداد زیر مجموعه‌های محض یک مجموعه n عضوی برابر $2^n - 1$ است.

✓ نکته بسیار مهم: تعداد زیر مجموعه‌های K عضوی یک مجموعه n عضوی برابر است با:

$$n \text{ از } k \text{ ترکیب} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

مثال: یک مجموعه 5 عضوی، چند زیر مجموعه 2 عضوی دارد؟

پاسخ:

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!} = 10$$

تناظر یک به یک

هرگاه A و B دو مجموعه باشند، گوییم بین A و B یک تناظر یک به یک وجود دارد، هرگاه بتوان به هر عضو مجموعه A ، یک و فقط یک عضو مجموعه B و به هر عضو مجموعه B ، یک و فقط یک عضو مجموعه A را نسبت داد، به عنوان مثال بین مجموعه اعداد طبیعی و مجموعه اعداد طبیعی زوج، یک تناظر یک به یک وجود دارد، دقت کنید:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{N} = \{ & 1 & , & 2 & , & 3 & , & \dots & n & , & \dots \} \\ & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & & & \Downarrow & & \\ E = 2 \mathbb{N} = \{ & 1 & , & 2 & , & 3 & , & \dots & 2n & , & \dots \} \end{array}$$

دو مجموعه هم ارز (معادل)

دو مجموعه متناهی A و B را با یکدیگر هم ارز گوییم، هرگاه تعداد اعضای آنها با یکدیگر مساوی باشد، هرگاه A و B با هم، هم ارز باشند، می‌نویسیم: $A \approx B$

مثال: دو مجموعه $A = \{1, 2, \Delta\}$ و $B = \{100, \text{اتوبوس}, \text{خرس}\}$ با یکدیگر معادل اند.

✓ تذکر: هرگاه A و B نامتناهی باشند، آنگاه A را با B هم ارز گوییم هرگاه بین A و B ، تناظری یک به یک وجود داشته باشد.

مثال: مجموعه اعداد طبیعی با مجموعه اعداد زوج، هم ارز است.

✓ نکته مهم: هر دو مجموعه مساوی، معادل اند، اما عکس این مطلب در حالت کلی نادرست است.

مجموعه متناهی

به مجموعه‌ای می‌گویند که اعضایش تمام شدنی (با پایان) باشد (حتی هر چقدر زیاد باشد).

مثال: مجموعه اعداد طبیعی کوچکتر یا مساوی 100، مجموعه انسان‌های روی کره زمین، مجموعه موهای سر یک انسان، مجموعه اعداد صحیح بازه $[-100, 100]$ ، مجموعه‌هایی متناهی اند.

مجموعه نامتناهی

به هر مجموعه که متناهی نباشد، نا متناهی می‌گویند، به عبارت دیگر، مجموعه‌ای که اعضایش تمام نشدنی (بی پایان) باشد.

مثال: مجموعه اعداد طبیعی $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ ، مجموعه اعداد حقیقی بازه $(1, 2)$ ، مجموعه $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$

$\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ ، مجموعه اعداد زوج، مجموعه اعداد اول و ... مجموعه هایی نا متناهی اند.

مجموعه محدود (کراندار)

به مجموعه‌ای می‌گوییم که کلیه اعضایش، بین دو عدد حقیقی باشند، (دقت کنید که تعداد اعضای مجموعه، مهم نیست).

مثال: مجموعه‌های $A = \{1 \text{ و } 2 \text{ و } \dots \text{ و } 100\}$ ، $B = [2^v]$ و $C = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ ، ... همگی مجموعه هایی محدود یا کراندارند.

مجموعه نا محدود (بی کران)

به مجموعه‌ای می‌گوییم که محدود نباشد. یعنی اعضایش از یک طرف به $+\infty$ و یا به $-\infty$ بروند.

مثال: مجموعه‌های $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ و $(0, +\infty)$ و $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ و $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ و $\{2^n : n \in \mathbb{N}\} = \{2, 4, 8, \dots\}$ ، ... همگی مجموعه هایی نا محدود اند.

✓ نکته مهم: مجموعه متناهی یا مجموعه محدود فرق دارد.

✓ نکته مهم: هر مجموعه متناهی، محدود است ولی نمی توان گفت که هر مجموعه محدود، متناهی است، به عنوان مثال مجموعه $(2, 5)$ ، محدود است ولی متناهی نیست.

✓ تذکر: در بحث نظریه اعداد با مجموعه‌های محدود و نا محدود بیشتر آشنا خواهید شد.

مجموعه شمارا

به مجموعه‌ای می‌گوییم که قابل شمارش باشد، به عبارت دیگر به مجموعه‌ای می‌گوییم که با اعداد طبیعی $(\mathbb{N})$ و یا قطعه‌ای از اعداد طبیعی $(\mathbb{N}_k = \{1, 2, \dots, k\})$ در تناظر یک به یک (تناظر دو سویی) باشد.

مثال: مجموعه‌های $\{1000 \text{ و } \dots \text{ و } 3 \text{ و } 2 \text{ و } 1\}$ ، $\{4 \text{ و } 11 \text{ و } 1 \text{ و } 9 \text{ و } 7\}$ ، $\mathbb{N}$ ، $\mathbb{Z}$ ، $\mathbb{Q}$ ، شمارا هستند.

✓ نکته: هر مجموعه متناهی شمارا است.

مجموعه نا شمارا

هر مجموعه را که شمارا نباشد، نا شمارا می‌گوییم.

مثال: مجموعه‌های $(4 \text{ و } 5)$ ، $\mathbb{R}$ و ... نا شمارا هستند.

✓ نکته: هر مجموعه نا شمارا، نا متناهی است.

اجتماع دو مجموعه:

هرگاه کلیه اعضای دو مجموعه A و B را درون یک مجموعه قرار دهیم، (عضوهای مشترک را یک بار بنویسیم)، آن مجموعه را اجتماع دو مجموعه A و B می‌گوییم، بنابراین اجتماع مجموعه‌های A و B ، مجموعه‌ای است که اعضایش متعلق

به A یا متعلق به B و یا متعلق به هر دو مجموعه است، اجتماع دو مجموعه A و B را با نماد $A \cup B$ نمایش می‌دهیم، لذا:

$$A \cup B = \{x: x \in A \text{ یا } x \in B\} = \{x: x \in A \vee x \in B\}$$

اشتراک دو مجموعه

هرگاه عضوهای مشترک دو مجموعه A و B را درون یک مجموعه قرار دهیم، مجموعه حاصل را اشتراک دو مجموعه A و B گوئیم، بنابراین اشتراک مجموعه‌های A و B مجموعه‌ای است که اعضایش به هر دو مجموعه A و B تعلق داشته باشد، اشتراک دو مجموعه A و B را با نماد $A \cap B$ نمایش می‌دهیم، لذا:

$$A \cap B = \{x: x \in A \text{ و } x \in B\} = \{x: x \in A \wedge x \in B\}$$

دو مجموعه جدا از هم

هرگاه مجموعه‌های A و B هیچ عضو مشترکی نداشته باشند، آنها را مجموعه‌هایی جدا از هم می‌گویند. مثال: مجموعه اعداد زوج و مجموعه اعداد فرد، مجموعه‌هایی جدا از هم هستند.

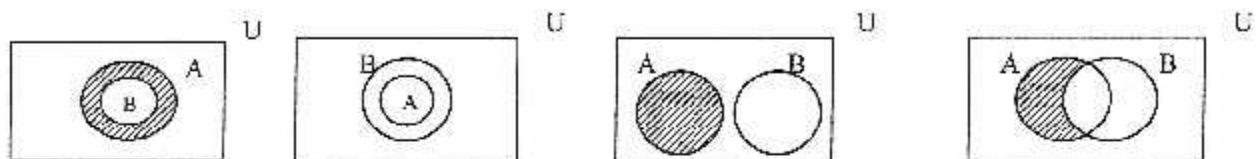
تفاضل دو مجموعه

هرگاه A و B دو مجموعه دلخواه باشند، مجموعه کلیه اعضایی که در A باشند ولی در B نباشند را تفاضل مجموعه B از A گوئیم و آن را با نماد $A - B$ نمایش می‌دهیم.

بنابراین $A - B$ مجموعه‌ای است که اعضایش در A باشند ولی در B نباشند، لذا:

$$A - B = \{x: x \in A \text{ و } x \notin B\}$$

مثال: در شکل‌های زیر $A - B$ ، به صورت هاشور خورده، نمایش داده شده است.



تفاضل متقارن دو مجموعه

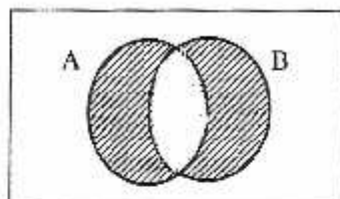
هرگاه A و B دو مجموعه دلخواه باشند، مجموعه کلیه اعضایی که یا در A باشند یا در B ولی نه در هر دو، را تفاضل متقارن A و B گوئیم و آن را با نماد $A \Delta B$ نمایش می‌دهیم، بنابراین تفاضل متقارن A و B مجموعه‌ای است که اعضایش، دقیقاً (فقط) به یکی از دو مجموعه A یا B تعلق دارند، لذا:

$$A \Delta B = \{x: x \in A \vee x \in B\}$$

یادآوری: $\vee$ علامت یای مانع الجمع است.

نکته بسیار مهم: با توجه به تعریف تفاضل متناظر A و B می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) \\ \diamond \diamond \\ A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) \end{cases}$$



روابط مهم در مورد اشتراک مجموعه‌ها

تعریف: $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$

$$1) x \in (A \cap B) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$$

$$2) x \notin (A \cap B) \Leftrightarrow x \notin A \vee x \notin B$$

$$3) A \cap B \subset A$$

$$4) A \cap B \subset B$$

$$5) A \cap B \subset A \cup B$$

$$6) A \cap A' = \phi$$

$$7) A \cap U = A$$

$$8) A \cap \phi = \phi$$

$$9) A \cap A = A$$

$$10) A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A = \text{کوچکتر}$$

$$11) A \cap B = B \cap A \text{ خاصیت جا به جایی}$$

$$12) (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \text{ خاصیت شرکت پذیری}$$

$$13) A \cap B = \phi \Rightarrow (A = \phi) \text{ یا } (B = \phi) \text{ یا } (A \text{ و } B \text{ از هم جدا بوده اند})$$

$$14) A \cap B = U \Rightarrow A = B = U$$

$$15) \begin{cases} A \subset B \\ C \subset D \end{cases} \Rightarrow A \cap C \subset B \cap D$$

$$16) \begin{cases} A \subset C \\ B \subset C \end{cases} \Rightarrow A \cap B \subset C$$

$$17) A \cap B \subset C \not\Leftrightarrow A \subset C \wedge B \subset C$$

$$18) A \subset B \Rightarrow A \cap C \subset B \cap C \not\Leftrightarrow A \subset B$$

$$19) A \subset B \cap C \Leftrightarrow \begin{cases} A \subset B \\ A \subset C \end{cases}$$

$$20) A = B \Rightarrow A \cap C = B \cap C \not\Leftrightarrow A = B$$

$$21) \begin{cases} A = B \\ C = D \end{cases} \Rightarrow A \cap C = B \cap D$$

$$22) \bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$$

روابط مهم در مورد اجتماع مجموعه ها

تعریف: $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$

1) $x \in (A \cup B) \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$

2) $x \notin (A \cup B) \Leftrightarrow x \notin A \wedge x \notin B$

3) $A \subset A \cup B$

4) $B \subset A \cup B$

5) $A \cap B \subset A \cup B$

6) $A \Delta B \subset A \cup B$

7) $A \cup A' = U$

8) $A \cup U = U$

9) $A \cup \phi = A$

10) $A \cup A = A$

11) $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B =$ بزرگه

12) $A \cup B = B \cup A$ خاصیت جا به جایی

13) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ خاصیت شرکت پذیری

14) $A \cup B = \phi \Rightarrow A = B = \phi$

15) $A \cup B = U \Rightarrow (A = U) \vee (B = U) \vee$ (A و B متهم یکدیگر بوده اند)

16)
$$\begin{cases} A \subset B \\ A \not\subset B \text{ و } B \not\subset A \\ C \subset D \end{cases}$$

17)
$$\begin{cases} A \subset C \\ B \subset C \end{cases} \Leftrightarrow A \cup B \subset C$$

18) $A \subset B \Rightarrow A \cup C \subset B \cup C \not\Rightarrow A \subset B$

19) $A \subset B \cup C \not\Rightarrow A \subset B \vee A \subset C$

20) $A = B \Rightarrow A \cup C = B \cup C \not\Rightarrow A = B$

21)
$$\begin{cases} A = B \\ A \not\subset B \text{ و } B \not\subset A \\ C = D \end{cases}$$

22) $A \cup B = A \cap B \Leftrightarrow A = B$

23) $\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$

24) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

روابط مهم در مورد تفاضل مجموعه هاتعریف: $A - B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$

1) $x \in (A - B) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$

2) $x \notin (A - B) \Leftrightarrow x \notin A \vee x \in B$

3) $A - B \subset A$

4) $(A - B) \cap B = \emptyset$

5) $A - B \subset A \cup B$

6) $A - A' = A$

7) $A - U = \emptyset$

8) $A - \emptyset = A$

9) $A - A = \emptyset$

10) $A' - A = A'$

11) $U - A = A'$

12) $U - A' = A$

13) $\emptyset - A = \emptyset$

14) $A \subset B \Rightarrow A - B = \emptyset$

15) $A - B \neq B - A$ جا به جایی

16) $(A - B) - C \neq A - (B - C)$ شرکت پذیری

17) $A - B = A \cap B'$ (بسیار مهم)

18) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \begin{cases} A - B = A \\ \text{و} \\ B - A = B \end{cases}$

19) $A - B = \emptyset \Rightarrow A \subset B$

20) $(A - B) \cap (B - A) = \emptyset$

21) $(A - B) = A - (A \cap B)$

22) $A - B = B' - A'$

23) $A \cup B = (A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B)$

24) $|A - B| = |A - (A \cap B)| = |A| - |A \cap B| \leftarrow (21)$ طبق

روابط مهم در مورد متمم مجموعه هاتعریف: $A' = \{x \in U : x \notin A\}$

1) $x \in A' \Leftrightarrow x \notin A$

2) $x \notin A' \Leftrightarrow x \in A$

3) $A \subset A \cup B$

4) $\emptyset' = U$

$$5) (A')' = A$$

$$6) A = B \Leftrightarrow A' = B'$$

$$7) A \subset B \Leftrightarrow B' \subset A'$$

$$8) \begin{cases} (A \cap B)' = A' \cup B' \\ (A \cup B)' = A' \cap B' \end{cases} \quad , \quad (\text{قوانین دمورگان})$$

$$9) \begin{cases} (A \cap B \cap C)' = A' \cup B' \cup C' \\ (A \cup B \cup C)' = A' \cap B' \cap C' \end{cases} \quad , \quad (\text{قوانین دمورگان})$$

$$10) \begin{cases} \left(\bigcap_{i=1}^n A_i \right)' = \bigcup_{i=1}^n A_i' \\ \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right)' = \bigcap_{i=1}^n A_i' \end{cases} \quad , \quad (\text{قوانین دمورگان})$$

$$11) |A'| = |U| - |A|$$

روابط مهم در مورد تفاضل متقارن مجموعه ها

$$\text{تعریف: } A \Delta B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$$

✓ تذکر: نماد $\vee$ علامت یای مانع الجمع می باشد و به معنای آن است که x یا فقط در A است یا فقط در B (در هر دو نیست).

$$1) x \in A \Delta B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$$

$$2) A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

$$3) A \Delta B \subset A \cup B$$

$$4) (A \Delta B) \cap (A \cap B) = \emptyset$$

$$5) (A \Delta B) \cup (A \cap B) = A \cup B$$

$$6) A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \Delta B = A \cup B$$

$$7) A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

$$8) A \subset B \Rightarrow A \Delta B = B - A$$

$$9) A \Delta A' = U$$

$$10) A \Delta U = A'$$

$$11) A \Delta U = A'$$

$$12) A \Delta \emptyset = A$$

$$13) A \Delta A = \emptyset$$

$$14) A \subset B \Rightarrow A \Delta B = B - A$$

$$15) A \Delta B = B \Delta A \quad \text{خاصیت جا به جایی}$$

$$16) (A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C) \quad \text{خاصیت شرکت پذیری}$$

$$17) A \Delta B = A' \Delta B'$$

$$18) |A \Delta B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|$$

$$9 \text{ اثبات } \rightarrow A \Delta A' = (A \cup A') - (A \cap A') = U - \phi = U$$

$$17 \text{ اثبات } \rightarrow A' \Delta B' = (A' \cup B') - (A' \cap B')$$

$$\begin{aligned} &= (A \cap B)' - (A \cup B)' \\ &= (A \cap B)' \cap (A \cup B) \\ &= (A \cup B) \cap (A \cup B)' \\ &= (A \cup B) - (A \cap B) = A \Delta B \end{aligned}$$

$$18 \text{ اثبات: } |A \Delta B| = |(A \cup B) - (A \cap B)|$$

$$\begin{aligned} &= |A \cup B| - |A \cap B| \\ &= |A| + |B| - |A \cap B| - |A \cap B| \\ &= |A| + |B| - 2|A \cap B| \end{aligned}$$

روابطی مهم در نظریه مجموعه ها

$$1) \begin{cases} A \cup B = B \cup A \\ A \cap B = B \cap A \end{cases} \quad \text{خاصیت جا به جایی (تعویض پذیری)}$$

$$2) \begin{cases} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C \end{cases} \quad \text{خاصیت شرکت پذیری (انجمنی)}$$

$$3) \begin{cases} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{cases} \quad \text{خاصیت پخش (توزیع پذیری)}$$

$$4) \begin{cases} (A \cup B)' = A' \cap B' \\ (A \cap B)' = A' \cup B' \end{cases} \quad \text{قوانین دمورگان}$$

$$5) \begin{cases} A \cup (A \cap B) = A \\ A \cap (A \cup B) = A \end{cases} \quad \text{قوانین جذب}$$

$$6) \begin{cases} A \cup (A' \cap B) = A \cup B \\ A \cap (A' \cup B) = A \cap B \end{cases} \quad \text{قوانین شبه جذب}$$

$$7) \begin{cases} (B \cup C) - A = (B - A) \cup (C - A) \\ (B \cap C) - A = (B - A) \cap (C - A) \end{cases} \quad \text{خاصیت پخش تفاضل نسبت به اجتماع و اشتراک (از سمت است)}$$

۷ تذکر: تفاضل بر روی اجتماع و اشتراک از چپ به صورت زیر توزیع پذیر است.

$$8) \begin{cases} A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C) \\ A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C) \end{cases} \quad \text{۸ به ۱۱ و ۱۱ به ۸ تبدیل می شود.}$$

✓ نکته: عمل اشتراک روی همه اعمال از جمله $\cup$, $-$, Δ , $\cap$, توزیع پذیر است.

$$9) \begin{cases} A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C) \\ A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C) \\ A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap (A \cap C) \end{cases}$$

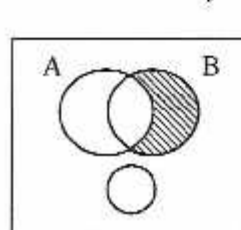
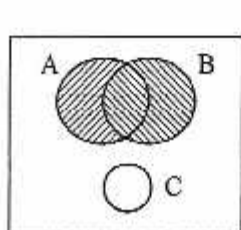
✓ نکته: عمل اجتماع فقط روی $\cap$ و $\cup$, توزیع پذیر است.

$$10) \begin{cases} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup (A \cup C) \end{cases}$$

✓ تذکر: عمل اجتماع روی $-$ و Δ , توزیع پذیر نیست.

$$11) \begin{cases} A \cup (B - C) \neq (A \cup B) - (A \cup C) \\ A \cup (B - C) \neq (A \cup B) \Delta (A \cup C) \end{cases}$$

نکته اول 11 را از طریق نمودار وین و نکته دوم 11 را با استفاده از نکته اولش ثابت می‌کنیم.



$$A \cup (B - C)$$

$\neq$

$$(A \cup B) - (A \cup C)$$

$$\text{طرف دوم} = (A \cup B) \Delta (A \cup C) = [(A \cup B) \cup (A \cup C)] - [(A \cup B) \cap (A \cup C)]$$

$$= \left[A \cup \left(\frac{B \cup C}{D} \right) \right] - \left[A \cup \left(\frac{B \cap C}{E} \right) \right]$$

$$= (A \cup D) - (A \cup E)$$

$$\neq A \cup (D - E) \leftarrow \text{طبق قبلی}$$

$$= A \cup [(B \cup C) - (B \cap C)]$$

$$= A \cup (B \Delta C)$$

یادآوری چند نکته مهم

$$1) |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$2) |A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B|$$

$$3) |A - B| = |A| - |A \cap B|$$

$$4) |A \Delta B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|$$

$$5) |A'| = |U| - |A|$$

زوج مرتب :

هر زوج مرتب، یک دو تایی به صورت (a, b) می باشد که ترتیب نوشتن a و b در آن مهم می باشد، زوج مرتب (a, b) را یک دو تایی مرتب نیز می گویند.

دو تفاوت مهم بین زوج‌های مرتب و مجموعه‌ها

نکته: در حالت کلی $(a, b) \neq (b, a)$ ، در صورتی که در مجموعه ها داشتیم: $\{a, b\} = \{b, a\}$.

نکته: در حالت کلی $(a, a) \neq (a)$ ، در حالی که در مجموعه ها داشتیم: $\{a, a\} = \{a\}$.

تساوی دو زوج مرتب

دو زوج مرتب (a, b) و (c, d) زمانی مساوی اند که مؤلفه‌های اول آنها با هم و مؤلفه‌های دوم آنها، تیز با هم مساوی باشند. یعنی:

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$$

تست: هرگاه دو زوج مرتب $(x-y; 5)$ ، $(1, x^2 - y^2)$ مساوی باشند، $3x + 2y$ کدام است؟

9 (1) 10 (2) 13 (2) -5 (1)

یاسیخ :

$$(x-y, 5) = (1, x^2-y^2) \Rightarrow \begin{cases} x-y=1 \\ x^2-y^2=5 \Rightarrow (x-y)(x+y)=5 \end{cases}$$

$$1(x+y)=5 \Rightarrow \begin{cases} x+y=5 \\ x-y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow 3x+2y=13$$

سه تایی مرتب

هر سه تایی مرتب، یک سه تایی به صورت (a, b, c) است که ترتیب نوشتن a و b و c در آن، مهم می باشد.

✓ تذکر: تساوی دو سه تایی مرتب همانند تساوی دو زوج مرتب می باشد.

حاصل ضرب دیکارتی (کارتزین) دو مجموعه

هرگاه A و B دو مجموعه باشند، حاصل ضرب دکارتی A در B (که آن را با $A \times B$ نمایش می‌دهیم)، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}$$

به همین ترتیب داریم :

$$B \times A = \{(x, y) : x \in B, y \in A\}$$

$$A^2 = A \times A = \{(x, y) : x \in A, y \in A\}$$

$$B' = B \times B = \{(x, y) : x \in B, y \in B\}$$

مثال: هرگاه $\Lambda = \{1, 2\}$ و $B = \{a, b, c\}$ و $\Lambda \times B$ و Λ^2 را بیابید؟

$$\Lambda \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$$

$$\Lambda^2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$$

✓ تذکر مهم: یا توجه به اینکه در حالت کلی $(x, y) \neq (y, x)$ لذا حاصل ضرب دکارتی دو مجموعه، در حالت کلی، خاصیت جابه جایی ندارد، یعنی: $\Lambda \times B \neq B \times \Lambda$ (مگر در حالت $A = B$ و یا حالتی که A یا B تهی هستند که بعداً در مورد آن بحث خواهیم کرد).

✓ نکته مهم: هرگاه مجموعه A دارای m عضو و مجموعه B دارای n عضو باشد، آنگاه:

(۱) هر یک از دو مجموعه $\Lambda \times B$ و $B \times \Lambda$ دارای $m \times n$ عضو می باشند.

(۲) $\Lambda^2 = \Lambda \times \Lambda$ دارای m^2 عضو می باشد.

(۳) $B^2 = B \times B$ دارای n^2 عضو می باشد.

مثال: هرگاه $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{1, 5\}$ ، تعداد عضوهای مجموعه $(\Lambda \times B) \cup \Lambda^2$ برابر است با:

(۱) 6 (۲) 12 (۳) 9 (۴) 15

پاسخ: $\Lambda \times B$ ، 6 عضو دارد و Λ^2 ، 9 عضو دارد و $(\Lambda \times B) \cap \Lambda^2$ ، 3 عضو دارد دقت کنید:

$$\Lambda \times B = \{(1, 1), (1, 5), (2, 1), (2, 5), (3, 1), (3, 5)\}$$

$$\Lambda^2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$$

لذا طبق فرمول $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ داریم:

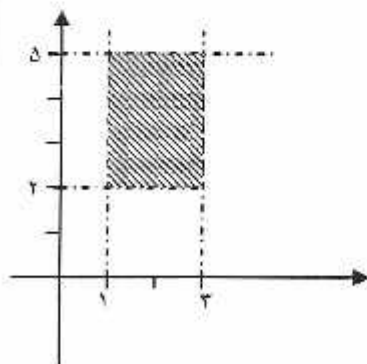
$$|(\Lambda \times B) \cup \Lambda^2| = |\Lambda \times B| + |\Lambda^2| - |(\Lambda \times B) \cap \Lambda^2|$$

$$= 6 + 9 - 3 = 12$$

مثال: هرگاه $\Lambda = [1, 3]$ و $B = [2, 5]$ را مشخص و نمودارش را رسم کنید؟

$$\Lambda \times B = [1, 3] \times [2, 5] = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 3, 2 \leq y \leq 5\}$$

نمودار این مجموعه عبارت است از:



مثال: $\mathbb{R} \times \{0\}$ را مشخص و نمودارش را رسم کنید؟

پاسخ: $\mathbb{R} \times \{0\} = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ ، نمودارش محور x ها می باشد.



تذکر: مفهوم حاصل ضرب دکارتی در مورد دو مجموعه را می‌توان برای سه مجموعه یا بیشتر نیز تعمیم داد.

$$A \times B \times C = \{(x, y, z) : x \in A, y \in B, z \in C\}$$

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

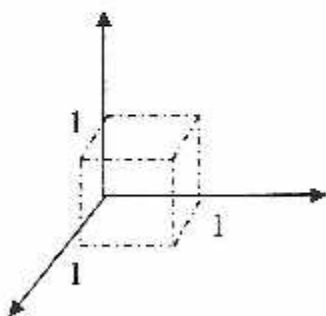
مثال:

مثال: $[0, 1]^3$ را مشخص و نمودارش را رسم کنید؟

$$[0, 1]^3 = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1] = \{(x, y, z) : 0 \leq x, y, z \leq 1\}$$

پاسخ:

و نمودارش به صورت زیر است:



روابط مهم در مورد حاصل ضرب دکارتی

تعریف: $A \times B = \{(x, y) : x \in A \wedge y \in B\}$

$$1) (x, y) \in (A \times B) \Leftrightarrow x \in A \wedge y \in B$$

$$2) (x, y) \notin (A \times B) \Leftrightarrow x \notin A \vee y \notin B \Leftrightarrow \begin{cases} x \notin A \wedge y \in B \\ \quad \quad \quad \diamond \diamond \\ x \in A \wedge y \notin B \\ \quad \quad \quad \diamond \diamond \\ x \notin A \wedge y \notin B \end{cases}$$

$$3) A \times B \neq B \times A$$

$$4) A \times B = B \times A \Leftrightarrow A = B \text{ یا } A = \emptyset \text{ یا } B = \emptyset$$

$$5) A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$$

$$6) |A \times B| = |A| |B|$$

$$7) \emptyset \times A = A \times \emptyset = \emptyset \times \emptyset = \emptyset$$

$$8) A \times B = \emptyset \Leftrightarrow A = \emptyset \text{ یا } B = \emptyset$$

$$9) \begin{cases} A \subset B \\ C \subset D \end{cases} \Leftrightarrow A \times C \subset B \times D$$

$$10) A \subset B \Leftrightarrow A^2 \subset B^2$$

$$11) \begin{cases} A = B \\ C = D \end{cases} \Leftrightarrow A \times C = B \times D \xrightarrow{A, B, C, D \neq \emptyset} \begin{cases} A = B \\ C = D \end{cases}$$

$$12) A = B \Rightarrow A \times C = B \times C$$

$$13) A \times B = A \times C, A \neq \emptyset \Rightarrow B = C$$

$$14) A \times B \subset A \times C, A \neq \emptyset \Rightarrow B \subset C$$

$$15) A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C) \quad \cap \text{ توزیع پذیری } \times \text{ نسبت به}$$

$$16) A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C) \quad \cup \text{ توزیع پذیری } \times \text{ نسبت به}$$

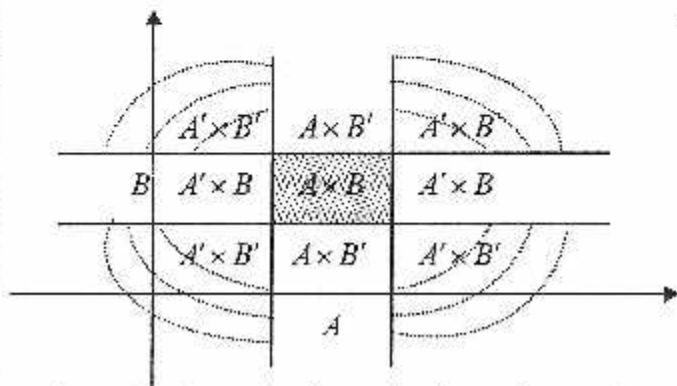
$$17) A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C) \quad - \text{ توزیع پذیری } \times \text{ نسبت به}$$

$$18) A \times (B \Delta C) = (A \times B) \Delta (A \times C) \quad \Delta \text{ توزیع پذیری } \times \text{ نسبت به}$$

$$19) (A \times B)^{-1} = B \times A = \{(x, y) : (y, x) \in A \times B\}$$

$$20) (A \times B)' = (A' \times B) \cup (A \times B') \cup (A' \times B')$$

برای درک درستی تساوی (20) به نمودار زیر توجه کنید.



$$21) (A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$$

$$22) (A \times B) \cup (C \times D) \neq (A \times C) \cup (B \times D)$$

$$23) (A \times B) \cap (B \times A) = (A \cap B)^2 \quad \text{طبق (21)}$$

$$24) |(A \times B) \cap (B \times A)| = |A \cap B|^2 \quad (\text{مهم})$$

$$25) |(A \times B) \cup (B \times A)| = 2|A||B| - |A \cap B|^2 \quad (\text{مهم})$$

اثبات: طبق فرمول $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ داریم:

$$|(A \times B) \cup (B \times A)| = |A \times B| + |B \times A| - |(A \times B) \cap (B \times A)|$$

$$= |A||B| + |B||A| - |A \cap B|^2$$

$$= 2|A||B| - |A \cap B|^2$$

$$26) |(A \times B) - (B \times A)| = |A||B| - |A \cap B|^2 \quad (\text{مهم})$$

اثبات: طبق فرمول $|A - B| = |A| - |A \cap B|$ داریم:

$$|(A \times B) - (B \times A)| = |A \times B| - |(A \times B) \cap (B \times A)|$$

$$= |A||B| - |A \cap B|^2$$

$$27) |(A \times B) \Delta (B \times A)| = 2(|A||B| - |A \cap B|^2) \quad (\text{مهم})$$

$$28) |A^2 - B^2| = |A|^2 - |A \cap B|^2 \quad (\text{مهم})$$

تست: هرگاه $A = \{1, 2, 3, \dots, 30\}$ و $B = \{21, 22, \dots, 50\}$ ، آنگاه $(A \times B) \cup (B \times A)$ چند عضو دارد؟

۸) 800 ۲) 1800 ۳) 1790 ۴) 1700

پاسخ:

$$|(A \times B) \cup (B \times A)| = 2|A||B| - |A \cap B|^2$$

$$= 2(30)(30) - (10)^2 = 1700$$

تست: اگر $A = \{a, b, c, d, e\}$ و $B = \{d, e, f, g\}$ ، آنگاه $A^2 - (A \times B)$ چند عضو دارد؟

۸) 12 ۲) 9 ۳) 15 ۴) 5

پاسخ:

$$A^2 - (A \times B) = (A \times A) - (A \times B) = A \times (A - B)$$

$$\rightarrow |A^2 - (A \times B)| = |A \times (A - B)| = |A| \times |A - B|$$

$$= 5 \times 3 = 15$$

جمع بندی و یاد آوری چند فرمول بسیار مهم

$$1) |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$2) |A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B|$$

$$3) |A'| = |U| - |A|$$

$$4) |A - B| = |A| - |A \cap B|$$

$$5) |A \Delta B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|$$

$$6) |A \times B| = |B \times A| = |A| \times |B|$$

$$7) |A^2| = |A \times A| = |A| \times |A| = |A|^2$$

$$8) |(A \times B) \cap (B \times A)| = |A \cap B|^2$$

$$9) |(A \times B) \cup (B \times A)| = 2|A||B| - |A \cap B|^2$$

$$10) |(A \times B) - (B \times A)| = |A||B| - |A \cap B|^2$$

$$11) |A^2 - B^2| = |A|^2 - |A \cap B|^2$$

$$12) |(A \times B) \Delta (B \times A)| = 2(|A||B| - |A \cap B|^2)$$

رابطه

هر زیر مجموعه از حاصل ضرب دکارتی $A \times B$ را یک رابطه از مجموعه A در مجموعه B می‌گوییم، بنابراین اگر R یک رابطه از مجموعه A در مجموعه B باشد، آنگاه $R \subset A \times B$ ، در این تعریف A را مجموعه آغاز (شروع یا مبدأ) و B را مجموعه هم دامنه (مقصد یا پایان یا هدف یا انجام) می‌گوییم.

۱) تذکر: در حالتی که $R \subset A \times A$ باشد، گوییم R یک رابطه در A است، یا رابطه R روی A تعریف شده است.

۲) نکته: چون $\phi \subset A \times B$ است، لذا ϕ یک رابطه از A در B است.

✓ نکته: چون $A \times B \subset A \times B$ است، لذا $A \times B$ نیز یک رابطه از A در B است، در واقع $A \times B$ بزرگترین رابطه از A در B ، از لحاظ تعداد عضو می‌باشد.

✓ نکته مهم: تعداد رابطه‌هایی که می‌توان از مجموعه n عضوی A به مجموعه m عضوی B نوشت برابر است با تعداد زیر مجموعه‌های $A \times B$ یعنی: 2^{nm}

✓ نکته مهم: هرگاه A یک مجموعه n عضوی باشد، تعداد رابطه‌هایی که می‌توان روی A نوشت برابر است با:

$$2^{n^2}$$

تست: اگر رابطه بتوان روی مجموعه A نوشت، تعداد اعضای A کدام است؟

$$8 \text{ (ع)}$$

$$3 \text{ (ز)}$$

$$6 \text{ (ز)}$$

$$9 \text{ (ا)}$$

$$2^{n^2} = 512 \Rightarrow 2^{n^2} = 2^9 \Rightarrow n^2 = 9 \Rightarrow n = 3$$

پاسخ:

تست: روی مجموعه $A = \{a, b, c, d\}$ چند رابطه دو عضوی می‌توان نوشت؟

$$120 \text{ (ع)}$$

$$210 \text{ (ز)}$$

$$256 \text{ (ز)}$$

$$32 \text{ (ا)}$$

پاسخ: گزینه 4 صحیح است، چون $|A| = 4$ لذا $|A \times A| = 16$ و تعداد زیر مجموعه‌های دو عضوی $A \times A$ برابر است با:

$$\binom{16}{2} = \frac{16 \times 15}{2} = 120$$

✓ نکته مهم: هرگاه R یک رابطه از A در B باشد ($R \subset A \times B$) و $(a, b) \in R$ ، در این صورت می‌نویسیم $a R b$ و گوئیم a با b رابطه دارد (a و b به وسیله رابطه R به هم مربوط اند) و اگر $(a, b) \notin R$ ، می‌نویسیم $a \not R b$.

مثال: رابطه R در مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ به صورت تعریف شده است:

$$(a, b) \in R \Leftrightarrow a < b$$

الف) اعضای این رابطه را بنویسید؟

پاسخ:

$$R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 5)\}$$

ب) آیا $2 R 3$ ، $4 R 5$ چطور؟

پاسخ:

$$2 R 3 \Rightarrow 2 < 3 \quad \text{بله}$$

$$5 R 4 \Rightarrow 5 < 4 \quad \text{خیر}$$

مثال: رابطه R در مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4\}$ به صورت زیر تعریف شده است:

$$\forall a, b \in A: a R b \Leftrightarrow a + b \leq 4$$

اعضای این رابطه را بنویسید؟

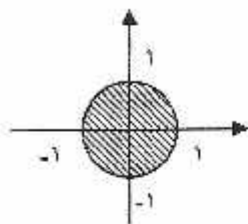
$$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1)\}$$

مثال: نمودار رابطه‌های زیر را رسم کنید؟

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq 1\}$$

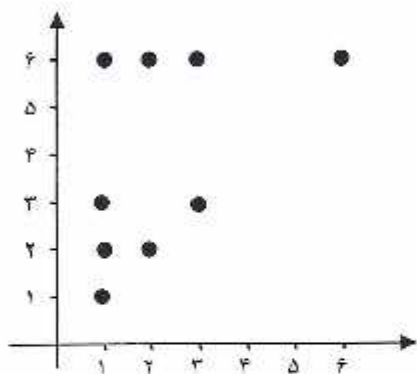
الف)

معادله $x^2 + y^2 = 1$ نمودار یک دایره است و لذا نامعادله $x^2 + y^2 \leq 1$ نمایش روی محیط و درون همین دایره می‌باشد.

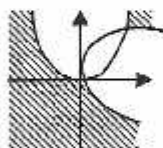


(ب) $R = \{(x, y) \in A^2, x|y\}$, $A = \{1, 2, 3, 6\}$

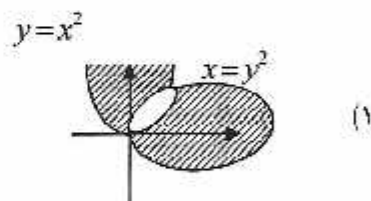
$R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,6), (2,2), (2,6), (3,3), (3,6), (6,6)\}$



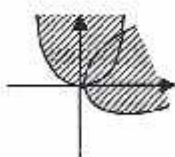
تست: هرگاه $R_1 = \{(x, y) \mid y \geq x^2\}$ و $R_2 = \{(x, y) \mid y^2 \geq x\}$ ، آنگاه $R_1 \cap R_2$ ، کدام است؟



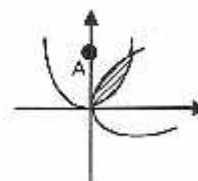
(۲)



(۱)



(۴)



(۳)

پاسخ: واضح است که پاسخ صحیح گزینه ۲ می‌باشد.

داخل سهمی $y = x^2$ جواب است $\Rightarrow$ نقطه $\Lambda(0,1)$ در آن صدق می‌کند: $y \geq x^2 \Rightarrow 1 \geq 0$

داخل سهمی $y^2 = x$ جواب است $\Rightarrow$ نقطه $\Lambda(0,1)$ در آن صدق نمی‌کند: $y^2 \leq x \Rightarrow 1 \leq 0$

دامنه و برد یک رابطه

به مجموعه همه مؤلفه‌های اول زوج‌های مرتب هر رابطه، دامنه آن رابطه و به مجموعه همه مؤلفه‌های دوم زوج‌های مرتب آن، برد آن رابطه می‌گوییم.

وارون یک رابطه

وارون هر رابطه، رابطه‌ای است که از جا به جا کردن x و y های زوج‌های مرتب آن رابطه بدست می‌آید و وارون رابطه R را با R^{-1} نمایش می‌دهند.

$$R = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}$$

یعنی:

$$R^{-1} = \{(y, x) : x \in A, y \in B\}$$

واضح است که:

$$\begin{cases} \text{برد دامنه } R^{-1} = R \\ \text{دامنه } R^{-1} = \text{برد } R \end{cases}$$

$$\text{مثال: مرگه } R = \{(2, 3), (4, 5)\} \text{ آنگاه } R^{-1} = \{(3, 2), (5, 4)\}$$

متمم یک رابطه

متمم هر رابطه مانند R را با نماد R' یا R^c نشان می‌دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$R^c = R' = (A \times A) - R$$

نکاتی راجع به رابطه‌ها

$$R = \{(x, y) : x \in A, y \in B\} \text{ تعریف رابطه از } A \text{ در } B$$

$$1) (x, y) \in R \Leftrightarrow x \in A \wedge y \in B$$

$$2) (x, y) \notin R \Leftrightarrow x \notin A \vee y \notin B$$

$$3) (x, y) \in R \Leftrightarrow (y, x) \in R^{-1}$$

$$4) (x, y) \in R \Leftrightarrow x R y$$

$$5) (x, y) \notin R \Leftrightarrow x \not R y$$

$$6) R^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in R\}$$

$$7) (R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1}$$

$$8) (R_1 \cap R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cap R_2^{-1}$$

$$9) (R_1 - R_2)^{-1} = R_1^{-1} - R_2^{-1}$$

$$10) (R_1 \Delta R_2)^{-1} = R_1^{-1} \Delta R_2^{-1}$$

$$11) (R_1 \times R_2)^{-1} = R_2 \times R_1$$

$$12) (R^{-1})^{-1} = R$$

$$13) R \times \phi = \phi \times R = \phi \times \phi = \phi$$

دقت کنید این قوانین را با قوانین دمورگان قاطی نکنید

اثبات 9:

$$(x, y) \in (R_1 - R_2)^{-1} \Leftrightarrow (y, x) \in (R_1 - R_2) \Leftrightarrow (y, x) \in R_1 \wedge (y, x) \notin R_2$$

$$\Leftrightarrow (x, y) \in R_1^{-1} \wedge (x, y) \notin R_2^{-1} \Leftrightarrow (x, y) \in R_1^{-1} - R_2^{-1}$$

مثال: هرگاه

$$\text{درستی} \begin{cases} R_1 = \{(x, y) \in A^2 : x \geq y, A = \{2, 3, 4\}\} \\ R_2 = \{(x, y) \in B^2 : x = y + 1, B = \{1, 2, 3, 4\}\} \end{cases}$$

رابطه $(R_1 \cap R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cap R_2^{-1}$ را تحقیق کنید؟

$$R_1 = \{(2, 2), (3, 3), (3, 2), (4, 4), (4, 3), (4, 2)\}$$

$$R_2 = \{(2, 1), (3, 2), (4, 3)\}$$

$$R_1 \cap R_2 = \{(3, 2), (4, 3)\}$$

$$(R_1 \cap R_2)^{-1} = \{(2, 3), (3, 4)\}$$

$$R_1^{-1} = \{(2, 2), (3, 3), (2, 3), (4, 4), (3, 4), (2, 4)\}$$

$$R_2^{-1} = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$$

$$R_1^{-1} \cap R_2^{-1} = \{(2, 3), (3, 4)\}$$

افراز

مجموعه نا تهی (غیر خالی) A را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم $A_1, A_2, \dots, A_n$ زیر مجموعه‌های آن باشند،

مجموعه $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ را یک افراز n عضوی مجموعه A گویند، هرگاه:

(۱) هر کدام از $A_1, A_2, \dots, A_n$ غیر خالی باشند.

(۲) اشتراک دو به دو این زیر مجموعه‌ها، تهی باشد.

(۳) اجتماع همه این زیر مجموعه‌ها، مساوی خود A باشد.

مثال: کلیه افرازهای مجموعه $A = \{1, 2, 3\}$ را بنویسید؟

$$\text{افراز 3 عضوی} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$$

$$\text{افرازهای 2 عضوی} = \{\{1, 2\}, \{3\}\}, \{\{1\}, \{2, 3\}\}, \{\{1, 3\}, \{2\}\}$$

$$\text{افرازهای 1 عضوی} = \{\{1, 2, 3\}\}$$

لذا یک مجموعه 3 عضوی، 5 افراز دارد.

نکته: تعداد افرازهای مجموعه‌های 2 تا 5 عضوی در جدول زیر آمده است:

تعداد اعضای مجموعه	تعداد افرازها
۲	۲
۳	۵
۴	۱۵
۵	۵۲

تست: یک مجموعه 5 عضوی مانند $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ چند افزاز دو عضوی دارد؟

(1) 10 (2) 15 (3) 20 (4) 25

پاسخ: برای اینکه یک مجموعه 5 عضوی را به دو مجموعه افزاز کنیم باید یا یک 3 تایی و یک دو تایی جدا کنیم و یا یک

چهار تایی و یک یکی، مثلاً $\{1, 2\}, \{3, 4, 5\}$ یا $\{1\}, \{2, 3, 4, 5\}$ ، عمل اول به $\binom{5}{2} = \binom{5}{3} = 10$ طریق و

عمل دوم به $\binom{5}{4} = \binom{5}{1} = 5$ طریق صورت می‌گیرند لذا تعداد افرزهای دو عضوی Λ برابر است با:

$$10 + 5 = 15$$

رابطه هم ارزی

رابطه‌ای چون « $\sim$ » را روی مجموعه A یک رابطه هم ارزی گوئیم هرگاه، هر سه خاصیت زیر را داشته باشد:

- (1) خاصیت انعکاسی (بازتابی): به ازاء هر $x \in A$ داشته باشیم: $x \sim x$ ، (یعنی هر عضو با خودش رابطه داشته باشد).
- (2) خاصیت تقارنی: به ازاء هر $x, y \in A$ اگر $x \sim y$ آنگاه $y \sim x$ ، (یعنی اگر x با y رابطه داشته باشد y نیز با x رابطه داشته باشد).

- (3) خاصیت تعدی یا تراییبی یا تراگذاری: به ازاء هر $x, y, z \in A$ اگر $x \sim y$ و $y \sim z$ ، آنگاه $x \sim z$ ، (یعنی اگر x با y و y با z رابطه داشته باشد، x نیز با z رابطه داشته باشد).

مثال: رابطه R روی مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ به صورت زیر تعریف شده است:

$$R = \{(x, y) \in A^2 : x = y\}$$

تحقیق کنید که آیا R روی A یک رابطه هم ارزی هست یا نه؟

(1) بازتابی

$$\forall x \in A : x R x$$

$$\forall x \in A : x = x \rightarrow x R x \quad \checkmark$$

(2) تقارنی

$$\forall x, y \in A : x R y \Rightarrow y R x$$

$$\forall x, y \in A : x R y \Rightarrow x = y \Rightarrow y = x \Rightarrow y R x \quad \checkmark$$

(3) تراییبی

$$\forall x, y, z \in A : (x R y, y R z) \Rightarrow x R z$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x R y \Rightarrow x = y \\ y R z \Rightarrow y = z \end{array} \right\} \Rightarrow x = z \Rightarrow x R z \quad \checkmark$$

تست: هرگاه $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ، کدام رابطه‌ی زیر روی A یک رابطه‌ی هم ارزی است؟

$$R_1 = \{(1, 1), (2, 3), (3, 2), (4, 4)\} \quad (1)$$

$$R_2 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 2)\} \quad (2)$$

$$R_3 = \{(1, 2)\} \quad (3)$$

$$R_4 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\} \quad (4)$$

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است زیرا هر سه خاصیت بازتابی - تقارنی و ترایی را دارد.

رابطه‌ی R_1 ، خاصیت بازتابی را ندارد زیرا 3 با 3 رابطه ندارد، البته این رابطه خاصیت ترایی را نیز ندارد.

رابطه‌ی R_2 ، هر سه خاصیت را ندارد، بازتابی را ندارد زیرا 1 با 1 رابطه ندارد، تقارنی را ندارد زیرا 1 با 2 رابطه دارد

اما 2 با 1 رابطه ندارد، ترایی را ندارد، زیرا 1 با 2 و 2 با 3 رابطه دارد ولی 1 با 3 رابطه ندارد.

رابطه‌ی R_3 خاصیت بازتابی و تقارنی را ندارد، اما خاصیت ترایی را به انتفاء مقدم دارد.

تست: رابطه‌ی $x + y + 5$ فرد باشد $x, y \in \mathbb{Z} : x R y \Leftrightarrow$ چند خاصیت از خواص رابطه هم ارزی را دارد؟

0 (۱) 1 (۲) 2 (۳) 3 (۴)

پاسخ: بازتابی را دارد زیرا:

$$x R x \Rightarrow x + x + 5 = 2x + 5 \quad \checkmark$$

تقارنی را دارد زیرا: رابطه نسبت به x و y متقارن است، یعنی وقتی $x + y + 5$ فرد باشد، $y + x + 5$ نیز فرد است.

ترایی را نیز دارد زیرا: $x R y, y R z \Rightarrow x R z$

$$\begin{cases} x R y \Rightarrow x + y + 5 \text{ فرد است} \\ y R z \Rightarrow y + z + 5 \text{ فرد است} \\ + \hline \end{cases}$$

نکته: مجموع دو عدد فرد، زوج است $x + 2y + z + 10$ زوج است

$$(x + z) + \underbrace{(2y + 10)}_{\text{زوج}} = \text{زوج} \Rightarrow x + z \text{ زوج است}$$

$$x + z + 5 \Rightarrow x R z \Rightarrow \text{فرد است}$$

تست: رابطه‌ی $(x, y) R (z, t) \Leftrightarrow x t = y z$ روی $\mathbb{R}^2$ تعریف شده است این رابطه چند خاصیت از خواص رابطه‌های هم ارزی را دارد؟

0 (۱) 1 (۲) 2 (۳) 3 (۴)

پاسخ: بازتابی را دارد:

$$(x, y) R (x, y) \Rightarrow x y = y x \quad \checkmark$$

$$(x, y) R (z, t) \Rightarrow (z, t) R (x, y) \quad \text{تقارنی}$$

$$(x, y) R (z, t) \Rightarrow x t = y z \Rightarrow z y = t x \Rightarrow (z, t) R (x, y) \quad \text{پس تقارنی را نیز دارد.}$$

$$(x, y) R (z, t), (z, t) R (m, n) \Rightarrow (x, y) R (m, n) \quad \text{ترایی}$$

$$\begin{cases} (x, y) R (z, t) \Rightarrow x t = y z \\ (z, t) R (m, n) \Rightarrow z n = t m \\ \times \hline \end{cases}$$

$$x t z n = y z t m \Rightarrow x n = y m$$

دقت کنید که ممکن است t یا z صفر باشند و لذا در حالت کلی نمی توان نتیجه گرفت که: $x \cdot n = y \cdot m$ (مگر اینکه $\{0\}$ - $\mathbb{R}$ $x, y, z, t \in \mathbb{R}$) لذا خاصیت ترایی را ندارد.

پس گزینه ۳ صحیح است.

مثال: آیا رابطه ی پدر بودن در مجموعه ی انسان ها، یک رابطه ی هم ارزی است؟

پاسخ:

(۱) بازتابی را ندارد. $\Rightarrow$ آیا هر کسی پدر خودش هست؟ خیر.

(۲) تقارنی را نیز ندارد. $\Rightarrow$ آیا اگر من پدر تو باشم، تو هم پدر من هستی؟ خیر، چرا که تو فرزند من می شوی.

(۳) ترایی را هم ندارد. $\Rightarrow$ آیا اگر من پدر تو و تو پدر او باشی، من هم پدر او هستم؟ خیر، چرا که من پدر بزرگ او می شوم. پس یک رابطه ی هم ارزی نیست.

مثال: آیا رابطه ی برادر بودن در مجموعه ی انسان ها یک رابطه ی هم ارزی است؟

پاسخ:

بازتابی را ندارد. $\Rightarrow$ آیا هر کسی برادر خودش هست؟ خیر.

تقارنی را نیز ندارد. $\Rightarrow$ آیا اگر من برادر تو باشم، تو هم برادر من هستی؟ خیر، شاید تو خواهر من باشی.

ترایی را دارد. $\Rightarrow$ آیا اگر من برادر تو و تو برادر او باشی، من هم برادر او هستم؟ بله

پس یک رابطه ی هم ارزی نیست.

مثال: آیا رابطه ی عمود بودن دو خط بر یکدیگر در مجموعه خطوط صفحه، یک رابطه ی هم ارزی است؟

پاسخ:

بازتابی را ندارد. $\Rightarrow$ آیا هر خطی بر خودش عمود است؟ خیر.

تقارنی را دارد. $\Rightarrow$ آیا اگر خط D بر خط D' عمود باشد، خط D' نیز بر خط D عمود است؟ بله.

ترایی را ندارد. $\Rightarrow$ آیا اگر خط D بر خط D' و خط D' بر خط D'' عمود باشند، خط D نیز بر خط D'' عمود است؟ خیر، چرا که D با D'' موازی می شود.

پس یک رابطه ی هم ارزی نیست.

رابطه ی ترتیب

رابطه ای چون « $\sim$ » را روی مجموعه A یک رابطه هم ارزی گوئیم هرگاه، هر سه خاصیت زیر را داشته باشد:

(۱) خاصیت بازتابی را داشته باشد.

(۲) خاصیت پاد تقارن (ضد تقارن) را داشته باشد، یعنی:

$$\forall x, y \in A: x \sim y \Rightarrow y \sim x \quad \neq$$

یعنی اگر x با y و y با x رابطه داشت، آنگاه x با y برابر باشد، به عبارت دیگر می توان گفت که اگر $x \neq y$ آنگاه یا فقط

x با y رابطه داشته باشد یا فقط y با x و یا هیچ کدام به عبارت دیگر اگر $(x, y) \in R$ ، آنگاه $(y, x) \notin R$.

(۳) خاصیت تعدی (ترایی) را نیز داشته باشد.

مثال : رابطه $\leq$ (کوچکتر یا مساوی بودن) در مجموعه‌ی اعداد حقیقی یک رابطه‌ی ترتیب است. زیرا :

$$1) \forall x \in \mathbb{R} : x \leq x \quad \checkmark \text{ بازتابی را دارد.}$$

$$2) \forall x, y \in \mathbb{R} : x \leq y \text{ و } y \leq x \Rightarrow x = y \quad \checkmark \text{ پاد تقارنی را دارد.}$$

$$3) \forall x, y, z \in \mathbb{R} : x \leq y \text{ و } y \leq z \Rightarrow x \leq z \quad \checkmark \text{ ترایایی را نیز دارد.}$$

تست : کدام رابطه‌ی زیر روی $\mathbb{R}$ هم یک رابطه‌ی هم ارزی است و هم یک رابطه‌ی ترتیب؟

$$\leq (1) \quad \neq (2) \quad = (3) \quad \in (4) \text{ هیچ کدام}$$

پاسخ : گزینه‌ی ۲ صحیح است رابطه‌ی تساوی روی $\mathbb{R}$ هم یک رابطه‌ی هم ارزی و هم یک رابطه‌ی ترتیب است.

یک مثال مهم و جالب

مثال : مجموعه‌ی $A = \{1 \text{ و } 2 \text{ و } 3\}$ مقروض است، رابطه‌ای روی A بنویسید که :

الف) بازتابی باشد؟ $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$

ب) بازتابی نباشد؟ $R = \{(1, 1)\}$

ج) تقارنی نباشد؟ $R = \{(1, 2)\}$

د) تقارنی و پاد تقارنی و ترایایی باشد؟ $R = \{(3, 3)\}$

ه) فقط بازتابی باشد؟ $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1), (2, 3)\}$

و) فقط پاد متقارن باشد؟ $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3)\}$

ز) متقارن و پاد متقارن نباشد؟ $R = \{(1, 2), (2, 1), (1, 3)\}$

ح) هیچ کدام از چهار خاصیت را نداشته باشد؟ $R = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3)\}$

۷ نکته‌ی مهم : هر رابطه‌ی هم ارزی روی یک مجموعه، آن مجموعه را به زیر مجموعه‌های مجزا که هر یک از آنها،

دسته یا کلاس یا رده‌ی هم ارزی نامیده می‌شوند، تقسیم می‌کند، همچنین هر افرازی، بر اساس یک رابطه‌ی هم ارزی

ساخته می‌شود. بنابراین می‌توان گفت : تعداد افرازها = تعداد رابطه‌های هم ارزی.

دسته‌ی هم ارزی a را با علامت $[a]$ یا $\bar{a}$ نشان می‌دهیم. a را نماینده‌ی دسته می‌گوییم و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$[a] = \{x \in A : x R a\}$$

دقت کنید که نماینده‌ی هر دسته، عضوی از آن دسته است، ضمناً این نماینده می‌تواند هر عدد دیگری از این دسته باشد.

مثال : رابطه‌ی R در $\mathbb{Z}$ به صورت $x R y \Leftrightarrow 3 \mid x - y$ تعریف شده است، اولاً ثابت کنید R یک رابطه‌ی هم ارزی است،

ثانیاً این رابطه مجموعه‌ی $\mathbb{Z}$ را به چند کلاس هم ارزی افراز می‌کند، این کلاس‌های هم ارزی را مشخص کنید؟

پاسخ :

$$\forall x \in \mathbb{Z} : x R x \Leftrightarrow 3 \mid x - x = 0 \quad \checkmark \text{ بازتابی را دارد.}$$

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} : x R y \Leftrightarrow 3 \mid x - y \Rightarrow 3 \mid y - x \Rightarrow y R x \quad \checkmark \text{ تقارنی را نیز دارد.}$$

$$\forall x, y, z \in \mathbb{Z} : \begin{cases} x R y \Rightarrow 3 \mid x - y \\ y R z \Rightarrow 3 \mid y - z \\ \hline 3 \mid x - y + y - z \\ 3 \mid x - z \Rightarrow x R z \end{cases}$$

✓ ترایی را نیز دارد.

پس یک رابطه‌ی هم ارزی است

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

$$[0] = \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv 0\} = \{x \in \mathbb{Z} : x - 0\} = \{x \in \mathbb{Z} : 3 \mid x\} = \{x \in \mathbb{Z} : x = 3k, k \in \mathbb{Z}\}$$

بنابراین :

$$[0] = \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots\}$$

به همین ترتیب :

$$[1] = \{x \in \mathbb{Z} : x = 3k + 1, k \in \mathbb{Z}\}$$

و لذا :

$$[1] = \{\dots, -5, -2, 1, 4, 7, \dots\}$$

و بالاخره :

$$[2] = \{x \in \mathbb{Z} : x = 3k + 2 \text{ یا } x = 3k - 1, k \in \mathbb{Z}\}$$

و یا :

$$[2] = \{\dots, -4, -1, 2, 5, 8, \dots\}$$

لذا این رابطه‌ی هم ارزی مجموعه‌ی $\mathbb{Z}$ را به ۳ کلاس هم ارزی افراز می‌کند که عبارتند از :

$[0], [1], [2]$ ، یعنی مجموعه‌ی $\mathbb{Z}/R = \{[0], [1], [2]\}$ یک افراز برای $\mathbb{Z}$ است که به وسیله‌ی رابطه‌ی $\mathbb{R}$ ایجاد شده

است. این مجموعه را با نماد $\mathbb{Z}_3$ نمایش می‌دهیم :

$$\mathbb{Z}_3 = \{[0], [1], [2]\}$$

مثال : آیا مجموعه‌ی $B = \{\{1\}, \{2, 3, 4\}, \{5, 6\}\}$ یک افراز برای مجموعه‌ی $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ می‌باشد؟ در

صورت مثبت بودن جواب، رابطه‌ی هم ارزی متناظر با این افراز را بنویسید؟

بله، B یک افراز A هست، رابطه‌ی هم ارزی نظیر این افراز عبارت است از :

$$R = \left\{ (1, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (2, 4), (4, 2), (3, 3), \right. \\ \left. (3, 4), (4, 3), (4, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 5), (6, 6) \right\}$$

دقت کنید که برای نوشتن این رابطه‌ی هم ارزی، توجه به این نکته مهم است که هر عضوی که در یک مجموعه قرار دارد،

علاوه بر اینکه با خودش رابطه دارد، با بقیه و همچنین به دلیل تقارنی بودن رابطه، بقیه نیز با این عضو رابطه دارند، با

این دیدگاه به راحتی می‌توان اعضای رابطه‌ی R را نوشت.

تست : اگر رابطه‌ی هم ارزی R روی مجموعه‌ی $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ به صورت زیر تعریف شود :

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 4), (5, 5)\}$$

آنگاه این رابطه، چند دسته‌ی هم ارزی ایجاد می‌کند؟

4 (۴)

3 (۳)

2 (۲)

1 (۱)

پاسخ : 3 دسته‌ی هم ارزی، زیرا :

$$[1] = [2] = \{1, 2\}$$

$$[3] = \{3\}$$

$$[4] = [5] = \{4, 5\}$$

تست: اگر افراز مجموعه‌ی A ، به صورت $B = \{\{1, 2\}, \{3, 4, 5\}, \{6\}\}$ باشد، رابطه‌ی هم ارزی متناظر این افراز، چند زوج مرتب دارد؟

15 (۴)

14 (۳)

13 (۲)

10 (۱)

۷ نکته: هرگاه $B = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ یک افراز برای A باشد، آنگاه $R = A_1^2 \cup A_2^2 \cup \dots \cup A_n^2$ لذا تعداد اعضای R برابر است با:

$$|R| = |A_1^2| + |A_2^2| + \dots + |A_n^2| = |A_1|^2 + |A_2|^2 + \dots + |A_n|^2$$

چرا که $A_1, A_2, \dots, A_n$ دو به دو از هم جدا هستند.

$$n(R) = 2^2 + 3^2 + 1 = 4 + 9 + 1 = 14$$

پاسخ تست: لذا:

تست: دسته‌های هم ارزی رابطه‌ی زیر چگونه اند؟ (رابطه R روی $\mathbb{R}^2$ تعریف شده است).

$$(x, y) R (z, t) \Leftrightarrow x^2 + y^2 = z^2 + t^2$$

(۴) هیچ کدام

(۳) دایره

(۲) خط

(۱) سهمی

پاسخ: کافی است یک دسته‌ی هم ارزی مانند $[(1, 2)]$ را حساب می‌کنیم.

پاد آوری:

$$[a, b] = \{(x, y) : (x, y) R (a, b)\}$$

$$[(1, 2)] = \{(x, y) : (x, y) R (1, 2)\}$$

$$= \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1^2 + 2^2\}$$

$$= \{(x, y) : x^2 + y^2 = 5\} = \text{دایره}$$

نکاتی مهم راجع به رابطه‌های بازتابی - تقارنی - پاد تقارنی - تعدی - هم ارزی و ترتیب

بازتابی:

در صورتی یک رابطه بازتابی نیست که به ازاء حداقل یک عضو مانند $a \in A$ ، a و a عضو رابطه نباشد، در غیر این صورت رابطه‌ی R ، حتماً بازتابی است.

۱. رابطه‌ی ϕ (تهی)، هیچ گاه بازتابی نیست ولی در عوض A^2 همواره بازتابی است.

۲. اگر R رابطه‌ای بازتابی روی مجموعه‌ی A باشد، آنگاه:

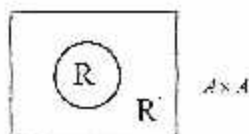
$$R \text{ بر } A = R \text{ دامنه‌ی } R$$

$$\begin{array}{ccc} |R| & \geq & |A| \\ \downarrow & & \downarrow \end{array}$$

تعداد اعضای A تعداد اعضای R

۳. اگر R رابطه‌ای بازتابی روی A باشد، آنگاه:

۴. اگر R رابطه‌ای بازتابی روی A باشد، آنگاه R^{-1} نیز همواره بازتابی بوده ولی R' حتماً غیر بازتابی است.



۵. رابطه‌ی R روی A بازتابی است اگر و فقط اگر که $I_A \subset R$.

یاد آوری: I_A را رابطه‌ی همانی روی A گوییم. یعنی:

$$I_A = \{(x, x) : x \in A\}$$

۶. هرگاه R_1 و R_2 ، دو رابطه‌ی بازتابی روی A باشند، آنگاه:

(۱) $R_1 \cap R_2$ روی A بازتابی است.

(۲) $R_1 \cup R_2$ روی A بازتابی است.

(۳) $R_1 - R_2$ روی A بازتابی نیست.

(۴) $R_1 \Delta R_2$ روی A بازتابی نیست.

(۵) $R_1 \circ R_2$ روی A بازتابی است.

تذکر: منظور از O ، ترکیب توابع است.

تست: به شرط بازتابی بودن R_1 و R_2 ، چند تا از روابط زیر بازتابی اند؟

(د) $R_1^{-1} - R_2^{-1}$

(ج) $R_1 \circ R_2^{-1}$

(ب) $R_1^{-1} \cap R_2^{-1}$

(الف) $R_1^{-1} \cap R_2^{-1}$

(۴) 3

(۳) 2

(۲) 1

(۱) 0

پاسخ: چون R_1 و R_2 بازتابی اند لذا R_1^{-1} و R_2^{-1} هر دو بازتابی بوده ولی R_1^{-1} و R_2^{-1} بازتابی نیستند، بنابراین طبق نکته‌ی (6)، فقط گزینه‌های (ب) و (ج) بازتابی اند.

تقارنی:

در صورتی یک رابطه تقارنی نیست که به ازاء $a \neq b$ ، زوج مرتب $(a$ و $b)$ عضو رابطه باشد ولی $(b$ و $a)$ عضو آن نباشد، در غیر این صورت رابطه‌ی داده شده، حتماً تقارنی است.

۱. رابطه‌های ϕ و A^2 همواره تقارنی اند.

۲. اگر R تقارنی باشد، همواره داریم:

$$\text{برد } R = \text{دامنه‌ی } R$$

۳. اگر R تقارنی باشد، آنگاه R^{-1} و R' نیز همواره تقارنی اند.

۴. R تقارنی است اگر و فقط اگر $R = R^{-1}$

۵. هرگاه R_1 و R_2 دو رابطه‌ی تقارنی روی A باشند، آنگاه:

(الف) $R_1 \cap R_2$ تقارنی است.

(ب) $R_1 \cup R_2$ تقارنی است.

(ج) $R_1 - R_2$ تقارنی است.

(د) $R_1 \Delta R_2$ تقارنی است.

(ه) $R_1 \circ R_2$ می‌تواند تقارنی باشد یا نباشد.

مثال برای (۵) :

 $R_1 = \{(1,4), (4,1)\}$ تقارنی هست $R_2 = \{(3,1), (1,3)\}$ تقارنی هست $\Rightarrow R_1 \circ R_2 = \{(3,4)\}$ تقارنی نیست

۶. اگر R تقارنی باشد، نمودارش نسبت به خط $y = x$ متقارن خواهد بود، به عبارت دیگر، خط $y = x$ ، محور متقارن رابطه خواهد بود.

۷. هرگاه R رابطه‌ای دلخواه روی A باشد، $R \cap R^{-1}$ و $R \cup R^{-1}$ هر دو روی A متقارنند.

۸. هر رابطه‌ی تک عضوی به صورت $R = \{(a,a)\}$ تقارنی است.

پاد تقارنی

در صورتی یک رابطه پاد متقارن نیست که به ازاء $a \neq b$ ، هر دو زوج مرتب (a,b) و (b,a) عضو رابطه باشند، در غیر این صورت رابطه‌ی داده شده، حتماً پاد متقارن است.

۱. رابطه‌ی ϕ روی A پاد متقارن است ولی $A \times A$ به شرط آنکه A فقط یک عضو داشته باشد، پاد متقارن است.

۲. اگر R پاد تقارنی باشد، آنگاه R^{-1} ممراره پاد تقارنی بوده ولیکن R' معلوم نیست.

۳. یک رابطه می‌تواند هم تقارنی و هم پاد تقارنی باشد.

مثال : $A = \{1, 2, 3\}$

R	تقارنی	پاد تقارنی
$\{(1,2)\}$	×	✓
$\{(1,1)\}$	✓	✓
$\{(1,2), (2,1)\}$	✓	×
$\{(1,2), (2,1), (3,2)\}$	×	×

۴. هر رابطه که هم تقارنی و هم پاد تقارنی باشد، تمام زوجهایش به صورت (a,a) است.

۵. هر رابطه‌ی تک عضوی به صورت $R = \{(a,a)\}$ یا $R = \{(a,b)\}$ پاد تقارنی است. (طبق قانون انتفاء مقدم)

۶. R پاد تقارن است $\Leftrightarrow R \cap R^{-1} \subset I \cap R^{-1} \subset I$

۷. هرگاه R_1 و R_2 دو رابطه‌ی پاد تقارن روی A باشند، آنگاه :

الف) $R_1 \cap R_2$ پاد تقارنی است.

ب) $R_1 \cup R_2$ می‌تواند پاد تقارن باشد یا نباشد.

مثال :

$R_1 = \{(1,2)\}$ پاد تقارن هست

$\Rightarrow R_1 \cup R_2 = \{(1,2), (2,1)\}$ پاد تقارن نیست

$R_2 = \{(2,1)\}$ پاد تقارن هست

(ج) $R_1 - R_2$ پاد تقارنی است.

(د) $R_1 \Delta R_2$ می‌تواند پاد تقارنی باشد یا نباشد.

مثال:

$R_1 = \{(1, 2)\}$ پاد تقارنی هست

$\Rightarrow R_1 \Delta R_2 = R_1 \cup R_2 = \{(1, 2), (2, 1)\}$ پاد تقارنی نیست

$R_2 = \{(2, 1)\}$ پاد تقارنی هست

ترایی

در صورتی یک رابطه ترایی نیست که دو زوج مرتب مانند (a, b) و (b, c) عضو رابطه باشند ولی (a, c) عضو رابطه نباشد، در غیر این صورت رابطه‌ای داده شده حتما ترایی است.

۱. رابطه‌های ϕ و A^2 همواره ترایی اند.

۲. اگر R ترایی باشد، R^{-1} همواره ترایی است ولی R' می‌تواند ترایی باشد یا نباشد.

مثال: $A = \{1, 2\}$

$R = \{(1, 1)\}$ ترایی هست

$R' = (A \times A) - R = \{(2, 1), (1, 2), (2, 2)\}$ ترایی نیست

$(1, 2) \in R', (2, 1) \in R' \xrightarrow{\text{ولی}} (1, 1) \notin R'$ زیرا:

۳. هر رابطه‌ای تک عضوی به صورت $\{(a, a)\}$ یا $\{(a, b)\}$ ترایی است. (طبق قانون انتفاء مقدم)

۴. هر رابطه که هم تقارنی و هم پاد تقارنی باشد، حتما ترایی نیز هست.

۵. اگر R_1 و R_2 دو رابطه‌ی ترایی روی A باشند، آنگاه:

(الف) $R_1 \cap R_2$ ترایی است.

(ب) $R_1 \cup R_2$ ، $R_1 - R_2$ و $R_1 \Delta R_2$ می‌توانند ترایی باشند یا نباشند.

مثال:

$R_1 = \{(1, 2)\}$ ترایی هست

$R_2 = \{(2, 3)\}$ ترایی هست $\rightarrow R_1 \Delta R_2 = R_1 \cup R_2 = \{(1, 2), (2, 3)\}$ ترایی نیست

چند نکته‌ی مهم دیگر

۱. هرگاه R_1 و R_2 روی A هم ارزی باشند، $R_1 \cap R_2$ نیز روی A هم ارزی است.

۲. هرگاه R روی A هم ارزی باشد، R^{-1} نیز روی A هم ارزی است.

۳. برای بررسی اینکه یک رابطه، ویژگی‌های تقارنی، پاد تقارنی و ترایی را دارد، به عضو‌هایی مانند (a, a) کاری نداریم، فقط در بازتابی است که چنین عضو‌هایی، همواره باید باشند.

۴. تنها رابطه‌ای که هر چهار ویژگی بازتابی، تقارنی و پاد تقارنی و ترایی را دارد، رابطه‌ی همانی است.

چنین رابطه‌ای را رابطه‌ی قطری نیز می‌گویند.

۵. اگر R روی A یک رابطه‌ی هم ارزی باشد، آنگاه این رابطه، مجموعه‌ی A را به دسته‌های هم ارزی افراز می‌کند.

۶. تعداد افزایندهای روی یک مجموعه با تعداد رابطه‌های هم ارزی روی آن مجموعه برابر است.

۷. اگر R روی A یک رابطه‌ای هم ارزی باشد، دسته‌ی هم ارزی a عبارت است از:

$$[a] = \{x \in A : x R a\}$$

۸. هیچ یک از دسته‌های هم ارزی، تهی نیست. (زیرا حداقل نماینده‌ی دسته، عضو می‌باشد).

۹. اگر $a \in [b]$ ، آنگاه $b \in [a]$ و در نتیجه $[a] = [b]$.

۱۰. اجتماع کلیه‌ی کلاس‌های هم ارزی یک مجموعه، مساوی خود آن مجموعه است.

۱۱. هر دو کلاس هم ارزی یا مساوی اند و یا هیچ اشتراکی ندارند.

۱۲. کلاس‌های هم ارزی یک افزاینده مجموعه می‌باشند.

اثبات برخی از نکات بیان شده

۷ نکته: اگر R روی A پاد متقارن باشد، R^{-1} نیز روی R پاد متقارن است.

اثبات:

$$\left\{ \begin{array}{l} (x, y) \in R^{-1} \Rightarrow (y, x) \in R \\ (y, x) \in R^{-1} \Rightarrow (x, y) \in R \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{پاد متقارن است}} \begin{array}{l} (x, y) \in R^{-1} \\ x = y \end{array} \quad (y, x) \in R^{-1} \Rightarrow x = y$$

۷ نکته: رابطه‌ی ϕ متقارن، پاد متقارن و متعدی است.

اثبات متعدی بودن

$$\begin{array}{ccc} (x, y) \in \phi & , & (y, z) \in \phi \\ \downarrow & \wedge & \downarrow \\ & \phi & \end{array} \Rightarrow (x, z) \in \phi$$

چون مقدم این ترکیب شرطی، نادرست است، لذا گزاره‌ی شرطی فوق طبق قانون انتفاء مقدم (نفی مقدم) همواره برقرار

است و در نتیجه ϕ متعدی است.

۷ نکته: اگر R رابطه‌ای دلخواه روی A باشد، $R \cap R^{-1}$ و $R \cup R^{-1}$ روی A متقارن اند.

اثبات متقارن بودن $R \cap R^{-1}$:

$$(x, y) \in R \cap R^{-1} \Rightarrow (y, x) \in R \cap R^{-1}$$

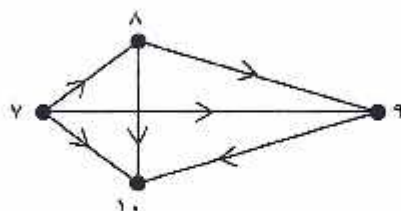
$$(x, y) \in R \cap R^{-1} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R^{-1} \\ (y, x) \in R \Rightarrow (x, y) \in R^{-1} \end{array} \right\} \Rightarrow (y, x) \in R \cap R^{-1}$$

پس $R \cap R^{-1}$ متقارن است.

ارتباط بین رابطه و گراف جهت دار

اگر R یک رابطه روی مجموعه A باشد، گراف جهت دار $G = (A, R)$ را گراف متناظر با رابطه R می‌نامیم و برای رسم آن به این صورت عمل می‌کنیم که اعضای A را به عنوان رئوس گراف و اگر زوجی مانند (a, b) متعلق به R باشد، از رأس a به رأس b یالی یا جهت از a به b رسم می‌کنیم.

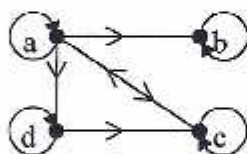
مثال: مجموعه $A = \{7, 8, 9, 10\}$ و رابطه $R = \{(x, y) : x, y \in A, x < y\}$ را در نظر می‌گیریم، داریم:

$$R = \{(7, 8), (7, 9), (7, 10), (8, 9), (8, 10), (9, 10)\}$$


که گراف متناظر این رابطه به صورت مقابل است:

برعکس، نظیر هر گراف جهت دار، می‌توان یک رابطه بدست آورد.

مثال: رابطه‌ی نظیر گراف جهت دار $G = (A, R)$ که $A = \{a, b, c, d\}$ و نمودار G به صورت مقابل است:



عبارت است از:

$$R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (a, c), (c, a), (a, d), (d, c)\}$$

یاد آوری: در نمودار گراف‌های جهت دار، یک رأس می‌تواند با خودش یال داشته باشد، که به آن طوقه می‌گویند.

ویژگی‌های رابطه و گراف‌ها

گراف جهت دار متناظر با رابطه‌ی R مقروض است.

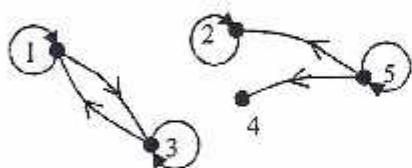
۱. رابطه‌ی R بازتابی است اگر و فقط اگر که گراف جهت دار متناظر با آن در هر رأس دارای طوقه باشد.

۲. رابطه‌ی R متقارن است اگر و تنها اگر که، در گراف جهت دار متناظرش، از a به b یالی جهت دار رسم شده، از b به a نیز یال جهت داری رسم شده باشد.

۳. رابطه‌ی R پاد متقارن است اگر و تنها اگر که، در گراف جهت دار متناظرش، از a به b یالی جهت دار رسم شده، از b به a یال جهت داری رسم نشده باشد.

۴. رابطه‌ی R تراییبی است اگر و تنها اگر که، در گراف جهت دار متناظرش، از a به b و از b به c یال جهت داری رسم شده، از a به c نیز یال جهت داری رسم شده باشد.

تست : اگر نمودار گراف زیر، مربوط به رابطه‌ی R در مجموعه‌ی $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ باشد، کدام ویژگی را دارد؟



(۴) تراگذاری

(۳) پاد تقارنی

(۲) تقارنی

(۱) بازتابی

پاسخ : گزینه‌ی ۴ صحیح می‌باشد، در واقع چون رأس ۴، طوقه ندارد، پس بازتابی نیست چون از ۵ به ۲ یال جهت داری وجود دارد ولی از ۲ به ۵ وجود ندارد پس تقارنی نیز نیست. همچنین چون از ۱ به ۳ و از ۳ به ۱ یال جهت دار وجود دارد، پس پاد تقارنی نیز نمی‌باشد ولی به سادگی دیده می‌شود که متعددی هست.

رابطه - گراف و ماتریس نظیر آنها

همان طور که در فصل گراف دیدیم، متناظر هر گراف ساده، یک ماتریس صفر و یک به نام ماتریس مجاورت آن گراف نسبت داده شد، برای هر گراف جهت دار نیز یک ماتریس صفر و یک، وجود دارد به طوری که اگر از رأس i به رأس j ، یال جهت داری وجود داشته باشد درایه‌ی i, j آن ماتریس عدد یک، است و اگر از رأس i به رأس j یال جهت داری وجود نداشته باشد، این درایه صفر است.

ضمناً چون در گراف جهت دار، طوقه نیز وجود دارد، بر خلاف ماتریس مجاورت گراف ساده که درایه‌های قطر اصلی اش صفر بودند، در ماتریس مجاورت گراف جهت دار، درایه‌های قطر اصلی می‌توانند یک یا صفر باشند. لذا اگر R یک رابطه روی مجموعه‌ی n عضوی A باشد، ماتریس متناظر با رابطه‌ی R ، ماتریسی است $n \times n$ به صورت $M(R) = [m_{ij}]$ که درایه‌های آن به صورت زیر تعریف می‌شوند :

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & , (v_i R v_j) \\ 0 & , (v_i \not R v_j) \end{cases}$$

مثال : ماتریس مجاورت نظیر رابطه‌ی $R = \{(1,1), (2,1), (3,3), (1,2)\}$ که روی مجموعه‌ی $A = \{1,2,3\}$ تعریف شده است را بنویسید؟

$$M(R) = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

نکات مهم راجع به ماتریس مجاورت گراف جهت دار

۱. این ماتریس، همواره ماتریسی مربعی است.
۲. تمام درایه‌های آن ۰ و ۱ هستند.
۳. لزومی ندارد که ماتریس مجاورت گراف جهت دار، متقارن باشد.

۴. درایه‌های روی قطر اصلی آن، می‌توانند 0 یا 1 باشند.

۵. تعداد کل یک ها، مساوی تعداد کل یال ها می‌باشد، ضمناً هر حلقه نیز یک یال محسوب می‌شود.

۶. تعداد یک‌های هر سطر، نشان دهنده‌ی درجه‌ی خروجی رأس متناظر با آن می‌باشد.

۷. تعداد یک‌های هر ستون نشان دهنده‌ی درجه‌ی ورودی رأس متناظر با آن می‌باشد.

۸. ماتریس متناظر با رابطه‌ی تهی، ماتریس است که تمام درایه‌های آن صفر می‌باشد.

۹. ماتریس متناظر با رابطه‌ی $R = A \times A$ ، ماتریسی است که تمام درایه‌های آن یک می‌باشد.

۱۰. ماتریس متناظر با رابطه‌ی همانی، ماتریسی است که تمام درایه‌های روی قطر اصلی آن یک و سایر درایه ها صفر می‌باشند.

۱۱. اگر $M(R)$ ماتریس مجاورت گراف جهت دار R باشد، برای نوشتن ماتریس مجاورت گراف R^{-1} ، کافی است ترانهاده‌ی ماتریس $M(R)$ را بدست آوریم.

۱۲. اگر $M(R)$ ماتریس مجاورت گراف جهت دار R باشد، برای نوشتن ماتریس مجاورت گراف R^C یا R' کافی است در ماتریس M جای 0 و 1 را عوض کنیم.

مثال :

$$M(R^C) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ و } M(R^{-1}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ آنگاه } M(R) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ هرگاه}$$

نکته‌ی مهم

هرگاه $M(R)$ ماتریس متناظر با رابطه‌ی R باشد، آنگاه :

۱. R «بازتابی» است اگر و تنها اگر که همه‌ی درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس مجاورت نظیر آن 1 باشند.

با توجه به این نکته، تشخیص بازتابی بودن یک رابطه، بسیار ساده است.

۲. R «متقارن» است اگر و تنها اگر که ماتریس نظیر آن یعنی $M(R)$ متقارن باشد، به عبارت دیگر تمام درایه‌های ماتریس $M(R)$ ، نسبت به قطر اصلی، متقارن باشند، با توجه به این نکته، تشخیص تقارنی بودن یک رابطه، بسیار ساده است.

۳. R «پاد متقارن» است، هرگاه اگر درایه‌ی i ز i ام ماتریس $M(R)$ برابر با 1 باشد، درایه‌ی i ز i ام آن 1 نباشد (صفر باشد). $i \neq j$ (به عبارت دیگر، درایه ها نسبت به قطر اصلی متناقض باشند)، واضح است که درایه‌های روی قطر اصلی ($i = j$) می‌توانند 0 یا 1 باشند، با توجه به این نکته، تشخیص پاد تقارنی بودن یک رابطه، بسیار ساده می‌باشد.

۴. R «تراییبی» است هرگاه اگر درایه‌های i ز i ام و k ز k ام ماتریس $M(R)$ ، برابر 1 باشند، آنگاه درایه‌ی i ز k ام آن نیز 1 باشد، با توجه به این نکته، تشخیص تراییبی بودن یک رابطه، کاری زمان بر و کمی دشوار است، در قسمت‌های بعدی قضیه‌ای بیان کرده، که در آن روشی برای تشخیص تراییبی بودن یک رابطه، ارائه خواهیم داد.

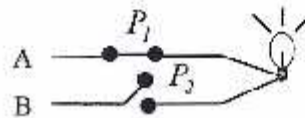
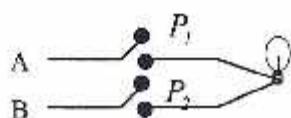
عمل‌های بولی (جمع و تفریق بولی)

روی مجموعه‌ی $\{0, 1\}$ دو عمل جمع و ضرب را به صورت زیر تعریف می‌کنیم که به اعمال بولی معروف اند.

+	0	1
0	0	1
1	1	1

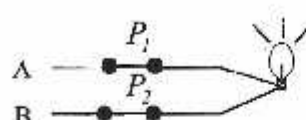
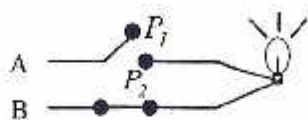
$\odot$	0	1
0	0	0
1	0	1

جمع بولی : فرض کنید کلیدهای P_1 و P_2 به صورت موازی بین دو منبع تغذیه A و B و لامپ (C) قرار گرفته باشند. اگر بسته بودن کلید را با 1 و باز بودن آن را با 0 و روشن شدن لامپ را با 1 و خاموش ماندن آن را با 0 نمایش دهیم داریم.



$$0 + 0 = 0 \quad \begin{array}{l} \text{وضعیت لامپ} \\ \text{وضعیت کلید} \end{array}$$

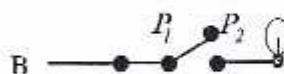
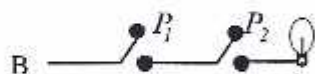
$$1 + 0 = 1$$



$$0 + 1 = 1$$

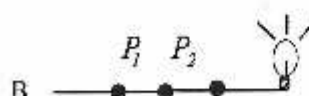
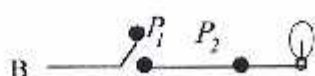
$$1 + 1 = 1$$

ضرب بولی : فرض کنید کلیدهای P_1 و P_2 به صورت سری بین منبع تغذیه B و لامپ C قرار گرفته باشند. اگر باز هم بسته بودن کلید را با 1 و باز بودن آن را با 0 و روشن شدن لامپ را با 1 و خاموش ماندن آن را با 0 نمایش دهیم، خواهیم داشت :



$$0 \cdot 0 = 0$$

$$1 \cdot 0 = 0$$



$$0 \cdot 1 = 0$$

$$1 \cdot 1 = 1$$

۶ نکته‌ی مهم: اعمال جمع و ضرب بولی روی مجموعه‌ی $\{0, 1\}$ تعریف می‌شوند و جواب اعمال نیز، عضوی از همین مجموعه است، یعنی هیچ گاه نتیجه‌ی جمع و ضرب بولی، اعدادی به غیر از 0 و 1 (مثلاً 2، 3، -1 و ...) نمی‌شود.

۷ نکته‌ی مهم: a هرچه باشد (چه 0، چه 1) آنگاه داریم:

$$\begin{cases} a + 1 = 1 \\ a \odot 0 = 0 \end{cases}$$

در صورتی که حاصل $a + 0$ ممکن است 0 یا 1 شود، همچنین حاصل $a \odot 1$ ممکن است 0 یا 1 شود.

۷ نکته: با توجه به تعریف جمع و ضرب بولی، در محاسبه‌ی توان دوم بولی یک ماتریس، (توان دوم بولی ماتریس M را با $M^{(2)}$ نشان می‌دهیم)، هرکجا که درایه‌ی غیر صفر بدست آمد، عدد 1 را قرار می‌دهیم.

مثال: هرگاه $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ، $M^{(2)}$ را حساب کنید؟

$$\xrightarrow{\text{راه حل اول}} M^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{راه حل دوم}} M^{(2)} = M \cdot M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (0 \odot 0) + (1 \odot 1) & (0 \odot 1) + (1 \odot 1) \\ (0 \odot 0) + (1 \odot 1) & (1 \odot 1) + (1 \odot 1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 + 1 & 0 + 1 \\ 0 + 1 & 1 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

تذکر: دقت کنید که راه حل دوم به صفره نیوده و از طرف دیگر ما با این راه حل و نوشتن + و . عادت نداریم و لذا همیشه بهتر است راه حل اول را به کار ببریم.

۷ تذکر: دقت کنید که M^2 با $M^{(2)}$ فرق دارد.

ترکیب دو رابطه

ترکیب دو رابطه روی یک مجموعه، همانند ترکیب دو تابع است، لذا فرض می‌کنیم R یک رابطه روی A باشد، $R \circ R$ را ترکیب رابطه‌ی R با خودش می‌گوییم و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم. فرض می‌کنیم a و b دو عضو A باشند، هنگامی a با b رابطه‌ی $R \circ R$ دارد که عضو دیگری مانند c در A وجود داشته باشد به طوری که $a R c$ و $c R b$ لذا می‌توان گفت:

$$a(R \circ R)b \Leftrightarrow \exists c \in A : a R c, c R b$$

یا:

$$(a, b) \in R \circ R \Leftrightarrow \exists c \in A : (a, c) \in R, (c, b) \in R$$

مثال: هرگاه $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$ را حساب کنید؟

$$(1, 1) \in R, (1, 1) \in R \Rightarrow (1, 1) \in R \circ R$$

$$(1, 1) \in R, (1, 2) \in R \Rightarrow (1, 2) \in R \circ R$$

$$(1, 2) \in R, (2, 3) \in R \Rightarrow (1, 3) \in R \circ R$$

$$(2, 3) \in R, (3, 4) \in R \Rightarrow (2, 4) \in R \circ R$$

پس:

$$R \circ R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 4)\}$$

قضیه: فرض کنید A یک مجموعه n عضوی، $n \in \mathbb{N}$ و R یک رابطه روی A باشد، هرگاه $M(R)$ ماتریس متناظر R باشد، داریم:

$$M(R) = [0]_{n \times n} \text{ (الف) یعنی همهی درایه های } M(R) \text{ صفرند اگر و تنها اگر که } R = \emptyset$$

$$M(R) = [1]_{n \times n} \text{ (ب) یعنی همهی درایه های } M(R) \text{ یک اند اگر و تنها اگر که } R = A \times A$$

$$M(R^{-1}) = [M(R)]^T \text{ (ج)}$$

$$M(R') = [1] - M(R) \text{ (د)}$$

$$M(R_1 \circ R_2) = M(R_1) \cdot M(R_2) \text{ (ه)}$$

$$M(R \circ R) = [M(R)]^{(2)} \text{ (و)}$$

مثال: مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و رابطه R روی A به صورت $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$ مفروض است.

مطلوب است محاسبه $R \circ R$.

پاسخ: فرض می‌کنیم $M(R)$ ماتریس متناظر با رابطه R باشد. در این صورت داریم:

$$M(R) = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$[M(R)]^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = M(R \circ R) \Rightarrow$$

$$R \circ R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 4)\}$$

کوچکتر یا مساوی بودن ماتریس ها

فرض می کنیم A و B دو ماتریس 0 و 1 هم مرتبه باشند، گوییم A کوچکتر یا مساوی B است و می نویسیم:

$A \leq B$ ، اگر و فقط اگر که به ازاء هر i و j داشته باشیم: $a_{ij} \leq b_{ij}$ ، یعنی:

$$A \leq B \Leftrightarrow \forall i, j : a_{ij} \leq b_{ij}$$

نکات مهم در مورد رابطه ی $(\leq)$ در ماتریس های صفر و یک

۱. برای هر دو ماتریس صفر و یک مانند A و B داریم:

$$A \leq B \Rightarrow \begin{cases} a_{ij} = 0 \Rightarrow b_{ij} = 0 & 1 \\ a_{ij} = 1 \Rightarrow b_{ij} = 1 \\ b_{ij} = 0 \Rightarrow a_{ij} = 0 \\ b_{ij} = 1 \Rightarrow a_{ij} = 0 & 1 \text{ یا } 1 \end{cases}$$

تست: تعداد ماتریس های 0 و 1 کوچکتر یا مساوی ماتریس $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ کدام است؟

32 (۴)

4 (۳)

 2^8 (۲) 2^4 (۱)

پاسخ: فرض می کنیم A ماتریسی 3×4 باشد به طوری که: $A \leq B$ ، در این صورت طبق نکته ی فوق، هر درایه ی B که صفر باشد، درایه ی نظیرش در A نیز باید صفر باشد و هر درایه ی B که 1 باشد درایه ی نظیرش در A می تواند 0 یا 1 باشد، حال چون 5 درایه ی ماتریس B ، 1 است، این 5 درایه در A می توانند 0 یا 1 باشند، لذا هر کدام از این 5 درایه در A ، 2 حالت دارند و بنابراین طبق اصل ضرب داریم:

$$B \text{ تعداد یک ها } = 2^5 = 32$$

۲. اگر B یک ماتریس صفر و یک باشد، تعداد ماتریس های A با شرط:

الف) $B \leq A$ ، برابر است با: تعداد صفرهای B

ب) $A \leq B$ ، برابر است با: تعداد یک های B

۳. برای هر ماتریس صفر و یک مانند A داریم:

الف) $A \leq A$ (بازتابی)

ب) $[0] \leq A$

ج) $A \leq [1]$

۴. $A \leq B$ و $B \leq C \Rightarrow A \leq C$ (ترایی)

۵. $A \leq B$ و $B \leq A \Rightarrow A = B$ (پاد متقارن)

۶. رابطه ی $\leq$ روی مجموعه ی ماتریس های صفر و یک، یک رابطه ی ترتیب است.

۷. $A \leq B \not\Rightarrow B \leq A$ (تقارنی)

۸. رابطه ی $\ll$ روی مجموعه ی ماتریس های صفر و یک، یک رابطه ی هم ارزی نیست.

۹. اگر R_1 و R_2 دو رابطه روی مجموعه A باشند و R_1 زیر مجموعه ی R_2 باشد، در این صورت، تعداد یک های ماتریس مجاورت رابطه ی R_1 از تعداد یک های ماتریس مجاورت R_2 کمتر خواهد بود، یعنی:

$$R_1 \subset R_2 \Leftrightarrow M_1 \ll M_2$$

۱۰. همواره در ماتریس های صفر و یک، ضرب مؤلفه ای دو ماتریس $(\wedge)$ ، کوچکتر یا مساوی هر یک از دو ماتریس خواهد بود، یعنی:

$$\begin{cases} M_1 \wedge M_2 \ll M_1 \\ \text{و} \\ M_1 \wedge M_2 \ll M_2 \end{cases}$$

۱۱. همواره در ماتریس های صفر و یک، ضرب مؤلفه ای یک ماتریس در ترانهاده اش، از خود آن ماتریس و از ترانهاده اش کوچکتر یا مساوی خواهد بود، یعنی:

$$\begin{cases} M \wedge M^T \ll M \\ \text{و} \\ M \wedge M^T \ll M^T \end{cases}$$

۱۲. اگر M_1 و M_2 ماتریس های متناظر روابط R_1 و R_2 باشند، داریم:

$$M_1 \ll M_2 \Rightarrow M_1 \wedge M_2^T \ll M_2$$

قضیه: هرگاه R ، رابطه ای روی مجموعه ی n عضوی A و M ماتریس متناظر آن باشد، نکات زیر همواره برقرارند:

✓ نکته ی ۱: R بازتابی است اگر و تنها اگر که $I_n \ll M$ (I_n ، ماتریس همانی $n \times n$ است).

✓ نکته ی ۲: R متقارن است اگر و تنها اگر که $M^T = M$ (M^T ترانهاده ی M است).

✓ نکته ی ۳: R تراپایی است اگر و تنها اگر که $M^{(2)} \ll M$.

✓ نکته ی ۴: R پاد متقارن است اگر و تنها اگر که $M \wedge M^T \ll I_n$ (منظور از نماد $\wedge$ ، ضرب مؤلفه به مؤلفه بولی است).

✓ نکته ی ۵: هرگاه $M - I_n$ ، رابطه ی R قطری یا همانی است و هر چهار خاصیت را دارد.

✓ نکته ی ۶: هرگاه $M \wedge M^T = I_n$ ، رابطه ی R بازتابی و پاد متقارن است.

تست: اگر $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ماتریس متناظر رابطه ی R باشد، آنگاه:

$$M = M^T \quad (۱) \quad I_3 \ll M \wedge M^T \quad (۲) \quad M \wedge M^T \ll I_3 \quad (۳) \quad M \times M^T \ll I_3 \quad (۴) \quad M = M^T \quad (۵)$$

پاسخ: چون ماتریس متقارن نیست لذا R تقارنی نبوده و در نتیجه $M \neq M^T$ ، از طرفی در ماتریس $M(R)$ ، ۰ ها و ۱ ها رو در روی هم نیستند، پس R پاد متقارن است و لذا با توجه به نکته ی ۴، رابطه ی $M \wedge M^T \ll I_3$ برقرار است، لذا گزینه ی ۲ صحیح است.

برای درک بهتر، $M \wedge M^T$ را محاسبه می‌کنیم:

$$M \wedge M^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ll \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$

راه دیگر: با توجه به ماتریس M ، نمودار گراف متناظر رابطه‌ی R به صورت زیر است:



$$\Leftrightarrow M = \begin{array}{c|cc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

با توجه به نمودار گراف، دیده می‌شود که R پاد متقارن است و لذا گزینه‌ی 2 صحیح می‌باشد.

تذکر: همان طور که دیدیم تشخیص بازتابی بودن، تقارنی بودن و پاد تقارنی بودن یک رابطه از روی ماتریس متناظرش بسیار آسان است، اما تشخیص ترایایی بودن یک رابطه از روی ماتریس متناظرش، خسته کننده و زمان بر بود، در همین رابطه، به نکته‌ی بسیار مهم زیر، توجه کنید.

✓ نکته‌ی بسیار مهم: اکنون می‌خواهیم روشی برای تعیین ترایایی بودن یک رابطه طبق نکته‌ی 3 در قضیه‌ی قبل بیان کنیم، در نکته‌ی 3 بیان کردیم که R ترایایی است اگر و فقط اگر که $M \ll M^{(2)}$ ، این بدان معناست که هر جایی در ماتریس $M^{(2)}$ ، یک دیده شود، درایه‌ی نظیرش در ماتریس M نیز باید حتماً 1 باشد.

مثال: آیا رابطه‌ی متناظر با ماتریس صفر و یک زیر ترایایی است؟

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow M^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

چون درایه‌ی سطر اول، ستون سوم، ماتریس $M^{(2)}$ ، یک بوده ولی درایه‌ی نظیرش در ماتریس M ، صفر می‌باشد، لذا رابطه‌ی متناظر با ماتریس داده شده، ترایایی نمی‌باشد.

✓ تذکر بسیار مهم: جهت صرفه جویی در وقت، برای تشخیص ترایایی بودن یک رابطه، کافی است درایه‌هایی از ماتریس $M^{(2)}$ را حساب کنیم که درایه‌ی نظیرشان در ماتریس M ، صفر است، به عنوان مثال، در ماتریس فوق، ابتدا درایه‌ی سطر اول ستون سوم ماتریس $M^{(2)}$ را محاسبه می‌کنیم، اگر صفر شد که هیچ (یعنی مشکلی نیست و سراغ درایه‌ی صفر بعدی، یعنی درایه‌ی سطر دوم ستون اول ماتریس $M^{(2)}$ می‌رویم و ...)، اما اگر یک شد، صد در صد رابطه‌ی متناظر با ماتریس داده شده، ترایایی نخواهد بود.

✓ نکته: هرگاه M یک ماتریس مربعی $n \times n$ باشد:

در این صورت داریم:

(1) تعداد کل درایه‌ها n^2

(2) تعداد درایه‌های روی قطر اصلی n

$$M = \begin{bmatrix} \square & \square & \dots & \square \\ \square & \square & \dots & \square \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \square & \square & \dots & \square \end{bmatrix}_{n \times n}$$

(۳) تعداد درایه‌های خارج قطر اصلی $n^2 - n$

(۴) تعداد درایه‌های بالای قطر اصلی $\frac{n^2 - n}{2}$

(۵) تعداد درایه‌های روی قطر و بالای قطر اصلی (مثلاً بالایی) $\frac{n^2 - n}{2} + n = \frac{n^2 + n}{2}$

✓ نکات بسیار بسیار مهم

هرگاه A یک مجموعه‌ی n عضوی و R یک رابطه روی آن باشد، در این صورت :

۱. تعداد رابطه‌های بازتابی روی A برابر است با :

$$2^{n^2 - n} = 2^{n^2} \text{ بدون قطر}$$

در واقع باید همه‌ی درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس $M(R)$ ، ۱ باشند بنابراین $n^2 - n$ درایه باقی می‌ماند که هر کدام

۲ حالت دارند لذا تعداد رابطه‌های بازتابی روی A برابر می‌شود با :

$$2^{n^2 - n} = 2^{n^2} \text{ بدون قطر}$$

۲. تعداد رابطه‌های تقارنی روی A برابر است با :

$$2^{\frac{n^2 + n}{2}} = 2^{\frac{n^2 - n}{2}} \text{ مثلاً بالایی}$$

در این حالت درایه‌های روی قطر اصلی می‌توانند ۱ یا ۰ باشند (یعنی 2^n حالت)، اما $n^2 - n$ درایه‌ی دیگر باقی می‌ماند که به دلیل متقارن بودن ماتریس، هر دو درایه‌ی نظیر به نظیر در دو طرف قطر اصلی باید یا هر دو ۱ باشند یا هر دو صفر،

لذا تعداد طرقي که می‌توان این $n^2 - n$ درایه را پر کرد برابر است با $2^{\frac{n^2 - n}{2}}$ لذا طبق اصل ضرب داریم :

$$2^n \times 2^{\frac{n^2 - n}{2}} = 2^{\frac{n^2 + n}{2}}$$

۳. تعداد رابطه‌های بازتابی و متقارن روی A برابر است با :

$$2^{\frac{n^2 - n}{2}} = 2^{\frac{n^2 + n}{2}} \text{ پایین قطر} = 2^{\frac{n^2 - n}{2}} \text{ بالای قطر}$$

در واقع در این حالت، روی قطر اصلی همگی ۱ هستند و انتخاب این قسمت دست ما نیست.

۴. تعداد رابطه‌های پاد متقارن روی A برابر است با :

$$2^{\frac{n^2 - n}{2}} = 2^n \times 3^{\frac{n^2 - n}{2}} \text{ بالای قطر} \times 2 \text{ قطر}$$

در این حالت درایه‌های روی قطر اصلی می‌توانند ۰ یا ۱ باشند (2^n حالت)، اما در انتخاب درایه‌های دو طرف قطر اصلی به دلیل پاد متقارن بودن، نباید ۱ رو در روی ۱ قرار گیرد بنابراین هر دو درایه‌ی متناظر نسبت به قطر اصلی سه حالت

یا ۳ انتخاب دارند (۰، ۰ یا ۱، ۰ یا ۰، ۱) لذا این درایه‌ها را به $3^{\frac{n^2 - n}{2}}$ طریق می‌توان انتخاب کرد، نتیجه طبق اصل شمارش،

تعداد طرق ممکن برابر است با :

$$2^n \times 3^{\frac{n^2 - n}{2}}$$

تست: چند رابطه‌ی پاد متقارن روی مجموعه‌ی $A = \{1, 2, 3\}$ می‌توان نوشت؟

$$3^3 \text{ (4)}$$

$$6^3 \text{ (3)}$$

$$3^6 \text{ (2)}$$

$$2^6 \text{ (1)}$$

پاسخ:

(1) مربع‌ها می‌توانند 0 یا 1 باشند (2^3 حالت)

$$\begin{matrix} & 1 & 2 & 3 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \square & \bigcirc & \square \\ \bigcirc & \square & \diamond \\ \square & \diamond & \square \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(2) دایره‌ها می‌توانند 3 حالت باشند.} \\ \text{(3) مستطیل‌ها نیز می‌توانند 3 حالت باشند} \\ \text{(4) لوزی‌ها هم می‌توانند 3 حالت باشند.} \end{array} \right\} \leftarrow (3^3 \text{ حالت})$$

$$\Rightarrow 2^3 \times 3^3 = 6^3$$

توضیح در مورد (1) $\leftarrow$ سه عضو $(1,1)$ ، $(2,2)$ ، $(3,3)$ می‌توانند در R باشند یا نباشند، بودن یا نبودن شان تأثیری در پاد متقارنی بودن R نمی‌گذارد.

توضیح در مورد (2) $\leftarrow$ دو درایه‌ی $(1,2)$ ، $(2,1)$ (دایره‌ها) یا هر دو نباید باشند، یا $(1,2)$ باشد و $(2,1)$ نباشد و یا $(2,1)$ باشد و $(1,2)$ نباشد، که 3 حالت می‌شود، (دقت کنید که اگر هر دو درایه‌ی $(1,2)$ و $(2,1)$ باشند در این صورت R پاد متقارن نمی‌شود).

توضیح موارد (3) و (4) مشابه (2) ست.

6. تعداد روابط متقارن و پاد متقارن روی A برابر است با:

$$2^n = 2^3 \text{ فله اصلی 2}$$

در این حالت درایه‌های قطر اصلی می‌توانند 0 یا 1 باشند (2^n حالت)، اما درایه‌های دو طرف قطر اصلی، همگی باید صفر باشند، چرا که اگر دو درایه‌ی متناظر نسبت به قطر اصلی در نظر بگیریم، اگر هر دو 1 باشند، پاد متقارن نمی‌شود و اگر یکی 1 و دیگری 0 باشد متقارن نمی‌شود.

7. تعداد رابطه‌های متقارن و پاد متقارن و بازتابی روی A برابر است با: 1

زیرا در این حالت برای بازتابی بودن، تمام درایه‌های روی قطر اصلی باید 1 باشند و لذا از این بابت هیچ گونه، انتخابی دست ما نیست، از طرفی به دلیل متقارن بودن و پاد متقارن بودن رابطه، همه‌ی درایه‌های دو طرف قطر اصلی باید صفر باشند و لذا از این حیث نیز، هیچ گونه انتخابی دست ما نیست، بنابراین فقط یک حالت وجود دارد که رابطه‌ی مورد نظر هم بازتابی و هم تقارنی و هم پاد تقارنی می‌شود و آن هم حالتی است که روی قطر اصلی همگی 1 و دو طرف آن همگی صفر باشند.

7. تعداد روابط بازتابی روی A که شامل زوج مرتب (a, b) باشند، برابر است با:

$$2^{n^2-n-1}$$

در این حالت درایه‌های روی قطر اصلی همگی باید 1 باشند، ضمناً درایه‌ی متناظر با (a, b) ، نیز باید 1 باشد $n^2 - n - 1$ درایه که هر کدام 2 حالت دارند لذا تعداد طرق ممکن برابر است با:

$$2^{n^2-n-1}$$

۸. تعداد رابطه‌های متقارن روی Λ که شامل زوج مرتب $(a$ و $b)$ باشند، برابر است با :

$$2^n \times 2^{\frac{n^2-n-2}{2}}$$

در این حالت درایه‌های روی قطر اصلی می‌توانند ۰ یا ۱ باشند (2^n حالت) چون می‌خواهد شامل، $(a$ و $b)$ باشد و متقارن نیز باشد پس باید شامل $(b$ و $a)$ نیز باشد لذا از $n^2 - n$ درایه‌ی دو طرف قطر اصلی ۲ انتخاب کم می‌شود بنابراین تعداد حالات انتخاب درایه‌های دو طرف قطر اصلی برابر است با :

$$2^{\frac{n^2-n-2}{2}}$$

لذا طبق اصل ضرب، تعداد طرق ممکن برابر است با :

$$2^n \times 2^{\frac{n^2-n-2}{2}}$$

۹. تعداد رابطه‌های پاد متقارن روی Λ که شامل زوج مرتب $(a$ و $b)$ باشند، برابر است با :

$$2^n \times 3^{\frac{n^2-n-2}{2}}$$

در این حالت درایه‌های روی قطر اصلی می‌توانند ۰ یا ۱ باشند (2^n حالت)، چون می‌خواهد شامل $(a$ و $b)$ باشد، پس نباید شامل $(a$ و $b)$ باشد بنابراین این دو درایه به ترتیب ۱ و ۰ بوده و لذا برای هر دو درایه‌ی متناظر از $n^2 - n - 2$ درایه‌ی باقی مانده، ۳ حالت وجود دارد پس تعداد حالات کل برابر می‌شود با :

$$2^n \times 3^{\frac{n^2-n-2}{2}}$$

۱۰. تعداد روابط هم ارزی روی Λ برابر است با تعداد افرازهای Λ .

تست : چند رابطه‌ی هم ارزی، روی مجموعه‌ی سه عضوی $\{1, 2, 3\}$ می‌توان نوشت؟

۵ (۱) ۱۵ (۲) ۷ (۳) ۲ (۴)

پاسخ : تعداد روابط هم ارزی روی Λ برابر است با تعداد افرازهای Λ که برابر است با ۵، دقت کنید:

$$A \Rightarrow \{1\}, \{2\}, \{3\} \text{ افراز ۳ عضوی } A$$

$$\Lambda \Rightarrow \{\{1,2\}, \{3\}\}, \{\{1,3\}, \{2\}\}, \{\{2,3\}, \{1\}\} \text{ افرازهای ۲ عضوی } \Lambda$$

$$A \Rightarrow \{\{1,2,3\}\} \text{ افرازهای ۱ عضوی } A$$

✓ نکته : تعداد روابط هم ارزی روی یک مجموعه‌ی تک عضوی مانند $A = \{1\}$ برابر است با :

۱- تعداد افرازها

✓ نکته : تعداد روابط هم ارزی روی یک مجموعه‌ی دو عضوی مانند $A = \{1,2\}$ برابر است با :

۲= تعداد افرازها

✓ نکته : تعداد روابط هم ارزی روی یک مجموعه‌ی سه عضوی مانند $A = \{1,2,3\}$ برابر است با :

۵= تعداد افرازها

✓ نکته : تعداد روابط هم ارزی روی یک مجموعه‌ی چهار عضوی مانند $A = \{1,2,3,4\}$ برابر است با :

۱۵= تعداد افرازها

✓ نکته : تعداد روابط هم ارزی روی یک مجموعه‌ی پنج عضوی مانند $A = \{1,2,3,4,5\}$ برابر است با :

۵۲= تعداد افرازها

فاکتوریل:

فرض کنید n عددی صحیح حسابی باشد ($n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$)، در این صورت $n!$ (بخوانید n فاکتوریل) تابعی است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

$$f(n) = n!$$

$$n! = \begin{cases} 1, & (n = 0) \\ n(n-1)\dots 3 \times 2 \times 1, & (n > 0) \end{cases}$$

که در آن $n!$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

بنابراین طبق تعریف فرض داریم:

$$\begin{cases} 0! = 1! = 1 \\ n! = n(n-1)(n-2)\dots 3 \times 2 \times 1 \end{cases} \quad n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-2)(n-1)n$$

✓ نکته: توجه داشته باشید که حاصل $n!$ ، همیشه عددی طبیعی است و لذا موارد زیر، غیر ممکن است:

$$\dots, n! = -8, n! = 0, n! = \frac{2}{3}, n! = 3/5$$

✓ نکته: سعی کنید مقادیر زیر را به خاطر بسپارید:

$$\begin{cases} 0! = 1! = 1 \\ 2! = 2 \\ 3! = 6 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} 4! = 24 \\ 5! = 120 \\ 6! = 720 \end{cases}$$

تذکر مهم: فاکتوریل، تابع چهار عمل اصلی نیست یعنی:

$$\begin{cases} 4! + 3! \neq 7! \\ 9! - 5! \neq 4! \\ 3! \times 6! \neq 18! \\ \frac{16!}{8!} \neq 2! \\ (3!)^2 \neq 9! \\ \sqrt{25!} \neq 5! \end{cases}$$

ضمناً:

✓ مهمترین فرمول فاکتوریل:

$$\begin{cases} n! = n \times (n-1)! \\ (n+1)! = (n+1) \times n! \end{cases}$$

به مثال‌های زیر توجه کنید:

$$\begin{cases} 9! = 9 \times 8! \\ 22! = 22 \times 21! = 22 \times 2! \times 20! \\ (n+2)! = (n+2)(n+1)(n)(n-1)! \\ (2n+1)! = (2n+1)(2n)(2n-1)! \\ (n-r+1)! = (n-r+1)(n-r)! \end{cases}$$

$$\frac{n!}{(n-1)!} = n \quad \text{✓ نکته مهم:}$$

$$\frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n$$

اثبات:

$$\frac{9!}{8!} = 9$$

$$\frac{10!}{7!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7!} = 10 \times 9 \times 8 = 720$$

مثال:

$$\frac{n!}{(n-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = n(n-1)$$

تست: مقدار عبارت $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$ کدام است؟ (سراسری ریاضی-۷۲)

$$\begin{array}{llll} n(n+1) & (۱) & n(n-1) & (۲) \\ \frac{n+1}{n-1} & (۳) & \frac{n(n+1)}{2} & (۴) \end{array}$$

پاسخ: $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = \frac{(n+1)n(n-1)!}{(n-1)!} = (n+1)n = n^2 + n$ لذا گزینه ی ۱ صحیح است.

مثال: حاصل عبارات زیر را به صورت فاکتوریل یک عدد بنویسید؟

$$1) 4! \times 35 \times 48$$

$$= 4! \times 5 \times 7 \times 6 \times 8 = 8!$$

پاسخ:

$$2) 27 \times 5! \times 14 \times 8$$

$$5! \times (2 \times 3) \times 7 \times 8 \times 9 = 9!$$

پاسخ:

$$3) (n^2+2n)(n^2-1)(n-2)!$$

$$= n(n+2)(n-1)(n+1)(n-2)! = (n-2)!(n-1)n(n+1)(n+2) = (n+2)!$$

پاسخ:

تست: حاصل عبارت $A = 9! - 8! + 3 \times 7!$ کدام است؟

$$\begin{array}{llll} 67 \times 7! & (۴) & 27 \times 7! & (۳) \\ 3! \times 7! + 9 & (۲) & 3! \times 7! + 1 & (۱) \end{array}$$

$$A = 7!(9 \times 8 - 8 + 3) = 67 \times 7!$$

پاسخ:

✓ نکته: هر گاه $x! = 1$ ، آنگاه $x=0$ یا $x=1$

✓ نکته: هر گاه $x! = x$ ، آنگاه $x=2$ یا $x=1$

تست: معادله ی $(x^2-2x)! = 1$ چند جواب صحیح دارد؟

$$\begin{array}{llll} 4 & (۴) & 3 & (۳) \\ 1 & (۲) & 2 & (۱) \end{array}$$

$$(x^2 - 2x)! = 1 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x = 0 \\ \text{یا} \\ x^2 - 2x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ یا } 2 \\ x = 1 \pm \sqrt{2} \end{cases}$$

پاسخ:

اما فقط دو جواب ۰ و ۲ قابل قبولند زیرا صحیح اند، لذا گزینه ی ۱ صحیح است.

تست: ۱ مجموعه جواب معادله ی $(x^2 + 3x + 2)! = 52$ ، چند عضو دارد؟

$$\begin{array}{llll} 0 & (۴) & 1 & (۳) \\ 2 & (۲) & \text{بیشمار} & (۱) \end{array}$$

پاسخ: چون فاکتوریل هیچ عددی برابر ۵۲ نمیشود، لذا معادله ی فوق، به ازاء جمیع مقادیر x غیر ممکن بوده و بنابراین جواب ندارد.

اصل ضرب (اصل شمارش) :

هر گاه عملی بتواند به n_1 طریق (n_1 راه) مختلف انجام شود و پس از آن که این عمل با یکی از این راهها، انجام گرفت، برای هر یک از این راهها، عمل دوم بتواند به n_2 طریق مختلف انجام گیرد و پس از اتمام عمل دوم، برای هر یک از آنها، عمل سومی بتواند به n_3 طریق مختلف انجام گیرد و بهمین ترتیب، پس از اتمام مرحله‌ی $(k-1)$ ام، عمل k ام بتواند به n_k طریق مختلف صورت پذیرد، در این صورت، این k عمل با یکدیگر، می‌توانند به $n_1 \times n_2 \times n_3 \times \dots \times n_k$ طریق صورت پذیرند.

مثال: به چند طریق می‌توان با 3 کت و 2 شلوار، یک کت و شلوار پوشید؟

(کت‌ها و شلوارها، مثل هم نیستند)

پاسخ: طبق اصل ضرب، این عمل به $3 \times 2 = 6$ طریق صورت می‌پذیرد.

مثال: مطابق شکل مقابل، از شهر A به شهر B، 2 جاده (2 راه)، و از شهر B به شهر C، 3 جاده وجود دارد: الف) به چند طریق می‌توان از A به C رفته و مجدداً به A برگردیم، به طوریکه راه رفت و برگشت، یکی نباشد؟



پاسخ: به $2 \times 3 = 6$ طریق می‌توان از A به C رفت و به $6 - 1 = 5$ طریق می‌توان از C به A برگشت (زیرا راه برگشت با راه رفت، یکی نمی‌باشد)، پس طبق اصل ضرب به $6 \times 5 = 30$ طریق می‌توان از A به C رفت و برگشت، به طوریکه راه برگشت، با راه رفت یکی نباشد.

مثال: به چند طریق می‌توان وارد اتاقی با 5 در شد و از دری دیگر، خارج شد؟

$$5 \times 4 = 20$$

پاسخ:

مثال: هر گاه ماتریسی، دارای 4 سطر و 3 ستون باشد، آنگاه این ماتریس چند درایه دارد؟

$$4 \times 3 = 12$$

پاسخ:

مثال: تعداد ماتریسهای $m \times n$ ، که درایه‌های آنها فقط 0 یا 1 هستند، را بیابید؟

پاسخ: فرض می‌کنیم A یک ماتریس $m \times n$ (دارای m سطر و n ستون) باشد، لذا این ماتریس دارای $m \times n$ ، درایه است که هر یک از آنها می‌توانند 0 یا 1 باشند، اگر مکان هر یک از درایه‌ها را، با یک خانه‌ی مربع شکل، (به صورت زیر)، نمایش دهیم، هر خانه به 2 طریق پر شود (زیرا هر خانه می‌تواند با دو رقم 0 یا 1 پر شود)

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{1 \text{ یا } 0} & \boxed{1 \text{ یا } 0} & \dots & \boxed{1 \text{ یا } 0} \\ \boxed{1 \text{ یا } 0} & \boxed{1 \text{ یا } 0} & \dots & \boxed{1 \text{ یا } 0} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \boxed{1 \text{ یا } 0} & \boxed{1 \text{ یا } 0} & \dots & \boxed{1 \text{ یا } 0} \end{bmatrix}$$

بنابراین طبق اصل ضرب داریم:

$$1 \text{ و } 0 \text{ با } m \times n \text{ درایه‌های } = \underbrace{2 \times 2 \times \dots \times 2}_{m \times n} = 2^{m \times n}$$

تست: چند ماتریس 2×2 ، به درایه‌های 0 و 1 می‌توان نوشت؟

$$2^{16} \text{ (ع)}$$

$$2^{2 \times 2} \text{ (ب)}$$

$$(2^2)^4 \text{ (پ)}$$

$$2^2 \text{ (د)}$$

پاسخ: $2^{2 \times 2} = 16$ = تعداد ماتریسهای 2×2 با درایه‌های 0 و 1

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

تعدادی از این ماتریسها عبارتند از:

مثال: چند تابع از مجموعه‌ی $A = \{a, b, c\}$ به مجموعه‌ی $B = \{1, 2, 3, 4\}$ می‌توان نوشت؟
(دامنه‌ی این توابع، تمام A می‌باشد.)

حل: برای $x=a$ ، $f(a)$ می‌تواند هر یک از مقادیر 1 یا 2 یا 3 یا 4 باشد، به همین ترتیب $f(b)$ و $f(c)$ نیز می‌توانند هریک از مقادیر 1 یا 2 یا 3 یا 4 باشند، پس تعداد توابع از مجموعه‌ی A به مجموعه‌ی B عبارتست از $4 \times 4 \times 4 = 4^3$

تعدادی از این توابع عبارتند از: $g = \{(a, 1), (b, 4), (c, 2)\}$ ، $f = \{(a, 1), (b, 1), (c, 1)\}$

نکته‌ی مهم: به طور کلی، تعداد کل توابع، از یک مجموعه‌ی m عضوی به یک مجموعه‌ی n عضوی، برابر است با:
 $n^m = \text{تعداد اعضای مجموعه اول} \times \text{تعداد اعضای مجموعه دوم}$

اصل جمع:

هر گاه عمل A به m طریق و عمل B به n طریق، قابل اجرا باشند و ضمناً امکان انجام دو عمل A یا B به صورت توأم، وجود نداشته باشد، در این صورت، انجام یکی از اعمال A یا B (نه هر دو با هم)، به $m+n$ طریق، امکان پذیر است، به عبارت دیگر، هرگاه A و B دو مجموعه‌ی متناهی و جدا از هم باشند $(A \cap B = \emptyset)$ ، آنگاه تعداد اعضای $A \cup B$ برابر است با مجموع تعداد عضوهای A با تعداد عضوهای B ، یعنی:

$$N(A \cup B) = N(A) + N(B) \quad \text{یا} \quad |A \cup B| = |A| + |B|$$

دقت کنید که $|A|$ یا $N(A)$ نشانگر تعداد اعضای A می‌باشند.

مثال: در یک رستوران 5 نوع ساندویچ و 4 نوع پیتزا موجود است، در این رستوران، به چند طریق، می‌توان یک نوع غذا سفارش داد؟

پاسخ: چون قصد سفارش توأم ساندویچ و پیتزا را نداریم، پس این کار طبق اصل جمع، به $5+4=9$ طریق، امکان پذیر است.

جایگشت (تبدیل یا ترتیب):

هر گاه n شیء متمایز داشته باشیم، هر نحوه‌ی (هر طرز) قرار گرفتن این n شیء در یک ردیف، کنار یکدیگر را، یک جایگشت (تبدیل یا ترتیب) n تایی از این n شیء گویند.

مثال: کلیه‌ی جایگشت‌های دو حرفی a و b را بنویسید؟

ab, ba

پاسخ:

مثال: کلیه‌ی جایگشت‌های سه حرفی سه حرف a و b و c را بنویسید؟

پاسخ:

$$\begin{Bmatrix} abc \\ acb \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} bac \\ bca \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} cab \\ cba \end{Bmatrix}$$

نکته‌ی مهم: تعداد کل جایگشت‌های n تایی (n حرفی) n شیء متمایز برابر است با $n!$

مثال: 5 نفر به چند طریق می‌توانند در یک ردیف (صف)، کنار هم بایستند؟

پاسخ:

$$5! = 120$$

مثال: با ارقام 1, 2, 3, 6, 7 و 9 چند عدد 6 رقمی می‌توان ساخت؟ (بدون تکرار)

پاسخ:

$$6! = 720$$

مثال: حروف کلمه‌ی «Victory» را از چوب تراشیده‌ایم، با قرار دادن همه‌ی این حروف در کنار یکدیگر، چند کلمه‌ی 7 حرفی با معنی و بی‌معنی می‌توان ساخت؟

پاسخ: چون 7 حرف دارد لذا:

$$7! = 7 \times 6! = 7 \times 720 = 5040$$

مثال: با ارقام 1, 6, 9, 0, 5, 3, 2

الف) چند عدد زوج 5 رقمی می‌توان ساخت؟ (بدون تکرار)

پاسخ: عددی زوج است که یکانش زوج باشد لذا:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline 6 & 5 & 4 & 3 & 0 \\ \hline \end{array} \xRightarrow{\text{اصل ضرب}} \text{طریق 1} \Rightarrow 360 \text{ طریق}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline 5 & 5 & 4 & 3 & 6 \text{ یا } 2 \\ \hline \end{array} \xRightarrow{\text{اصل ضرب}} \text{طریق 2} \Rightarrow 600 \text{ طریق} +$$

طبق اصل جمع $\Leftarrow 960$ طریق

ب) چند عدد 4 رقمی فرد می‌توان ساخت؟ (بدون تکرار)

پاسخ: عددی فرد است که یکانش فرد باشد لذا:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline 5 & 5 & 4 & 1 \text{ یا } 3 \text{ یا } 5 \text{ یا } 9 & 4 \\ \hline \end{array} \xRightarrow{\text{اصل ضرب}} \text{طریق 4} \Rightarrow 400 \text{ طریق}$$

ج) چند عدد 3 رقمی مضرب 5 می‌توان ساخت؟ (بدون تکرار)

پاسخ: عددی مضرب 5 است که یکانش 0 یا 5 باشد لذا:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline 6 & 5 & 0 \\ \hline \end{array} \xRightarrow{\text{اصل ضرب}} \text{طریق 1} \Rightarrow 30 \text{ طریق}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline 5 & 5 & 5 \\ \hline \end{array} \xRightarrow{\text{اصل ضرب}} \text{طریق 1} \Rightarrow 25 \text{ طریق} +$$

55 طریق

تست: با ارقام 6,5,4,3,2,1 چند عدد چهار رقمی بدون تکرار بین 2000 و 5000 می‌توان ساخت؟

120(۱) 180(۲) 240(۳) 210(۴)

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline 5 & 4 & 2 \text{ یا } 3 \text{ یا } 4 & 3 \\ \hline \end{array} \xRightarrow{\text{اصل ضرب}} \text{طریق 3} \Rightarrow 180 \text{ طریق}$$

جایگشتهای r حرفی n شیء متمایز:

هر گاه n شیء متمایز داشته باشیم، هر نحوه‌ی قرار گرفتن r شیء از این n شیء ($r \leq n$) را در یک صف کنار یکدیگر، یک جایگشت r تایی (r عضوی) از این n شیء می‌گویند.

مثال: کلیه‌ی جایگشتهای 2 حرفی ساخته شده با حروف کلمه‌ی «ابر» را بنویسید؟

پاسخ: ب، ار، با، بر، را، رب

✓ نکته: جایگشتهای r عضوی n شیء متمایز را با نماد $p(n,r)$ یا p_n^r یا $(n)_r$ نمایش می‌دهند.

✓ نکته: $(n)_r$ را بخوانید جایگشت r از n

✓ نکته‌ی مهم: تعداد جایگشتهای r عضوی n شیء متمایز ($r \leq n$) برابر است با:

$$p(n,r) = (n)_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

تبصره: در فرمول فوق اگر $r = n$ ، آنگاه $p(n,n) = n!$

مثال: با حروف کلمه‌ی «فوتبال»، چند 3 حرفی با معنی و بی‌معنی می‌توان ساخت؟

$$P(6,3) = (6)_3 = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = 6 \times 5 \times 4 = 120$$

پاسخ:

تعدادی از این کلمات عبارتند از: فوت، بال، تبل، تاب، فال، لوت، فول، وال، تول و ...

مثال: با حروف کلمه‌ی «خوارزمی»:

الف) چند کلمه‌ی 4 حرفی با معنی و بی‌معنی می‌توان ساخت؟

$$p(7,4) = \frac{7!}{(7-4)!} = \frac{7!}{3!} = 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$$

پاسخ:

ب) چند کلمه‌ی 4 حرفی می‌توان ساخت که با «خ» شروع و با «ر» ختم شوند؟

پاسخ:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline 1 & 5 & 4 & 1 \\ \hline \end{array} \Rightarrow 20$$

مثال: اعضای یک گروه 8 نفره، به چند طریق می‌توانند صفهای 3 نفره تشکیل دهند؟

$$p(8,3) = \frac{8!}{5!} = 8 \times 7 \times 6 = 336$$

مثال: 5 نفر به چند طریق می‌توانند در یک صف بایستند به طوریکه:

الف) یک نفر مشخص، همیشه اول صف بایستد؟

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \text{نفر مشخص} & \square & \square & \square & \square \\ \hline 1 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ \hline \end{array} \Rightarrow 4! = 24$$

ب) یک نفر مشخص، همیشه وسط صف باشد؟

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \text{نفر مشخص} & \square & \square \\ \hline 4 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ \hline \end{array} \Rightarrow 4! = 24$$

تست: هر گاه، $p(n,2)=30$ ، $(7)_n$ کدام است؟

$$\begin{array}{cccc} 6(4) & 7(3) & 6(2) & 7(1) \end{array}$$

$$p(n,2) = 30 \Rightarrow \frac{n!}{(n-2)!} = 30 \Rightarrow n(n-1) = 6 \times 5 \Rightarrow n = 6 \Rightarrow (7)_n = (7)_6 = \frac{7!}{(7-6)!} = 7!$$

پاسخ :

تست: اگر تعداد تبدیلهای x شیء از 5 شیء برابر تعداد تبدیلهای (x-1) شیء از 5 شیء باشد، x کدام است؟ (سراسری

ریاضی-۶۲)

$$\begin{array}{cccc} 6(4) & 5(3) & 4(2) & 3(1) \end{array}$$

$$p(5,x) = x p(5,x-1)$$

$$\frac{5!}{(5-x)!} = x \times \frac{5!}{(5-x+1)!} \Rightarrow \frac{1}{(5-x)!} = x \times \frac{1}{(6-x)!} \Rightarrow 1 = x \times \frac{1}{6-x} \Rightarrow x = 6-x \Rightarrow x = 3$$

پاسخ:

تست: مقدار n از رابطه‌ی $2(n)_2 + 50 = (2n)_2$ برابر است با:

$$\begin{array}{cccc} 15(4) & 25(3) & 10(2) & 5(1) \end{array}$$

$$2 \times \frac{n!}{(n-2)!} + 50 = \frac{(2n)!}{(2n-2)!} \Rightarrow 2n(n-1) + 50 = 2n(2n-1) \Rightarrow 2n^2 - 2n + 50 = 4n^2 - 2n$$

پاسخ :

$$\Rightarrow 2n^2 = 50 \Rightarrow n = \pm 5 \Rightarrow n = 5$$

ترکیب:

هر گاه n شیء متمایز داشته باشیم، در این صورت هر انتخاب r شیء از این n شیء (بدون در نظر گرفتن ترتیب انتخاب آنها) را یک ترکیب r تایی (r حرفی) از این n شیء می‌گویند، به بیان دیگر هر زیر مجموعه‌ی r عضوی از این n شیء متمایز را یک ترکیب r عضوی (r تایی یا r حرفی) از این n شیء می‌گویند.

✓ تذکر بسیار مهم: دقت داشته باشید که در ترکیب، بر خلاف تبدیل (جایگشت)، ترتیب انتخاب اشیاء مهم نیست، به عبارت دیگر، ترکیب یعنی انتخاب بدون ترتیب

✓ نکته: تعداد ترکیبات r تایی n شیء متمایز را با نمادهای $c(n, r)$ یا c_n^r یا $\binom{n}{r}$ نمایش می‌دهند.

نکته: $\binom{n}{r}$ را بخوانید ترکیب r از n

مثال: کلیه ترکیبات 2 تایی سه حرف a, b, c را بنویسید؟

پاسخ: ab, ac, bc, ba, ca, cb ، البته توجه داشته باشید که ab با ba ، ac با ca ، bc با cb یکی هستند.

✓ نکته‌ی مهم: تعداد ترکیبات r تایی n شیء متمایز، $(r \leq n)$ برابر است با:

$$c(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

تبصره: در فرمول فوق اگر $n=r$ ، آنگاه: $c(n, n) = \binom{n}{n} = 1$

مثال: به چند طریق می‌توان از میان 5 کتاب متمایز در یک کتابفروشی سه کتاب را انتخاب نموده و بخریم؟

$$c(5, 3) = \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$$

پاسخ:

مثال: به چند طریق می‌توان از درون کیسه‌ای شامل 9 مهره‌ی یکسان، 2 مهره به تصادف انتخاب کرد؟

$$\binom{9}{2} = \frac{9!}{2!7!} = \frac{9 \times 8}{2} = 36$$

پاسخ:

✓ تذکر مهم: معمولاً این سوال پیش می‌آید که در چه مسائلی باید از ترکیب و در چه مسائلی باید از ترتیب (جایگشت) استفاده کرد، برای پاسخ به این سوال، توجه به این نکته ضروری است که هر کجا بحث فقط انتخاب r شیء از میان n

شیء باشد (ترتیب انتخاب مهم نباشد)، باید از ترکیب استفاده کرد، اما اگر ترتیب قرار گرفتن اشیاء کنار یکدیگر مهم باشد، باید از تبدیل (جایگشت) استفاده نمود.

به دو نکته‌ی ساده زیر توجه کنید:

الف) در تبدیل، انتخاب و چیدن اشیاء مهم است..

ب) در ترکیب، فقط انتخاب اشیاء مهم است.

به مثالهای زیر، به دقت توجه کنید.

مثال: به چند طریق می‌توان از میان 6 کتاب، 4 کتاب را انتخاب کرد؟

$$\binom{6}{4} = \frac{6!}{4!2!} = 15$$

پاسخ:

مثال: به چند طریق می‌توان از میان 6 کتاب متمایز، 4 کتاب انتخاب نموده و آنها را در قفسه‌ی کتابخانه چید؟

$$(6)_4 \text{ یا } \binom{6}{4} \times 4!$$

پاسخ:

$$(n)_r = \binom{n}{r} \times r!$$

البته توجه داشته باشید که در حالت کلی داریم:

مثال: یک مجموعه‌ی 4 عضوی، چند زیر مجموعه‌ی 3 عضوی دارد؟

$$\binom{4}{3} = 4$$

پاسخ:

(توجه داشته باشید که ترتیب نوشتن عضوهای یک مجموعه، مهم نمی‌باشد)

مثال: به چند طریق می‌توان از میان 7 نفر، یک رئیس، یک منشی و یک سرایدار انتخاب کرد؟

$$(7)_3 = \frac{7!}{4!} = 7 \times 6 \times 5 = 210$$

پاسخ:

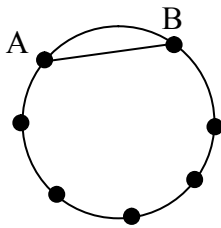
مثال: 7 نقطه پیرامون (روی محیط) دایره‌ای واقعند،

الف) چند وتر با این 7 نقطه می‌توان ساخت؟

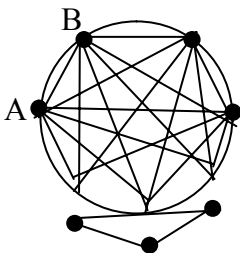
$$\binom{7}{2} = 21$$

پاسخ:

توجه داشته باشید که وتر AB با وتر BA فرقی نمی‌کند (در واقع فرقی نمی‌کند که از A به B وصل کنیم یا از B به A)



سعی کنید که در دایره‌ی فوق این 21 وتر را رسم کنید، ابتدا از یک رأس مثلاً مانند A، شروع کرده، به همه‌ی رأسهای دیگر وصل کنید، سپس رأس B را به همه‌ی رأسهای دیگر (به جز رأس A که قبلاً به B وصل نشده است و در واقع تکرار می‌شود) وصل کنید و ... ، تعداد وترها را بشمارید، 21 وتر خواهید داشت، البته با یک شکل بسیار زیبا به صورت زیر:



ب) چند بردار با این 7 نقطه می‌توان ساخت؟

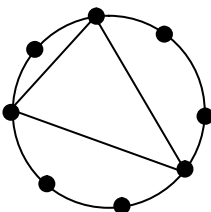
$$(7)_2 = 2! \times \binom{7}{2} = 2 \times 21 = 42$$

پاسخ:

ج) چند مثلث با این 7 نقطه می‌توان ساخت؟

پاسخ:

$$\binom{7}{3} \frac{7!}{4!3!} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2} = 35$$



مثال: به چند طریق می‌توان از میان 8 ایرانی و 5 فرانسوی، کمیته‌ای 6 نفره انتخاب کرد، به طوریکه:

الف) کمیته دقیقاً شامل 4 ایرانی باشد؟

پاسخ: یعنی 4 ایرانی و 2 فرانسوی $\leftarrow \binom{8}{4} \times \binom{5}{2}$

ب) کمیته حداقل دارای 4 فرانسوی باشد؟

پاسخ: یعنی یا 4 فرانسوی یا بیشتر و این یعنی یا 4 فرانسوی و 2 ایرانی یا 5 فرانسوی و 1 ایرانی، بنابراین داریم:

$$\binom{5}{4}\binom{8}{2} + \binom{5}{5}\binom{8}{1}$$

توجه داشته باشید که هر 6 نفر نمی‌توانند فرانسوی باشند، زیرا تعداد فرانسویها، کلاً 5 نفر می‌باشد.

ج) کمیته حداکثر دارای 3 ایرانی باشد؟

پاسخ: یعنی یا 3 ایرانی یا کمتر و این یعنی یا 3 ایرانی و 3 فرانسوی، یا 2 ایرانی و 4 فرانسوی یا 1 ایرانی و 5 فرانسوی،

$$\binom{8}{3}\binom{5}{3} + \binom{8}{2}\binom{5}{4} + \binom{8}{1}\binom{5}{5}$$

بنابراین داریم:

توجه کنید که کمیته نمی‌تواند بدون فرد ایرانی باشد، زیرا در این صورت هر 6 نفر باید فرانسوی باشند که این امکان ندارد.

د) تعداد ایرانیهای منتخب در کمیته بیشتر باشد؟

پاسخ: این یعنی یا 4 ایرانی و 2 فرانسوی، یا هر ایرانی را فرانسوی و یا هر 6 نفر ایرانی، بنابراین داریم:

$$\binom{8}{4}\binom{5}{2} + \binom{8}{5}\binom{5}{1} + \binom{8}{6}$$

۷ نکته‌ی مهم: توجه کنید که در حل مثال فوق و به طور کلی نیز، «یا» به معنای جمع است (اصل جمع) و «و» به معنای ضرب است (اصل ضرب)، خواهشاً این نکته را فراموش نکنید.

مثال: کیسه‌ای حاوی 7 مهره قرمز، 6 مهره آبی و 2 مهره سبز است، از این کیسه 3 مهره با هم به تصادف بیرون می‌آوریم، به چند طریق این عمل امکان‌پذیر است مشروط بر آنکه:

الف) سه مهره دلخواه باشند (یعنی این 3 مهره می‌توانند به هر تعدادی و از هر رنگی باشند)

$$7 + 6 + 2 = 15 \Rightarrow \binom{15}{3}$$

پاسخ:

ب) دو مهره قرمز و یک مهره سبز باشد؟

$$\binom{7}{2} \times \binom{2}{1} = \binom{7}{2} \binom{2}{1}$$

ج) هر مهره از یک رنگ باشد؟ (هیچ دو مهره‌ای هم‌رنگ نباشند)

$$\binom{7}{1} \binom{6}{1} \binom{2}{1}$$

پاسخ:

د) هر سه مهره هم‌رنگ باشند؟

$$\binom{7}{3} + \binom{6}{3}$$

پاسخ

تست: در شکل مقابل چند مستطیل داریم؟ شکل

$$\binom{11}{2} \quad (1) \quad \binom{6}{2} + \binom{5}{2} \quad (2) \quad \binom{6}{2} \times \binom{6}{2} \quad (3) \quad \binom{6}{2} \times \binom{5}{2} \quad (4)$$

پاسخ: می‌دانیم که هر مستطیل از برخورد 2 خط عمودی با دو افقی ایجاد می‌شود، لذا چون 6 خط عمودی و 5 خط افقی

$$\binom{6}{2} \binom{5}{2}$$

داریم، تعداد مستطیلهای برابر خواهد بود با:

دقت کنید که هر مربع، خود یک مستطیل است، اما عکس این مطلب صحیح نمی‌باشد)

✓ نکته‌ی مهم: تعداد مربعهای صفحه‌ی شطرنجی شکل $n \times n$ برابر است با:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1^2 + 2^2 = 5 \quad \text{یا} \quad \frac{2(3)(5)}{6} = 5$$

مثال: در شکل  چند مربع وجود دارد؟

✓ نکته‌ی مهم: تعداد مستطیل‌های صفحه‌ی شطرنجی شکل $m \times n$ برابر است با:

$$\binom{m+1}{2} \binom{n+1}{2}$$

✓ نکته‌ی مهم: تعداد مستطیل‌های نابرابر از لحاظ طول و عرض صفحه‌ی شطرنجی شکل $m \times n$ برابر است با:

تعداد مربعها - تعداد مستطیلها = تعداد مستطیل‌های نابرابر

تست: در یک کاغذ شطرنجی مربع شکل، در هر طرف آن ۸ مربع وجود دارد (صفحه‌ی شطرنج معمولی)، در کل چند مربع موجود است؟ (سراسری ریاضی-۷۲)

$$240 \quad (1) \quad 204 \quad (2) \quad 196 \quad (3) \quad 169 \quad (4)$$

پاسخ: تعداد مربعهای کوچک $8^2 = 64$ می‌باشد، تعداد مربع‌هایی که هر ضلع آن از ۲ ضلع مربع کوچک تشکیل شده $7^2 = 49$ می‌باشد و تعداد مربع‌هایی که هر ضلع آن مساوی ۳ ضلع مربعهای کوچک باشد $6^2 = 36$ بوده و به همین ترتیب داریم:

$$8^2 + 7^2 + 6^2 + \dots + 2^2 + 1^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{8 \times 9 \times 17}{6} = 204$$

سعی کنید همانطور که در دوره‌ی ابتدایی، جدول ضرب را حفظ می‌کردید، در اینجا نیز نکات زیر را به خاطر بسپارید تا در انجام محاسبات، سرعت عمل بیشتری داشته باشید.

حاصل برخی از مقادیر $\binom{n}{r}$:

$$\begin{aligned} ۱) \quad & \begin{cases} \binom{n}{0} = 1 \\ \binom{n}{n} = 1 \end{cases} & ۲) \quad & \begin{cases} \binom{n}{1} = n \\ \binom{n}{n-1} = n \end{cases} & ۳) \quad & \begin{cases} \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \\ \binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \end{cases} \end{aligned}$$

مثال: هر گاه $\binom{n}{3} = 20$ ، n را بیابید؟

$$\binom{n}{3} = 20 \Rightarrow \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = 20 \Rightarrow n(n-1)(n-2) = 120$$

$$n(n-1)(n-2) = 6 \times 5 \times 4 \Rightarrow n = 6$$

$$\epsilon) \quad \binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

$$\text{مثال: } \binom{10}{3} \binom{10}{7}$$

$$ه) \binom{n}{p} = \binom{n}{q} \Leftrightarrow \begin{cases} p = q \\ \text{یا} \\ p + q = n \end{cases}$$

تست: هر گاه $\binom{18}{6} = \binom{18}{n+2}$ ، کدام است؟

(1) 11

(2) 6

(3) 4

(4) 12

پاسخ:

$$\binom{18}{6} = \binom{18}{n+2} \Rightarrow \begin{cases} n+2 = 6 \\ \text{یا} \\ n+2+6 = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 4 \\ n = 10 \end{cases}$$

لذا گزینه ی 3 صحیح است.

$$و) \binom{p+q}{p} = \binom{p+q}{q}$$

$$\binom{n+k-1}{n} = \binom{n+k-1}{k-1}$$

مثال:

تست: هر گاه $\binom{n}{5} = \binom{n}{15}$ ، حاصل $\binom{n}{2}$ کدام است؟

(1) 210

(2) 190

(3) 380

(4) 45

پاسخ:

$$\binom{n}{5} = \binom{n}{15} \Rightarrow n = 5 + 15 = 20 \Rightarrow \binom{n}{2} = \binom{20}{2} = \frac{20 \times 19}{2} = 190$$

$$و) \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r}$$

«قانون پاسکال:

این قانون به مثلث خیام - پاسکال منجر می شود.

$$\begin{aligned} \text{طرف اول} \rightarrow \text{اثبات} &= \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!} + \frac{n!}{r!(n-r)!} \\ \text{مخرج مشترک} &= \frac{r(n!) + (n-r+1)n!}{r!(n-r+1)!} \\ &= \frac{n!(r+n-r+1)}{r!(n-r+1)!} \\ &= \frac{n!(n+1)}{r!(n-r+1)!} = \frac{(n+1)!}{r!(n-r+1)!} \\ &= \binom{n+1}{r} \end{aligned}$$

$$\binom{5}{2} + \binom{5}{3} = \binom{6}{3}$$

مثال:

تست: حاصل $\binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{6}{4} + \binom{7}{5}$ برابر است با:

(1) $\binom{8}{6}$ (2) $\binom{7}{6}$ (3) $\binom{9}{5}$ (4) $\binom{8}{5}$

پاسخ:

$$\overbrace{\binom{5}{2} + \binom{5}{3}}^{(6)} + \binom{6}{4} + \binom{7}{5} = \overbrace{\binom{6}{3} + \binom{6}{4}}^{(7)} + \binom{7}{5} = \binom{7}{4} + \binom{7}{5} = \binom{8}{5}$$

$$۸) \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$$

$$\binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \dots + \binom{5}{4} + \binom{5}{5} = 2^5 = 32$$

مثال:

تست: یک مجموعه‌ی 6 عضوی، چند زیر مجموعه دارد که حداقل دارای 2 عضو باشند؟

62 (4

58 (3

57 (2

53 (1

$$\binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6} = 2^6 - \left(\binom{6}{0} + \binom{6}{1} \right) = 64 - (1 + 6) = 57$$

پاسخ:

$$۹) \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \dots + (-1)^n + \binom{n}{n} = 0$$

یا

$$\left(\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots \right) - \left(\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots \right) = 0$$

تذکر: یک روش اثبات نکات 8 و 9 استفاده از بسط دو جمله‌ای نیوتن $(a+b)^n$ می‌باشد، اگر در بسط

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \dots + \binom{n}{n}b^n$$

و به جای b ، -1 را قرار دهیم، نکته‌ی 9 ثابت می‌شود این مطلب را در همین فصل و در قسمتهای بعدی خواهید دید:

$$۱۰) \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots = 2^{n-1}$$

$$\binom{6}{0} + \binom{6}{2} + \binom{6}{4} + \binom{6}{6} = 2^{6-1} = 2^5 = 32$$

مثال:

$$۱۱) \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots = 2^{n-1}$$

$$\binom{9}{1} + \binom{9}{3} + \binom{9}{5} + \binom{9}{7} = 2^{9-1} - \binom{9}{9} = 2^8 - 1 = 255$$

مثال:

تذکر: برای اثبات نکات 10 و 11، دو فرمول 8 و 9 را یکبار با یکدیگر جمع و بار دیگر از یکدیگر کم کنید.

$$۱۲) \binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + \dots + \binom{n+m}{n} = \binom{n+m+1}{n+1}$$

$$\left(\binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1} = 1 \right) \text{ قرار می‌دهیم (البته توجه کنید که } \binom{n+1}{n+1} \text{ در سمت چپ تساوی فوق، ابتدا به جای } \binom{n}{n} \text{،}$$

لذا داریم:

$$\begin{aligned} \text{طرف اول} &= \binom{n+1}{n+1} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + \dots + \binom{n+m}{n} \\ &= \binom{n+2}{n+1} + \binom{n+2}{n} + \dots + \binom{n+m}{n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \binom{n+3}{n+1} + \binom{n+3}{n} + \dots + \binom{n+m}{n} \\
 &= \binom{n+m}{n+1} + \binom{n+m}{n} \\
 &= \binom{n+m+1}{n+1}
 \end{aligned}$$

و بالاخره:

دقت کنید که در اثبات نکته‌ی 12، ما متوالیاً از قانون 7، استفاده کردیم.

$${}^{(۱۳)} \binom{n}{k} \binom{k}{r} = \binom{n}{r} \binom{n-r}{k-r}$$

(اتحاد نیوتن):

اثبات: با استفاده از فرمول ترکیب، اثبات بدیهی است.

$${}^{(۱۴)} \binom{m}{0} \binom{n}{p} + \binom{m}{1} \binom{n}{p-1} + \dots + \binom{m}{p} \binom{n}{0} = \binom{m+n}{p}$$

برای اثبات این نکته به مسأله‌ی زیر و حل آن توجه کنید:

مسأله:

اولاً: به چند طریق می‌توان از میان n مرد و m زن، p نفر ($p < m+n$) را انتخاب کرد؟پاسخ: به $\binom{m+n}{p}$ طریقثانیاً: اگر $p \leq m$ و $p \leq n$ باشد، ثابت کنید:

$$\binom{m}{0} \binom{n}{p} + \binom{m}{1} \binom{n}{p-1} + \dots + \binom{m}{p} \binom{n}{0} = \binom{m+n}{p}$$

پاسخ: انتخاب p نفر از میان $m+n$ نفر فوق، به صورتهای زیر امکانپذیر است:

$$\binom{m}{0} \binom{n}{p} \leftarrow$$

الف) همه p نفر از مردها باشند

$$\binom{m}{1} \binom{n}{p-1} \leftarrow$$

ب) یک نفر از زن‌ها و بقیه از مردها باشند

$$\binom{m}{2} \binom{n}{p-2} \leftarrow$$

ج) دو نفر از زن‌ها و بقیه از مردها باشند

 $\vdots$ $\vdots$ $\vdots$

$$\binom{m}{p} \binom{n}{0} \leftarrow$$

ه) همه p نفر از زن‌ها باشند

با جمع کردن همه‌ی اعداد فوق و توجه به قسمت اولاً، تساوی فوق ثابت می‌شود.

تست: حاصل $A = \binom{5}{0} \binom{6}{3} + \binom{5}{1} \binom{6}{2} + \binom{5}{2} \binom{6}{1} + \binom{5}{3} \binom{6}{0}$ برابر است با:

(4) هیچکدام

$$\binom{11}{8} (3)$$

$$(11)_3 (2)$$

$$(11)_8 (1)$$

$$A = \binom{5+6}{3} = \binom{11}{3} = \binom{11}{8}$$

پاسخ: طبق نکته‌ی قبل، پاسخ صحیح عبارتست از:

$$۱۵) \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

اثبات:

$$\begin{aligned} \text{طرف اول} &= \binom{n}{0}\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\binom{n}{1} + \binom{n}{2}\binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n}\binom{n}{n} \\ &= \binom{n}{0}\binom{n}{n} + \binom{n}{1}\binom{n}{n-1} + \binom{n}{2}\binom{n}{n-2} + \dots + \binom{n}{n}\binom{n}{0} \\ &= \binom{n+n}{n} = \binom{2n}{n} \end{aligned}$$

طبق نکته‌ی قبل

$$۱۶) 1\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \dots + n\binom{n}{n} = n2^{n-1}$$

اثبات:

$$\begin{aligned} \text{طرف اول} &= \sum_{r=1}^n r \binom{n}{r} = \sum_{r=1}^n r \times \frac{n!}{r!(n-r)!} \\ &= \sum_{r=1}^n n \times \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-1-(r-1))!} \\ &= n \sum_{r=1}^n \binom{n-1}{r-1} = n \left[\binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \dots + \binom{n-1}{n-1} \right] \\ &= n2^{n-1} \end{aligned}$$

طبق نکته‌ی (۸)

$$۱۷) 1\binom{n}{1} - 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} - \dots + (-1)^n n\binom{n}{n} = 0$$

اثبات:

$$\text{طرف اول} = n \sum_{r=1}^n (-1)^{r+1} \binom{n-1}{n-1}$$

مشابه اثبات 15 داریم:

$$\begin{aligned} &= n \left[\binom{n-1}{0} - \binom{n-1}{1} + \dots + (-1)^{n-1} \binom{n-1}{n-1} \right] \\ &= n \times 0 = 0 \end{aligned}$$

$$۱۸) c(n, r) = \frac{p(n, r)}{r!} \quad \text{یا} \quad p(n, r) = r! \times c(n, r)$$

یا

$$\binom{n}{r} = \frac{(n)_r}{r!} \quad \text{یا} \quad (n)_r = r! \times \binom{n}{r}$$

مثال: هر گاه $\binom{n}{3} = 20$ ، $(n)_3$ را بیابید؟

$$(n)_3 = 3! \times \binom{n}{3} = 3! \times 20 = 120$$

روش اول:

روش دوم:

$$\binom{n}{3} = 20 \Rightarrow \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = 20 \Rightarrow n(n-1)(n-2) = 6 \times 5 \times 4 \Rightarrow n = 6 \Rightarrow (n)_3 = (6)_3 = \frac{6!}{3!} = 6 \times 5 \times 4 = 120$$

تست: هر گاه $(n)_r = 60$ و $\binom{n}{r} = 10$ ، $n+r$ برابر است با:

9 (1) 8 (2) 10 (3) 7 (4)

پاسخ: داشتیم:

$$(n)_r = r! \times \binom{n}{r}$$

$$60 = r! \times 10 \Rightarrow r! = 6 \Rightarrow r = 3$$

$$\binom{n}{r} = 10 \xrightarrow{n=3} \binom{n}{3} = 10 \Rightarrow \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = 10$$

$$\Rightarrow n(n-1)(n-2) = 5 \times 4 \times 3 \Rightarrow n = 5 \Rightarrow n+r = 8$$

تست: از تساوی $\binom{2n}{3} = 11 \binom{n}{3}$ ، مقدار n کدام است؟

6 (1) 7 (2) 9 (3) 10 (4)

پاسخ:

$$\binom{2n}{3} = 11 \binom{n}{3} \Rightarrow \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{6} = 11 \times \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

$$\Rightarrow 4n(2n-1)(n-1) = 11n(n-1)(n-2)$$

$$n(n-1)(8n-4-11n+22) = 0 \Rightarrow n(n-1)(-3n+18) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n = 0 \\ n = 1 \\ n = 6 \end{cases}$$

$n=6$ قابل قبول است.

توجه کنید که با توجه به صورت تست یعنی مثلاً $\binom{n}{3}$ ، n باید بزرگتر یا مساوی 3 باشد.

تست: اگر تعداد زیر مجموعه‌های دو عضو مجموعه‌ای، مساوی 45 باشد، تعداد زیر مجموعه‌های چهار عضو آن

چقدر است؟

180 (1) 210 (2) 240 (3) 120 (4)

$$\binom{n}{2} = 45 \Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 45 \Rightarrow n(n-1) = 10 \times 9$$

پاسخ:

$$\Rightarrow n = 10 \Rightarrow \binom{n}{4} = \binom{10}{4} = \frac{10!}{4!6!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2} = 210$$

$$\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 2^4$$

مثال: به کمک مجموعه‌ها، ثابت کنید:

اثبات: مجموعه‌ی $A = \{a, b, c, d\}$ را در نظر بگیرید، می‌دانیم این مجموعه، $2^4 = 16$ زیر مجموعه دارد، از طرفی زیر مجموعه‌های این مجموعه، عبارتند از:

۱) زیر مجموعه‌های هیچ عضوی	$\emptyset$	$\binom{4}{0} = 1$ تعداد زیر مجموعه‌های هیچ عضوی
۲) زیر مجموعه‌های تک عضوی	$\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}$	$\binom{4}{1} = 4$ تعداد زیر مجموعه‌های تک عضوی
۳) زیر مجموعه‌های دو عضوی	$\{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}$	$\binom{4}{2} = 6$ تعداد زیر مجموعه‌های دو عضوی
۴) زیر مجموعه‌های سه عضوی	$\{b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}$	$\binom{4}{3} = 4$ تعداد زیر مجموعه‌های سه عضوی
۵) زیر مجموعه‌های چهار عضوی	$\{a, b, c, d\}$	$\binom{4}{4} = 1$ تعداد زیر مجموعه‌های چهار عضوی

$$\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 2^4$$

بنابراین:

یا

$$1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16$$

تذکر: به روش فوق می‌توان درستی اتحاد $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$ را نیز ثابت کنید.

مثال: مجموعه‌ای 10 عضو دارد، مطلوب است:

الف) تعداد زیر مجموعه‌های 5 عضوی آن

$$\binom{10}{5}$$

پاسخ:

ب) تعداد زیر مجموعه‌هایی از آن که حداقل 8 عضو دارند؟

$$\binom{10}{8} + \binom{10}{9} + \binom{10}{10}$$

پاسخ:

ج) تعداد زیر مجموعه‌هایی از آن، که حداکثر 3 عضو دارند؟

$$\binom{10}{3} + \binom{10}{2} + \binom{10}{1} + \binom{10}{0}$$

پاسخ:

د) تعداد زیر مجموعه‌های 7 عضوی آن، با تعداد زیر مجموعه‌های چند عضوی آن برابر است؟

$$\binom{10}{7} = \binom{10}{x} \Rightarrow 7 + x = 10 \Rightarrow x = 3 \text{ سه عضوی}$$

پاسخ:

مثال: به چند طریق می‌توان از میان اعداد از 1 تا 20، دو عدد را انتخاب کرد، به طوریکه مجموعشان فرد باشد؟ پاسخ: برای اینکه مجموع دو عدد فرد باشد، باید یکی فرد و دیگری زوج باشد، لذا تعداد حالات ممکن برابر است با:

$$\binom{10}{1} \binom{10}{1} = 10 \times 10 = 100$$

تست: به چند طریق می‌توان از میان اعداد از ۱ تا ۳۰، سه عدد را انتخاب کرد، به طوریکه مجموعشان زوج باشد؟

$$2030(۱) \quad ۲۰۳۰(۲) \quad ۲۰۱۰(۳) \quad ۱۹۱۰(۴)$$

پاسخ: برای اینکه مجموع سه عدد، زوج باشد، باید یا هر سه زوج باشند، یا یک زوج و دو رقم دیگر، فرد باشند،

$$\binom{15}{3} + \binom{15}{2} \binom{15}{1} = 2030 \quad \text{لذا تعداد حالات ممکن برابر است با:}$$

شکل

محاسبه‌ی تعداد تبدیلات (تعداد جایگشتها) در حالات مختلف:

(۱) هر گاه n شیء متمایز داشته باشیم، تعداد جایگشتهای این شیء برابر است با:

$$p(n, n) = n!$$

مثال: با حروف کلمه‌ی «معشوق» چند کلمه‌ی 5 حرفی با معنی و بی‌معنی (بدون تکرار حروف) می‌توان ساخت؟

پاسخ: 5!

(۲) تعداد جایگشتهای r تایی n شیء متمایز ($r \leq n$) برابر است با:

$$p(n, r) = (n)_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال: با حروف کلمه‌ی «Flower»، چند کلمه‌ی سه حرفی با معنی و بی‌معنی می‌توان ساخت؟

$$(6)_3 = \frac{6!}{3!} = 6 \times 5 \times 4 = 120 \quad \text{پاسخ:}$$

(۳) تعداد جایگشتهای r تایی n شیء متمایز، به طوریکه، شامل یک شیء مشخص باشند برابر است با:

$$\binom{n-1}{r-1} \times r!$$

برای درک این مطلب، n شیء متمایز $a_1, a_2, \dots, a_n$ را در نظر می‌گیریم، حال برای یافتن تعداد تبدیلات r تایی این n شیء، به طوری که در همه‌ی آنها، یک شیء بخصوص، مثلاً a_1 به کار رفته باشد کافی است ابتدا $(r-1)$ شیء را از میان

$(n-1)$ شیء باقیمانده انتخاب کرده (که البته می‌دانیم این عمل به $\binom{n-1}{r-1}$ طریق امکان پذیر است)، سپس تعداد تبدیلات

این $r-1$ شیء و a_1 را (که جمعاً r شیء میشوند) حساب کنیم که می‌شود $r!$ و بالاخره طبق اصل ضرب، جواب مسأله عبارت خواهد بود از:

$$\binom{n-1}{r-1} \times r!$$

مثال: با حروف کلمه‌ی «Woman»، چند کلمه‌ی 3 حرفی می‌توان ساخت که شامل حرف a باشند؟

$$\binom{5-1}{3-1} \times 3! = \binom{4}{2} \times 3! = 36 \quad \text{پاسخ:}$$

(۴) تعداد تبدیلات r تایی n شیء متمایز که فاقد یک شیء مشخص باشند، برابر است با:

$$p(n-1, r)$$

در واقع، آن شیء را کنار گذاشته و تعداد تبدیلات r تایی، $(n-1)$ شیء باقیمانده را حساب می‌کنیم.

مثال: با ارقام 2, 5, 7, 1, 9, 6, 8 چند عدد 4 رقمی می‌توان ساخت، به طوریکه در هیچکدام از آنها، رقم 5 به کار نرفته باشد؟

$$p(n-1, r) = p(7-1, 4) = p(6, 4) = \frac{6!}{2!} = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$$

پاسخ:

(۵) (تعمیم نکته‌ی ۳): تعداد تبدیلات r تایی n شیء متمایز که شامل k شیء مشخص باشند برابر است با:

$$\binom{n-k}{r-k} \times r!$$

(۶) (تعمیم نکته‌ی ۴): تعداد تبدیلات r تایی n شیء متمایز که فاقد k شیء مشخص باشند برابر است با:

$$p(n-k, r)$$

در واقع آن k شیء مشخص را کنار گذاشته و تعداد تبدیلات r تایی، $(n-k)$ شیء باقیمانده را حساب می‌کنیم.

مثال: به چند طریق ۹ نفر می‌توانند در یک ردیف، صفهای ۵ نفره بسازند، به طوریکه دو نفر مشخص، هیچگاه در این صفها نباشند؟

$$p(n-k, r) = p(9-2, 5) = p(7, 5) = \frac{7!}{2!}$$

پاسخ:

(۷) تعداد تبدیلات n تایی n شیء متمایز، به طوریکه در آنها، r شیء مشخص، همواره کنار هم باشند، برابر است با:

$$p_n = r! \times (n-r+1)!$$

در واقع تعداد تبدیلات r تایی r شیء را حساب کرده (که می‌شود $r!$)، سپس این r شیء را یک شیء در نظر گرفته و تعداد تبدیلات این یک شیء با $(n-r)$ شیء باقیمانده (که جمعاً می‌شوند $n-r+1$ شیء) را حساب کرده (که می‌شود $(n-r+1)!$) و در پایان از اصل ضرب عمل می‌کنیم.

مثال: در یک مجلس عقدکنان، به غیر از عروس و داماد، ۸ نفر دیگر حضور دارند، به چند طریق همه‌ی این افراد می‌توانند در یک صف کنار هم بایستند و دسته جمعی عکس بیندازند، به طوریکه عروس و داماد، همواره کنار هم بایستند؟

پاسخ: عروس و داماد به ۲! طریق می‌توانند کنار هم بایستند، حال عروس و داماد را یک نفر در نظر گرفته، که با بقیه می‌شوند $10-2+1=9$ نفر و این نه نفر به ۹! طریق می‌توانند کنار هم بایستند، لذا طبق اصل ضرب، این عمل به $9! \times 2!$ طریق صورت می‌پذیرد.

(۸) (تعمیم نکته‌ی ۷): هر گاه n شیء متمایز داشته باشیم، به طوریکه n_1 تای آنها مثل هم، n_2 تای دیگر نیز مثل هم، ... و بالاخره n_k تای باقیمانده نیز مثل هم باشند، $(n_1 + n_2 + \dots + n_k = n)$ ، در این صورت تعداد کل حالتی که می‌توان این n شیء را در یک صف کنار هم قرار داد، به طوریکه اشیاء مثل هم، همواره کنار هم باشند، برابر است با:

$$n_1! \times n_2! \times \dots \times n_k! \times k!$$

مثال: به چند طریق ۳ پسر و ۵ دختر می‌توانند در یک صف کنار هم بایستند، به طوریکه پسرها کنار هم و دخترها نیز کنار هم باشند؟

پاسخ: پسرها به ۳! طریق و دخترها به ۵! طریق می‌توانند کنار هم در یک صف بایستند، حال اگر ۳ پسر را یک شیء و ۵ دختر را نیز یک شیء در نظر بگیریم، در این صورت این ۲ شیء (۳ پسر و ۵ دختر) به ۲! طریق می‌توانند کنار هم بایستند (توجه کنید: د د د د د پ پ پ یا پ پ پ پ پ د د د د د) نمایش دختر و پ نمایش پسر می‌باشد، لذا طبق اصل ضرب پاسخ برابر است با:

$$3! \times 5! \times 2!$$

مثال: ۵ تهرانی و ۶ اصفهانی و ۷ مشهدی، به چند طریق می‌توانند در یک صف کنار هم بایستند، مشروط بر آنکه:

$$5! \times 6! \times 7! \times 3!$$

(الف) همشهریها همواره کنار هم بایستند؟

$$5! \times 14!$$

(ب) تهرانی‌ها کنار هم بایستند؟

$$5 \times 7! \times 8!$$

(ج) تهرانی‌ها کنار هم و مشهدیها هم کنار هم بایستند؟

۹) تعداد تبدیلات n تایی n شیء متمایز، به طوریکه در آنها r شیء مشخص کنار هم نباشند برابر است با:

$$n! - (r! \times (n - r + 1)!)$$

در واقع از نکته‌ی زیر استفاده کرده‌ایم:

=تعداد تبدیلات n تایی n شیء متمایز به طوریکه r شیء مشخص کنار هم نباشند

تعداد تبدیلات n تایی n شیء متمایز به طوریکه r شیء مشخص کنار هم باشند-تعداد کل تبدیلات n تایی n شیء =

مثال: 10 نفر به چند طریق می‌توانند در یک صف کنار هم بایستند، به طوریکه:

$$10! - (2! \times 9!)$$

الف) 2 نفر مشخص، کنار هم نباشند؟

$$10! - (3! \times 8!)$$

ب) 3 نفر مشخص، کنار هم نباشند؟

تست: n نفر به چند طریق می‌توانند در یک ردیف کنار هم بنشینند به طوریکه k نفر مشخص، کنار هم نباشند؟

$$(1) \quad n! - k! \quad (2) \quad n! - (k! \times (n - k)!) \quad (3) \quad n! - (k! \times (n - k + 1)!) \quad (4) \quad (n - k)! \quad \text{پاسخ: طبق نکته‌ی قبل، گزینه‌ی 2 صحیح می‌باشد.}$$

تست: با ارقام 5, 7, 8, 9, 1 چند عدد 5 رقمی می‌توان ساخت به طوریکه ارقام 8, 9 کنار هم قرار نگیرند؟

$$(1) \quad 24 \quad (3) \quad 72 \quad (3) \quad 48 \quad (4) \quad 108 \quad \text{پاسخ:}$$

$$5! - (2! \times 4!) = 120 - (2 \times 24) = 72$$

برخی از این اعداد عبارتند از: 87915, 87159, 78195, ...

10) تعداد تبدیلات یک در میان دو دسته‌ی n تایی از اشیاء متمایز برابر است با:

$$n! \times n! \times 2!$$

مثال: 5 پسر و 5 دختر به چند طریق می‌توانند یکی در میان در یک صف بایستند؟

$$5! \times 5! \times 2!$$

پاسخ:

تذکر مهم: ابتدا تبدیلات یک در میان یک دسته‌ی n تایی و یک دسته‌ی $(n-1)$ تایی از اشیاء متمایز برابر است با:

$$n!(n-1)!$$

$$4! \times 3!$$

مثال: به چند طریق 4 افسر و 3 سرباز می‌توانند در کنار هم در یک صف، یک در میان بایستند؟

توجه کنید که در این حالت، دیگر 2! ندارد، زیرا فقط یک حالت وجود دارد که عباراتست از:

افسر، سرباز، افسر، سرباز، افسر، سرباز، افسر

✓ تذکر مهم 2: فقط هنگامی می‌توان m شیء متمایز و n شیء متمایز را به صورت یکی در میان در یک صف کنار هم

قرار داد که یا m با n برابر باشد یا n, m یک واحد اختلاف داشته باشند، به عنوان مثال، نمی‌توان 4 تلویزیون و 6 رادیو

را به صورت یکی در میان در یک ردیف کنار هم قرار داد.

11) تعداد تبدیلات n شیء متمایز، که به صورت دایره‌ای (حلقوی) کنار هم قرار می‌گیرند برابر است با: $(n-1)!$

مثال: تعداد جایگشت‌های حلقوی سه حرف c, b, a را حساب کنید؟

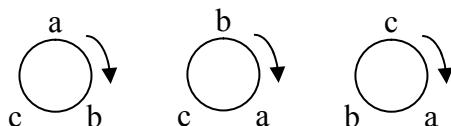
پاسخ: می‌دانید تعداد جایگشت‌های سه حرف c, b, a به صورت یک صف عبارتست از: 6!

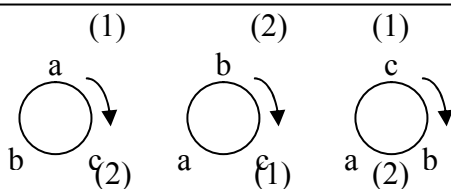
$$\begin{Bmatrix} abc \\ acb \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} bac \\ bca \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} cab \\ cba \end{Bmatrix}$$

اگر این جایگشت‌ها را به صورت دایره‌ای نمایش دهیم 6 حالت زیر پدید می‌آید:

اما با کمی دقت دیده می‌شود که این 6 حالت در واقع 2 حالت یا 2! حالت

می‌باشند، در واقع سه حالت (1) با هم و سه حالت (2) نیز با هم یکی هستند.



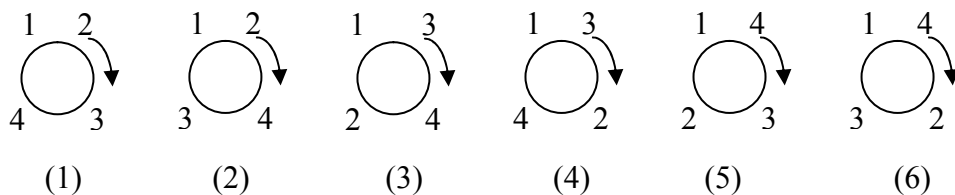


مثال: به چند طریق می‌توان 4 رقم 1 و 2 و 3 و 4 را به صورت یک حلقه، کنار هم قرار داد؟

$$(4-1)! = 3! = 6$$

پاسخ:

به این 6 حالت توجه کنید:



اما همانطور که از قبل میدانیم 4 رقم فوق را به $4! = 24$ طریق میتوانیم در یک ردیف کنار هم قرار دهیم که این 24 حالت به صورت حلقوی به 6 حالت زیر تقلیل می‌یابد دقت کنید؟

(1) حالت = (1) شکل $\rightarrow 1234-2341-3412-4123$

(2) حالت = (2) شکل $\rightarrow 1243-2431-4312-3124$

:

(6) حالت = (6) شکل $\rightarrow 1423-4231-2314-3142$

تست: به چند طریق 4 پسر و 4 دختر می‌توانند دور یک میز گرد، یکی در میان بنشینند؟

$$7! (1) \quad 3! \times 3! (2) \quad 3! \times 4! (3) \quad 8! (4)$$

پاسخ: 4 پسر به $(4-1)! = 3!$ طریق می‌توانند دور یک میز گرد بنشینند، پس از آن 4 دختر به 4! طریق می‌توانند به

صورت یکی در میان، بین پسرها بنشینند، لذا تعداد طرق ممکن برابر است با: $3! \times 4!$

توجه کنید که فقط گروه اول $(n-1)!$ است، در مورد بقیه، همان $n!$ است.

مثال: اولاً به چند صورت ممکن است 3 ایرانی، 4 آمریکایی، 2 آلمانی و 5 سوئدی در یک ردیف کنار هم بنشینند به طوریکه افراد هم ملیت کنار هم باشند؟

$$3! \times 4! \times 2! \times 5! \times 4!$$

پاسخ:

ثانیاً: اگر این چهار گروه بخواهند دور یک میز گرد، کنار هم بنشینند، این عمل به چند صورت امکان پذیر است؟

در این حالت، این چهار گروه دور یک میز گرد به $(4-1)! = 3!$ طریق می‌توانند بنشینند. بنابراین تعداد طرق ممکن برابر است با: $3! \times 4! \times 2! \times 5! \times (4-1)!$

تست: 10 نفر به چند طریق می‌توانند دور یک میز دایره‌ای شکل بنشینند به طوریکه همواره دو نفر معین، در کنار هم باشند؟

$$2! \times 2! \times 8! (4) \quad 9! (3) \quad 2! \times 8! (2) \quad 2! \times 9! (1)$$

پاسخ: گزینه 2 صحیح است، در واقع ابتدا آن دو نفر به 2! طریق می‌توانند کنار هم بنشینند. سپس این دو نفر را یک

نفر فرض کرده با 8 نفر دیگر 9 نفر می‌شوند که این 9 نفر به صورت دایره‌ای شکل به $(9-1)!$ طریق می‌توانند کنار هم

بنشینند، لذا تعداد طرق ممکنه برابر است با: $8! \times 2!$

(12) اگر n شیء متمایز به صورت دایره‌ای شکل کنار هم قرار بگیرند و این حلقه بتواند در فضا دوران 180° داشته باشد (به عبارت دیگر، اشیاء قابلیت وارونه شدن را داشته باشند) مانند (دستبند، گردن‌بند، تسبیح، ...) تعداد حالات ممکن برابر است با: $\frac{(n-1)!}{2}$

تست: با 11 مهره‌ی متمایز (11 مهره به رنگهای مختلف) چند دستبند می‌توان ساخت؟

$$\frac{11!}{2} \quad (1) \quad 10! \quad (2) \quad 9! \times 5 \quad (3) \quad \frac{11!}{2} \quad (4)$$

پاسخ: طبق نکته‌ی فوق داریم:

$$\frac{(11-1)!}{2} = \frac{10!}{2} = \frac{10 \times 9!}{2} = 5 \times 9!$$

تست: به چند طریق می‌توان 6 کلید را در یک دسته کلید دایره‌ای شکل قرار داد؟

$$\frac{(6-1)!}{2} = \frac{5!}{2} = \frac{120}{2} = 60$$

پاسخ:

تبدیل با تکرار:

(13) تبدیل با تکرار - الف: تعداد تبدیلات r تایی n شیء متمایز، به قسمتی که هر شیء بتواند در هر تبدیل، r بار تکرار شود، برابر است با: n^r

مثال: با ارقام 2, 4, 1, 7, 6 چند عدد 3 رقمی می‌توان ساخت؟ (تکرار جایز است)

پاسخ:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline 5 & 5 & 5 \\ \hline \end{array} \xRightarrow{\text{اصل ضرب}} 5^3 = 125$$

طریق

تست: با ارقام 2, 1, 0, 7, 4 چند عدد 4 رقمی می‌توان ساخت؟ (تکرار جایز است)

$$3 \times 4^3 \quad (4) \quad 4 \times 3^3 \quad (3) \quad 4^4 \quad (2) \quad 4! \quad (1)$$

پاسخ:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline 3 & 4 & 4 & 4 \\ \hline \end{array} \xRightarrow{\text{اصل ضرب}} 3 \times 4^3$$

طریق

مثال: با اعداد از 1 تا 5

$$(x, y) \Rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline 5 & 5 \\ \hline \end{array} \xRightarrow{\text{اصل ضرب}} = 25$$

الف) چند زوج مرتب می‌توان ساخت؟

$$(x, y, z) \Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline 5 & 5 & 5 \\ \hline \end{array} \xRightarrow{\text{اصل ضرب}} 125$$

ب) چند سه تایی مرتب می‌توان ساخت؟

مثال: چند عدد 4 رقمی در مبنای 7 می‌توان نوشت؟ (تکرار جایز است)

پاسخ: می‌دانیم در مبنای 7، برای عددنویسی از رقم 7، 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 استفاده می‌کنیم.

بنابراین داریم:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline 6 & 7 & 7 & 7 \\ \hline \end{array} \xRightarrow{\text{اصل ضرب}} 3 \times 7^3$$

طریق

14- تبدیل با تکرار - ب: تعداد تبدیلات حداکثر r تایی n شیء متمایز، به طوریکه تکرار مجاز باشد برابر است با:

$$n \times \frac{n^r - 1}{n - 1}$$

در واقع کافی است تعداد تبدیلات 1 حرفی، 2 حرفی و ... و r حرفی ساخته شده با n شیء متمایز را (که در آنها تکرار مجاز است)، حساب کنیم و سپس با هم جمع کنیم لذا داریم:

$$\begin{aligned} & n + n^2 + n^3 + \dots + n^r \\ &= n(1 + n + n^2 + \dots + n^{r-1}) \\ &= n \times \frac{(n-1)(1 + n + n^2 + \dots + n^{r-1})}{n-1} \\ &= n \times \frac{n^r - 1}{n-1} \end{aligned}$$

مثال: با ارقام از 1 تا 5، به چند طریق می توان اعداد حداکثر 3 رقمی ساخت؟ (تکرار مجاز است)

$$5 \times \frac{5^3 - 1}{5 - 1} = 5 \times \frac{124}{4} = 5 \times 31 = 155$$

پاسخ:

در واقع کافی است، تعداد اعداد یک رقمی، دو رقمی و سه رقمی ساخته شده با 5 رقم از 1 تا 5 را که در آنها تکرار مجاز است حساب کرده و با هم جمع کنیم:

$$\square + \square\square + \square\square\square \Rightarrow 5 + 5^2 + 5^3 = 155$$

۱۵- تبدیل با تکرار-ج: فرض می کنیم n شیء داشته باشیم که در آنها k نوع شیء متمایز وجود داشته باشد به طوریکه :

n_1 تا از آنها مثل هم

n_2 تا از آنها مثل هم

و بالاخره n_k تا از آنها نیز مثل هم باشند، (بدیهی است که: $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ ، در این صورت تعداد تبدیلات متمایز این n شیء برابر است با:

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \dots \times n_k!}$$

مثال: با ارقام 1, 1, 2, 2, 2 چند عدد 5 رقمی می توان نوشت؟ (تکرار هر رقم به اندازه ی داده شده، مجاز می باشد)

$$\frac{5!}{2!3!} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$$

پاسخ:

برخی از این اعداد عبارتند از: 22112, 21212, 11222, ...

اما دقت داشته باشید که در اعداد فوق جابجایی دو رقم 1 (که این کار به 2! طریق امکان پذیر است) و سه رقم 2 (که این کار به 3! طریق امکان پذیر است) باعث نمی شود که عدد 5 رقمی جدیدی به وجود آید، به همین علت است که حتماً باید 5! را به 3! × 2! تقسیم کنیم.

تست: 7 مسافر به چند طریق می توانند در یک اتاق سه تخته و دو اتاق دو تخته مستقر شوند؟

$$360 \quad (1) \quad 210 \quad (2) \quad 180 \quad (3) \quad 120 \quad (4)$$

پاسخ: ابتدا 3 نفر را برای اتاق سه تخته انتخاب می کنیم، این عمل به $\binom{7}{3}$ طریق صورت می پذیرد، سپس از بین 4 نفر

باقیمانده، 2 نفر برای اتاق دو تخته ی اول انتخاب می کنیم که این عمل به $\binom{4}{2}$ طریق صورت می پذیرد، و بالاخره برای اتاق

2 تخته ی دوم، از 2 نفر باقیمانده، 2 نفر انتخاب می کنیم که این عمل به $\binom{2}{2}$ طریق صورت می پذیرد لذا طبق اصل ضرب

داریم:

$$\binom{7}{3}\binom{4}{2}\binom{2}{2} = \frac{7!}{3!4!} \times \frac{4!}{2!2!} \times 1 = \frac{7!}{3!2!2!}$$

$$= \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4}{2 \times 2} = 210$$

تست: با حروف کلمه‌ی «می‌سی‌سی‌پی» چند کلمه‌ی 8 حرفی با معنی و بی‌معنی می‌توان ساخت؟

840 (1) 720 (2) 680 (3) 5760 (4)

پاسخ: حروف این کلمه عبارتند از: م-س-س-پ-ی-ی-ی-ی لذا داریم:

$$\frac{8!}{4!2!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{2} = 4 \times 7 \times 6 \times 5 = 840$$

تبصره: تعداد طرقی که می‌توان n شیء (به طوریکه n_1 تای آنها مثل هم و n_2 تای باقیمانده نیز مثل هم هستند،

$$\frac{n!}{n_1! \times n_2!} \quad (n_1 + n_2 = n) \text{ را در یک صف کنار هم قرار داد برابر است با:}$$

مثال: به چند طریق می‌توان n کتاب فیزیک مشابه (مثلاً فیزیک سال اول) و $(k-1)$ کتاب شیمی مشابه (مثلاً شیمی سال سوم) را در یک قفسه‌ی کتابخانه، در یک ردیف چید؟

$$\frac{n!}{n_1! \times n_2} = \frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!} = \binom{n+k-1}{k-1} \text{ یا } \binom{n+k-1}{n}$$

پاسخ:

تست: به چند طریق می‌توان 5 پرچم ایران و 2 پرچم امریکا را در یک ردیف کنار هم قرار دهیم؟

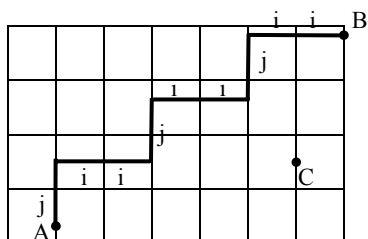
7! (1) 35 (2) 21 (3) $5! \times 2! \times 2!$ (4)

پاسخ: چون پرچمهای هر کشور، با هم تفاوتی ندارند، پس طبق تبصره‌ی فوق داریم:

$$\frac{7!}{5!2!} = \frac{7 \times 6}{2} = 21$$

مثال: اگر متحرکی در شبکه‌ی زیر، بخواهد از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B برود، با این فرض که فقط به سمت راست یا بالا حرکت کند،

اولاً: تعداد مسیرهای ممکنه برای او چیست؟



پاسخ: هر پاره خط عمودی را با Z و هر پاره خط افقی را با I نمایش می‌دهیم، برای اینکه از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B

برویم، کلاً باید 3 پاره خط عمودی و 6 پاره خط افقی را طی کنیم، لذا تعداد حالات برابر است با:

$$\frac{9!}{3! \times 6!}$$

حالات تکراری i حالات تکراری j

ثانیاً: تعداد مسیرهای از A به B به صورت فوق که از C نیز بگذرند چقدر است؟

پاسخ: تعداد مسیرهای از A به C برابر است با: (5 پاره خط عمودی و یک پاره خط عمودی)

و تعداد مسیرهای از C به B برابر است با: (2 پاره خط عمودی و یک پاره خط عمودی)

$$\frac{6!}{5!} \times \frac{3!}{2!} \text{ لذا طبق اصل ضرب، پاسخ حالت ثانیاً برابر است با:}$$

16-تبدیل با تکرار- د:

تعداد تبدیلات r تایی n شیء به طوریکه n_1 شیء آنها مثل هم هستند، از دستور زیر قابل محاسبه است:

$$1) \text{if } r < n, \quad n_1 < r, \quad r < n - n_1 \Rightarrow$$

$$\text{تعداد کل تبدیلات} = (n - n_1)_r + \binom{r}{1}(n - n_1)_{r-1} + \binom{r}{2}(n - n_1)_{r-2} + \dots + \binom{r}{n_1}(n - n_1)_{r-n_1}$$

$$2) \text{if } r < n, \quad r < n_1, \quad r < n - n_1 \Rightarrow$$

$$\text{تعداد کل تبدیلات} = (n - n_1)_r + \binom{r}{1}(n - n_1)_{r-1} + \binom{r}{2}(n - n_1)_{r-2} + \dots + \binom{r}{r}$$

مثال: الف) چند کلمه‌ی 6 حرفی با معنی و بی‌معنی با استفاده از حروف کلمه‌ی «پیروزی» می‌توان ساخت؟

$$\text{پاسخ: پ- ی- ی- ر- و- ز} \xrightarrow{15} \frac{6!}{2!} = 3 \times 5!$$

ب) چند کلمه‌ی 4 حرفی با معنی و بی‌معنی با استفاده از حروف کلمه‌ی پیروزی می‌توان ساخت؟

$$n = 6, \quad r = 4, \quad n_1 = 2, \quad r > n - n_1$$

$$\xrightarrow{(16)} \text{تعداد کل تبدیلات} = (6 - 2)_4 + \binom{4}{1}(6 - 2)_3 + \binom{4}{2}(6 - 2)_2$$

$$= (4)_4 + \binom{4}{1}(4)_3 + \binom{4}{2}(4)_2$$

$$= 24 + 4 \times 24 + 6 \times 12$$

$$= 24 + 96 + 72 = 192$$

برای درک بهتر مطلب به مثال زیر که به گونه‌ای دیگر حل شده است، توجه کنید:

مثال: حروف کلمه‌ی «SPEAKER» را روی هفت قطعه چوب تراشیده‌ایم، با قرار دادن این قطعه چوبها کنار هم، چند کلمه‌ی سه حرفی به دست می‌آید؟

پاسخ: کلمه‌ی سه حرفی ساخته شده ممکن است:

الف) فاقد حرف E باشد، ب) شامل فقط یک حرف E باشد ج) شامل هر دو حرف E باشد.

الف) در حالتیکه کلمه‌ی سه حرفی مورد نظر، فاقد حرف E باشد، تعداد جایگشت‌های 3 حرفی 5 حرف S-P-A-K-R را حساب می‌کنیم که مشابه حالت معمولی این تعداد برابر است با:

$$P(5, 3) = \frac{5!}{2!} = 60$$

ب) در حالتی که کلمه‌ی سه حرفی مورد نظر، شامل فقط یک E باشد، در این صورت ابتدا لازم است که 2 حرف باقیمانده

را از بین 5 حرف دیگر انتخاب کرده (این کار به $\binom{5}{2}$ طریق امکان پذیر است)، سپس جایگشت‌های سه حرفی این 2حرف با آن حرف E (که جمعاً 3 حرف می‌شوند) را بنویسیم (این کار به $3!$ طریق امکان پذیر است) در این صورت طبق اصل ضرب داریم:

$$\binom{5}{2} \times 3! = 60$$

ج) در حالتی که کلمه‌ی سه حرفی مورد نظر، شامل دو حرف E باشد، در این صورت ابتدا لازم است که 1 حرف

باقیمانده را از بین 5 حرف دیگر انتخاب کرده (این کار به $\binom{5}{1}$ طریق امکان پذیر است)، سپس تعداد جایگشت‌های سه

حرفی این یک حرف با آن دو حرف E (که جمعاً 3 حرف می‌شوند) را بنویسیم (این کار به $\frac{3!}{2!}$ طریق امکان پذیر است) در این صورت طبق اصل ضرب داریم:

$$\binom{5}{1} \times \frac{3!}{2!} = 15$$

بنابراین جواب مثال فوق برابر است با: $60 + 60 + 15 = 135$

روش دوم: ← با استفاده از قسمت (1) نکته‌ی 16 داریم:

$$n = 7, \quad r = 3, \quad n_1 = 2, \quad r > n - n_1$$

$$\Rightarrow \text{تعداد کل تبدیلات} = (5)_3 + \binom{3}{1}(5)_2 + \binom{3}{2}(5)_1$$

$$60 + 3 \times 20 + 3 \times 5 = 135$$

تست: با حروف کلمه ی «آسیابان»، چند کلمه‌ی سه حرفی می‌توان ساخت؟

$$(1)_3 (2) \quad \frac{7!}{3!} \quad (3) \quad 61 \quad (4) \quad 73$$

پاسخ: تعداد کلماتی سه حرفی که شامل یک الف هستند و یا اصلاً الف ندارند برابر است با:

$$(5)_3 = \frac{5!}{2!} = 60$$

$$\binom{4}{1} \times \frac{3!}{2!} = 12$$

تعداد کلماتی که دو الف دارند برابر است با:

تعداد کلماتی که سه الف دارند برابر است با: 1

لذا پاسخ برابر است با: $60 + 12 + 1 = 73$

✓ نکته‌ی مهم: هر گاه در یک کیسه، m مهره‌ی زرد، n مهره‌ی آبی، p مهره‌ی سفید و q مهره‌ی سیاه وجود داشته باشد به طوریکه: $m > n > p > q$ ، آنگاه باید حداقل $m+n+p+1$ مهره برداشت تا از هر چهار رنگ، حتماً برداشته باشیم.

تست: کیسه‌ای حاوی 7 مهره‌ی زرد، 5 مهره‌ی سبز و 8 مهره‌ی سفید است، حداقل چند مهره باید برداشت تا از هر سه رنگ حتماً برداشته باشیم؟

$$(1) \quad 13 \quad (2) \quad 16 \quad (3) \quad 14 \quad (4) \quad 4$$

پاسخ: طبق نکته‌ی فوق: $7+8+1=16$

محاسبه‌ی تعداد ترکیبات، در حالات مختلف:

(1) هر گاه n شیء متمایز داشته باشیم، تعداد ترکیبات (انتخابهای) n تایی این n شیء برابر است با:

$$c(n, n) = \binom{n}{n} = 1$$

مثال: به چند طریق می‌توان از میان 3 اتومبیل، هر سه را انتخاب کرد؟

پاسخ: 1 طریق

$$c(n, r) = \binom{n}{r}$$

(2) تعداد ترکیبات r تایی n شیء متمایز برابر است با:

(3) تعداد ترکیبات r تایی n شیء متمایز به طوری که شامل k شیء مشخص باشند برابر است با:

$$\binom{n-k}{r-k}, \quad (k \leq r \leq n)$$

مثال: مجموعه‌ی $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ چند زیر مجموعه‌ی 6 عضوی دارد که شامل 5, 7 باشند؟

پاسخ:

$$\binom{10-2}{6-2} = \binom{8}{4}$$

در واقع ابتدا 7,5 را کنار گذاشته، سپس 4 عضو باقیمانده را از بین 8 عضو دیگر انتخاب می‌کنیم، تعداد این انتخابها برابر است با:

$$\binom{8}{4}$$

(3) تعداد ترکیبات r تایی n شیء متمایز به طوری که فاقد k شیء مشخص باشند برابر است با:

$$\binom{n-k}{r}, \quad (k \leq r \leq n)$$

مثال: به چند طریق می‌توان از میان 12 جایزه‌ی متمایز، 3 جایزه را انتخاب نمود، به طوری که یک جایزه‌ی مشخص، جزو جوایز منتخب نباشد؟

پاسخ: آن جایزه‌ی مشخص را کنار گذاشته و سپس 3 جایزه را از میان 11 جایزه‌ی دیگر انتخاب می‌کنیم، تعداد این انتخابها برابر است با:

$$\binom{12-1}{3} = \binom{11}{3}$$

تست: چند تا از زیر مجموعه‌های 5 عضوی مجموعه‌ی $\{1,2,3,\dots,10\}$ ، فاقد عضوهای 3,2,1 می‌باشند؟

$$\binom{10}{7} - 3 \quad \binom{10}{5} - 2 \quad \binom{7}{5} - 3 \quad \binom{10}{7} - 4$$

پاسخ: آن 3 عضو را کنار گذاشته و 5 عضو را از میان 7 عضو دیگر انتخاب می‌کنیم، لذا داریم:

$$\binom{10-3}{5} = \binom{7}{5} = \binom{7}{2}$$

مثال: به چند طریق می‌توان از بین 10 نفر که دو نفر آنها با هم قهر هستند، یک گروه 5 نفری انتخاب کنیم به طوری که آن دو نفر با هم انتخاب نشوند؟

پاسخ: =تعداد حالات انتخاب 5 نفر از میان 10 نفر به طوری که آن دو نفر مشخص با هم انتخاب نشوند

تعداد حالات انتخاب 5 نفر از میان 10 نفر به طوری که آن دو نفر مشخص با هم انتخاب شوند - تعداد کل حالات انتخاب 5 نفر از میان 10 نفر =

$$= \binom{10}{5} - \binom{10-2}{5-2} = \binom{10}{5} - \binom{8}{3}$$

شمارش از طریق مدل‌های مهره و جعبه:

می‌خواهیم n شیء را درون k جعبه، توزیع کنیم بر حسب اینکه اشیاء و جعبه‌ها یکسان و یا متمایز باشند و اینکه در هر جعبه، گذاشتن شیء تکراری، آزاد باشد یا نباشد، (تکرار مجاز باشد یا نباشد)، چهار مدل متفاوت زیر را داریم:

الف) اشیاء متمایز و جعبه‌ها نیز متمایز:

در اینجا سه حالت زیر ممکن است رخ دهند

(مهم) (i) در هر جعبه هر تعداد شیء، بتواند قرار گیرد، حتی این امکان وجود داشته باشد که در برخی از جعبه‌ها، هیچ

شیء‌ای نباشد $\leftarrow k^n$

(ii) در هر جعبه، دقیقاً یک شیء، قرار گیرد $\leftarrow p(n, k)$

(iii) در هر جعبه، حداقل یک شیء، قرار گیرد $k! \times s(n, k) \leftarrow$

تذکر: تعداد افزایندهای k عضوی (k مجموعه‌ای) یک مجموعه‌ی n عضوی را با نماد $s(n, k)$ نمایش داده و این تعداد از دستور زیر به دست می‌آید:

$$s(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n$$

تذکر: هر گاه A یک مجموعه n عضوی باشد تعداد کل افزایندهای A برابر است با:

$$\sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n \right]$$

تذکر: در جدول زیر، مقادیر $s(n, k)$ برای $1 \leq n \leq 6$ ، $1 \leq k \leq 6$ محاسبه شده است.

$\rightarrow r$	۱	۲	۳	۴	۵	۶	تعداد کل افزایندها
$n \downarrow$							
1	1	0	0	0	0	0	1
2	1	1	0	0	0	0	2
3	1	3	1	0	0	0	5
4	1	7	6	1	0	0	15
5	1	15	25	10	1	0	52
6	1	31	90	65	15	1	203

$$\begin{cases} s(n, n) = 1 \\ s(n, 1) = 1 \\ r > n \Rightarrow s(n, r) = 0 \end{cases}$$

همچنین به خاطر داشته باشید که:

مثال: تعداد افزایندهای 3 عضوی یک مجموعه‌ی 4 عضوی را حساب کنید؟

$$\begin{aligned} s(n, k) &= \frac{1}{k!} \left(\sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n \right) \\ &= \frac{1}{3!} \left(\sum_{i=0}^3 (-1)^i \binom{3}{i} (3-i)^4 \right) \\ &= \frac{1}{6} (3^4 - (3 \times 16) + 3 - 0) \\ &= \frac{1}{2} (27 - 16 + 1) = \frac{12}{2} = 6 \end{aligned}$$

به عنوان مثال افزایندهای 3 عضوی مجموعه $A = \{a, b, c, d\}$ عبارتند از 6 افزاینده زیر:

$$\{\{a, b\}, \{c\}, \{d\}\}, \{(a, c), \{b\}, \{d\}\}, \{\{a, d\}, \{b\}, \{c\}\},$$

$$\{\{b, c\}, \{a\}, \{d\}\}, \{\{b, d\}, \{a\}, \{c\}\}, \{\{c, d\}, \{a\}, \{b\}\}$$

تست: به چند طریق می‌توان 10 جایزه‌ی متمایز را بین 6 دانش آموز چنان توزیع کرد که، هر دانش آموز مجاز باشد در صورت استحقاق، تا هر 6 جایزه را به خود اختصاص دهد؟

$$\frac{10!}{6!} \quad (4) \qquad 10^6 \quad (3) \qquad 6^{10} \quad (2) \qquad (10)_6 \quad (1)$$

پاسخ: طبق بند (i) نکته‌ی قبل، تعداد طرق مختلف برابر است با: 6^{10} ، در واقع جایزه‌ی اول را می‌توان به 6 طریق بین این 6 نفر تقسیم کرد، چون تکرار مجاز است، جایزه دوم را نیز به 6 طریق، ... و بالاخره جایزه‌ی دهم را نیز می‌توان به 6 طریق بین این 6 نفر توزیع کرد، لذا طبق اصل ضرب داریم:

$$6 \times 6 \times \dots \times 6 = 6^{10}$$

تست: به چند طریق می‌توان 6 مهره‌ی متمایز را درون 10 جعبه‌ی متمایز قرار داد، به طوریکه در هر جعبه، حداکثر یک مهره قرار گیرد؟ (سراسری ریاضی -80)

$$(1) \quad 6! \quad (2) \quad 10! \quad (3) \quad \frac{10!}{4!} \quad (4) \quad \frac{10!}{4!6!}$$

پاسخ: ابتدا باید از 10 جعبه، 6 جعبه را انتخاب کرد، (این کار به $\binom{10}{6}$ طریق صورت می‌پذیرد)، سپس 6 مهره را در این 6 جعبه قرار داد که چون جایگشت مؤثر می‌باشد، این کار به $6!$ طریق صورت می‌پذیرد لذا طبق اصل ضرب داریم:

$$\binom{10}{6} \times 6! = (10)_6 = \frac{10!}{4!}$$

ب) اشیاء متمایز و جعبه‌ها یکسان:

در اینجا نیز سه حالت زیر ممکن است رخ دهند.

(i) در هر جعبه، هر تعداد شیء بتواند قرار گیرد، حتی این امکان وجود داشته باشد که در برخی از جعبه‌ها هیچ شیء نباشد

$$s(n,1) + s(n,2) + \dots + s(n,k) \leftarrow$$

(ii) در هر جعبه، دقیقاً یک شیء، قرار گیرد $\leftarrow \binom{n}{k}$

(iii) در هر جعبه، حداکثر یک شیء، قرار گیرد $\leftarrow s(n,k)$

ج) اشیاء یکسان، جعبه‌ها یکسان

در این حالت بحث به تعداد افزاینده‌های عدد طبیعی n برمی‌گردد، بنابراین فرض می‌کنیم:

تعداد راههای نوشتن n به صورت مجموع چند عدد طبیعی $p(n) =$

$$1 = 1 \rightarrow p(1) = 1$$

$$2 = 1 + 1 = 2 \rightarrow p(2) = 2$$

$$3 = 1 + 2 = 1 + 1 + 1 = 3 \rightarrow p(3) = 3$$

$$4 = 1 + 3 = 2 + 2 = 1 + 1 + 2 = 1 + 1 + 1 + 1 = 4 \rightarrow p(4) = 5$$

در این صورت داریم:

✓ نکته‌ی مهم: تعداد راههای افزاینده‌های عدد طبیعی n به مجموع اعداد طبیعی، ضریب x^n در بسط زیر است:

$$(1 + x + x^2 + \dots)(1 + x^2 + x^4 + \dots)(1 + x^3 + x^6 + \dots) \dots$$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)\left(\frac{1}{1-x^2}\right)\left(\frac{1}{1-x^3}\right) \dots$$

که طبق فرمول حد مجموع تصاعدهای هندسی برابر است با:

$$|x| < 1 \Rightarrow 1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x}$$

✓ یادآوری: فرمول حد مجموع تصاعدهای هندسی:

مثال: به چند صورت می‌توان عدد 4 را به صورت مجموع چند عدد طبیعی نوشت؟

$$(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)(1 + x^2 + x^4)(1 + x^3)(1 + x^4)$$

$$(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)(1 + x^2 + x^4)(1 + x^3 + x^4)$$

$$(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)(1 + x^2 + x^3 + 2x^4)$$

دقت کنید که پس از ضرب، توانهای بزرگتر از 4 را حذف می‌کنیم و در پایان فقط جملات شامل x^4 را در نظر می‌گیریم:

$$x^4 \rightarrow (1)(2x^4) + x(x^3) + x^2(x^2) + x^4(1)$$

$$x^4 \rightarrow 2 + 1 + 1 + 1 = 5 \Rightarrow p(4) = 5$$

همانطور که قبلاً مشاهده کردیم، عدد 4 را به 5 صورت می‌توان به شکل مجموع اعداد طبیعی نوشت.

مثال: به چند طریق می‌توان عدد 5 را به صورت مجموع اعداد طبیعی نوشت؟

$$(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)(1+x^2+x^4)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)$$

$$= (1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)(1+x^2+x^4)(1+x^3)(1+x^4+x^5)$$

$$= (1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)(1+x^2+x^4)(1+x^3+x^4+x^5)$$

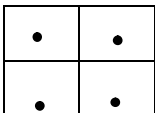
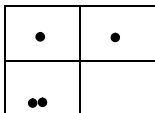
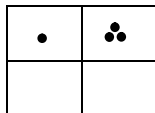
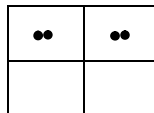
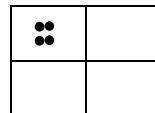
$$= (1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)(1+x^2+x^3+2x^4+2x^5)$$

$$x^5 \rightarrow (1)(2x^5) + x(2x^4) + x^2(x^3) + x^3(x^2) + x^5(1)$$

$$x^5 \rightarrow 2 + 2 + 1 + 1 + 1 = 7 \Rightarrow p(5) = 7$$

مثال: به چند طریق می‌توان 4 شیء یکسان را در 4 جعبه‌ی یکسان توزیع کرد؟ (در هر جعبه هر تعداد شیء بتواند قرار گیرد)

پاسخ: طریق $p(4) = 5$ ، توجه کنید:

				
$1+1+1+1=4$	$1+1+2=4$	$1+3=4$	$2+2=4$	$4=4$

درمورد قسمت (ج) به همین اندازه اکتفا می‌کنیم، چرا که توضیح بیشتر در این مورد، از حوصله‌ی این کتاب خارج است.

(د) اشیاء یکسان، جعبه‌ها متمایز

در این لیست نیز سه حالت زیر ممکن است رخ دهند.

(مهم) (i) در هر جعبه، هر تعداد شیء، بتواند قرار گیرد، حتی این امکان وجود داشته باشد که در برخی از جعبه‌ها، هیچ

$$\left(\begin{matrix} n+k-1 \\ n \end{matrix} \right) \leftarrow \text{یا} \left(\begin{matrix} n+k-1 \\ k-1 \end{matrix} \right)$$

شیء‌ای نباشد

(ii) در هر جعبه، دقیقاً یک شیء قرار گیرد $\leftarrow$ 1 حالت

$$\left(\begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right) \leftarrow \text{یا} \left(\begin{matrix} n-1 \\ n-k \end{matrix} \right)$$

(مهم) (iii) در هر جعبه، حداقل یک شیء قرار گیرد

در واقع در این حالت، ابتدا، در هر جعبه، یک شیء قرار داده، سپس $n-k$ شیء باقیمانده را طبق بند (i)، در k جعبه توزیع می‌کنیم:

$$\left(\begin{matrix} (n-k)+k-1 \\ k-1 \end{matrix} \right) = \left(\begin{matrix} n \\ k-1 \end{matrix} \right)$$

$$\left(\begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right) = \left(\begin{matrix} n-1 \\ n-k \end{matrix} \right) \text{ لذا } \left(\begin{matrix} n \\ r \end{matrix} \right) = \left(\begin{matrix} n \\ n-r \end{matrix} \right)$$

یادآوری:

تست: یک قنادی 5 نوع کیک می‌فروشد و از هر نوع به اندازه‌ی کافی دارد، به چند طریق می‌توان از او 9 کیک خرید؟

$$\left(\begin{matrix} 14 \\ 5 \end{matrix} \right) \quad (4)$$

$$\left(\begin{matrix} 9 \\ 5 \end{matrix} \right) \quad (3)$$

$$\left(\begin{matrix} 13 \\ 4 \end{matrix} \right) \quad (2)$$

$$(9)_5 \quad (1)$$

پاسخ: طبق بند ۱ نکته‌ی ج گزینه‌ی ۲ صحیح است زیرا:

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{9+5-1}{5-1} = \binom{13}{4}$$

مثال: ۲۰ کتاب مختلف در نظر بگیرید، که از هر کدام تعداد نامحدودی در دسترس است، تعداد حالاتی که می‌توان ۱۰ کتاب از بین این ۲۰ کتاب مختلف انتخاب کرد، به شرط آن که الف) تکرار مجاز باشد (یعنی بتوان هر ۱۰ کتاب را از یک نوع انتخاب کرد)

پاسخ:

$$\binom{10+20-1}{10} = \binom{29}{10}$$

ب) تکرار مجاز نباشد (۱۰ کتاب منتخب متفاوت باشند)

پاسخ:

$$\binom{20}{10}$$

در واقع هر گاه ۲۰ کتاب مختلف داشته باشیم و از هر نوع، دقیقاً ۱ کتاب داشته باشیم، بحث خودبه‌خود به حالت ترکیب معمولی (ترکیب بدون تکرار) بر می‌گردد.

مثال: به چند طریق می‌توان ۷ پرتقال را بین ۴ نفر تقسیم کرد به طوریکه ممکن باشد به بعضی‌ها، اصلاً پرتقالی نرسد؟ (دقت کنید که پرتقالها کاملاً یکسان بوده و فقط تعداد پرتقالهایی که به هر نفر می‌رسد مهم است)

✓ نکته‌ی مهم: روش تقسیم n شیء یکسان بین k نفر (روش تقسیم n مهره یکسان درون k جعبه) به طوریکه به هر نفر حداقل r شیء رسیده باشد. $(kr \leq n)$

برای این منظور ابتدا به هر نفر، r شیء می‌دهیم و سپس بقیه‌ی اشیاء (یعنی $n - kr$ شیء باقیمانده را) با استفاده از

فرمول $\binom{n+k-1}{k-1}$ بین k نفر به صورت زیر تقسیم می‌کنیم:

$$\binom{n - kr + k - 1}{k - 1}$$

تست: به چند طریق می‌توان هفده جایزه را بین سه نفر توزیع کرد بطوریکه به هر یک از آنها حداقل ۴ جایزه برسد؟

۴۲(۱) ۳۶(۲) ۲۱(۳) ۱۸(۴)

پاسخ:

$$\binom{17-3 \times 4+3-1}{3-1} = \binom{7}{2} = 21$$

در واقع چون به هر نفر باید حداقل ۴ جایزه برسد، لذا ابتدا به هر نفر ۴ جایزه داده، سپس ۵ جایزه باقیمانده را به

صورت زیر بین ۳ نفر تقسیم می‌کنیم.

$$\binom{5+3-1}{3-1} = \binom{7}{2}$$

✓ نکته‌ی مهم (حالت خاص نکته‌ی قبل): روش تقسیم n شیء یکسان بین k نفر به طوریکه به هر نفر حداقل یک شیء رسیده باشد.

برای این منظور طبق نکته‌ی قبل عمل می‌کنیم:

تست: به چند طریق می‌توان ۱۰ توپ یکسان را بین ۴ نفر چنان تقسیم کرد به طوریکه به هر نفر حداقل یک توپ برسد؟

۱۰(۱) ۲(۲) ۳(۳) ۴(۴)

$$\binom{10}{4} \quad \binom{13}{10} \quad \binom{9}{6} \quad \binom{14}{10}$$

$$\binom{10-1}{4-1} = \binom{9}{3} = \binom{9}{6}$$

پاسخ:

✓ نکته‌ی مهم: تعداد طرقی که می‌توان n شیء یکسان را درون k جعبه چنان قرار داد به طوریکه در جعبه اول n_1 شیء در جعبه‌ی دوم n_2 شیء و و در جعبه‌ی k ام، n_k شیء قرار گیرد ($n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$)، برابر است با:

$$\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \dots \times n_k!}$$

مثال: به چند طریق می‌توان 11 بستنی یکسان را بین 3 نفر تقسیم کرد به طوریکه به نفر اول 5 بستنی، به نفر دوم 2 بستنی و به نفر سوم، 4 بستنی برسد؟

$$\frac{11!}{5!2!4!}$$

پاسخ:

بسط دو جمله نیوتن $(a+b)^n$:

هر دو جمله‌ای به صورت $(a+b)^n$ را یک دو جمله‌ای نیوتن و چند جمله‌ای جواب آنرا (چند جمله‌ای هم ارز آن را) بسط آن دو جمله‌ای می‌گویند، در زیر دو جمله‌ای نیوتن به ازاء $n=0,1,2,3$ آمده است.

$$(a+b)^0 = 1$$

$$(a+b)^1 = a+b$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

اگر ضرایب این چند جمله‌ایها را به ترتیب زیر بنویسیم

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \end{array}$$

شکلی شبیه یک مثلث حاصل می‌شود که مجموع هر دو عدد هر سطر، یکی از ضرایب سطر بعدی را می‌دهد و روی هر دو ساق، عدد ثابت 1 قرار دارد. به کمک مثلث فوق، اعداد واقع در سطر بعد و سطرهای بعدی (یعنی ضرایب $(a+b)^4$ ، $(a+b)^5$ و ...) به دست می‌آیند، دیدن ترتیب ضرایب بسط دو جمله‌ای نیوتن برای هر عدد طبیعی n

مشخص می‌شود، به عنوان مثال اعداد سطر پنجم عبارتند از: 1 4 6 4 1

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

و لذا

در حالت کلی داریم:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n}b^n$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

که در آن

مثال: با استفاده از فرمول کلی بسط دو جمله‌ای نیوتن، بسط $(a+b)^4$ را بیابید؟

$$(a+b)^4 = \binom{4}{0}a^4 + \binom{4}{1}a^3b + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}ab^3 + \binom{4}{4}b^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

✓ یادآوری:

$$\begin{cases} \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \\ \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n \\ \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \end{cases}$$

روش آسان محاسبه‌ی ضرایب بسط دو جمله‌ای نیوتن:

برای محاسبه‌ی ضرایب بسط دو جمله‌ای نیوتن از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

$$\text{ضریب هر جمله} = \frac{(\text{ضریب جمله‌ی ما قبل} \times \text{توان } a \text{ در جمله‌ی ما قبل})}{\text{تعداد جملات ما قبل}}$$

$$(a+b)^4 = a^4 + \frac{4 \times 1}{1}a^3b + \frac{3 \times 4}{2}a^2b^2 + \frac{2 \times 6}{3}ab^3 + b^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

مثال:

بسط دو جمله‌ای نیوتن دارای ویژگیهای مهم زیر است:

- (۱) تعداد جملات بسط برابر است با $n+1$ (یعنی یکی بیشتر از توان)
- (۲) چند جمله‌ای سمت راست بر حسب a, b از درجه‌ی n است.
- (۳) چند جمله‌ای سمت راست بر حسب a, b متقارن است (یعنی همانطور که a^2b داریم، ab^2 نیز داریم)
- (۴) چند جمله‌ای سمت راست، یک چند جمله‌ای همگن است، یعنی مجموع توانهای a, b در تمام جملات برابر n است.

تست: کدام جمله در بسط $(x+y)^{13}$ وجود ندارد؟

$$\begin{matrix} x^4y^9 & (۱) & xy^{12} & (۲) & x^5y^7 & (۳) & x^3y^{10} & (۴) \end{matrix}$$

پاسخ: طبق نکته‌ی ۴، گزینه‌ی ۳ صحیح است زیرا $13 \neq 7+5$

- (۵) توانهای a از چپ به راست نزولی و توانهای b از چپ به راست صعودی.
- (۶) در هر جمله در مقایسه با جمله‌ی قبل، یک واحد از توان a کم شده و یک واحد به توان b اضافه می‌شود.
- (۷) جمله‌هایی که از دو طرف به یک فاصله‌اند، ضرایب متساوی دارند.
- (۸) توان b ، همیشه یک واحد کمتر از مرتبه‌ی جمله (شماره‌ی جمله) در بسط است (یعنی توان b مثلاً در جمله‌ی سوم، برابر ۲ است)
- (۹) مجموع ضرایب بسط برابر است با 2^n (کافی است به جای a, b ، عدد ۱ را قرار دهیم تا مجموع ضرایب بسط به دست آیند).

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

یعنی:

تست: مجموع ضرایب بسط $(x+y)^4$ برابر است با:

$$16 \text{ (۱)} \quad 18 \text{ (۲)} \quad 20 \text{ (۳)} \quad 12 \text{ (۴)}$$

$$x=y=1 \Rightarrow (1+1)^4 = 2^4 = 16$$

پاسخ:

$$(x+y)^4 = 1x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + 1y^4$$

توجه کنید که:

$$\Rightarrow 1+4+6+4+1=16$$

(۱۰) هر گاه ضریب جمله p ام یعنی $\binom{n}{p-1}$ با ضریب جمله r ام یعنی $\binom{n}{r-1}$ برابر باشند، آنگاه

$$\binom{n}{r-1} = \binom{n}{p-1} \Rightarrow r-1+p-1=n \Rightarrow r+p=n+2$$

تست: اگر در بسط $(x+y)^n$ ، ضریب جمله n هفدهم با ضریب جمله n نهم برابر باشد، n کدام است؟

$$30 \text{ (۱)} \quad 22 \text{ (۲)} \quad 24 \text{ (۳)} \quad 26 \text{ (۴)}$$

$$17+9=n+2 \Rightarrow n=24$$

پاسخ:

(۱۱) جملات k ام و $(k+1)$ ام بسط از فرمولهای زیر محاسبه می‌شوند:

$$\text{جمله } k \text{ام} = \binom{n}{k-1} a^{n-(k-1)} b^{k-1}$$

$$\text{جمله } (k+1) \text{ام} = \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

تست: جمله $(3x+5y)^9$ ششم کدام است؟

$$1 \text{ (۱)} \quad \binom{9}{6} (3x)^3 (5y)^5 \text{ (۲)} \quad \binom{9}{5} (3x)^5 (5y)^4 \text{ (۳)} \quad \binom{9}{5} (3x)^4 (5y)^5 \text{ (۴)} \quad \binom{9}{6} (3x)^4 (5y)^5$$

$$\text{جمله ششم} = \binom{9}{6-1} (3x)^{9-(6-1)} (5y)^{6-1} = \binom{9}{5} (3x)^4 (5y)^5$$

پاسخ:

(۱۲) در بسط $(a-b)^n$ ، ضریب $a^{n-k} b^k$ برابر است با: $\binom{n}{k}$

$$\binom{8}{5} \quad \text{یا} \quad \binom{8}{3}$$

مثال: ضریب $x^3 y^5$ در بسط $(x+y)^8$ را بیابید؟

(۱۳) در بسط $(a-b)^n$ ، جملات یکی در میان مثبت و منفی هستند.

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$$

(۱۴) مجموع ضرایب بسط $(a-b)^n$ ، صفر است یعنی:

✓ تذکر مهم: برای اینکه با مطالب بیشتری در این زمینه آشنا شوید می‌توانید فصل اول از کتاب اندیشه‌ی برتر، تألیف مؤلف (انتشارات عابد) را ملاحظه نمایید.

✓ نکته‌ی بسیار بسیار مهم:

تعداد جوابهای صحیح نامنفی معادله‌ی سیاله $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ ، $(k \leq n)$ برابر است با:

$$\binom{n+k-1}{n} \quad \text{یا} \quad \binom{n+k-1}{k-1}$$

اثبات: در واقع برای یافتن تعداد جوابهای صحیح نامنفی معادله‌ی فوق، هر کدام از مجهولات را یک جعبه‌ی خالی فرض می‌کنیم، و عدد n در سمت راست معادله را به مثابه n مهره‌ی یکسان که باید در این k جعبه‌ی خالی تقسیم کنیم، در نظر می‌گیریم (البته امکان خالی بودن بعضی از جعبه‌ها وجود دارد). (چرا که ممکن است برخی از x_i ها، 0 باشند). لذا تعداد جوابهای صحیح نامنفی معادله‌ی فوق برابر است با تعداد طرق تقسیم n مهره‌ی یکسان درون k جعبه که از قبل می‌دانیم برابر است با:

$$\binom{n+k-1}{n} \quad \text{یا} \quad \binom{n+k-1}{k-1}$$

مثال: تعداد جوابهای صحیح نامنفی معادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 = 8$ را بیابید؟

$$\binom{8+3-1}{3-1} = \binom{10}{2} = \frac{10 \times 9}{2} = 45$$

پاسخ:

$$(2,2,4), (1,0,7), (8,0,0), (0,8,0), (0,0,8), \dots$$

تعدادی از این جوابها، عبارتند از:

✓ تذکر: هر معادله که تعداد مجهولاتش از تعداد معادلاتش بیشتر باشد را یک معادله‌ی سیاله‌ی می‌گویند. در واقع معادله‌ی $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ نیز با شرط $k > 1$ یک معادله‌ی k مجهولی درجه اول است که البته در اعداد حقیقی بیشمار جواب دارد، به عنوان مثال، معادله $x_1 + x_2 = 5$ که یک معادله سیاله‌ای درجه اول دو مجهولی است در اعداد حقیقی بیشمار جواب دارد. کافی است به یکی از متغیرها، مثلاً x_1 عدد حقیقی بدهیم و x_2 را حساب کنیم، تعدادی از این جوابها عبارتند از:

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right), (\sqrt{2}, 5 - \sqrt{2}), (-2, 7), (1, 4), (0, 5), \dots$$

همانطور که دیده می‌شود، برخی از جوابهای فوق صحیح نیستند و برخی دیگر با وجود اینکه صحیح‌اند، صحیح نامنفی نیستند، در واقع معادله‌ی فوق دارای $\binom{5+2-1}{2-1}$ یا $\binom{5+2-1}{5}$ جواب صحیح نامنفی است که برابر است با: $\binom{6}{1} = 6$. این شش جواب صحیح نامنفی عبارتند از:

$$(3,2), (2,3), (4,1), (1,4), (5,0), (0,5)$$

تست: معادله‌ی $x_1 + x_2 + \dots + x_r = n - r$ چند جواب صحیح غیرمنفی دارد؟ (آزاد جدید ۷۸)

$$\binom{n}{r-1} \quad (۱) \quad \binom{n}{r} \quad (۲) \quad \binom{n+1}{r} \quad (۳) \quad \binom{n-1}{r-1} \quad (۴)$$

$$\binom{(n-1)+r-1}{r-1} = \binom{n-1}{r-1}$$

پاسخ:

✓ نکته‌ی بسیار بسیار مهم: تعداد جوابهای طبیعی (صحیح مثبت نه صفر) معادله‌ی $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ ، برابر است با:

$$\binom{n-1}{k-1}$$

اثبات: در این حالت هر یک از مجهولات را یک جعبه خالی فرض می‌کنیم سپس باید n مهره یکسان را چنان بین این k جعبه تقسیم کنیم که در هر جعبه حداقل یک مهره قرار گیرد لذا تعداد طرق تقسیم طبق آنچه قبلاً گفته شد برابر است با:

$$\binom{n-1}{k-1}$$

مثال: معادله‌ی $x_1 + x_2 = 5$ ، چند جواب طبیعی دارد؟

پاسخ: $\binom{5-1}{2-1} = \binom{4}{1} = 4$ این 4 جواب طبیعی عبارتند از: $(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)$

✓ تذکر مهم: تعداد جوابهای طبیعی معادله‌ی $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ با شرط $k > n$ ، برابر صفر است.

مثال: معادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2$ چند جواب طبیعی دارد؟

پاسخ: این معادله جواب طبیعی ندارد، چرا که هر یک از مجهولات، حداقل 1 هستند و لذا جمعشان حداقل 5 می‌شود.

✓ نکته ی بسیار بسیار مهم: (تعمیم نکته‌ی قبل):

تعداد جوابهای صحیح معادله‌ی $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ با شرط $x_k \geq c_k, \dots, x_2 \geq c_2, x_1 \geq c_1$ برابر است با:

$$\binom{n - c_1 - c_2 - \dots - c_k + k - 1}{k - 1}$$

بالاخص تعداد جوابهای طبیعی معادله‌ی فوق $(x_k \geq 1, \dots, x_2 \geq 1, x_1 \geq 1)$ برابر است با:

$$\binom{n - 1 - 1 - \dots - 1 + k - 1}{k - 1} = \binom{n - k + k - 1}{k - 1} = \binom{n - 1}{k - 1}$$

اثبات: برای اثبات، موضوع را به حالت معمولی (حالت قبل) برمی‌گردانیم، توجه کنید:

$$x_1 \geq c_1 \Rightarrow y_1 = x_1 - c_1 \geq 0 \Rightarrow x_1 = y_1 + c_1, y_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq c_2 \Rightarrow y_2 = x_2 - c_2 \geq 0 \Rightarrow x_2 = y_2 + c_2, y_2 \geq 0$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$x_k \geq c_k \Rightarrow y_k = x_k - c_k \geq 0 \Rightarrow y_k = y_k + c_k, y_k \geq 0$$

توجه داشته باشید که با این حساب، y_i ها اعدادی صحیح نامنفی‌اند، با جایگذاری این مقادیر در معادله‌ی

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$$

$$(y_1 + c_1) + (y_2 + c_2) + \dots + (y_k + c_k) = n$$

$$\Rightarrow y_1 + y_2 + \dots + y_k = n - (c_1 + c_2 + \dots + c_k)$$

اما تعداد جوابهای صحیح معادله‌ی $x_1 + x_2 + \dots + x_k = c$ ، به شرط $x_i \geq c_i$ برابر است با تعداد جوابهای صحیح

نامنفی معادله‌ی اخیر که برابر است با:

$$\binom{n - (c_1 + c_2 + \dots + c_k) + k - 1}{k - 1}$$

و حکم ثابت است.

مثال: تعداد جوابهای صحیح معادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$ با شرط $x_1 > 5, x_2 > 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 4$ را بیابید؟

پاسخ: به دلیل اینکه فرمول فوق برای $x_i \geq c_i$ برقرار است، لذا ابتدا باید سه نامساوی $x_1 > 5, x_2 > 2, x_4 > 4$ را به

حالت بزرگتر یا مساوی تبدیل نموده و سپس از فرمول فوق استفاده کنیم:

$$\begin{cases} x_1 > 5 \Rightarrow x_1 \geq 6 \\ x_2 > 2 \Rightarrow x_2 \geq 3 \\ x_3 \geq 0 \Rightarrow x_3 \geq 0 \\ x_4 > 4 \Rightarrow x_4 \geq 5 \end{cases} \Rightarrow \binom{20 - 6 - 3 - 0 - 5 + 4 - 1}{4 - 1} = \binom{9}{3} = 84$$

تعدادی از این جوابها عبارتند از: $(6,4,0,8), (11,3,1,5), (6,3,0,1), \dots$

تعدادی از این جوابها عبارتند از:

راه حل تشریحی :

$$x_1 > 5 \Rightarrow x_1 \geq 6 \Rightarrow y_1 = x_1 - 6 \geq 0, x_1 = y_1 + 6$$

$$x_2 > 2 \Rightarrow x_2 \geq 3 \Rightarrow y_2 = x_2 - 3 \geq 0, x_2 = y_2 + 3$$

$$x_3 \geq 0 \Rightarrow x_3 \geq 0 \Rightarrow y_3 = x_3 \geq 0, x_3 = y_3$$

$$x_4 > 4 \Rightarrow x_4 \geq 5 \Rightarrow y_4 = x_4 - 5 \geq 0, x_4 = y_4 + 5$$

جایگذاری در معادله اصلی $\Rightarrow y_1 + 6 + y_2 + 3 + y_3 + y_4 + 5 = 20$

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 6 \Rightarrow \binom{6+4-1}{4-1} = \binom{9}{3} = 84$$

تست: معادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 = 10$ ، چند جواب صحیح با شرط $x_3 \geq 5, x_2 > 3, x_1 > 2$ دارد؟

0(۴

1(۳

5(۲

3(۱

پاسخ :

$$\begin{cases} x_1 > 2 \Rightarrow x_1 \geq 3 \\ x_2 > 3 \Rightarrow x_2 \geq 4 \\ x_3 \geq 5 \Rightarrow x_3 \geq 5 \end{cases} \Rightarrow \binom{10-3-4-5+3-1}{3-1} = \binom{0}{2} = 0$$

یعنی معادله‌ی فوق با شرایط داده شده، هیچ جوابی ندارد، البته این مطلب بسیار واضح است. چرا که حداقل x_1, x_2 است، حداقل x_2 است و حداقل x_3 که جمعشان $3+4+5=12$ می‌شود که از 10 بزرگتر است.

نکته‌ی بسیار بسیار مهم: تعداد جوابهای صحیح معادله‌ی $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ با شرط $x_i \geq p$ ($1 \leq i \leq k$) برابر است با:

$$\binom{n - kp + k - 1}{k - 1}$$

$$x_i \geq p \Rightarrow \begin{cases} x_1 \geq p \\ x_2 \geq p \\ \vdots \\ x_k \geq p \end{cases} \Rightarrow \binom{n - p - p - p - \dots - p + k - 1}{k - 1} = \binom{n - kp + k - 1}{k - 1}$$

اثبات:

تست: معادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 = 10$ ، چند جواب صحیح با شرط $x_i \geq 2$ ($i = 1, 2, 3$) دارد؟

8(۴

18(۳

12(۲

15(۱

$$\binom{10-3(2)+3-1}{3-1} = \binom{6}{2} = 15$$

پاسخ :

راه تشریحی:

$$x_1 \geq 2 \Rightarrow y_1 = x_1 - 2 \geq 0, x_1 = y_1 + 2$$

$$x_2 \geq 2 \Rightarrow y_2 = x_2 - 2 \geq 0, x_2 = y_2 + 2$$

$$x_3 \geq 2 \Rightarrow y_3 = x_3 - 2 \geq 0, x_3 = y_3 + 2$$

جایگذاری در معادله $\Rightarrow y_1 + 2 + y_2 + 2 + y_3 + 2 = 10$

$$y_1 + y_2 + y_3 = 4, y_i \geq 0$$

اما تعداد جوابهای صحیح معادله‌ی داده شده با شرط $x_i \geq 2$ برابر است با تعداد جوابهای صحیح نامنفی معادله‌ی اخیر

$$\binom{4+3-1}{3-1} = \binom{6}{2} = 15$$

که برابر است با:

تست: معادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 9$ چند جواب صحیح نامنفی با شرط $n_4 > 7$ دارد؟

$$3(1) \quad 5(2) \quad 1(3) \quad 2(4)$$

پاسخ:

$$\begin{cases} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \\ x_4 \geq 8 \\ x_5 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \binom{9-0-0-0-8-0+5-1}{5-1} = \binom{5}{4} = 5$$

این 5 جواب عبارتند از: $(1,0,0,8,0), (0,1,0,8,0), (0,0,1,8,0), (0,0,0,8,1), (0,0,0,9,0)$

مثال: تعداد جوابهای طبیعی معادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 = 14$ با شرط:

الف) $x_1 > 4$ (ب) $x_1, x_2 > 4$ (ج) $x_1, x_2, x_3 > 4$ بیابید؟

$$\begin{cases} x_1 \geq 5 \\ x_2 \geq 1 \\ x_3 \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \binom{14-5-1-1+3-1}{3-1} = \binom{9}{2} = 36 \quad \text{پاسخ الف-}$$

$$\begin{cases} x_1 \geq 5 \\ x_2 \geq 5 \\ x_3 \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \binom{14-5-5-1+3-1}{3-1} = \binom{5}{2} \quad \text{پاسخ ب-}$$

$$\begin{cases} x_1 \geq 5 \\ x_2 \geq 5 \\ x_3 \geq 5 \end{cases} \Rightarrow \binom{14-5-5-5+3-1}{3-1} = \binom{1}{2} = 0 \quad \text{پاسخ ج-}$$

در حالت آخر توجه داشته باشید که حداقل هر سه مجهول $x_1, x_2, x_3, 5$ است، لذا مجموعشان 15 می‌شود که از 14 بزرگتر است، بنابراین معادله با این شرط، هیچ جوابی ندارد.

تست: دستگاه $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7 \end{cases}$ ، چند جواب صحیح نامنفی دارد؟

$$60(1) \quad \binom{6}{2} \binom{11}{4} (2) \quad \binom{6}{2} + \binom{4}{1} (3) \quad \binom{18}{7} (4)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4 \rightarrow \text{تعداد جوابهای صحیح نامنفی} = \binom{4+3-1}{3-1} = \binom{6}{2} = 15 \quad \text{پاسخ:}$$

$$\text{تعداد جوابهای صحیح} = \binom{3+2-1}{2-1} = 4$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7 \Rightarrow 4 + x_4 + x_5 = 7 \Rightarrow x_4 + x_5 = 3 \rightarrow \text{نامنفی}$$

اما با توجه به اینکه جوابهای دستگاه، به صورت پنج تایی‌ها مرتب $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ متشکل از جوابهای هر دو معادله است لذا طبق اصل ضرب تعداد جوابهای صحیح نامنفی دستگاه برابر است با:

$$15 \times 4 = 60$$

نکته‌ی بسیار بسیار مهم: تعداد جوابهای صحیح و نامنفی نامعادله‌ی $x_1 + x_2 + \dots + x_k \leq n$ برابر است با تعداد

جوابهای صحیح و نامنفی معادله‌ی $x_1 + x_2 + \dots + x_k + y = n$ که برابر است با:

$$\binom{n+(k+1)-1}{k+1-1} = \binom{n+k}{k}$$

دقت کنید که تعداد مجهولات معادله‌ی اخیر برابر $k+1$ ، می‌باشد.

تست: تعداد جوابهای صحیح و نامنفی نامعادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 < 11$ برابر است با:

$$\binom{12}{3}^{(1)} \quad \binom{12}{2}^{(2)} \quad \binom{13}{4}^{(3)} \quad \binom{13}{10}^{(4)}$$

پاسخ:

$$x_1 + x_2 + x_3 < 11 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 \leq 10$$

$$\Rightarrow \binom{10+3}{3} = \binom{13}{3} = \binom{13}{10}$$

تست: معادله‌ی $x_1^3 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$ با شرط $x_i \in \mathbb{Z}$ و $x_i \geq 0$ ($i = 1, 2, 3, 4$) چند جواب دارد؟

$$\binom{7}{2} + \binom{8}{2}^{(1)} \quad \binom{7}{5} + \binom{9}{7}^{(2)} \quad \binom{8}{6} + \binom{9}{7}^{(3)} \quad 1 + \binom{7}{2} + \binom{8}{2}^{(4)}$$

پاسخ: چون طرف دوم معادله 7 می‌باشد و x_i ها نامنفی‌اند، لذا x_1 می‌تواند فقط 0 یا 1 باشد. زیرا اگر به عنوان مثال

$x_1 = 2$ باشد آنگاه $2^3 = 8$ می‌شود که از 7 بزرگتر است، لذا دو حالت زیر وجود دارد:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \Rightarrow 0 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 \Rightarrow x_2 + x_3 + x_4 = 7 \Rightarrow \binom{7+3-1}{3-1} = \binom{9}{2} \\ x_2 = 1 \Rightarrow 1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 \Rightarrow x_2 + x_3 + x_4 = 6 \Rightarrow \binom{6+3-1}{3-1} = \binom{8}{2} \end{cases}$$

$$\binom{9}{2} + \binom{8}{2} = \binom{9}{7} + \binom{8}{6}$$

لذا تعداد جوابهای معادله با استفاده از اصل جمع برابر است با:

اصل شمول و عدم شمول:

فرض می‌کنیم A مجموعه‌ای دلخواه و متناهی باشد و p_1, p_2 دو ویژگی در مورد اعضای این دو مجموعه باشند، اکنون دو زیر مجموعه از مجموعه را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$A_1 = \{ x : x \in A \text{ و } p_1 \text{ را داشته باشد} \}$ و $A_2 = \{ x : x \in A \text{ و } p_2 \text{ را داشته باشد} \}$ در این صورت مجموعه اعضای A که ویژگی p_1 یا p_2 را دارند، برابر است با تعداد اعضای $A_1 \cup A_2$ و مجموعه‌ی اعضای A که نه ویژگی p_1 را دارند و نه ویژگی p_2 را، برابر است با تعداد اعضای مجموعه‌ی $(\overline{A_1}) \cap (\overline{A_2})$ متمم $\overline{A_2}, A_1$ متمم A_2 است)

بنابراین دو فرمول زیر برقرارند:

$$\begin{cases} |A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| & (1) \\ |\overline{A_1} \cap \overline{A_2}| = |\overline{A_1 \cup A_2}| = |A| - |A_1 \cup A_2| \end{cases}$$

توجه داشته باشید که فرمول (1)، همان فرمول $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ می‌باشد که در آن $|A_1|$ همان $n(A_1)$ یعنی تعداد اعضای A_1 است.

$$\begin{cases} \overline{A_1 \cup A_2} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \\ \overline{A_1 \cap A_2} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \end{cases} \quad \text{« قوانین دمورگان »}$$

یاد آوری:

فرمول (1)، توجیهی برای اصل شمول و عدم شمول است، چرا که در شمارش اعضای مجموعه‌ی $A_1 \cup A_2$ ، اول همه‌ی اعضای A_1, A_2 را می‌شماریم (شمول) ولی چون در این صورت اعضای $A_1 \cap A_2$ دوبار شمرده میشوند، آنها را از شمارش خود خارج می‌کنیم (عدم شمول) فرمول (1) را می‌توان برای سه مجموعه یا بیشتر نیز به صورت زیر تعمیم داد:

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup A_3| &= |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \\ |\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}| &= |A| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3| \end{aligned} \right. \\ & \left\{ \begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| &= |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_1 \cap A_4| - |A_2 \cap A_3| \\ & - |A_2 \cap A_4| - |A_3 \cap A_4| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + \\ & + |A_2 \cap A_3 \cap A_4| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| \\ |\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4}| &= |A| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

تست: چند عضو مجموعه‌ی $S = \{x \in \mathbb{N} : 1 \leq x \leq 200\}$ نه بر 2 بخش پذیرند و نه بر 5؟

80(۱) 60(۲) 40(۳) 20(۴)

پاسخ : فرض می‌کنیم:

تعداد اعضای S که بر 2 بخش‌پذیرند $A_1 =$

تعداد اعضای S که بر 5 بخش‌پذیرند $A_2 =$

تعداد اعضای S که هم بر 2 و هم بر 5 (بر 10) بخش‌پذیرند $A_1 \cap A_2 =$

اکنون داریم:

$$|A_1| = \left\lfloor \frac{200}{2} \right\rfloor = 100$$

$$|A_2| = \left\lfloor \frac{200}{5} \right\rfloor = 40$$

$$|A_1 \cap A_2| = \left\lfloor \frac{200}{10} \right\rfloor = 20$$

$$\Rightarrow |A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| = 100 + 40 - 20 = 120$$

$$|\overline{A_1 \cup A_2}| = |S| - |A_1 \cup A_2| = 200 - 120 = 80$$

✓ یادآوری: تعداد اعداد طبیعی کوچکتر یا مساوی n که بر عدد طبیعی k بخش‌پذیرند برابر است با: $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$

✓ یادآوری: تعداد اعداد طبیعی بین دو عدد طبیعی n, m ($n > m$) که بر عدد طبیعی k بخش‌پذیرند برابر است با:

$$\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{m-1}{k} \right\rfloor$$

✓ یادآوری: دو عدد صحیح a, b را نسبت به هم اول (متباین) گوئیم هر گاه بزرگترین مقسوم علیه مشترکشان 1 باشد مانند (7 و 19) یا (8 و 15) و ...

تست: در یک کلاس 50 نفری، 24 نفر فوتبال و 31 نفر والیبال بازی می‌کنند و 3 نفر هم نه فوتبال بازی می‌کنند و نه والیبال، چند نفر هر دو بازی را انجام می‌دهند؟

11 (۱) 8(۲) 10(۳) 5 (۴)

پاسخ :

$$\begin{cases} |A_1| = 24 \\ |A_2| = 31 \end{cases} \Rightarrow |A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| = 47 = 24 + 31 - |A_1 \cap A_2|$$

$$|A_1 \cup A_2| = 50 - 3 = 47$$

$$|A_1 \cap A_2| = 55 - 47 = 8$$

مثال: چند عضو مجموعه‌ی $S = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$

الف) حداقل بر یکی از اعداد 2 یا 3 یا 5 بخشپذیرند؟

ب) بر هیچکدام از اعداد 2 و 3 و 5 بخشپذیر نیستند؟

پاسخ الف) فرض می‌کنیم:

مجموعه‌ی اعضای S از 2 بر 5 بخشپذیرند $A_1 =$

مجموعه‌ی اعضای S از 3 بر 5 بخشپذیرند $A_2 =$

مجموعه‌ی اعضای S از 5 بر 3 بخشپذیرند $A_3 =$

به عبارت دیگر بر 6 بخشپذیرند = مجموعه‌ی اعضای S از 2 و 3 بخشپذیرند $A_1 \cap A_2 =$

به عبارت دیگر بر 10 بخشپذیرند = مجموعه‌ی اعضای S از 2 و 5 بخشپذیرند $A_1 \cap A_3 =$

به عبارت دیگر بر 15 بخشپذیرند = مجموعه‌ی اعضای S از 3 و 5 بخشپذیرند $A_2 \cap A_3 =$

به عبارت دیگر بر 30 بخشپذیرند = مجموعه‌ی اعضای S از 2 و 3 و 5 بخشپذیرند $A_1 \cap A_2 \cap A_3 =$

بنابراین داریم:

$$|A_1| = \left\lfloor \frac{100}{2} \right\rfloor = 50$$

$$|A_2| = \left\lfloor \frac{100}{3} \right\rfloor = 33$$

$$|A_3| = \left\lfloor \frac{100}{5} \right\rfloor = 20$$

$$|A_1 \cap A_2| = \left\lfloor \frac{100}{6} \right\rfloor = 16$$

$$|A_1 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{100}{10} \right\rfloor = 10$$

$$|A_2 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{100}{15} \right\rfloor = 6$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{100}{30} \right\rfloor = 3$$

اکنون داریم:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

$$= 50 + 33 + 20 - 16 - 10 - 6 + 3 = 74$$

$$|\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}| = |S| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 100 - 74 = 26$$

این 26 عدد عبارتند از :

1-7-11-13-17-19-23-29-31-37-41-43-47-49-53-59-61-67-71-73-77-79-83-89-91-97

مثال: مطلوب تعداد شماره شناسنامه‌های پنج رقمی که در هر یک از آنها ارقام 1 و 3 و 7 حداقل یک بار ظاهر می‌شوند؟

تعداد کل اعداد پنج رقمی $|S| = 9 \times 10^4$

$$\begin{array}{ccccc} \square & \square & \square & \square & \square \\ 8 & 9 & 9 & 9 & 9 \end{array}$$

$|A_1| = 8 \times 9^4 \rightarrow$ تعداد اعضای S که رقم 1 در آنها اصلاً بکار نرفته است $A_1 =$

$$\begin{array}{ccccc} \square & \square & \square & \square & \square \\ 9 & 10 & 10 & 10 & 10 \end{array}$$

$|A_2| = 8 \times 9^4 \rightarrow$ تعداد اعضای S که رقم 3 در آنها اصلاً بکار نرفته است $A_2 =$

$|A_3| = 8 \times 9^4 \rightarrow$ تعداد اعضای S که رقم 7 در آنها اصلاً بکار نرفته است $A_3 =$

$|A_1 \cap A_2| = 7 \times 8^4 \rightarrow$ تعداد اعضای S که ارقام 1 و 3 اصلاً به کار نرفته است $A_1 \cap A_2 =$

$$\begin{array}{ccccc} \square & \square & \square & \square & \square \\ 7 & 8 & 8 & 8 & 8 \end{array}$$

$|A_1 \cap A_3| = 7 \times 8^4 \rightarrow$ تعداد اعضای S که ارقام 1 و 7 اصلاً به کار نرفته است $A_1 \cap A_3 =$

$|A_2 \cap A_3| = 7 \times 8^4 \rightarrow$ تعداد اعضای S که ارقام 3 و 7 اصلاً به کار نرفته است $A_2 \cap A_3 =$

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 6 \times 7^4 \rightarrow$ تعداد اعضای S که ارقام 1 و 3 و 7 اصلاً به کار نرفته است $A_1 \cap A_2 \cap A_3 =$

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = |S| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = 9 \times 10^4 - [3 \times (8 \times 9^4) - 3 \times (7 \times 8^4) + (6 \times 7^4)]$$

مثال: تعداد جوابهای صحیح معادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 = 4$ را بطوریکه $0 \leq x_i < 3$ ($i = 1, 2, 3$) بیابید؟

پاسخ: از اصل شمول و عدم شمول استفاده می‌کنیم، ابتدا کلیه‌ی جوابهای صحیح و نامنفی معادله را محاسبه می‌کنیم که

برابر است با: $\binom{4+3-1}{3-1} = \binom{6}{2} = 15$ ، سپس کلیه‌ی جوابهای خارج از محدوده‌ی $0 \leq x_i < 3$ یا $0 \leq x_i \leq 2$ را حساب

کرده و از آن کم کنیم، برای این منظور، قرار می‌دهیم:

$$I = \{1, 2, 3\} \quad \{ \text{جوابهایی از معادله که در آن } x_i \geq 3 \text{ باشد} \} = \{ \text{جوابهایی از معادله که در آن } x_i > 2 \text{ باشد} \}$$

به عنوان مثال برای محاسبه‌ی تعداد جوابهای موجود در A_1 (جوابهایی از معادله که در آنها فقط $x_1 > 2$ باشد) به

$$x_1 \geq 3 \Rightarrow y_1 = x_1 - 3 \geq 0, x_1 = y_1 + 3$$

صورت زیر عمل می‌کنیم:

با جایگذاری مقادیر $x_3 = y_3, x_2 = y_2, x_1 = y_1 + 3$ در معادله‌ی اصلی داریم:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 8 \Rightarrow y_1 + 3 + y_2 + y_3 = 8 \Rightarrow y_1 + y_2 + y_3 = 5$$

تعداد جوابهای صحیح و نامنفی معادله‌ی اخیر، برابر است با: $\binom{5+3-1}{3-1} = \binom{7}{2} = 21$ ، لذا $|A_1| = 21$ ، به همین ترتیب

$|A_2| = |A_3| = 3$ ، البته تعداد اعضای A_1 و همچنین A_2, A_3 را می‌توانستیم با توجه به آنچه قبلاً بیان کردیم به صورت

زیر نیز بیابیم:

$$|A_1| = \binom{4-3-0-0+3-1}{3-1} = \binom{3}{2} = 3$$

حال چون معادله نمی‌تواند دارای جوابی باشد که دو متغیر آن، بزرگتر از 2 (یا بزرگتر یا مساوی 3) باشند لذا:

$$|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3| = |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$$

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |S| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 15 - (3 + 3 + 3 - 0 - 0 - 0 + 0) = 6$$

این 6 جواب عبارتند از: $(0, 2, 2), (2, 0, 2), (2, 2, 0), (1, 2, 1), (1, 1, 2), (2, 1, 1)$

مثال: معادله‌ی $x_1 + x_2 = 10$ چند دسته جواب صحیح با شرط $0 \leq x_1 \leq 7$ و $2 \leq x_2 \leq 8$ دارد؟

پاسخ: فرض می‌کنیم: $s = \{ \text{جوابهایی از معادله به طوری که } x_2 \geq 2, x_1 \geq 0 \text{ باشد} \}$

$$|s| = \binom{10-0-2+2-1}{2-1} = \binom{9}{1} = 9$$

بنابراین:

همچنین فرض می‌کنیم:

$$A_1 = \{ \text{جوابهایی از معادله به طوریکه } 0 \leq x_1 \text{ و } x_2 > 8 \text{ باشند} \}$$

$$= \{ \text{جوابهای از معادله به طوریکه } 0 \leq x_1 \text{ , } x_2 \geq 9 \text{ باشند} \}$$

$$|A_1| = \binom{10-9-0+2-1}{2-1} = \binom{2}{1} = 2$$

همچنین فرض می‌کنیم:

$$A_2 = \{ \text{جوابهایی از معادله به طوریکه } 7 < x_1 \text{ و } x_2 \geq 1 \text{ باشند} \}$$

$$= \{ \text{جوابهای از معادله به طوریکه } 8 \leq x_1 \text{ , } x_2 \geq 2 \text{ باشند} \}$$

$$|A_2| = \binom{10-8-2+2-1}{2-1} = \binom{1}{1} = 1$$

$$A_1 \cap A_2 = \{ \text{جوابهای از معادله به طوریکه } 8 \leq x_1 \text{ , } x_2 \geq 9 \text{ باشند} \}$$

$$|A_1 \cap A_2| = \binom{10-8-9+2-1}{2-1} = \binom{-6}{1} = 0$$

$$\Rightarrow |\overline{A_1 \cup A_2}| = |S| - |A_1 \cup A_2| = 9 - (1 + 2 - 0) = 6$$

این 6 جواب عبارتند از:

$$(2,8), (3,7), (4,6), (5,5), (6,4), (7,3)$$

توجه کنید که (2و8) یک جواب معادله نیست، زیرا x_1 باید کوچکتر یا مساوی 7 باشد، همچنین (10و0) نیز یک جواب معادله نیست، زیرا x_2 باید کوچکتر یا مساوی 8 باشد.

مثال: تعداد جوابهای صحیح معادله $x_1 + x_2 + x_3 = 17$ را تحت شرایط $2 < x_i < 7$ ($i=1,2,3$) به دست آورید؟

پاسخ: (راه تشریحی):

$$2 < x_i < 7 \Rightarrow 3 \leq x_i \leq 6 \Rightarrow 3 - 3 \leq \underbrace{x_i - 3}_{y_i} \leq 6 - 3$$

$$0 \leq y_i \leq 3, \quad x_i = y_i + 3$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 17 \xrightarrow{\text{جایگذاری}} y_1 + 3 + y_2 + 3 + y_3 + 3 = 17$$

$$y_1 + y_2 + y_3 = 8, \quad 0 \leq y_i \leq 3$$

در این جا از اصل شمول و عدم شمول استفاده می‌کنیم، ابتدا تعداد جوابهای صحیح و نامنفی معادله را حساب می‌کنیم که برابر است با:

$$\text{سپس کلیه ی جوابهای خارج از محدوده ی } 0 \leq y_i \leq 3 \text{ را حساب نموده و از آن کم می‌کنیم، برای این کار قرار می‌دهیم:}$$

$$\binom{8+3-1}{3-1} = \binom{10}{2} = 45$$

می‌کنیم، برای این کار قرار می‌دهیم:

$$A_i = \{ \text{جوابهایی از معادله که در آنها } y_i \geq 4 \text{ است} \} \quad (i=1,2,3)$$

به عنوان مثال:

$$A_1 = \{ \text{جوابهای معادله که در آنها فقط } y_1 \geq 4 \text{ است} \} = \{ y_1 \geq 4, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0 \}$$

$$y_1 \geq 4 \Rightarrow z_1 = y_1 - 4 \geq 0 \Rightarrow z_1 \geq 0, y_1 = z_1 + 4$$

با جایگذار مقادیر $y_1 = z_1 + 4 \geq 0$ و $y_2 = z_2 \geq 0$ و $y_3 = z_3 \geq 0$ در معادله $y_1 + y_2 + y_3 = 8$ داریم:
 $Z_1 + 4 + z_2 + z_3 = 8 \Rightarrow z_1 + z_2 + z_3 = 4$

تعداد جوابهای صحیح و نامنفی معادله ی اخیر برابر است با:

$$\binom{4+3-1}{3-1} = \binom{6}{4} = 15$$

لذا داریم:

$$|A_1| = 15$$

به همین ترتیب:

$$|A_2| = |A_3| = 15$$

اکنون تعداد اعضای $A_1 \cap A_2$ ، یعنی جوابهایی از معادله $y_1 \geq 4$ ، $y_2 \geq 4$ را مستقیماً حساب می‌کنیم (البته در این حالت $x_3 \geq 0$ است)، داریم:

$$A_1 \cap A_2 = \{(4, 4, 0)\} \Rightarrow |A_1 \cap A_2| = 1$$

(البته تعداد اعضای $A_1 \cap A_2$ را می‌توانستیم به صورت $\binom{8-4-4-0+3+1}{3-1} = \binom{2}{2} = 1$ نیز بیابیم)

$$|A_1 \cap A_2| = |A_2 \cap A_3| = 1$$

به همین ترتیب:

واضح است که معادله، هیچ جوابی ندارد که در آن هر سه متغیر x_3, x_2, x_1 با هم بزرگتر یا مساوی باشند، بنابراین:

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$$

$$|\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}| = |S| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3|$$

$$= 45 - [(3 \times 15) - (3 \times 1) + 0] = 45 - 42 = 3$$

لذا داریم:

این سه جواب عبارتند از: $(3, 3, 2), (3, 2, 3), (2, 3, 3)$ ، بنابراین جوابهای معادله ی اصلی طبق فرمول $x_i = y_i + 5$ و $(i=1, 2, 3)$ عبارتند از:

$$(6, 6, 5), (6, 5, 6), (5, 6, 6)$$

مثال: تعداد جوابهای صحیح مثبت معادله ی $x_1 + x_2 + x_3 = 8$ را تحت شرایط $0 < x_3$ ، $4 \leq x_2 < 9$ ، $1 < x_1 \leq 3$ بیابید؟

$$\begin{cases} 1 < x_1 \leq 3 \Rightarrow 2 \leq x_1 \leq 3 \\ 4 \leq x_2 < 9 \Rightarrow 4 \leq x_2 \leq 8 \\ 0 < x_3 \Rightarrow 1 \leq x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq x_1 - 2 \leq 1 \\ 0 \leq x_2 - 4 \leq 4 \\ 0 \leq x_3 - 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 \leq y_1 \leq 1, & x_1 = y_1 + 2 \\ 0 \leq y_2 \leq 4, & x_2 = y_2 + 4 \\ 0 \leq y_3, & x_3 = y_3 + 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{جایگذاری}} y_1 + 2 + y_2 + 4 + y_3 + 1 = 8$$

$$\Rightarrow y_1 + y_2 + y_3 = 1 \Rightarrow |S| = \binom{1+3-1}{2-1} = \binom{3}{1} = 3$$

حال فرض می‌کنیم:

$$\{y_1, y_2, y_3 \text{ جوابهایی از معادله باشند به طوریکه}$$

$$y_1 \geq 2 \Rightarrow Z_1 = Y_1 - 2 \geq 0 \Rightarrow Z_1 \geq 0, y_1 = Z_1 + 2$$

جایگذاری $\rightarrow Z_1 + 2 + y_2 + y_3 = 1 \Rightarrow Z_1 + y_2 + y_3 = -1$ ندارد $|A_1| = 0$

$A_2 = \{ y_3, y_2, y_1 \}$ جوابهایی از معادله باشند به طوریکه $y_3 \geq 0, y_2 \geq 5, y_1 \geq 0$ باشند

$$y_2 \geq 5 \Rightarrow Z_2 = y_2 - 5 \geq 0 \Rightarrow Z_2 \geq 0, y_2 = Z_2 + 2$$

جایگذاری $\rightarrow y_1 + z_2 + 5 + y_3 = 1 \Rightarrow y_1 + Z_2 + y_3 = -4$ جواب صحیح نامنفی ندارد

$$\Rightarrow |A_2| = 0, |A_1| = |A_2| = 0 \Rightarrow |A_1 \cap A_2| = 0$$

$$\Rightarrow |\overline{A_1 \cup A_2}| = |S| - |A_1 \cup A_2| = 3 - (0 + 0 - 0) = 3$$

البته بدیهی بود که معادله‌ی $y_1 + y_2 + y_3 = 1$ ، با توجه به شرایط $\begin{cases} 0 \leq y_1 \leq 1 \\ 0 \leq y_2 \leq 4 \\ 0 \leq y_3 \end{cases}$ فقط دارای سه جواب بدیهی

$(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ می‌باشد، بنابراین با توجه به تغییر متغیرهای $x_3 = y_3 + 1, x_2 = y_2 + 4, x_1 = y_1 + 2$ جوابهای معادله‌ی اصلی عبارتند از:

$$\begin{cases} 2 \leq x_1 \leq 3 \\ 4 \leq x_2 \leq 8 \\ 1 \leq x_3 \end{cases}$$

روش دوم (روش کوتاهتر):

فرض می‌کنیم:

$A_1 = \{ \text{جوابهایی از معادله به طوریکه } 1 \leq x_3, 4 \leq x_2, 4 \leq x_1 \text{ باشند} \}$

$A_2 = \{ \text{جوابهایی از معادله به طوریکه } 1 \leq x_3, 9 \leq x_2, 2 \leq x_1 \text{ باشند} \}$

$$\Rightarrow |A_1| = \binom{8-4-4-1+3-1}{3-1} = 0$$

$$|A_2| = \binom{8-2-9-1+3-1}{3-1} = 0$$

$$|A_1 \cap A_2| = 0$$

$$|\overline{A_1 \cup A_2}| = |S| - |A_1 \cup A_2| = 3 - (0 + 0 - 0) = 3$$

تابع حسابی فی اویلر یا تابع حسابی اویلر:

تابع $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ را که در آن $\varphi(n)$ یا m عبارتست از تعداد اعداد طبیعی کوچکتر یا مساوی با n که نسبت به n اولند، $\varphi(n) = m$

تابع حسابی فی اویلر می‌نامند.

✓ قضیه: فرض کنید n عددی طبیعی بوده که برابر با حاصلضرب سه عدد اول متمایز به صورت زیر باشد:

$$n = p_1 p_2 p_3$$

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \left(1 - \frac{1}{p_3}\right)$$

در این صورت:

مثال: $\varphi(42)$ را حساب کرده، سپس کلیه‌ی اعداد کوچکتر یا مساوی 42 را که نسبت به 42 اولند بنویسید؟

$$42 = 2 \times 3 \times 7 \Rightarrow \varphi(42) = 42 \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{7}\right) = 12$$

پاسخ:

این 12 عدد که نسبت به 42 اولند عبارتند از:

$$1, 5, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 37, 41$$

✓ نکته‌ی بسیار بسیار مهم: در حالت کلی، اگر $n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_k^{\alpha_k}$ ، که در آن p_i ها اعدادی اول و α_i ها

$$q(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

اعدادی صحیح نامنفی اند داریم:

مثال: $\varphi(72)$ را حساب کنید؟

$$72 = 2^3 \times 3^2 \Rightarrow \varphi(72) = 72 \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 72 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = 24$$

✓ نکته‌ی مهم: هرگاه p عددی اول باشد، آن گاه $\varphi(p) = p - 1$

$$\varphi(p) = p \left(1 - \frac{1}{p}\right) = p - 1$$

اثبات:

$$\varphi(7) = 6$$

✓ نکته‌ی مهم: هرگاه $(m, n) = 1$ ، آنگاه $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$

$$\varphi(20) = \varphi(4 \times 5) = \varphi(4) \times \varphi(5) = 2 \times 4 = 8$$

مثال: $\varphi(20)$ را حساب کنید؟

✓ نکته‌ی مهم: هرگاه $n = pq$ و p و q دو عدد اول متمایز باشند، آنگاه طبق نکته‌ی قبل داریم:

$$\varphi(n) = \varphi(pq) = \varphi(p)\varphi(q) = (p-1)(q-1)$$

مثال: $\varphi(15)$ را حساب کنید؟

$$\varphi(15) = \varphi(3 \times 5) = \varphi(3) \times \varphi(5) = (3-1)(5-1) = 8$$

پاسخ:

به همین ترتیب:

✓ نکته‌ی مهم: هرگاه $n = pqr$ ، سه عدد اول متمایز باشند، آنگاه:

$$\varphi(n) = \varphi(pqr) = \varphi(p)\varphi(q)\varphi(r) = (p-1)(q-1)(r-1)$$

$$\varphi(42) = \varphi(2 \times 3 \times 7) = \varphi(2)\varphi(3)\varphi(7) = (2-1)(3-1)(7-1) = 12$$

مثال: $\varphi(42)$ را حساب کنید؟

تذکر: نکته‌ی فوق قابل تعمیم بوده و در حالت کلی نیز برقرار است.

✓ نکته‌ی مهم: هرگاه p عددی اول و n عددی طبیعی باشد، آنگاه:

$$\varphi(p^n) = p^n - p^{n-1}$$

مثال: $\varphi(9)$ را حساب کنید؟

$$\varphi(9) = \varphi(3^2) = 3^2 - 3^1 = 6$$

این 6 عدد عبارتند از:

$$\{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$$

مثال: $\varphi(625)$ را حساب کنید؟

$$\varphi(625) = \varphi(5^4) = 5^4 - 5^3 = 625 - 125 = 500$$

✓ نکته‌ی مهم: فرض کنید k نوع شاخه‌ی گل مختلف و به تعداد فراوان از هر نوع موجود است، تعداد حالات انتخاب n

شاخه‌ی گل از این k نوع گل، (که در آن تکرار نیز مجاز است، یعنی هر n شاخه‌ی گلی را می‌توان از یک نوع گل انتخاب

کرد) برابر است با تعداد جوابهای صحیح نامنفی معادله‌ی $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$

$$\binom{n+k-1}{n} \quad \text{یا} \quad \binom{n+k-1}{k-1}$$

که برابر است با:

اثبات: فرض کنیم x_1 شاخه‌ی گل از نوع اول، x_2 شاخه‌ی گل از نوع دوم و ... و بالاخره x_k شاخه‌ی گل از نوع k ام انتخاب

کنیم، بنابراین باید مجموع شاخه گلهای انتخاب شده، برابر n باشد، یعنی $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ ، $(x_i \geq 0)$ بنابراین

تعداد انتخابهای n شاخه‌ی گل از میان k نوع شاخه‌ی مختلف گل که در آن تکرار نیز مجاز است برابر است با تعداد

جوابهای صحیح نامنفی معادله‌ی قبل که برابر است با: $\binom{n+k-1}{k-1}$ یا $\binom{n+k-1}{n}$

تست: چند دسته‌ی سه‌تایی گل از 5 نوع گل مختلف می‌توان ساخت؟ (تکرار مجاز است) (سراسری-۸۰)

(۱) 24 (۲) 32 (۳) 35 (۴) 42

پاسخ: بایستی از 5 گلدان مختلف گل، سه شاخه برداریم، طبق فرمول $\binom{n+k-1}{k-1}$ مسأله حل می‌شود:

$$n = 3, k = 5 \Rightarrow N = \binom{3+5-1}{5-1} = \binom{7}{4} = 35$$

نتیجه‌گیری بسیار بسیار مهم:

چهار نکته‌ی زیر با یکدیگر همواره معادلند.

۱- تعداد طرق تقسیم n شیء یکسان در k جعبه‌ی متمایز، به طوریکه امکان خالی بودن بعضی از جعبه‌ها وجود داشته باشد، برابر است با:

۲- تعداد جوابهای صحیح نامنفی معادله‌ی $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ برابر است با: $\binom{n+k-1}{k-1}$ یا $\binom{n+k-1}{n}$

۳- تعداد جملات بسط $(a_1 + a_2 + \dots + a_k)^n$ برابر است با: $\binom{n+k-1}{k-1}$ یا $\binom{n+k-1}{n}$

۴- هرگاه k نوع گل (و از هر نوع به تعداد فراوان) موجود باشد، آنگاه تعداد روشهایی که با این k نوع گل می‌توان یک

دسته گل n تایی درست کرد برابر است با: $\binom{n+k-1}{k-1}$ یا $\binom{n+k-1}{n}$

بسط چند جمله‌ای (تعمیم بسط دوجمله‌ای)

قبلاً با بسط دو جمله‌ای نیوتن $(a+b)^n$ آشنا شدید، اکنون می‌خواهیم با بسط چند جمله‌ای یعنی بسطهایی نظیر

$$(a+b+c)^2, (a+b+c)^3, (a+b+c+d)^5, \dots \text{ و به طور کلی } (a_1+a_2+\dots+a_k)^n \text{ آشنا شویم.}$$

نکاتی راجع به بسط چند جمله‌ای $(a_1+a_2+\dots+a_k)^n$

(۱) فرمول کلی بسط فوق، عبارتست از:

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_k)^n = \sum_{n_1+n_2+\dots+n_k=n} \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} a_1^{n_1} a_2^{n_2} \dots a_k^{n_k}$$

که در آن $\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \dots \times n_k!}$ ، در واقع بسط فوق برابر است با مجموع تمام جملاتی نظیر

$$a_1^{n_1} a_2^{n_2} \dots a_k^{n_k}, \text{ که در آنها } n_1, n_2, \dots, n_k \text{ جوابهای صحیح نامنفی معادله‌ی } n_1+n_2+\dots+n_k=n \text{ می‌باشند.}$$

تبصره: بدیهی است که اگر در بسط فوق $a_k, \dots, a_4, a_3$ همگی صفر باشند، آنگاه داریم:

فرمول بسط دو جمله‌ای نیوتن $(a_1 + a_2)^n = \sum \frac{n!}{n_1! n_2!} a_1^{n_1} a_2^{n_2}$ ، که در آن $n_1 + n_2 = n$ و یا $(a_1 + a_2)^n = \sum \frac{n!}{n_1! (n - n_1)!} a_1^{n_1} a_2^{n - n_1}$ که این همان

معادله‌ی $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ که برابر است با:

نکته‌ی بسیار بسیار مهم: تعداد جملات متمایز بسط چند جمله‌ای مزبور عبارتست از تعداد جوابهای صحیح نامنفی

$$\binom{n+k-1}{n} \quad \text{یا} \quad \binom{n+k-1}{k-1}$$

مثال: تعداد جملات بسط $(a+b+c)^2$ عبارتست از:

$$\binom{2+3-1}{3-1} = \binom{4}{2} = 6$$

البته از قبل می‌دانیم: $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$ ، که مشاهده می‌شود تعداد جملات متمایز آن ۶ تا است.

نکته‌ی بسیار بسیار مهم: در بسط چند جمله‌ای $(a_1 + a_2 + \dots + a_k)^n$ ، ضریب جمله‌ی $a_1^{n_1} a_2^{n_2} \dots a_k^{n_k}$ برابر است با:

$$\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \dots \times n_k!}$$

تست: ضریب $x^2 y^3 z$ در بسط $(x+y+z)^6$ کدام است؟

18(ع

24(ر

6(ز

3(ا

$$\frac{6!}{2!3!1!} = \frac{6 \times 5 \times 4}{2} = 60$$

پاسخ:

نکته‌ی بسیار بسیار مهم: هر گاه $a_1^{n_1} a_2^{n_2} \dots a_k^{n_k}$ ، جمله‌ای از بسط چند جمله‌ای $(a_1 + a_2 + \dots + a_k)^n$ باشد. باید حتماً

داشته باشیم: $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$

تست: در بسط $(x+y+z)^{15}$ ، جمله‌ای به کدام صورت وجود ندارد؟

Dxyz¹³(عCx⁴y²z⁹(رBx³y⁸z⁵(زAx²y³z¹⁰(ا

پاسخ: گزینه‌ی ۲ صحیح است زیرا $3 + 8 + 8 \neq 15$

تست: تعداد جملات بسط $(a+b+c)^3$ عبارتست از:

12(ع

9(ر

10(ز

15(ا

$$(a+b+c)^3 = \sum_{n_1+n_2+n_3=3} \frac{3!}{n_1! n_2! n_3!} a^{n_1} b^{n_2} c^{n_3}$$

پاسخ:

تعداد جملات بسط برابر است با تعداد جوابهای صحیح نامنفی معادله‌ی $n_1 + n_2 + n_3 = 10$ که عبارتست از:

$$\binom{3+3-1}{3-1} = \binom{5}{2} = 10$$

دسته‌ی اول $\rightarrow (3,0,0), (0,3,0), (0,0,3)$

دسته‌ی دوم $\rightarrow (2,1,0), (2,0,1), (1,2,0), (0,2,1), (0,1,2), (1,0,2)$

دسته‌ی سوم $\rightarrow (1,1,1)$

در واقع، این ۱۰ جواب، تعداد افرازهای صحیح نامنفی عدد ۱۰ می‌باشند، اکنون داریم:

$$(a+b+c)^3 = \frac{3!}{3!0!0!} a^3 b^0 c^0 + \frac{3!}{0!3!0!} a^0 b^3 c^0 + \frac{3!}{0!0!3!} a^0 b^0 c^3 + \frac{3!}{2!1!0!} a^2 b^1 c^0 + \dots + \frac{3!}{1!1!1!} a^1 b^1 c^1$$

$$= a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 3cb^2 + 3ac^2 + 3bc^2 + 6abc$$

نکته‌ی بسیار بسیار مهم: برای محاسبه‌ی مجموع ضرایب عددی بسط $(a_1 + a_2 + \dots + a_k)^n$ ، کافی است به جای تمامی

$a_k, \dots, a_2, a_1$ عدد ۱ را قرار دهیم.

تست: مجموع ضرایب عددی بسط $(4a+b-3c)^{10}$ کدام است؟

$$512(1) \quad 1024(2) \quad 0(3) \quad -512(4)$$

پاسخ: کافی است به جای c, b, a عدد 1 را قرار دهیم لذا داریم:

$$3^{10} = 2^{10} = 1024$$

تست: اگر تعداد جملات بسط $(a+b+c+d)^n$ برابر 56 باشد، n کدام است؟

$$5(1) \quad 6(2) \quad 7(3) \quad 8(4)$$

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{n+4-1}{4-1} = 56 \Rightarrow \binom{n+3}{3} = 56$$

پاسخ:

$$\Rightarrow \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{6} = 56 \Rightarrow (n+3)(n+2)(n+1) = 8 \times 7 \times 6 \Rightarrow n+3 = 8 \Rightarrow n = 5$$

مثال: دو جمله‌ای $(a+b)^n$ چند جمله دارد؟

$$\binom{n+2-1}{2-1} = \binom{n+1}{1} = n+1$$

پاسخ:

البته قبلاً در بسط دو جمله ای نیوتن نیز، دیدیم که تعداد جملات بسط فوق برابر $n+1$ جمله بود.

✓ یادآوری مهم:

تعداد کل توابع، از مجموعه‌ای m عضوی مانند A به مجموعه ای n عضوی مانند B (به شرط آنکه دامنه‌ی تابع، کلیه‌ی اعضای A باشد) برابر است با: n^m

مثال: تعداد کل توابع از مجموعه‌ای $A = \{1, 2\}$ (با دامنه‌ی A) به مجموعه‌ی $B = \{a, b, c\}$ را بیابید و همه‌ی این توابع را بنویسید؟

پاسخ: $3^2 = 9$ که عبارتند از:

$$f = \{(1, a), (2, b)\}, \quad g = \{(1, a), (2, c)\}, \quad h = \{(1, b), (2, a)\}, \quad I = \{(1, b), (2, c)\}$$

$$J = \{(1, c), (2, a)\}, \{(1, c), (2, b)\}, \{(1, a), (2, a)\}, \{(1, b), (2, b)\}, \{(1, c), (2, c)\}$$

✓ نکته‌ی بسیار بسیار مهم: تعداد کل توابع یک به یک از مجموعه‌ای m عضوی مانند A (با دامنه‌ی A) به مجموعه‌ی n

$$P(n, m) = (n)_m = \frac{n!}{(n-m)!} \quad \text{عضوی } (n > m) \text{ مانند } B \text{ برابر است با:}$$

تست: چند تابع یک به یک از مجموعه‌ی $A = \{1, 2, 3, 4\}$ به مجموعه‌ی $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ می‌توان تعریف کرد؟ (دامنه‌ی تابع کل مجموعه‌ی A می‌باشد)

$$7!(1) \quad \frac{7!}{3!}(2) \quad \frac{7!}{5!}(3) \quad \frac{7!}{2!}(4)$$

پاسخ:

$$p(7, 4) = \frac{7!}{3!}$$

در واقع چون تعداد اعضای مجموعه‌ی B ، 7 عضو می‌باشد، پس $f(1)$ ، به 7 طریق می‌تواند تعریف شود و چون قرار است تابع یک به یک باشد، پس از نسبت دادن $f(1)$ به یکی از عضوهای مجموعه‌ی B ، این عضو را حذف کرده و لذا $f(2)$ به 6 طریق، و به همین ترتیب $f(3)$ به 5 طریق و بالاخره $f(4)$ به 4 طریق می‌توانند تعریف شوند، بنابراین طبق

$$\text{اصل ضرب داریم: } 7 \times 6 \times 5 \times 4 = \frac{7!}{3!} \quad p(7, 3) \text{ که برابر است با}$$

✓ ۲) نکته‌ی مهم: هرگاه $n < m$ ، آنگاه تعداد توابع یک به یک برابر است با 0

✓ ۳) نکته‌ی مهم: هرگاه $n = m$ ، آنگاه تعداد توابع یک به یک، برابر است با $n!$ به عبارت دیگر، تعداد توابع یک به یک از مجموعه‌ای n عضوی مانند $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ به خودش برابر است با $n!$ (دامنه‌ی این توابع کل A می‌باشد).

تست: چند تابع از مجموعه‌ای 3 عضوی مانند A به مجموعه‌ای 4 عضوی مانند B می‌توان ساخت که یک به یک نباشند؟ دامنه‌ی این توابع کل A می‌باشند.

$$60(۱) \quad 64(۲) \quad 40(۳) \quad 52(۴)$$

پاسخ: تعداد توابعی که یک به یک هستند - تعداد کل توابع = تعداد توابعی که یک به یک نیستند.

$$= 4^3 - p(4, 3) = 64 - 24 = 40$$

(۱) نکته‌ی بسیار بسیار مهم: تعداد کل توابع پوشا از مجموعه‌ای m عضوی مانند $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$

(با دامنه‌ی A) به مجموعه‌ای n عضوی مانند $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ ($n \leq m$)، طبق اصل شمول و عدم شمول برابر است با:

تعداد توابعی که پوشا نیستند - تعداد کل توابع = تعداد توابع پوشا

$$\text{تعداد کل توابع پوشا} = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)^m = n^m - \binom{n}{1} (n-1)^m + \binom{n}{2} (n-2)^m + \dots + (-1)^{n-1} \binom{n}{n-1} 1^m$$

مثال: تعداد توابع پوشا از مجموعه‌ی $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ به مجموعه‌ی $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ را بیابید؟

$$\text{تعداد توابع پوشا} = 3^4 - \binom{3}{1} (3-1)^4 + \binom{3}{2} (3-2)^4$$

$$= 3^4 - 3 \times 2^4 + 3 \times 1^4 = 81 - 48 + 3 = 36$$

راه حل تشریحی:

در واقع برای محاسبه‌ی تعداد توابع پوشا از مجموعه‌ی A به مجموعه‌ی B ، ابتدا یادآوری می‌کنیم که پوشا بودن f ، بدان معناست که به هر عضو از مجموعه‌ی B ، لااقل یک عضو از مجموعه‌ی A نسبت داده شود، حال فرض می‌کنیم S ، مجموعه‌ی کل توابع از A در B باشد، در این صورت $|S| = 3^4$ ، اکنون فرض می‌کنیم:

$$\{f \in S : b_i \notin f(A)\}$$

نشود

$A_i = \{$ به عبارت دیگر b_i در بردشان نباشد.

به عبارت ساده‌تر:

$$A_1 = \{ \text{مجموعه‌ی همه‌ی توابعی که } b_1 \text{ در بردشان نباشد} \}$$

$$A_2 = \{ \text{مجموعه‌ی همه‌ی توابعی که } b_2 \text{ در بردشان نباشد} \}$$

$$A_3 = \{ \text{مجموعه‌ی همه‌ی توابعی که } b_3 \text{ در بردشان نباشد} \}$$

بنابراین چون به ازاء هر عضو از A ، فقط دو عضو از B را می‌توان نسبت داد، داریم:

$$|A_1| = |A_2| = |A_3| = 2^4$$

اکنون مجموعه‌های $A_1 \cap A_2$ ، $A_1 \cap A_3$ ، $A_2 \cap A_3$ را در نظر می‌گیریم، به عنوان مثال داریم:

$$A_1 \cap A_2 = \{ \text{مجموعه‌ی همه‌ی توابعی که } b_1 \text{ و } b_2 \text{ در بردشان نباشد} \}$$

بنابراین چون به ازاء هر عضو از A ، فقط یک عضو از B را می‌توان نسبت داد، داریم:

$$|A_1 \cap A_2| = 1$$

به همین ترتیب و بالاخره $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ مجموعه‌ی همه‌ی توابعی است که در آنها b_1 ، b_2 و b_3 در بردشان نباشد واضح است

$$\text{که: } |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$$

اکنون طبق اصل شمول و عدم شمول داریم:

$$\begin{aligned} |\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}| &= |S| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3| \\ &= |S| - (|A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|) \\ &= 3^4 - (3 \times 2^4 - 3 \times 1^4 + 0) = 81 - (48 - 3) = 36 \end{aligned}$$

✓ ۲) نکته‌ی مهم: تعداد توابع پوشا از مجموع m عضوی A به مجموعه‌ی n عضوی B ، به طوریکه $n < m$ باشد، برابر صفر است.

✓ ۳) نکته‌ی مهم: تعداد توابع پوشا از مجموعه‌ی m عضوی A به روی خودش، برابر است با:

تست: تعداد توابع پوشا از مجموعه ۳ عضوی A به روی خودش برابر است با:

$$\begin{matrix} 6(۱) & 27(۲) & 9(۳) & 3(۴) \end{matrix}$$

پاسخ : $3!$ در واقع داریم:

$$3! = 27 - (3 \times 2^3 - 3 \times 1^3 + 0) = 27 - 21 = 6 = 3!$$

✓ ۴) نکته‌ی مهم: تعداد توابع پوشا از مجموعه‌ی m عضوی A ($m \geq 2$) به مجموعه‌ی ۲ عضوی B برابر است با:

$$\begin{matrix} 25(۱) & 16(۲) & 32(۳) & 30(۴) \end{matrix}$$

پاسخ : $2^5 - 2 = 30$ در واقع داریم:

$$\text{تعداد توابع پوشا از } A \text{ به } B = 2^5 \left(\binom{2}{1} (2-1)^5 - \binom{2}{2} (2-2)^5 \right) = 32 - (2 - 0) = 30$$

پریش‌ها (عدم انطباق‌ها)

در هر تبدیل از n شیء متمایز $a_1, a_2, \dots, a_n$ ، موضع A_m را موضع طبیعی a_i می‌گوییم، وقوع یک شیء را در موضع طبیعی آن یک انطباق و عدم وقوع آن شیء را در موضع طبیعی‌اش، یک عدم انطباق (پریش) می‌نامیم، تبدیلی که همه اشیاء در آن در غیر موضع طبیعی خود قرار گرفته باشند را یک عدم تطبیق می‌نامیم و تعداد عدم تطبیق‌های n شیء را با نام $D(n)$ نشان می‌دهیم.

مثال: به فرض $X = \{a, b, c, d\}$ و هر عضو این مجموعه به یک عدد صحیح مثبت نسبت داده شده باشد، مثلاً d و c و b و a به ترتیب به اعداد 1 و 2 و 3 و 4 نسبت داده شده باشند، بنابراین تبدیل $abdc$ ، یک پریش عدم انطباق نیست، زیرا a و b در وضعیت‌های اصلی (طبیعی) خود قرار گرفته‌اند اما تبدیل $badc$ یک پریش است.

✓ قضیه (مسئله‌ی عدم تطبیق): فرض کنید شیء متمایز باشند، تعداد تبدیلاتی که هیچ یک از اشیاء فوق در موضع طبیعی خود قرار نداشته باشند (عدم انطباق‌ها) از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$D(n) = n! \left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right]$$

به عنوان مثال: $D(4) = 0, D(2) = 1, D(3) = 2, D(4) = 9$

به چگونگی محاسبه‌ی $D(4)$ توجه کنید.

$$D(4) = 4! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \right) = 4! - 4! + 12 - 4 + 1 = 9$$

تست: ۵ کارت با اعداد 1 و 2 و 3 و 4 و 5 را به پشت قرار داده‌ایم، اگر فردی، تصادفاً بخواهد شماره‌های کارت‌ها را حدس بزند، تعداد حالاتی که هیچ کارتی را درست حدس نزنند چقدر است؟

$$\begin{matrix} 9(۱) & 11(۲) & 44(۳) & 45(۴) \end{matrix}$$

پاسخ :

$$D(5) = 5! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right) = 5! - 5! + 60 - 20 + 5 - 1 = 44$$

نکته‌ی مهم: تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز $a_1, a_2, \dots, a_n$ به طوریکه حداقل یک شیء در جای طبیعی خودش باشد، طبق اصل شمول و عدم شمول برابر است با:

$$|\overline{D(n)}| = |S| - |D(n)| \Rightarrow \overline{D(n)} = n! - D(n)$$

مثال: 4 گوی سبز و سفید و سرخ و آبی را به چند طریق می‌توان در 4 جعبه به همین رنگها قرار داد به طوریکه، هیچ گویی

$$D(4) = 4! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\right) = 9$$

الف) در جعبه‌ی هم‌رنگش قرار نگیرد؟

$$\overline{D(4)} = n! - D(n) = 4! - 9 = 24 - 9 = 15$$

ب) حداقل یک گوی در جعبه‌ی هم‌رنگش قرار گیرد؟

که به تدبیر تشویق خمار آخر شد
گفت هوشیاری بیار تو که مرا هوشیار نیست
چندی با پای رفتم و چندی بسر شدم
جهان ، با این فراخی تنگت آید
تو چشم و او نگاه ناوک انداز

ساقیا لطف نمودی ، قدحت پر می باد
گفت باید حد زند هوشیار مردم ، مست را
دستم نداد قوت رفتن به پیش دوست
مکن کاری که بر پا سنگت آید
تو قدمی بینی و مجنون جلوه ناز

مفاهیم اولیه

آزمایش یا پدیده تصادفی :

آزمایشی است که قبل از وقوع آن ، نتیجه اش بر ما معلوم نباشد ولی کلیه نتایج ممکن آن مشخص باش مانند : پرتاب سکه ، پرتاب تاس ، تولد نوزاد ، انتخاب دو عدد از بازه $[0 و 2]$.

فضای نمونه ای :

کلیه نتایج ممکن یک آزمایش تصادفی را فضای نمونه ای آن آزمایش تصادفی می گوئیم و آن را با S نمایش می دهیم.
برآمد :

به هر عضو از فضای نمونه ای ، یک برآمد می گوئیم.

نکته : تعداد اعضای فضای نمونه ای یک آزمایش تصادفی را با $n(S)$ یا با $|S|$ نمایش می دهیم و برای تعیین اعضای فضای نمونه ای معمولاً از اصل ضرب یا اصل شمارش استفاده می کنیم.
فضا های نمونه ای را به دو دسته زیر تقسیم می کنیم :

$\{1\}$ فضا های نمونه ای گسسته $\{1- \text{فضای نمونه ای گسسته متناهی} , 2- \text{فضای نمونه ای گسسته شمارنا متناهی}$

$\{2\}$ فضا های نمونه ای پیوسته

فضای نمونه ای گسسته و پیوسته :

اگر S مجموعه ای متناهی یا نا متناهی را دارا باشد ، آن را فضای نمونه ای گسسته می نامیم و اگر S مجموعه ای غیر شمارنا باشد (زیر مجموعه ای غیر شمارنا از $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{R}^2$ یا $\mathbb{R}^3$) ، آن را فضای نمونه ای پیوسته می گوئیم.
مثلاً پرتاب یک سکه تا جایی که پشت بیاید فضای نمونه ای گسسته نام دارد ولی انتخاب یک عدد از بازه $(0 و 1)$ فضای نمونه ای پیوسته نام دارد.

تعریف مجموعه شمارنا :

فرض کنید A یک مجموعه باشد ، A را شمارنا گوئیم هرگاه A متناهی باشد یا تابعی مانند $F : N \rightarrow A$ وجود داشته باشد به طوری که این تابع متناظر یک به یک باشد (یعنی همه یک به یک باشد هم پوش).

تعریف دیگر مجموعه شمارنا :

هر مجموعه ای که بتوان اعضای آن را شماره (برچسب) زد مجموعه شمارنا می گوئیم . مانند :

0	1	-1	2	-2	3	-3	...
$Z:$	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
	1	2	3	4	5	...	...

برچسب

2	4	6	8	10	...
$2N:$	↓	↓	↓	↓	↓
	1	2	3	4	5

تذکر : هر مجموعه شمارنا می تواند متناهی یا نا متناهی باشد ، به عبارت دیگر هر مجموعه شمارنا می تواند شمارنا متناهی یا شمارنا نامتناهی باشد.

تذکر : هر مجموعه متناهی ، شمارنا است.

فضای نمونه ای گسسته متناهی :

اکنون می خواهیم با فضای نمونه ای گسسته متناهی آزمایش تصادفی مختلف آشنا شویم.

۱- فضای نمونه ای پرتاب یک سکه یک بار

$$S = \{ر و پ\} \text{ و } |S| = 2$$

۲- فضای نمونه ای پرتاب یک سکه دو بار یا دو سکه با هم یک بار

$$S = \{(پ پ) و (پ ر) و (ر پ) و (ر ر)\} \quad |S| = 2^2 = 4$$

۳- فضای نمونه ای پرتاب یک سکه سه بار یا سه سکه یک بار

$$S = \{(ررر) و (ررپ) و (رپر) و (پرر) و (رپپ) و (پرپ) و (پرپ) و (پپپ)\}$$

$$|S| = 2^3 = 8$$

نکته : تعداد اعضای فضای نمونه ای پرتاب یک سکه n بار برابر است با :

$$|S| = 2^n$$

مثال : سکه ای سالم را 5 بار پرتاب می کنیم ، فضای نمونه ای این آزمایش تصادفی چند عضو دارد؟

$$|S| = 2^5 = 32, \quad S = \{(ررررر) و \dots و (ر پ پ پ پ) و (پ پ پ پ پ)\}$$

۴- فضای نمونه ای پرتاب یک تاس یک بار

$$S = \{1 و 2 و 3 و 4 و 5 و 6\} \text{ و } |S| = 6$$

۵- فضای نمونه ای پرتاب یک تاس دو بار یا دو تاس یک بار

$$S = \left\{ \begin{matrix} (1,1), & (1,2), & (1,3), & \dots, & (1,6) \\ (2,1), & (2,2), & (2,3), & \dots, & (2,6) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (6,1), & (6,2), & (6,3), & \dots, & (6,6) \end{matrix} \right\} \text{ و } |S| = 6^2 = 36$$

نکته : تعداد اعضای فضای نمونه ای پرتاب یک تاس n بار برابر است با :

$$|S| = 6^n$$

۶- فضای نمونه ای پرتاب یک سکه و یک تاس با هم :

$$S = \left\{ \begin{matrix} (پ 6) و \dots و (پ 2) و (پ 1) \\ (ر 6) و \dots و (ر 2) و (ر 1) \end{matrix} \right\} \quad |S| = 2 \times 6 = 12$$

سکه 2 حالت دارد ، تاس 6 حالت ، از (طبق اصل ضرب داریم) :

$$|S| = 2 \times 6 = 12$$

۷- فضای نمونه ای پرتاب دو سکه و یک تاس با هم :

$$S = \left\{ \begin{matrix} (پ پ 6), (پ پ 2), \dots, (پ پ 1) \\ (پ ر 6), (پ ر 2), \dots, (پ ر 1) \\ (ر ر 6), (ر ر 2), \dots, (ر ر 1) \\ (ر پ 6), (ر پ 2), \dots, (ر پ 1) \end{matrix} \right\}, \quad |S| = 2^2 \times 6 = 24$$

۸- فضای نمونه ای تولد یک نوزاد :

$$S = \{\text{پسر و دختر}\} \text{ و } |S| = 2$$

۹- فضای نمونه ای تولد دو نوزاد :

$$S = \{(دختر و دختر) و (پسر و دختر) و (دختر و پسر) و (پسر و پسر)\} \text{ و } |S| = 2^2 = 4$$

مثال : خانواده ای دارای سه فرزند است، فضای نمونه ای جنسیت فرزندان این خانواده را بنویسید؟

پاسخ : برای راحتی پسر را با پ و دختر را با د نمایش می دهیم؟

$$S = \{(د د د) و (د پ د) و (پ پ د) و (د د پ) و (پ د پ) و (د پ پ) و (پ پ پ)\}$$

$$|S| = 2^3 = 8$$

البته ممکن است فضای نمونه ای این مثال را برحسب تعداد فرزندان پسر به صورت زیر نوشت :

$$S = \{3 \text{ پسر و } 1 \text{ دختر و } 2 \text{ پسر و } 2 \text{ دختر و } 1 \text{ پسر و } 1 \text{ دختر و } 3 \text{ دختر و } 0 \text{ پسر}\}$$

اگر هیچ پسر با 0، 1 پسر و 2 دختر را با 1، 2 پسر و یک دختر را با 2 و بالاخره 3 پسر را با 3 نمایش دهیم، فضای نمونه ای به صورت زیر در می آید :

$$S = \{0 \text{ و } 1 \text{ و } 2 \text{ و } 3\}$$

۱۰- تاسی را پرتاب می کنیم اگر 6 ظاهر شود، بار دیگر تاس را پرتاب می کنیم و اگر غیر از 6 ظاهر شود سکه ای را دو بار پرتاب می کنیم فضای نمونه ای این آزمایش تصادفی، چند عضو دارد؟

$$S = \left\{ \begin{array}{l} \text{اگر تاس 6 بیاید} \leftarrow (6 \text{ و } 6) \text{ و } (6 \text{ و } 5) \text{ و } (6 \text{ و } 4) \text{ و } (6 \text{ و } 3) \text{ و } (6 \text{ و } 2) \text{ و } (6 \text{ و } 1) \\ \text{و } (ر ر و 5) \text{ و } (پ ر و 5) \text{ و } (ر پ و 5) \text{ و } (پ پ و 5) \\ \text{و } (ر ر و 4) \text{ و } (پ ر و 4) \text{ و } (ر پ و 4) \text{ و } (پ پ و 4) \\ \text{و } (ر ر و 3) \text{ و } (پ ر و 3) \text{ و } (ر پ و 3) \text{ و } (پ پ و 3) \\ \text{و } (ر ر و 2) \text{ و } (پ ر و 2) \text{ و } (ر پ و 2) \text{ و } (پ پ و 2) \\ \text{و } (ر ر و 1) \text{ و } (پ ر و 1) \text{ و } (ر پ و 1) \text{ و } (پ پ و 1) \end{array} \right\} \leftarrow \text{اگر تاس 6 نیاید}$$

لذا فضای نمونه ای این آزمایش تصادفی 26 عضو دارد.

۱۱- تعداد اعضای فضای نمونه ای انتخاب مهره ای (1 مهره) از درون یک کیسه که شامل 10 مهره یکسان به رنگ های سبز و زرد و آبی است.

$$|S| = \binom{10}{1} \quad \text{برابر است با :}$$

۱۲- فضای نمونه ای انتخاب 2 مهره با هم از درون یک کیسه که شامل 10 مهره یکسان به رنگ های سبز و زرد و آبی است برابر است با :

$$|S| = \binom{10}{2} = \frac{10 \times 9}{2} = 45$$

۱۳- تعداد فضای نمونه ای انتخاب 3 مهره با هم از درون یک کیسه که شامل 10 مهره یکسان به رنگ های سبز و زرد و آبی است برابر است با :

$$|S| = \binom{10}{3} = \frac{10!}{3!7!} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2} = 120$$

۱۴- فضای تعداد اعضای نمونه ای انتخاب اعداد از میان اعداد {9 و ... و 3 و 2 و 1} برابر است با :

$$\binom{9}{1} = 9$$

۱۵- تعداد اعضای فضای نمونه ای انتخاب 2 عدد با هم از میان اعداد {9 و ... و 3 و 2 و 1} برابر است با :

$$\binom{9}{2} = 36$$

۱۶- جعبه ای دارای ده کارت با شماره های 1 و 2 و 3 و ... و 10 است :

الف) دو کارت را متوالیاً (پشت سر هم) خارج می کنیم ، فضای نمونه ای این آزمایش را مشخص کرده و بگویید چند عضو دارد؟

پاسخ : انتخاب کارت اول به ده طریق صورت می پذیرد ، چون این کارت را به داخل جعبه برمی گردانیم لذا انتخاب کارت دوم هم به ده طریق صورت می پذیرد ، بنابراین طبق اصل ضرب داریم :

$$|S| = 10 \times 10 = 100$$

در واقع داریم :

$$S = \{(x, y) : x, y \in /N, 1 \leq x, y \leq 10\}$$

ب) دو کارت را متوالیاً بدون جای گذاری خارج می کنیم ، فضای نمونه ای این آزمایش را مشخص کرده و بگویید چند عضو دارد؟

پاسخ : در این حالت انتخاب کارت اول به ده طریق صورت می پذیرد ، چون این کارت را به داخل جعبه بر نمی گردانیم ، لذا انتخاب کارت دوم به 9 طریق صورت می پذیرد ، بنابراین طبق اصل ضرب داریم :

$$|S| = 10 \times 9 = 90$$

در واقع داریم :

$$S = \{(x, y) : x, y \in /N, x \neq y, 1 \leq x, y \leq 10\}$$

۱۷- سکه ای را آن قدر پرتاب می کنیم تا پشت ظاهر شود ، فضای نمونه ای این آزمایش را بنویسید؟

$$S = \{... \text{ و ش خ خ و ش خ و ش و ش}\}$$

این فضای نمونه ای شمارا نامتناهی است.

۱۸- فضای نمونه ای انتخاب یک عدد از میان اعداد طبیعی عبارت است از :

$$S = \{1, 2, 3, \dots\}$$

این فضا نیز شمارا نامتناهی است.

تذکر : در قسمت های بعدی با فضای نمونه ای پیوسته آشنا خواهیم شد.

پیشامد تصادفی :

هر زیر مجموعه از فضای نمونه ای S را یک پیشامد از آن فضای نمونه ای می گوئیم.

البته ممکن است بعضی از اعضای یک فضای نمونه ای دارای ویژگی مشترکی باشند که در این صورت اگر این اعضاء را با هم در نظر بگیریم ، مجموعه حاصل یک پیشامد خواهد بود ، مثلاً در پرتاب یک جفت تاس (که 36 پشت دارند) مجموعه $A = \{(4, 6), (6, 4), (5, 5)\}$ یک پیشامد نامیده می شود که ویژگی مشترک آنها این است که مجموع اعداد روش ، برابر 10 می باشد.

تست : فرض می کنیم $S = \{-1, 7, -5, 19, 2\}$ ، کدام مجموعه زیر ، یک پیشامد از این فضای نمونه ای است؟

$$(۱) \{-16 \text{ و } 2 \text{ و } 9\} \quad (۲) \{2 \text{ و } 17 \text{ و } -5 \text{ و } 19\}$$

$$(۳) \{2 \text{ و } -1 \text{ و } 27\} \quad (۴) \{-1 \text{ و } -5 \text{ و } 2\}$$

پاسخ : واضح است که گزینه 4 صحیح است ، زیرا فقط این گزینه است که زیر مجموعه ای از فضای نمونه ای است.

پیشامد نشدنی :

چون $\phi \subseteq S$ ، لذا ϕ یک پیشامد از فضای نمونه ای است ، این پیشامد را پیشامد نشدنی (ممتنع یا غیر ممکن) می نامیم.

پیشامد حتمی :

چون $S \subseteq S$ ، لذا S نیز یک پیشامد از فضای نمونه ای است ، این پیشامد را پیشامد حتمی (شدنی) می گوئیم.

مثال : در پرتاب یک تاس ، ظاهر شدن عدد 10 ، یک پیشامد نشدنی و ظاهر شدن عدد طبیعی و کوچکتر از 7 ، یک پیشامد حتمی است.

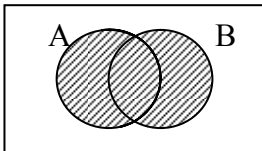
نکته : هر گاه S یک فضای نمونه ای باشد ، آنگاه تعداد پیشامد های این فضا عبارت است از : $2^{|S|}$

تذکر مهم : فضای نمونه ای و پیشامد ها ، از جنس مجموعه می باشند و لذا تمامی اعمال روی مجموعه ها ، از جمله $A \Delta B$ ، A' ، $A - B$ ، $A \cup B$ ، $A \cap B$... روی پیشامد ها نیز ، با معنی هستند.

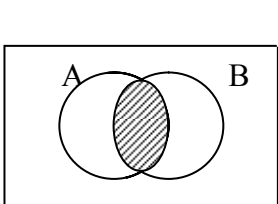
اعمال روی پیشامد ها

همان طور که دیدیم هر پیشامد یک مجموعه است ، پس باید تابع اعمال روی مجموعه ها باشد ، حال این اعمال را بررسی می کنیم :

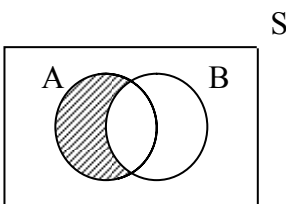
(۱) اجتماع دو پیشامد : اجتماع دو پیشامد A و B که آن را به صورت $A \cup B$ نمایش می دهیم ، عبارت است از همه اعضایی است که یا در A باشند یا در B یا در هر دو و لذا این پیشامد زمانی رخ می دهد که حداقل یکی از دو پیشامد A یا B اتفاق می افتند.



(۲) اشتراک دو پیشامد : اشتراک دو پیشامد A و B که آن را به صورت $A \cap B$ نمایش می دهیم ، عبارت است از همه اعضای مشترک دو مجموعه A و B و از این پیشامد زمانی رخ می دهد که هر دو پیشامد A یا B اتفاق می افتند.

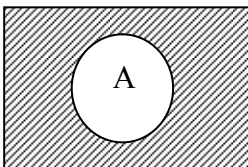


(۳) تفاضل دو پیشامد : تفاضل دو پیشامد A و B که آن را با $A - B$ نمایش می دهیم ، عبارت است از همه اعضایی که در A هستند ولی در B نیستند و از این پیشامد زمانی رخ می دهد که A اتفاق بیفتد ولی B اتفاق نیفتد.

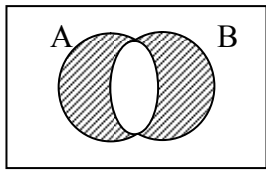


تذکر : $B - A$ نیز به طریق مشابه تعریف می شود.

(۴) متمم یک پیشامد : متمم پیشامد A که آن را با A' یا $\bar{A}$ نمایش می دهیم ، عبارت است از کلیه اعضایی از S که در A نیستند و از این پیشامد زمانی رخ می دهد که A رخ ندهد.



(۵) تفاضل متقارن دو پیشامد : تفاضل متقارن دو پیشامد A و B که آن را با $A \Delta B$ نمایش می دهیم ، عبارت است از همه اعضایی که در A یا در B ولی نه در هر دو هستند ، به عبارت دیگر ، همه اعضایی که یا فقط در A هستند و یا فقط در B و لذا این پیشامد زمانی اتفاق می افتد که یا فقط A رخ دهد یا فقط B .



$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

یا :

(۶) هیچ یک از پیشامد ها رخ ندهند . (نه A رخ دهد نه B).

$$\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{(A \cup B)} \quad , \quad \text{«قانون دمورگان»}$$

(۷) یا A رخ ندهد یا B رخ ندهد یا هر دو رخ ندهند (حداقل یکی از A و B رخ ندهند).

$$\bar{A} \cup \bar{B} = \overline{(A \cap B)} \quad , \quad \text{«قانون دمورگان»}$$

مثال : تاسی سالم را پرتاب می کنیم ، اگر A پیشامد آمدن عددی زوج و B پیشامد آمدن عددی اول باشد ، مطلوب است :
(الف) فضای نمونه ای این آزمایش تصادفی.

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

(ب) پیشامد $A \cap B$ = اعضایی که هم در A هستند و هم در B .

$$A = \{2, 4, 6\}$$

$$\Rightarrow A \cap B = \{2\}$$

$$B = \{2, 3, 5\}$$

(ج) پیشامد $A \cup B$ = اعضایی که یا در A هستند یا در B یا در هر دو گروه

$$A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

(د) پیشامد $A - B$ = اعضایی که در A هستند ولی در B نیستند .

$$A - B = \{4, 6\}$$

(ه) پیشامد $B - A$ = اعضایی که در B هستند ولی در A نیستند.

$$B - A = \{3, 5\}$$

(و) پیشامد $A \Delta B$ = اعضایی که در A یا در B هستند ولی نه در هر دو به عبارت دیگر اعضایی که فقط در A هستند و یا فقط در B .

$$\left\{ \begin{aligned} A \Delta B &= (A \cup B) - (A \cap B) = \{2, 3, 4, 5, 6\} - \{2\} = \{4, 6, 3, 5\} \\ A \Delta B &= (A - B) \cup (B - A) = \{4, 6\} \cup \{3, 5\} = \{4, 6, 3, 5\} \end{aligned} \right\}$$

یا

(ز) پیشامد $A' =$ اعضایی که در S هستند ولی در A نیستند.

$$A' = S - A = \{1, 3, 5\}$$

مثال : سکه ای را سه بار پرتاب می کنیم مطلوب است :

الف) پیشامد اینکه دقیقاً یک بار سکه پشت بیاید؟

$$A = \{(\text{پ ر ر}) \text{ و } (\text{ر پ ر}) \text{ و } (\text{ر ر پ})\}$$

ب) سکه حداقل دو بار پشت بیاید؟

$$B = \{(\text{پ پ پ}) \text{ و } (\text{پ پ ر}) \text{ و } (\text{پ ر پ}) \text{ و } (\text{ر پ پ})\}$$

مثال : تاسی سالم را دو بار پرتاب می کنیم مطلوب است :

الف) پیشامد آنکه اعداد رو شده یکسان باشند؟

$$A = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$$

ب) پیشامد آنکه مجموع اعداد رو شده، زوج باشد؟

(دومی فرد و اولی فرد) یا (دومی زوج و اولی زوج) = هر دو فرد یا هر دو زوج = مجموع زوج

$$= \begin{array}{cc} \text{حالت} & \text{حالت} \\ 3 \times 3 & + \quad 3 \times 3 = 18 \\ \Rightarrow B = \left\{ \begin{array}{cccccc} (2,2) & (2,4) & (2,6) & (1,1) & (1,3) & (1,5) \\ (4,2) & (4,4) & (4,6) & (3,1) & (3,3) & (3,5) \\ (6,2) & (6,4) & (6,6) & (5,1) & (5,3) & (5,5) \end{array} \right\} \end{array}$$

6 = حداقل یک (هر دو 6) یا (دقیقاً یک 6) = حداقل یک 6

ج) پیامد اینکه حداقل یک 6 بیاید؟

$$C = \left\{ (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6), (1,6), (2,6), (3,6), (4,6), (5,6) \right\}$$

د) پیشامد آنکه حاصل ضرب اعداد رو شده فرد باشد؟

حالت حالت

$$3 \times 3 = 9 = \text{هر دو فرد} = \text{حاصل ضرب فرد}$$

$$D = \left\{ \begin{array}{ccc} (1,1) & , & (1,3) & , & (1,5) \\ (3,1) & , & (3,3) & , & (3,5) \\ (5,1) & , & (5,3) & , & (5,5) \end{array} \right\}$$

مثال : در جعبه ای 4 مهره زرد ، 6 مهره سبز و 2 مهره قرمز وجود دارد ، از این جعبه 3 مهره با هم به طور تصادفی

بیرون می آوریم مطلوب است :

$$|S| = \binom{12}{3}$$

الف) تعداد اعضای فضای نمونه ای

ب) تعداد اعضای پیشامد «هر سه مهره زرد باشند»

$$\text{هر سه زرد} = \binom{4}{3}$$

ج) تعداد اعضای پیشامد «هر سه هم رنگ باشند»

هر سه سبز یا هر سه زرد = هر سه هم رنگ

$$\text{هر سه هم رنگ} = \binom{4}{3} + \binom{6}{3}$$

توجه کنید که چون فقط 2 مهره قرمز داریم ، لذا هر سه قرمز امکان ندارد.

(د) تعداد اعضای پیشامد «هر سه مهره غیر هم رنگ باشند»

1 قرمز و 1 سبز و 1 زرد = هر سه غیر هم رنگ

$$\text{هر سه غیر هم رنگ} = \binom{4}{1} \times \binom{6}{1} \times \binom{2}{1}$$

(ه) تعداد اعضای پیشامد «لااقل 2 مهره زرد باشند»

(هر سه زرد) یا (1 غیر زرد و 2 زرد) = لااقل 2 زرد

$$\text{لااقل 2 زرد} = \binom{4}{2} \binom{8}{1} + \binom{4}{3}$$

(و) تعداد اعضای پیشامد «حداکثر 2 مهره زرد باشند»

(هر سه غیر زرد) یا (2 غیر زرد و 1 زرد) یا (2 غیر زرد و 2 زرد) = حداکثر 2 مهره سبز

$$= \binom{4}{2} \binom{8}{1} + \binom{4}{1} \binom{8}{2} + \binom{8}{3}$$

مثال : سه نفر به نام های احمد ، علی و سعید در یک مسابقه شرکت می کنند ، جوایزی برای نفرات اول و دوم در نظر گرفته شده است ، هر یک از پیشامد های زیر را با مجموعه ای از زوج های مرتب معرفی کنید؟

(الف) احمد جایزه اول را ببرد؟

$$A = \{(\text{سعید و احمد}) \text{ و } (\text{علی و احمد})\}$$

(ب) علی جایزه دوم را ببرد؟

$$B = \{(\text{علی و سعید}) \text{ و } (\text{علی و احمد})\}$$

(ج) احمد و سعید جوایز را ببرند؟

$$C = \{(\text{احمد و سعید}) \text{ و } (\text{سعید و احمد})\}$$

مثال : سکه ای را آن قدر پرتاب می کنیم تا برای سومین بار پشت ظاهر شود ، مطلوب است تعداد اعضای پیشامد آنکه در پرتاب دهم ، به این منظور برسیم؟

پاسخ : یعنی سکه ای را ده بار پرتاب می کنیم و در پرتاب دهم ، سومین پشت ظاهر شده است ، پس در 9 پرتاب قبلی دو بار پشت ظاهر شده است که تعداد حالات ممکن برابر است با :

$$\binom{9}{2}$$

پشت

پرتاب دهم پرتاب نهم

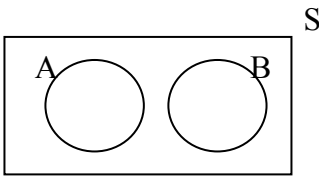
پرتاب دوم پرتاب اول

در این 9 پرتاب دو پشت ظاهر شده که تعداد این حالات برابر $\binom{9}{2}$ است.

پیشامد های ناسازگار :

دو پیشامد A و B از فضای نمونه ای S را ناسازگار گوئیم هرگاه هیچ عضو مشترکی نداشته باشند یعنی $A \cap B = \emptyset$ به عبارت دیگر دو پیشامد A و B نتوانند با هم رخ دهند ، مثلاً در پرتاب یک تاس ، دو پیشامد $A = \{5, 2\}$ و $B = \{1, 3, 6\}$

ناسازگارند.



احتمال هم شانس دو فضای گسسته :

فرض کنید S فضای نمونه ای یک آزمایش تصادفی باشد ، هرگاه شانس وقوع هر یک از برآمد های این فضای نمونه ای با یکدیگر برابر باشد ، در این صورت این برآمد ها را برآمد های هم شانس می گوییم و این فضای نمونه ای را ، فضای نمونه ای با برآمد های هم شانس می گوییم.

مثال : تاسی سالم را یک بار پرتاب می کنیم ، فضای نمونه ای این آزمایش تصادفی 6 عضو یا 6 برآمد دارد و شانس یا احتمال وقوع همه برآمد های این فضا برابر و مساوی $\frac{1}{6}$ است.

مثال : سکه ای سالم را یک بار پرتاب می کنیم ، فضای نمونه ای این آزمایش تصادفی 2 عضو یا 2 برآمد دارد و شانس یا احتمال وقوع همه برآمد های این فضا برابر و مساوی $\frac{1}{2}$ است.

احتمال وقوع یک پیشامد در فضای نمونه ای گسسته با برآمد های هم شانس :

فرض کنید S فضای نمونه ای آزمایشی تصادفی باشد که برآمد های آن هم شانس هستند ، اگر A یک پیشامد از این فضای نمونه ای باشد ، آنگاه احتمال پیشامد A که آن را با $P(A)$ نمایش می دهیم ، به صورت زیر تعریف می گردد :

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{تعداد حالات مطلوب}}{\text{کل تعداد حالات ممکن}}$$

مثال : سکه ای سالم را دو بار پرتاب می کنیم مطلوب است احتمال اینکه :

(الف) سکه دقیقاً یک بار پشت بیاید؟

$$S = \{(ر, ر), (ر, پ), (پ, ر), (پ, پ)\}$$

$$A = \{(ر, پ), (پ, ر)\} \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

(ب) سکه در هر دو بار پشت بیاید؟

$$B = \{(پ, پ)\} \Rightarrow P(B) = \frac{1}{4}$$

(ج) سکه حداقل یک بار پشت بیاید؟

$$C = \{(ر, پ), (پ, ر), (پ, پ)\} \Rightarrow P(C) = \frac{3}{4}$$

مثال : دو تاس سالم را با هم پرتاب می کنیم ، مطلوب احتمال اینکه :

(الف) اعداد رو شده هر دو تاس یکسان باشند؟

$$n(S) = 6^2 = 36$$

$$A = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

(ب) مجموع اعداد رو شده هر دو تاس 8 باشد؟

$$B = \{(5,3), (3,5), (4,4), (6,2), (2,6)\}$$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{5}{36}$$

ج) حاصل ضرب اعداد روش زوج باشد؟

حاصل ضرب زوج = A

(دومی زوج و اولی فرد) یا (دومی فرد و اولی زوج) یا (هر دو زوج) = حداقل یک زوج =

حالت حالت حالت حالت حالت

$$= 3 \times 3 + 3 \times 3 + 3 \times 3$$

$$n(A) = 27 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{27}{36} = \frac{3}{4}$$

یاد آوری :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{زوج} = \text{زوج} \times \text{زوج} \\ \text{زوج} = \text{زوج} \times \text{فرد} \\ \text{زوج} = \text{زوج} \times \text{فرد} \end{array} \right.$$

تست : n کیف مشابه داریم که 3 تای آنها نقره ای است ، اگر احتمال انتخاب 2 کیف نقره ای از میان این n کیف به

تصادف برابر با $\frac{1}{2}$ باشد ، n کدام است؟

6 (۴)

5 (۳)

4 (۲)

3 (۱)

$$P(\text{انتخاب 2 کیف نقره ای}) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{n}{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{3}{\frac{n(n-1)}{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow n(n-1) = 6$$

$$\Rightarrow n(n-1) = 3 \times 2 \Rightarrow n = 3$$

مثال : در کیسه ای ۶ مهره پسته ای و ۴ مهره نارنجی و ۲ مهره زرد وجود دارد ، سه مهره با هم به تصادف از این کیسه

بیرون می آوریم مطلوب است احتمال اینکه :

الف) هر سه مهره نارنجی باشد؟

$$A = \text{پیشامد هر سه مهره نارنجی} \Rightarrow P(A) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{12}{3}}$$

ب) دقیقاً ۲ مهره زرد و دیگری پسته ای باشد؟

$$B = \text{2 مهره زرد و دیگری پسته ای} \Rightarrow P(B) = \frac{\binom{2}{2} \binom{6}{1}}{\binom{12}{3}}$$

ج) دقیقاً 2 مهره زرد باشد؟

دیگری غیر زرد و 2 مهره زرد = دقیقاً 2 مهره زرد C

$$\Rightarrow P(C) = \frac{\binom{2}{2} \binom{10}{1}}{\binom{12}{3}}$$

$$6 + 4 = 10 = \text{نارنجی ها} + \text{پسته ای ها} = \text{غیر زرد ها}$$

د) هر مهره از یک رنگ باشد؟ (سه مهره غیر هم رنگ باشند)

$$D = \text{هر مهره از یک رنگ باشد} \Rightarrow P(D) = \frac{\binom{6}{1} \binom{4}{1} \binom{2}{1}}{\binom{12}{3}}$$

ه) حداقل 2 مهره نارنجی باشند؟

E = (هر سه نارنجی) یا (2 نارنجی) = بیشتر یا (2 نارنجی) = حداقل 2 نارنجی
 = (هر سه نارنجی) یا (1 غیر نارنجی و 2 نارنجی)

$$P(E) = \frac{\binom{4}{2} \binom{8}{1} + \binom{4}{3}}{\binom{12}{3}}$$

و) هر سه مهره هم رنگ باشند؟

F = هر سه نارنجی یا هر سه پسته ای = هر سه هم رنگ

$$\Rightarrow P(F) = \frac{\binom{6}{3} + \binom{4}{3}}{\binom{12}{3}}$$

مثال : در یک خانواده با دو فرزند ، احتمال اینکه بچه ها از دو جنس مخالف و یا هر دو دختر باشند ، چقدر است؟

S = { (د د) و (د پ) و (پ د) و (پ پ) }
 A = { (د د) و (د پ) و (پ د) }

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{4}$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{4}$$

مثال : اگر یک عدد 4 رقمی کمتر از 5000 به طور تصادفی با ترکیب ارقام 1، 3، 5، 7 و 9 (تکرار مجاز است) به وجود آید ، احتمال اینکه عدد ساخته شده بر 5 بخش پذیر باشد را پیدا کنید؟

پاسخ :

1 یا 3

5 طریق × 5 طریق × 5 طریق × 2 طریق

 $|S| = 2 \times 5^3 = 250$ = تعداد کل اعداد چهار رقمی کمتر از 5000 $\Rightarrow$ با ارقام 1, 3, 5, 7, 9

1 یا 3

5

1 طریق × 5 طریق × 5 طریق × 2 طریق

 $|A| = 2 \times 5^2 = 50$ = تعداد اعداد چهاررقمی مضرب 5 کمتر از 5000 با ارقام 1, 4, 5, 7, 9

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{50}{250} = \frac{1}{5}$$

تابع احتمال :

هرگاه S فضای نمونه ای یک آزمایش تصادفی باشد ، منظور از یک تابع احتمال ، تابعی است مانند P که در شرایط زیر صدق می کند :

$$P: S \rightarrow [0,1]$$

$$(1) \forall A \subset S: P(A) \geq 0$$

$$(2) P(S) = 1$$

(3) اگر A_1 و A_2 و A_3 و ... و A_n پیشامد های دو به دو ناسازگار باشند (یعنی اشتراک هر دو پیشامد تهی باشد) ، در این صورت :

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots + P(A_n)$$

تذکر ۱: به اصول 1 و 2 و 3 در تعریف تابع احتمال ، اصول موضوع کولوگروف می گویند.

تذکر ۲: ما قبلاً احتمال را روی فضای نمونه ای شاهی و هم شانس به صورت $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ تعریف کردیم ، به

سادگی دیده می شود این P یک تابع احتمال است ، یعنی در سه شرط فوق صدق می کند.

قوانین احتمال :

هرگاه S فضای نمونه ای و $A \subset S$ و $B \subset S$ و $C \subset S$ سه پیشامد از این فضای نمونه ای باشند در این صورت داریم :

$$1) P(\emptyset) = 0$$

$$2) A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$$

$$3) 0 \leq P(A) \leq 1$$

$$4) 0 \leq P(A \cap B) \leq P(A) \leq P(A \cup B) \leq 1$$

$$5) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$6) P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

$$7) A \text{ و } B \text{ ناسازگار} \Rightarrow A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B) = 0$$

$$8) A \text{ و } B \text{ ناسازگار} \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

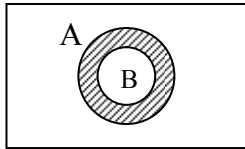
هرگاه مجموع احتمال دو پیشامد بیش از 1 باشد، آنگاه این دو پیشامد حتماً ناسازگارند یعنی :

$$9) P(A) + P(B) > 1 \Rightarrow A \text{ و } B \text{ ناسازگار}$$

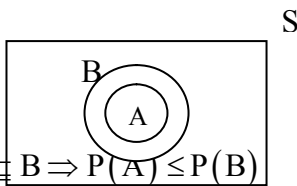
$$10) P(A') = 1 - P(A)$$

$$11) P(A - B) = P(A) - P(A \cap B), \quad (A \text{ و } B \text{ دو پیشامد دلخواه})$$

$$12) B \subset A \Rightarrow P(A - B) = P(A) - P(B) = P(\text{کوچیکه}) - P(\text{بزرگه})$$



$$13) A \subset B \Rightarrow A - B = \emptyset \Rightarrow P(A - B) = 0$$



$$14) A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$$

$$15) P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

$$16) A, B \text{ و } C \text{ دو به دو ناسازگار}$$

$$\Rightarrow A \cap B = \emptyset, A \cap C = \emptyset, B \cap C = \emptyset, A \cap B \cap C = \emptyset$$

$$\Rightarrow P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

$$17) P(A' \cap B') = P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B))$$

$$18) P(A' \cup B') = P(A \cap B)' = 1 - P(A \cap B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cup B))$$

$$19) P(A \cap B) \leq \min(P(A), P(B))$$

$$20) P(A \cup B) \geq \max(P(A), P(B))$$

$$21) 0 \leq P(A \cap B) \leq P(A), P(B) \leq P(A \cup B) \leq P(A) + P(B) \leq 1$$

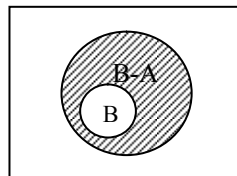
اکنون به اثبات برخی از قوانین فوق می پردازیم:

اثبات :

$$1) P(\emptyset) = P(\emptyset \cup \emptyset) \xrightarrow[\text{کولموگروف}]{\text{طبق اصل (۲)}} P(\emptyset) + P(\emptyset) \Rightarrow 0 = P(\emptyset)$$

S

$$2) A \subseteq B \Rightarrow \begin{cases} B = A \cup (B - A) \\ A \cap (B - A) = \emptyset \end{cases}$$

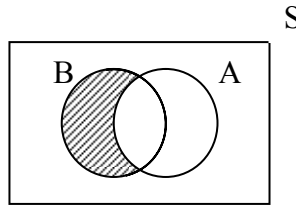


A و B-A ناسازگارند
طبق اصل (۲) کولموگروف

$$\Rightarrow P(B) = P(A) + P(B - A) \geq P(A) \Rightarrow P(B) \geq P(A)$$

دقت کنید که طبق اصل 1 کولموگروف : $P(B - A) \geq 0$

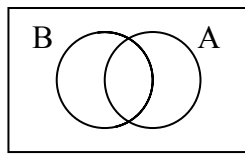
$$3) \emptyset \subseteq A \subseteq S \xrightarrow{\text{طبق قانون (2)}} P(\emptyset) \leq P(A) \leq P(S) \Rightarrow 0 \leq P(A) \leq 1$$



$$11) \begin{cases} A = (A - B) \cup (A \cap B) \\ (A - B) \cap (A \cap B) = \phi \end{cases}$$

$$\Rightarrow P(A) = P(A - B) + P(A \cap B) \Rightarrow P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$5) \begin{cases} A \cup B = A \cup (B - A) \\ A \cap (B - A) = \phi \end{cases}$$



$$\begin{aligned} & \xrightarrow{\text{طبق اصل (3)}} P(A \cup B) = P(A) + P(B - A) \xrightarrow{\text{طبق قانون (11)}} P(A) + (P(B) - P(A \cap B)) \\ & \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{aligned}$$

$$10) \begin{cases} S = A \cup A' \\ A \cap A' = \phi \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{طبق اصل (3)}} P(S) = P(A) + P(A') \xrightarrow{\text{طبق اصل (2)}} 1 = P(A) + P(A') \Rightarrow P(A') = 1 - P(A)$$

$$19) \begin{cases} A \cap B \subseteq A \\ A \cap B \subseteq B \end{cases} \xrightarrow{\text{طبق قانون (2)}} \begin{cases} P(A \cap B) \leq P(A) \\ P(A \cap B) \leq P(B) \end{cases} \Rightarrow P(A \cap B) \leq \min(P(A), P(B))$$

سعی کنید نکات ساده زیر را به خاطر بسپارید.

(۱) احتمال اینکه A رخ ندهد.

$$P(A') = 1 - P(A)$$

(۲) احتمال اینکه حداقل یکی از دو پیشامد A یا B رخ دهند.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

(۳) احتمال اینکه فقط A رخ دهد.

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

(۴) احتمال اینکه فقط یکی از دو پیشامد A یا B رخ دهد.

$$P(A \Delta B) = P(A - B) + P(B - A) = P(A \cup B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$$

(۵) احتمال اینکه هیچ یک از دو پیشامد A و B رخ ندهد. (به عبارت دیگر نه A رخ دهد و نه B رخ دهد)

$$P(A' \cap B') = P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B)$$

(۶) احتمال اینکه حداقل یکی از دو پیشامد A یا B رخ ندهد. (به عبارت دیگر یا A رخ ندهد یا B)

$$P(A' \cup B') = P(A \cap B)' = 1 - P(A \cap B)$$

مثال : عددی به تصادف از مجموعه $\{100 \text{ و } \dots \text{ و } 3 \text{ و } 2 \text{ و } 1\} = S$ انتخاب می کنیم ، احتمال اینکه :

الف) عدد انتخابی بر 3 بخش پذیر باشد ، اما بر 5 بخش پذیر نباشد؟

ب) عدد انتخابی نه بر 3 بخش پذیر باشد و نه بر 5 ؟

ج) عدد انتخابی بر 7 بخش پذیر باشد ولی بر 3 و 5 بخش پذیر نباشد؟

پاسخ : فرض می کنیم :

مضارب 3 : $A = \{x \in S : x = 3K, K \in Z/\}$

مضارب 5 : $B = \{x \in S : x = 5K', K' \in Z/\}$

$$n(A) = \left[\frac{100}{3} \right] = [33/\text{خورده ای}] = 33 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{33}{100}$$

$$n(B) = \left[\frac{100}{5} \right] = [20] = 20 \Rightarrow P(B) = \frac{n(b)}{n(s)} = \frac{20}{100}$$

مضارب 15 = مضارب 3 و 5 $A \cap B = \{x \in S : X = 15K'', K'' \in Z/\}$

$$n(A \cap B) = \left[\frac{100}{15} \right] = [6/\text{خورده ای}] = 6 \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{6}{100}$$

$$\text{الف) } P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{33}{100} - \frac{6}{100} = \frac{27}{100}$$

$$\begin{aligned} P(A' \cap B') &= P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) \\ \text{ب) } &= 1 - \left(\frac{33}{100} + \frac{20}{100} - \frac{6}{100} \right) = \frac{53}{100} \end{aligned}$$

ج) $C = \{x \in S : x = 7K'', K'' \in Z/\} = 7$ مضارب

$$n(C) = \left[\frac{100}{7} \right] = [14/\text{خورده ای}] = 14 \Rightarrow P(C) = \frac{14}{100}$$

$$\begin{aligned} P(C \cap A' \cap B') &= P\left(C \cap (A \cup B)'\right) = P(C - (A \cup B)) = P(C) - P(C \cap (A \cup B)) = \\ &= P(C) - P[(C \cap A) \cup (C \cap B)] = P(C) - (P(C \cap A) + P(C \cap B) - P(C \cap A \cap B)) \end{aligned}$$

مضارب 21 = مضارب 3 و 7 $C \cap A = \{x \in S : x = 21K_1, K_1 \in Z/\}$

$$n(C \cap A) = \left[\frac{100}{21} \right] = [4/\text{خورده ای}] = 4 \Rightarrow P(C \cap A) = \frac{4}{100}$$

مضارب 35 = مضارب 5 و 7 $C \cap B = \{x \in S : x = 35K_2, K_2 \in Z/\}$

$$n(C \cap B) = \left[\frac{100}{35} \right] = [2/\text{خورده ای}] = 2 \Rightarrow P(C \cap B) = \frac{2}{100}$$

مضارب 105 = مضارب 3 و 5 و 7 $C \cap A \cap B = \{x \in S : x = 105K_3, K_3 \in Z/\}$

$$n(C \cap A \cap B) = \left[\frac{100}{105} \right] = 0 \Rightarrow P(C \cap A \cap B) = 0$$

$$(1) P(C \cap A' \cap B') = \frac{14}{100} - \left(\frac{4}{100} + \frac{2}{100} - 0 \right) = \frac{8}{100}$$

مثال : عددی به تصادف از فضای نمونه ای $S = \{1 \text{ و } 2 \text{ و } 3 \text{ و } \dots \text{ و } 9\}$ انتخاب می کنیم ، احتمال آنکه عدد انتخاب شده زوج یا مضرب 3 باشد را بدست آورید؟ (کنکور ریاضی 70 - مرحله دوم)

$$A = \{2, 4, 6, 8\} = \text{عدد انتخاب شده زوج}$$

$$B = \{3, 6, 9\} = \text{عدد انتخاب شده مضرب 3}$$

$$A \cup B = \{2, 4, 6, 8, 3, 9\} \Rightarrow P(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \quad \text{راه اول :}$$

$$A \cap B = \{6\} \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{4}{9} + \frac{3}{9} - \frac{1}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \quad \text{راه دوم:}$$

مثال : یک عدد به طور تصادفی از میان اولین 10 عدد زوج مثبت انتخاب می کنیم ، احتمال آنکه عدد انتخاب شده:

الف) مضرب 3 نباشد. ب) مضرب 4 نباشد. ج) مضرب 3 و 4 نباشد؟

$$S = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$$

$$A = \{6, 12, 18\} = \text{مضرب 3 باشد (الف)}$$

$$P(A) = \frac{3}{10} \Rightarrow P(A') = 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$$

$$B = \{4, 8, 12, 16, 20\} \quad \text{ب)}$$

$$P(B) = \frac{5}{10} \Rightarrow P(B') = 1 - \frac{5}{10} = \frac{5}{10}$$

$$A' \cup B' = (A \cap B)' = \text{مضرب 4 نباشد یا مضرب 3 نباشد} = \text{مضرب 3 یا 4 نباشد (ج)}$$

$$(1) P(A \cap B)' = 1 - P(A \cap B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cup B))$$

$$A \cup B = \{6, 12, 18, 4, 8, 16, 20\} \Rightarrow P(A \cup B) = \frac{7}{10}$$

$$(1) \Rightarrow P(A \cap B)' = 1 - \left(\frac{3}{10} + \frac{5}{10} - \frac{7}{10} \right) = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$$

$$A' \cup B' = (A \cap B)' = \text{مضرب 4 نباشد یا مضرب 3 نباشد} = \text{مضرب 3 یا 4 نباشد.} \quad \text{دوم (ج)}$$

راه حل

$$A \cap B = \{12\} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{10}$$

$$P(A \cap B)' = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$$

مسلماً راه دوم بسیار کوتاهتر و جالب تر از راه اول است ، اما هدف ، یادگیری قوانین احتمال بود.

احتمال شرطی :

هرگاه S فضای نمونه ای یک آزمایش تصادفی و A و B دو پیشامد از آن باشند ، به طوریکه $P(B) > 0$ یا $P(B) \neq 0$ باشد ، زیرا $P(B)$ هیچ گاه منفی نمی شود ، در این صورت احتمال اینکه پیشامد A رخ دهد به شرط آنکه پیشامد B قبلاً رخ داده است را با نماد $P(A|B)$ نمایش داده و آن را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\text{احتمال اشتراکشان}}{\text{احتمال سمت راستی}}$$

تذکر : از آنجا که در دستور فوق ، $P(B)$ در مخرج کسر قرار می گیرد ، شرط $P(B) \neq 0$ ضروری است.

تذکر: تا قبل از احتمال شرسط ، برای پیشامدی چون A ، $P(A)$ را با استفاده از دستور $\frac{n(A)}{n(S)}$ محاسبه می کردیم و در محاسبه این احتمال ها از هیچ نوع اطلاعات اضافی استفاده نمی کردیم از این احتمال به طور مطلق محاسبه می شد ، اما در احتمال شرطی ، توجه داشته باشید که قبل از وقوع پیشامدی چون A ، پیشامدی چون B رخ داده است و لذا در محاسبه احتمال وقوع پیشامد A ، باید این مطلب را حتماً حتمی لحاظ کنیم.

به مثال های زیر توجه کنید.

مثال: تاسی سالم را یک بار پرتاب می کنیم اگر بدانیم عدد روش زوج است مطلوب است احتمال اینکه :

الف) عدد روش اول باشد؟ ب) عدد روش بزرگتر از 3 باشد؟

پاسخ: چون می دانیم عدد روش زوج است لذا فضای نمونه ای دیگر مجموعه $\{2, 3, 4, 5, 6\}$ نیست ، در این حالت فضای نمونه ای S به مجموعه کوچکتری به صورت $\{2, 4, 6\}$ = عدد روش زوج = B تحدید شده است (کوچک شده است) بنابراین با این فرض ، احتمال اینکه :

الف) عدد روش اول باشد برابر است با :

$$P(A|B) = \frac{1}{3} \quad , \quad A = \{2\} = \text{پیشامد عدد روش اول باشد}$$

ب) عدد روش بزرگتر از 3 باشد برابر است با :

$$P(C|B) = \frac{2}{3} \quad \text{و} \quad C = \{4, 6\} = \text{پیشامد عدد روش بزرگتر از 3 باشد}$$

نکته مهم: در فضا های نمونه ای گسسته ، دستور احتمال شرطی ، به صورت زیر ، ساده تر نیز می شود :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(S)}}{\frac{n(B)}{n(S)}} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

به این ترتیب می توان گفت ، در پیشامد تصادفی شرطی فوق ، فضای نمونه به مجموعه B تحدید شده است.

تذکر: گوییم مجموعه A به مجموعه B تحدید شده است هرگاه با حذف تعدادی از اعضای A ، مجموعه B به دست می آید ، عکس این عمل را توسیع مجموعه B به مجموعه A می گوییم.

تست: در پرتاب دو تاس با هم ، مشروط بر آن که مجموع دو عدد روش ، برابر 6 باشد ، احتمال آن که هر دو عدد روش زوج باشند ، کدام است ؟ (کنکور ریاضی ۷۴)

$$\frac{1}{2} \quad (۱) \quad \frac{2}{5} \quad (۲) \quad \frac{3}{5} \quad (۳) \quad \frac{5}{8} \quad (۴)$$

پاسخ: اگر A پیشامد ، آمدن هر دو عدد روش زوج و B پیشامد آمدن مجموع عدد های روش برابر 6 باشد ، آنگاه داریم :

$$B = \{(3, 3) \text{ و } (1, 5) \text{ و } (5, 1) \text{ و } (2, 4) \text{ و } (4, 2)\}$$

$$A = \{(2, 4) \text{ و } (4, 2)\}$$

$$A \cap B = \{(2, 4) \text{ و } (4, 2)\}$$

$$\Rightarrow P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{2}{5}$$

مثال : یک عدد طبیعی کوچکتر از 10 را به طور تصادفی انتخاب کرده ایم ، مطلوب تعیین اینکه عدد انتخاب شده زوج باشد ، به شرط آنکه بدانیم عدد انتخاب شده ، مضرب 3 است؟

$$B = \{3 \text{ و } 6 \text{ و } 9\}$$

$$A = \{6\}$$

$$A \cap B = \{6\}$$

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{1}{3}$$

مثال : دو کارت با هم و به تصادف از بین 9 کارت به شماره های 1 تا 9 انتخاب می کنیم ، اگر مجموع اعداد دو کارت زوج باشد ، احتمال آنکه هر دو رقم فرد باشند چیست؟

پاسخ :

$$B = \{ \text{هر دو فرد یا هر دو زوج} \} \Rightarrow n(B) = \binom{4}{2} + \binom{5}{2} ,$$

$$B = \{2 \text{ و } 4 \text{ و } 6 \text{ و } 8\}$$

$$A = \{ \text{هر دو فرد} \} \Rightarrow n(A) = \binom{5}{2} = \binom{5}{2} , \text{ فرد ها } = \{1 \text{ و } 3 \text{ و } 5 \text{ و } 7 \text{ و } 9\}$$

$$A \cap B = \{ \text{هر دو رقم فرد} \} \Rightarrow n(A \cap B) = \binom{5}{2}$$

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{4}{2} + \binom{5}{2}}$$

تست : در امتحانات یک کلاس ۲۰٪ دانش آموزان در ریاضی ، ۱۵٪ در فیزیک و ۱۰٪ در هر دو درس تجدید نشده اند (افتاده اند) ، احتمال آنکه دانش آموزی از این کلاس در درس فیزیک تجدید شده باشد ، مشروط بر آنکه در درس ریاضی نیز تجدید شده باشد ، کدام است؟ (کنکور ریاضی ۶۸)

$$0/5 \text{ (ع)}$$

$$0/3 \text{ (ز)}$$

$$0/2 \text{ (ب)}$$

$$0/1 \text{ (ا)}$$

پاسخ :

$$\begin{cases} A = \text{تجدید شدن در درس فیزیک} \\ B = \text{تجدید شدن در درس ریاضی} \\ A \cap B = \text{تجدید شدن در هر دو درس} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P(B) = \%15 \\ P(B) = \%20 \\ P(A \cap B) = \%10 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\%10}{\%20} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2} = 0/5$$

قانون ضرب احتمالات

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

داشتیم :

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$$

این قانون را قانون ضرب احتمال می گوییم ، به وسیله این قانون می توان احتمال رخداد هم زمان دو پیشامد را تعیین نمود.

مثال : در کیسه ای 4 مهره صورتی و 5 مهره بنفش وجود دارد ، از این کیسه دو مهره را به طور متوالیاً (پشت سر هم) و بدون جایگذاری خارج می کنیم ، مطلوب است احتمال آنکه هر دو مهره صورتی باشند؟

پاسخ :

$$\left\{ \begin{array}{l} P(\text{دومی صورتی و اولی صورتی}) = \\ P(\text{دومی صورتی باشد به شرط آنکه اولی نیز صورتی باشد}) \times P(\text{اولی صورتی}) \\ A = \text{اولی صورتی} \\ B = \text{دومی صورتی} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B) = \frac{4}{9} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{6}$$

نکته : قانون ضرب احتمال برای سه پیشامد یا بیشتر نیز ، قابل تعمیم است ، این قانون برای سه پیشامد A و B و C از فضای نمونه ای S با احتمال های مثبت به صورت زیر در می آید :

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|A \cap B)$$

تذکر : منظور از $P(C|A \cap B)$ ، احتمال وقوع پیشامد C به شرط وقوع هر دو پیشامد A و B است.

اثبات :

$$\text{طرف راست راه اول} = P(A) \cdot \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \cdot \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap A)} = P(A \cap B \cap C)$$

راه دوم:

$$P(A \cap B \cap C) = P\left(\left(\underbrace{A \cap B}_D\right) \cap C\right) =$$

$$P(D \cap C) = P(D) \times P(C|D) = P(A \cap B) \times P(C|A \cap B) = P(A) \times P(B|A) \times P(C|A \cap B)$$

مثال : در یک کیسه 5 مهره سفید و 6 مهره سیاه وجود دارد ، از این کیسه :

الف) 3 مهره با هم خارج می کنیم ، مطلوب است احتمال آنکه هر سه هم رنگ باشند؟

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \text{هر سه سفید} \Rightarrow P(A) = \frac{\binom{\text{سفیدها}}{3}}{\binom{\text{کل}}{3}} = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{11}{3}} \\ B = \text{هر سه سیاه} \Rightarrow P(B) = \frac{\binom{\text{سیاهها}}{3}}{\binom{\text{کل}}{3}} = \frac{\binom{6}{3}}{\binom{11}{3}} \end{array} \right.$$

$$P(\text{هر سه سفید یا هر سه سیاه}) = P = \frac{\binom{5}{3} + \binom{6}{3}}{\binom{11}{3}}$$

ب) 3 مهره متوالیاً بدون جایگذاری خارج می کنیم ، مطلوب احتمال آنکه هر سه هم رنگ باشند؟

$$P = (\text{هر سه هم رنگ}) =$$

$$P((\text{سومی سیاه و دومی سیاه و اولی سیاه}) \text{ یا } (\text{سومی سفید و دومی سفید و اولی سفید}))$$

$$C = \text{اولی سفید}$$

$$B = \text{دومی سفید} \Rightarrow P(\text{سومی سفید و دومی سفید و اولی سفید}) =$$

$$A = \text{سومی سفید}$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B|A) \times P(C|A \cap B) = \frac{5}{11} \times \frac{4}{10} \times \frac{3}{9}$$

به همین ترتیب :

$$P(\text{سومی سیاه و دومی سیاه و اولی سیاه}) = \frac{6}{11} \times \frac{5}{10} \times \frac{4}{9}$$

$$\Rightarrow P(\text{هر سه هم رنگ}) = \frac{5}{11} \times \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} + \frac{6}{11} \times \frac{5}{10} \times \frac{4}{9}$$

ج) 3 مهره متوالیاً با جایگذاری خارج می کنیم ، مطلوب است احتمال آنکه هر سه هم رنگ باشند؟

$$P(\text{هر سه هم رنگ}) =$$

$$P((\text{سومی سیاه و دومی سیاه و اولی سیاه}) \text{ یا } (\text{سومی سفید و دومی سفید و اولی سفید}))$$

$$= \frac{5}{11} \times \frac{5}{11} \times \frac{5}{11} + \frac{6}{11} \times \frac{6}{11} \times \frac{6}{11}$$

در واقع در حالت (ج) ، سفید بودن اولین مهره تأثیری در سفید بودن دومین مهره و سفید بودن اولین و دومین مهره تأثیری در سفید بودن سومین مهره ندارند ، این مطلب ما را به تعریف پیشامد های مستقل از هم ، وا می دارد. قبل از تعریف پیشامد های مستقل از هم ، به بیان مثال جالبی می پردازیم.

مثال : کیسه ای محتوی 5 مهره سفید و 3 مهره قرمز است ، هر بار یک مهره را انتخاب کرده و رنگ آن را می بینیم ، اگر این مهره قرمز باشد ، آن را به همراه دو مهره قرمز دیگر به کیسه بر می گردانیم و اگر سفید باشد ، آن را همراه با سه مهره سفید دیگر به کیسه برمی گردانیم ، احتمال آنکه در انتخاب پی در پی مهره ها ، رنگ سه مهره اول به تناوب تغییر کند ، چقدر است؟

پاسخ :

مهره سفید 5

مهره قرمز 3

جمعاً 8 مهره

$$\begin{aligned}
 P(A \cup B) &= P(A) + P(B) \\
 &= \frac{5}{5+3} \times \frac{3}{5+3+2} \times \frac{5+3}{5+3+2+3} + \frac{3}{3+5} \times \frac{5}{3+5+2} \times \frac{3+2}{3+5+2+3} \\
 &= \frac{5}{8} \times \frac{3}{11} \times \frac{8}{13} + \frac{3}{8} \times \frac{5}{10} \times \frac{5}{13} \\
 &= \frac{120}{8 \times 11 \times 13} + \frac{3 \times 1 \times 5}{8 \times 2 \times 13} = \frac{240 + 165}{16 \times 11 \times 13}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{405}{11 \times 13 \times 16}$$

استقلال دو پیشامد یا دو پیشامد مستقل :

دو پیشامد A و B از فضای نمونه ای S را مستقل از هم گوییم هرگاه وقوع یا عدم وقوع هر یک از آنها ، تأثیری در وقوع یا عدم وقوع دیگری نداشته باشد ، واضح است که در این حالت $P(A|B) = P(A)$ ، یعنی چه B رخ داده باشد ، چه ، رخ نداده باشد ، احتمال اینکه A رخ دهد در هر دو حالت مساوی است بنابراین در این حالت با توجه به دو فرمول زیر :

$$\begin{cases} P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B) \\ P(A|B) = P(A) \end{cases}$$

نتیجه می شود :

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

لذا می توان گفت :

دو پیشامد A و b از فضای نمونه ای S را مستقل از هم گوییم اگر و فقط اگر که داشته باشیم :

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

دو پیشامد وابسته (نا مستقل)

دو پیشامد A و B از فضای نمونه ای S را وابسته گوییم هرگاه مستقل نباشند به عبارت دیگر هرگاه :

$$P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$$

توجه مهم : دیدیم که هرگاه $A \cap B = \emptyset$ ، در این صورت داریم A و B را سازگار می گفتیم ، در حالی که هرگاه $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ و B را مستقل از هم و هرگاه $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$ و A و B را وابسته (نا مستقل) می گفتیم ، لذا ناسازگاری و مستقل بودن دو پیشامد ، ربطی به هم ندارند و دو موضوع کاملاً جدا از هم هستند ، خواهشاً این موضوع را به خاطر بسپارید و این دو را با یکدیگری طی نکنید.

$$\begin{cases} B \text{ ناسازگار } A \Rightarrow A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B) = 0 \\ A \text{ و } B \text{ مستقل از هم } \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \\ B \text{ ناسازگار } A \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow P(A \cap B) \neq S \\ A \text{ و } B \text{ وابسته } \Rightarrow P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B) \end{cases}$$

مثال : احتمال آنکه احمد در کنکور امسال قبول شود $0/7$ و احتمال آنکه ونوس در کنکور امسال قبول شود $0/8$ است مطلوب است احتمال آنکه :

A = قبولی احمد در کنکور امسال

B = قبولی ونوس در کنکور امسال

الف) هر دو در کنکور امسال قبول شوند؟

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0/7 \times 0/8 = 0/56$$

توجه داشته باشید که قبولی احمد در کنکور امسال و قبولی ونوس در کنکور امسال دو پیشامد مستقل از هم اند یعنی قبول و یا عدم قبول هر یک از این دو ، تأثیری در قبول یا عدم قبولی دیگری ندارد.

ب) حداقل یکی از آنها در کنکور امسال موفق شوند؟

این بدان معنا است که یا احمد قبول شود یا ونوس یا هر دو یعنی :

$$P(A \cup B) = P(A) \times P(B) - P(A \cap B) = 0/7 \times 0/8 - 0/56 = 0/94$$

ج) احمد قبول شود ولی ونوس قبول نشود؟

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = 0/7 - 0/56 = 0/14$$

(د) فقط یکی از این دو قبول شوند؟

$$P(A \Delta B) = P(A \cup B) - P(A \cap B) = 0/94 - 0/56 = 0/38$$

(ه) احمد قبول نشود یا ونوس قبول نشود؟

$$P(A' \cup B') = P(A \cap B)' = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0/56 = 0/44$$

تعریف سه پیشامد مستقل از هم :

سه پیشامد A و B و C را مستقل از هم گوئیم هرگاه اولاً دو به دو مستقل از هم باشند یعنی :

$$\begin{cases} P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \\ P(A \cap C) = P(A) \times P(C) \\ P(B \cap C) = P(B) \times P(C) \end{cases}$$

و ضمناً داشته باشیم :

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C)$$

تذکر مهم : دو به دو مستقل بودن سه پیشامد شرط لازم برای مستقل بودن سه پیشامد است ولی کافی نیست ، به مثال زیر توجه کنید:

مثال : فرض می کنیم $S = \{a, b, c, d\}$ ، $A = \{a, b\}$ ، $B = \{a, c\}$ و $C = \{b, d\}$ در این صورت داریم :

$$P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{2}, P(C) = \frac{1}{2}, \text{ ضمناً داریم :}$$

$$\begin{cases} A \cap B = \{a\} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{4} = P(A) \times P(B) \\ A \cap C = \{b\} \Rightarrow P(A \cap C) = \frac{1}{4} = P(A) \times P(C) \\ B \cap C = \{c\} \Rightarrow P(B \cap C) = \frac{1}{4} = P(B) \times P(C) \\ A \cap B \cap C = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B \cap C) = 0 \neq P(A) \times P(B) \times P(C) = \frac{1}{8} \end{cases}$$

بنابراین اگر سه پیشامد A و B و C ، دو به دو مستقل باشند ، لزومی ندارد که هر سه مستقل از هم باشند.

مثال : سه تفنگ مستقلاً ، به سمت هدفی نشانه گیری شده و شلیک می شوند ، احتمال برخورد تیر آنها به هدف ، به ترتیب $0/7$ ، $0/8$ و $0/9$ است ، مطلوب است احتمال این که :

(الف) تیر هر سه تفنگ به هدف اصابت کند.

(ب) تیر هیچ کدام به هدف اصابت نکند.

(ج) تنها تیر یک تفنگ به هدف اصابت کند.

$$P(A) = 0/7, P(B) = 0/8, P(C) = 0/9$$

پاسخ : فرض می کنیم : در این صورت داریم :

$$\text{الف) } P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C) = 0/7 \times 0/8 \times 0/9 = 0/504$$

$$\begin{aligned} \text{ب) } P(A' \cap B' \cap C') &= P(A') \times P(B') \times P(C') = (1 - 0/7)(1 - 0/8)(1 - 0/9) \\ &= 0/3 \times 0/2 \times 0/1 = 0/006 \end{aligned}$$

تعریف n پيشامد مستقل از هم :

نکاتی راجع به پیشامد های مستقل از هم :

$$\begin{cases} P(A \cap \phi) = P(A) \times P(\phi) \\ P(A \cap S) = P(A) \times P(S) \end{cases}$$

(۲) ϕ با خودش و S نیز با خودش ، مستقل اند یعنی :

$$\begin{cases} P(\phi \cap \phi) = P(\phi) \times P(\phi) \\ P(S \cap S) = P(S) \times P(S) \end{cases}$$

(۳) تنها پیشامد هایی که با خودشان مستقل اند، ϕ و S می باشند.

۴) تنها پیشامدی که یا خودش هم مستقل و هم ناسازگار است، پیشامد ϕ می باشد، زیرا:

$$\begin{cases} \phi \cap \phi = \phi \\ P(\phi \cap \phi) = P(\phi) \times P(\phi) \end{cases}$$

(ه) هرگاه A و B مستقل از هم باشند. آنگاه:

الف) A و B' نیز مستقل اند.

(ب) A' و B نیز مستقل اند.

ج) A' و B' نیز مستقل اند.

۶) هرگاه A و B و C سه پیشامد مستقل از هم باشند ، در این صورت :

(الف) A با $B \cup C$ نیز مستقل است.

(ب) A با $B \cap C$ نیز مستقل است.

ج) A با B-C نیز مستقل است.

(د) به طور کلی A با هر پیشامدی که از B و C با جبر مجموعه ها به دست می آید ، نیز مستقل است.

(۷) هرگاه A و B مستقل از هم باشند، آنگاه $P(A|B) = P(A)$

(۸) هرگاه A و B و C مستقل از هم باشند، آنگاه A و B و C' نیز مستقل از هم اند و ...

۹) هرگاه A و B پيشامد هاي مستقل از هم باشند و $A \subseteq B$ ، آنگاه $P(A)=0$ يا $P(B)=1$

مثال : سکه ای را سه بار پرتاب می کنیم ، مطلوب است احتمال آنکه :

الف) هر سه بار رو بیاید؟ ب) هر سه بار پشت بیاید؟ ج) فقط یک بار رو بیاید؟

یاسخ :

واضح است که احتمال رو آمدن هر پرتاب ، به نتیجه پرتاب های دیگر ، بستگی ندارد ، لذا نتیجه هر پرتاب مستقل از نتیجه پرتاب های دیگر می باشد ، ضمناً در هر پرتاب ، احتمال آنکه سکه «رو» بیاید یا «پشت» بیاید مساوی $\frac{1}{2}$ است بنابراین داریم :

(سومی رو و دومی رو و اولی رو) P = (هر سه رو) P (الف)

$$\Rightarrow P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

(ب) به همین ترتیب پاسخ این قسمت نیز برابر $\frac{1}{8}$ است.

(ج) برای آنکه فقط یک بار «رو» بیاید ، آمدن «رو» می تواند در پرتاب اول یا دوم یا سوم باشد پس داریم :

$$\left\{ \begin{aligned} & \left(\binom{3}{1} \times \left(\frac{1}{2} \right)^3 \right) = \frac{3}{8} \end{aligned} \right.$$

روش دوم :

$S = \{ (ر ر ر) \text{ و } (ر ر پ) \text{ و } (ر پ ر) \text{ و } (پ ر ر) \text{ و } (پ پ ر) \text{ و } (پ ر پ) \text{ و } (ر پ پ) \text{ و } (پ پ پ) \}$

$A = \{ (پ پ ر) \text{ و } (پ ر پ) \text{ و } (ر پ پ) \}$ = یک بار رو

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{8}$$

(د) اقلأ یک بار رو بیاید.

(هر سه بار رو بیاید) یا (دو بار رو بیاید) یا (یک بار رو بیاید) = اقلأ یک بار رو بیاید.

$$= 1 - P(\text{پ پ پ بیاید}) = 1 - P(\text{پ پ پ نیاید})$$

$$\Rightarrow P(\text{پ پ پ بیاید}) = 1 - P(\text{پ پ پ نیاید}) = 1 - P(\text{اقلأ یک بار رو بیاید})$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8} \quad \text{طبق قسمت (ب)}$$

تست : هرگاه A و B دو پیشامد مستقل از هم باشند و $P(A) = 0/2$ و $P(A \cup B) = 0/4$ باشد ، $P(B)$ کدام است؟

0/15 (۴)

0/2 (۳)

0/25 (۲)

0/3 (۱)

پاسخ :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad \left\{ \begin{aligned} & P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \text{ چون } A \text{ و } B \text{ مستقل اند} \end{aligned} \right.$$

$$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$$

$$0/4 = 0/2 + P(B) - 0/2 \cdot P(B)$$

$$P(B) = \frac{0/2}{0/8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 0/25$$

تست : خانواده ای دارای چهار فرزند است ، می دانیم فرزند اول پسر است ، احتمال آنکه ، سه فرزند دیگر این خانواده دختر باشند چقدر است؟

$\frac{1}{8}$ (۴)

$\frac{1}{16}$ (۳)

$\frac{3}{8}$ (۲)

$\frac{7}{16}$ (۱)

پاسخ : پسر بودن فرزند اول ، هیچ تأثیری در پسر یا دختر بودن سه فرزند بعدی ندارد ، ضمناً پسر یا دختر بودن هر یک از سه فرزند بعدی نیز تأثیری در پسر یا دختر بودن بقیه فرزندان ندارد ، به عبارت دیگر ، این پیشامد ها مستقل اند لذا :

$$P(d, d, d) = P(d) \times P(d) \times P(d) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}, \quad (d = \text{دختر})$$

تست : برای آنکه یک خط تولید فعال بماند ، لازم است که یکی از سه دستگاه تولید برق سالم باشد ، احتمال آنکه اولی بدون نقص کار کند ، 60% و همین احتمال برای دومی و سومی ، به ترتیب 40% و 30% می باشد ، احتمال آنکه خط تولید فعال بماند ، کدام است؟

$$(1) \ 81/2\% \quad (2) \ 83/2\% \quad (3) \ 76/2\% \quad (4) \ 80/2\%$$

پاسخ : هرگاه A و B و C پیشامد های سالم بودن سه دستگاه تولید برق باشند ، پیشامد فعال ماندن خط تولید ، معادل با $A \cup B \cup C$ می باشد (یعنی یکی از سه دستگاه برق سالم کار کند) ، اما می دانیم :

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

و چون پیشامد های A و B و C دو به دو مستقل از هم هستند (زیرا کارکرد هیچ یک از دستگاه های تولید برق ، به دیگری وابسته نیست) بنابراین داریم :

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0/6 \times 0/4 = 0/24$$

$$P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C) = 0/6 \times 0/3 = 0/18$$

$$P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C) = 0/4 \times 0/3 = 0/12$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = 0/6 \times 0/4 \times 0/3 = 0/72$$

$$\Rightarrow P(A \cup B \cup C) = 0/6 + 0/4 + 0/3 - 0/24 - 0/18 - 0/12 + 0/72$$

$$= 0/832 = \frac{832}{1000} = \frac{83/2}{100} = 83/2\%$$

نکته : هرگاه A و B مستقل از هم باشند آنگاه :

(الف) A' و B' نیز مستقل از هم اند.

(ب) A' و B نیز مستقل از هم اند.

(ج) A و B' نیز مستقل از هم اند.

اثبات الف :

$$\text{فرض} \quad \{P(A' \cap B) = P(A) \cdot P(B)\}$$

$$\text{حکم} \quad \{P(A' \cap B') = P(A') \cdot P(B')\}$$

$$P(A' \cap B') = P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B))$$

$$\text{طبق فرض} \quad = 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B)$$

$$= (1 - P(A)) - P(B)(1 - P(A))$$

$$= (1 - P(A))(1 - P(B)) = P(A') \cdot P(B')$$

اثبات ب :

$$\text{حکم} \quad \{P(A' \cap B) = P(A') \cdot P(B)\}$$

$$\begin{aligned}
 P(A' \cap B) &= P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) \\
 &= P(B) - P(A) \cdot P(B) \quad \text{طبق فرض} \\
 &= P(B)(1 - P(A)) = P(A') \cdot P(B)
 \end{aligned}$$

اثبات (ج) مشابه (ب) است.

تست : احتمال آنکه سه نفر در کنکور به ترتیب برابر 50% و 60% و 70% است ، احتمال آنکه هیچ کدام قبول نشوند برابر است با :

$$0/06 \quad (۱) \quad 0/15 \quad (۲) \quad 0/28 \quad (۳) \quad 0/21 \quad (۴)$$

پاسخ : راه اول : فرض می کنیم A و B و C به ترتیب پیشامدهای قبولی این 3 نفر باشند لذا طبق فرض $P(A) = 50\%$ ، $P(B) = 60\%$ و $P(C) = 70\%$ ، چون پیشامدهای قبولی 3 نفر در کنکور ، پیشامدهایی دو به دو نسبت به هم مستقل اند لذا متهم های آنها یعنی A' و B' و C' نیز مستقل از هم اند. بنابراین احتمال اینکه هیچ کدام قبول نشوند برابر است با :

$$\begin{aligned}
 P(A' \cup B \cup C') &= P(A') \cdot P(B') \cdot P(C') \\
 &= (1 - 0/5)(1 - 0/6)(1 - 0/7) \\
 &= (0/5)(0/4)(0/3) = 0/060 = 0/06
 \end{aligned}$$

راه دوم : مجدداً فرض می کنیم A و B و C به ترتیب پیشامدهای قبولی این 3 نفر باشند ، احتمال اینکه هیچ کدام قبول نشوند برابر است با :

$$\begin{aligned}
 P(A' \cap B' \cap C') &= P(A \cup B \cup C)' \\
 &= 1 - P(A \cup B \cup C) \\
 &= 1 - (P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)) \\
 &\quad \text{چون پیشامدها دو به دو مستقل اند} \\
 &= 1 - (0/5 + 0/6 + 0/7 - (0/5)(0/6) - (0/5)(0/7) - (0/6)(0/7) + (0/5)(0/6)(0/7)) \\
 &= 1 - (1/8 - 0/30 - 0/35 - 0/42 + 0/21) \\
 &= 1 - 0/94 \\
 &= 0/06
 \end{aligned}$$

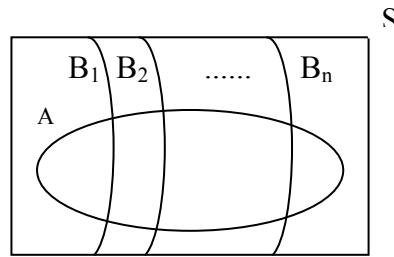
قانون احتمال کل :

اگر فضای نمونه ای S به n پیشامد $B_1, B_2, \dots, B_n$ افراز شده باشد و اگر A پیشامدی از S باشد آنگاه به شرط $P(B_i) \neq 0, 1 \leq i \leq n$ داریم :

$$\begin{cases} A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup (A \cap B_3) \cup \dots \cup (A \cap B_n) \\ (A \cap B_1) \cap (A \cap B_2) \cap (A \cap B_3) \cap \dots \cap (A \cap B_n) = \phi \end{cases}$$

$\Rightarrow P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \dots + P(A \cap B_n)$ طبق اصل سوم کولموگراف

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A \cap B_i) \quad (۱)$$



از طرفی با توجه به تعریف احتمال شرطی و فرض $P(B_i) \neq 0$ داریم :

$$(2) P(A \cap B_i) = P(B_i) \cdot P(A|B_i)$$

لذا از (1) و (2) داریم :

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i) \cdot P(A|B_i)$$

مثال : سه ظرف همانند B_1, B_2, B_3 داریم ، ظرف B_1 شامل 5 مهره سفید و 11 مهره سیاه است ، ظرف B_2 شامل 3 مهره سفید و 9 مهره سیاه است ، و ظرف B_3 تنها شامل مهره های سفید است . مهره ای به تصادف از یکی از سه ظرف انتخاب و از آن مهره ای در می آوریم ، احتمال اینکه مهره سفید باشد چقدر است؟

پاسخ : فرض می کنیم A ، پیشامد انتخاب مهره سفید باشد ، واضح است که احتمال اینکه مهره سفید باشد به این بستگی دارد که اولاً چه ظرفی انتخاب شده باشد و ثانیاً با چه احتمالی مهره سفید از آن ظرف بیرون آمده باشد ، بنابراین طبق فرمول احتمال کل داریم:

$$P(\text{سفید}) = P(\text{ظرف اول / سفید}) \times P(\text{ظرف اول}) + P(\text{ظرف دوم / سفید}) \times P(\text{ظرف دوم}) + P(\text{ظرف سوم / سفید}) \times P(\text{ظرف سوم})$$

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + P(B_3)P(A|B_3) \quad (1)$$

یا

$$P(A) = \sum_{i=1}^3 P(B_i)P(A|B_i)$$

می دانیم که احتمال انتخاب هر ظرف برابر $\frac{1}{3}$ است . لذا :

$$P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = \frac{1}{3}$$

ضمناً داریم :

$$P(A|B_1) = \frac{5}{16} \quad \text{و} \quad P(A|B_2) = \frac{1}{4} \quad \text{و} \quad P(A|B_3) = 1$$

بنابراین از (1) داریم :

$$P(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{16} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{25}{48}$$

تست : دو مهره سفید و دو مهره سیاه را در کیسه ای ریخته و یک مهره را از آن خارج می کنیم و بدون آنکه به رنگ آن نگاه کنیم ، مهره دومی را از کیسه خارج می کنیم ، احتمال آنکه مهره دوم سفید باشد برابر است با :

$$\frac{1}{2} \quad (۴) \qquad \frac{2}{9} \quad (۳) \qquad \frac{1}{6} \quad (۲) \qquad \frac{1}{3} \quad (۱)$$

پاسخ : سفید بودن مهره دوم به سفید یا سیاه بودن مهره اول بستگی دارد لذا داریم :

$$P(\text{مهره اول سفید} / \text{مهره دوم سفید}) = P(\text{مهره اول سفید}) \times P(\text{مهره دوم سفید} / \text{مهره اول سفید}) \\ + P(\text{مهره اول سیاه} / \text{مهره دوم سفید}) \times P(\text{مهره دوم سفید} / \text{مهره اول سیاه})$$

$$\Rightarrow P(\text{مهره دوم سفید}) = \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \frac{1}{2}$$

مثال : فرض کنید انتقال نوعی بیماری ارثی از والدین به فرزند پسر 0/12 و به فرزند دختر 0/09 باشد ، والدینی که حاصل این نوع بیماری هستند ، انتظار فرزند را دارند ، مطلوب است احتمال آنکه این فرزند سالم باشد؟

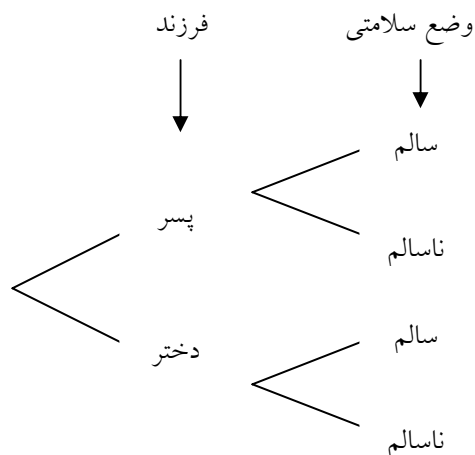
پاسخ : فرزندى که به دنیا خواهد آمد یا پسر است یا دختر ، پس اگر پسر بودن فرزند را با B_1 و دختر بودن آن را با B_2 نمایش دهیم ، آنگاه B_1 و B_2 ناسازگارند و حتماً یکی از آنها رخ خواهد داد ، حال اگر سالم بودن فرزند را با A نشان دهیم داریم :

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2)$$

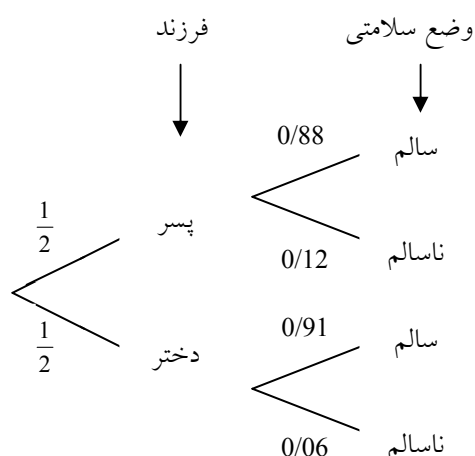
$$= \frac{1}{2}(1 - 0/12) + \frac{1}{2}(1 - 0/09) = 0/44 + 0/455 = 0/895$$

تذکر : اگر می دانستیم که این فرزند پسر خواهد بود ، احتمال سالم بودن آن 0/88 و اگر می دانستیم که دختر است ، این احتمال برابر 0/91 بود ، اما چون از جنسیت فرزندى که به دنیا خواهد آمد اطلاعى نداریم ، بنابر دستور بالا ، این احتمال برابر 0/895 محاسبه شد.

تذکر : برای حل مسأله ، اگر سعی می کردیم فهرستی از حالات ممکن تشکیل دهیم به نموداری درختی به صورت زیر دست می یافتیم :



حال اگر روی هر یک از شاخه های نمودار بالا ، احتمال پیشامد نظیر آن شاخه را بنویسیم خواهیم داشت :



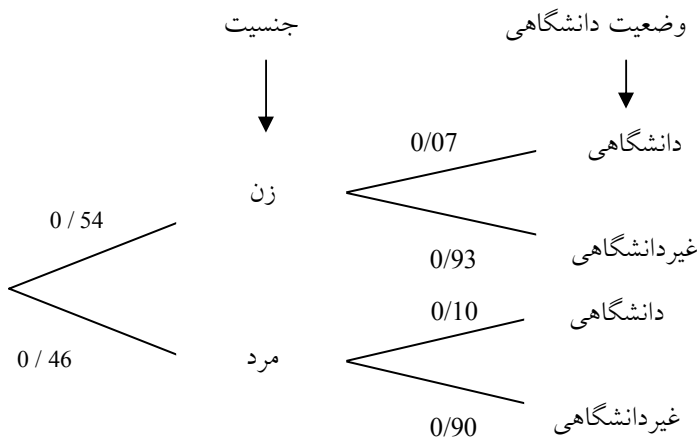
حال اگر شاخه هایی را که به وضعیت سالم ختم می شوند ، مشخص کنیم و احتمال های روی آن شاخه ها را در هم ضرب و با نتیجه حاصل از شاخه های دیگر جمع کنیم خواهیم داشت :

$$\underbrace{\frac{1}{2} \times 0/88} + \underbrace{\frac{1}{2} \times 0/91} = 0/895$$

شاخه دوم
اول

این همان جوابی است که با استفاده از دستور جمع احتمال ها به دست آمد ، این روش بسیار ساده و مفید است .
به مثال زیر توجه کنید.

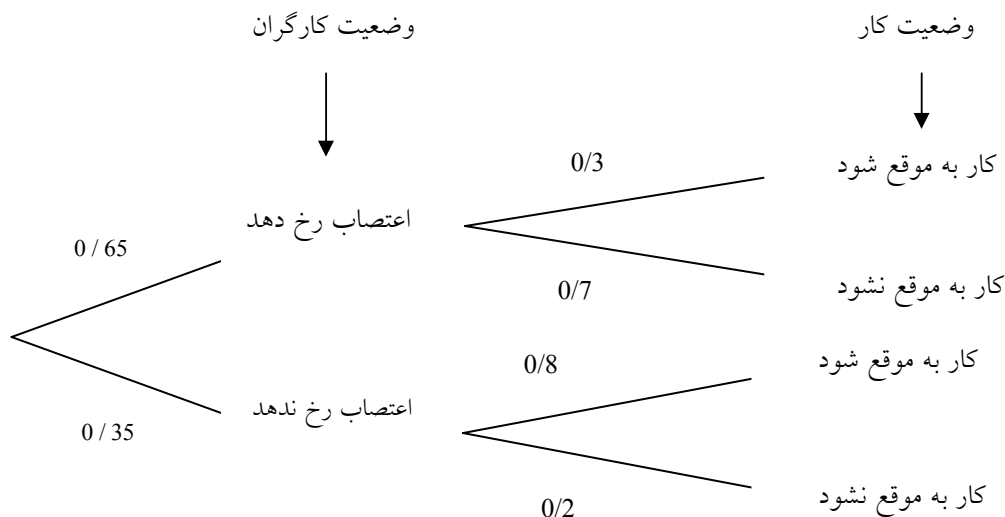
مثال : 54% جمعی کشوری را زنان و 46% بقیه را مردان تشکیل می دهند ، اگر 7% زنان و 10 درصد مردان ، تحصیلات دانشگاهی داشته باشند ، چند درصد جمعیت این کشور تحصیلات دانشگاهی دارند؟
پاسخ :



$$P = (0/54)(0/07) + (0/46)(0/10) = 0/0378 + 0/046 = 0/0838 \cong 8\%$$

بنابراین تقریباً 8% جمعیت این کشور ، تحصیلات دانشگاهی دارند.

مثال : تکمیل بنای راهی ممکن است به دلیل اعتصاب کارگران به تأخیر افتد . فرض کنید احتمال اینکه اعتصابی رخ دهد 65/0 باشد و احتمال اینکه ، اگر اعتصابی نباشد ، کار به موقع انجام نشود 8/0 و احتمالاً اینکه اگر اعتصابی باشد ، کار به موقع انجام شود 3/0 باشد ، احتمال اینکه کار بنای راه به موقع انجام شود چقدر است؟



$$\text{احتمال اینکه کار به موقع انجام شود} = (0/65)(0/3) + (0/35)(0/8) = 0/195 + 0/28 = 0/475$$

روش دوم

$$P(\text{اعتصاب رخ دهد}) = P(A) = 0/65$$

$$P(\text{اعتصاب رخ دهد} \mid \text{کار به موقع انجام شود}) = P(B|A) = 0/3$$

$$P(\text{اعتصاب رخ ندهد} \mid \text{کار به موقع انجام نشود}) = P(B|A') = 0/8$$

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A) \cdot P(B|A) + P(A') \cdot P(B|A') \\ &= 0/65 \times 0/3 + 0/35 \times 0/8 \\ &= 0/195 + 0/28 \\ &= 0/475 \end{aligned}$$

مثال : دو ظرف داریم ، اولی شامل 10 مهره آبی و 8 مهره قرمز است و دومی شامل 12 مهره آبی و 9 مهره قرمز است ، از ظرف اول به تصادف مهره ای در آورده و در ظرف دوم قرار می دهیم سپس از ظرف دوم ، مهره ای به تصادف بیرون می آوریم ، احتمال اینکه این مهره آبی باشد ، چقدر است؟

پاسخ : احتمال اینکه مهره ای که از ظرف دوم انتخاب شده ، آبی باشد ، بستگی به مهره ای دارد که از ظرف اولی انتخاب کرده و در ظرف دوم قرار داده ایم لذا فرض می کنیم :

B_1 = پیشامد مهره اول آبی باشد

B_2 = پیشامد مهره اول قرمز باشد

A = پیشامد مهره دوم آبی باشد

در این صورت داریم :

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B_1) \times P(A|B_1) + P(B_2) \times P(A|B_2) \\ P(A) &= \frac{10}{8} \times \frac{13}{22} + \frac{8}{18} \times \frac{12}{22} = \frac{65}{198} + \frac{48}{198} = \frac{113}{198} \end{aligned}$$

مثال : در دو جعبه به ترتیب 30 و 20 عدد لامپ همانند وجود دارد ، در جعبه اول 5 عدد لامپ معیوب و در جعبه دوم 3 عدد لامپ معیوب وجود دارد ، از اولی 10 لامپ و از دومی 8 لامپ به تصادف انتخاب می کنیم و آنها را به صورت در هم در جعبه ای جدید قرار می دهیم ، از این جعبه به تصادف لامپی بر می داریم ، احتمال اینکه این لامپ معیوب باشد ، چقدر است؟

پاسخ : هنگامی که یک لامپ از جعبه جدید (جعبه سوم / خارج می کنیم ، ممکن است این لامپ از جعبه اول یا از جعبه دوم خارج شده باشد ، واضح است که احتمال اینکه این لامپ از جعبه اول بوده باشد برابر $\frac{10}{30}$ و احتمال اینکه این لامپ از جعبه دوم بوده باشد برابر $\frac{8}{20}$ است ، اما اگر این لامپ از جعبه اول آمده باشد ، احتمال معیوب بودنش برابر $\frac{5}{30}$ و

اگر از جعبه دوم آمده باشد، احتمال معیوب بودنش برابر $\frac{3}{20}$ است بنابراین می توان نوشت :

A = لامپ از جعبه اول باشد

B = لامپ از جعبه دوم باشد

M = معیوب بودن لامپ

$$\Rightarrow P(M) = P(A) \cdot P(M|A) + P(B) \cdot P(M|B)$$

$$P(M) = \frac{10}{30} \times \frac{5}{30} + \frac{8}{20} \times \frac{3}{20} = \frac{1}{18} + \frac{3}{50}$$

$$P(M) = \frac{25+27}{450} = \frac{52}{450}$$

مثال : سه ظرف همانند A و B و C داریم، در ظرف A ، 5 مهره زرد و 4 مهره آسمانی، در ظرف B ، 4 مهره زرد و 4 مهره آسمانی و در ظرف C ، 1 مهره زرد و 6 مهره آسمانی موجود است. از این سه ظرف A و B و C به ترتیب 2 مهره، 3 مهره و 4 مهره به تصادف خارج می کنیم و ظرفی دیگر به نام D قرار می دهیم، سپس یک مهره از ظرف D به تصادف خارج می کنیم، احتمال این که این مهره آسمانی باشد چقدر است؟

پاسخ : وقتی یک مهره از ظرف D خارج می کنیم، ممکن است این مهره از ظرف A یا از ظرف B و یا از ظرف C آمده

باشد، واضح است که احتمال آن که این مهره، قبلاً در ظرف A بوده باشد، $\frac{2}{9} \left(\frac{2}{2+3+4} \right)$ و احتمال آن که از ظرف

B آمده باشد، برابر $\frac{3}{9}$ و احتمال آن که از ظرف C آمده باشد، برابر $\frac{4}{9}$ است، اما اگر این مهره از ظرف A آمده باشد،

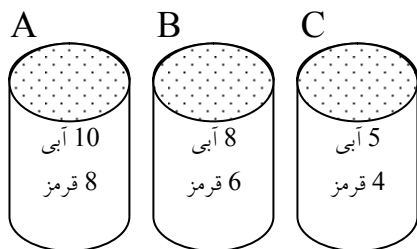
احتمال آسمانی بودنش $\frac{4}{9}$ و اگر از جعبه B آمده باشد، همین احتمال برابر $\frac{4}{8}$ و برای جعبه C ، برابر $\frac{6}{7}$ است، بنابراین

اگر M پیشامد انتخاب مهره آسمانی از ظرف D باشد، داریم :

$$P(M) = P(A) \cdot P(M|A) + P(B) \cdot P(M|B) + P(C) \cdot P(M|C)$$

$$= \frac{2}{9} \times \frac{4}{9} + \frac{3}{9} \times \frac{4}{8} + \frac{4}{9} \times \frac{6}{7} = \frac{8}{81} + \frac{3}{18} + \frac{8}{21} = \frac{112+189+432}{1134} = \frac{733}{1134}$$

مثال : سه کیسه مطابق رو به رو داریم:



از کیسه A ، 12 مهره و از کیسه B ، 9 مهره برداشته و در C می ریزیم، پس از کیسه C ، یک مهره خارج می کنیم، احتمال آبی بودن این مهره را حساب کنید؟

پاسخ : $P(\text{آبی بودن مهره}) = P(A) \cdot P(\text{آبی} | A) + P(B) \cdot P(\text{آبی} | B) + P(C) \cdot P(\text{آبی} | C)$

$$= \frac{12}{30} \times \frac{10}{18} + \frac{9}{30} \times \frac{8}{14} + \frac{9}{30} \times \frac{5}{9}$$

نکته مهم : هرگاه از کیسه ای چند مهره، بدون نگاه کردن برداشته (و یا چند مهره را بدون نگاه کردن به کیسه تزریق نموده) و سپس مهره ای از کیسه خارج کنیم، آنگاه احتمال اینکه این مهره از رنگی خاص باشد، همانند آن است که این برداشتن یا تزریق کردن صورت نگرفته است.

تست : در کیسه ای 10 مهره زرد و 8 مهره قهوه ای وجود دارد ، ابتدا بدون نگاه کردن یک مهره از کیسه خارج می کنیم ، سپس مهره دومی را بیرون می کشیم ، احتمال اینکه این مهره زرد باشد چقدر است؟

$$\frac{10 \times 9}{18 \times 17} \quad (۱) \quad \frac{4}{5} \quad (۲) \quad \frac{5}{9} \quad (۳) \quad \frac{6}{10} \quad (۴)$$

پاسخ : طبق نکته فوق کافی است احتمال زرد بودن مهره را قبل از اینکه مهره اول را برداریم حساب کنیم لذا پاسخ برابر است با :

$$P(\text{زرد}) = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$$

اکنون در روش دوم ، از احتمال شرطی استفاده می کنیم :

راه حل دوم :

$$P(\text{مهره اول قهوه ای} \mid \text{مهره دوم زرد}) \times P(\text{مهره اول قهوه ای}) + P(\text{مهره اول زرد} \mid \text{مهره دوم زرد}) \times P(\text{مهره اول زرد})$$

$$P(\text{مهره دوم زرد}) = P$$

$$= \frac{10}{18} \times \frac{9}{17} + \frac{8}{18} \times \frac{10}{17} = \frac{10}{17 \times 18} (9 + 8) = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$$

قانون بیز :

هرگاه A و B دو پیشامد از فضای نمونه ای S باشد و $P(A) \neq 0$ و $P(B) \neq 0$ ، در این صورت داریم :

$$\begin{cases} P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \\ P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B) \\ P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) \end{cases}$$

$$P(B) \cdot P(A|B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

یا :

$$P(A|B) = \frac{P(A)}{P(B)} \times P(B|A)$$

این قانون را به نام (تامس بیز کشیش انگلیسی 1702 – 1761 میلادی) قانون بیز نام نهاده اند .

مثال ۲: کیسه داریم یکی A و دیگری B ، در کیسه A ، 10 مهره نارنجی و 8 مهره قرمز و در کیسه B ، 6 مهره نارنجی و 4 مهره قرمز داریم ، مهره ای به تصادف بیرون می آوریم و مشاهده کردیم که نارنجی است ، احتمال اینکه این مهره از A در آمده باشد ، چقدر است؟

پاسخ :

نارنجی = C

$$P(A \mid \text{نارنجی}) = \frac{P(A)}{P(C)} \times P(C|A) = \frac{P(A)}{P(A) \cdot P(C|A) + P(B) \cdot P(C|B)} \times P(C|A)$$

$$P(A \mid \text{نارنجی}) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \times \frac{10}{18} + \frac{1}{2} \times \frac{6}{10}} \times \frac{10}{18} = \frac{1}{\frac{10}{18} + \frac{6}{10}} \times \frac{10}{8} = \frac{25}{520}$$

مثال : در کیسه A، 6 مهره نارنجی و 4 مهره زرد و در کیسه B، 4 مهره زرد و 11 مهره نارنجی است. از کیسه A دو مهره درآورده و بدون توجه به رنگشان، آنها را در کیسه B می اندازیم و سپس از کیسه B مهره ای به تصادف خارج می کنیم مطلوب است :

الف) احتمال اینکه این مهره زرد باشد؟

ب) اگر بدانیم مهره خارج شده از کیسه B، زرد است، چقدر احتمال دارد از مهره های اولیه کیسه B انتخاب شده باشد؟
پاسخ : احتمال اینکه مهره ای که از کیسه B خارج می کنیم زرد باشد به این بستگی دارد که 2 مهره ای که از کیسه A خارج کرده و درون کیسه B قرار داده ایم زرد باشند، نارنجی، اما این دو مهره ممکن است هر دو زرد باشند و در کیسه B قرار گرفته باشند، ممکن است یکی زرد و دیگری نارنجی باشد و ممکن هم هست که هر دو نارنجی بوده باشند، اکنون فرض می کنیم، E_1, E_2, E_3 به ترتیب پیشامد انتخاب هر دو مهره زرد، یکی زرد و دیگری نارنجی و هر دو مهره نارنجی، از کیسه A باشند لذا داریم :

$$P(E_1) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{10}{2}}, \quad (1)$$

احتمال انتخاب هر دو مهره زرد از کیسه A

$$P(E_2) = \frac{\binom{4}{1}\binom{6}{1}}{\binom{10}{2}}, \quad (2)$$

احتمال انتخاب یک مهره زرد و یک نارنجی از کیسه A

$$P(E_3) = \frac{\binom{6}{2}}{\binom{10}{2}}, \quad (3)$$

احتمال انتخاب هر دو مهره نارنجی از کیسه A

بنابراین هرگاه M را پیشامد انتخاب مهره زرد از کیسه B انتخاب کنیم آنگاه این احتمال بسته به هر یک از 3 حالت فوق برابر است با :

$$P(M|E_1) = \frac{4}{17} \quad \leftarrow \text{2 مهره زرد از A به B رفته باشد}$$

$$P(M|E_2) = \frac{5}{17} \quad \leftarrow \text{1 مهره زرد و یک مهره نارنجی از A به B رفته باشد}$$

$$P(M|E_3) = \frac{6}{17} \quad \leftarrow \text{دو مهره نارنجی از A به B رفته باشد}$$

لذا احتمال اینکه مهره انتخابی از کیسه B، زرد باشد برابر است با :

$$P(M) = P(E_1) \cdot P(M|E_1) + P(E_2) \cdot P(M|E_2) + P(E_3) \cdot P(M|E_3)$$

$$= \frac{\binom{4}{2}}{\binom{10}{2}} \times \frac{4}{17} + \frac{\binom{4}{1}\binom{6}{1}}{\binom{10}{2}} \times \frac{5}{17} + \frac{\binom{6}{2}}{\binom{10}{2}} \times \frac{6}{17}$$

$$P(M) = \frac{6}{45} \times \frac{6}{17} + \frac{24}{45} \times \frac{5}{17} + \frac{15}{45} \times \frac{4}{17}$$

$$= \frac{4}{5 \times 17} + \frac{8}{3 \times 17} + \frac{4}{3 \times 17}$$

$$= \frac{12 + 40 + 20}{3 \times 5 \times 17} = \frac{72}{255} = \frac{24}{85}$$

(ب) در این قسمت از قضیه بیز به صورت زیر استفاده می کنیم :

$$P(\text{مهره دوم از مهره های اولیه } B \mid \text{مهره دوم زرد}) = \frac{P(B \mid \text{مهره دوم زرد}) \times P(\text{مهره دوم از مهره های اولیه } B)}{P(\text{مهره دوم زرد})}$$

$$P(B \mid \text{مهره دوم زرد}) = \frac{P(B \mid \text{مهره دوم زرد}) \times P(\text{مهره دوم از مهره های اولیه } B)}{P(\text{مهره دوم زرد})}$$

$$= \frac{15}{17 \times 24} \times \frac{4}{15} = \frac{5}{6}$$

توجه کنید که تعداد مهره های اولیه کیسه B، 15 تا بوده است که با 2 مهره ای که از کیسه ای A به آن انداخته ایم تعداد مهره های ثانویه B، 17 تا شده است لذا داریم :

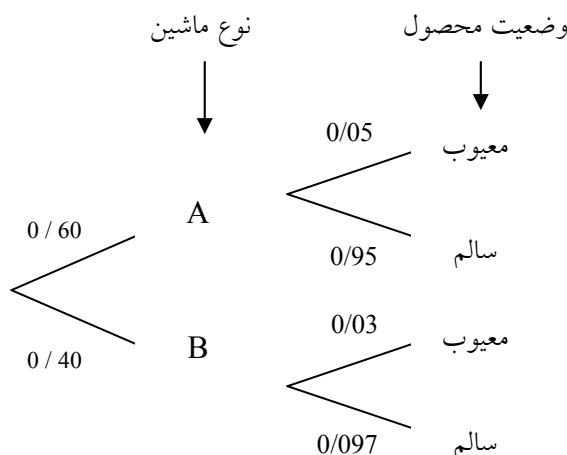
$$P(B \mid \text{مهره دوم از مهره های اولیه } B) = \frac{15}{7}$$

تذکر مهم : همان طور که در مثال فوق دیدید ، در قاعده بیز ، ابتدا از روی تجربه های گذشته و یافرانی ها ، احتمالی ذهنی به وقوع پیشامد B به شرط A نسبت می دهیم ، سپس با استفاده از قاعده بیز ، احتمال وقوع پیشامد A به شرط B را محاسبه می کنیم.

مثال : دو ماشین A و B به ترتیب 70% و 40% از کل تولیدات یک کارخانه را می سازند ، اگر درصد معیوب بودن تولیدات هر دستگاه به ترتیب 5% و 3% باشد و اگر یک محصول از کارخانه به تصادف انتخاب شود مطلوب است :

(الف) احتمال معیوب بودن این محصول چقدر است؟

(ب) اگر این محصول معیوب باشد ، احتمال آنکه از ماشین A باشد ، چقدر است؟



$$P = \text{احتمال معیوب بودن محصول} = (0/60)(\%5) + (0/40)(\%3)$$

$$= \%3 + \%12$$

$$= \%42$$

راه دوم:

$$\begin{aligned}
 P(\text{معیوب}) &= P(A) \cdot P(\text{معیوب} | A) + P(B) \cdot P(\text{معیوب} | B) \\
 &= (0/60)(\%5) + (0/40)(\%3) \\
 &= \%42
 \end{aligned}$$

(ب) بنا به قضیهٔ بیز داریم :

$$\begin{aligned}
 P(A \text{ از محصول معیوب} | \text{محصول معیوب}) &= \frac{P(A \text{ از محصول معیوب})}{P(\text{محصول معیوب})} \times P(\text{محصول معیوب} | A \text{ از محصول معیوب}) \\
 &= \frac{0/60}{\%42} \times \%5 = \frac{600}{42} \times \frac{5}{100} = \frac{30}{42} = \frac{5}{7}
 \end{aligned}$$

ویژگی های احتمال شرطی :

- ۱) $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, $P(B) \neq 0$
- ۲) $P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$, $n(B) \neq 0$
- ۳) $A \Rightarrow P(A|B) = 0$, $(B \neq \phi)$ و B ناسازگار
- ۴) $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$, $P(B) \neq 0$
- ۵) $A \Rightarrow P(A|B) = P(A)$, $P(B|A) = P(B)$ و B مستقل
- ۶) $P(A|A) = 1$, $P(A) \neq 0$
- ۷) $P(A|S) = P(A)$
- ۸) $P(A|A') = 0$, $P(A') \neq 0$
- ۹) $P(A'|A) = 0$, $P(A) \neq 0$
- ۱۰) $P(A|B) \geq 0$, $P(B) \neq 0$
- ۱۱) $P(\phi|B) = 0$, $A \neq 0$

یادآوری :

- ۱۲) $P(A|B') = \frac{P(A \cap B')}{P(B')} = \frac{P(A - B)}{P(B')} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)}$, $P(B') \neq 0$, $A \cap B' = A - B$
- ۱۳) $P(A'|B) = \frac{P(A' \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B - A)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(B \cap A)}{P(B)}$, $P(B) \neq 0$
- ۱۴) $P(A'|B') = \frac{P(A' \cap B')}{P(B')} = \frac{P(A - B)'}{P(B')} = \frac{1 - P(A \cup B)}{1 - P(B)}$, $P(B') \neq 0$
- ۱۵) $A \subset B \Rightarrow P(B|A) = 1$, $P(A) \neq 0$
- ۱۶) $P(A|A \cap B) = 1$, $A \cap B \neq \phi$
- ۱۷) $P(A \cup B|A) = 1$
- ۱۸) $P(A \cup B|C) = P(A|C) + P(B|C) - P(A \cap B|C)$
- ۱۹) $A \Rightarrow P(A \cup B|C) = P(A|C) + P(B|C)$ و B ناسازگار

$$۲۰) P(A|B) + P(A'|B) = 1$$

$$۲۱) P(A - B|C) = P(A|C) - P(A \cap B|C)$$

$$۲۲) P(A|B) = \frac{P(A)}{P(B)} \cdot P(B|A) \quad , P(A) \neq 0, P(B) \neq 0$$

قضیه بیز:

$$۲۳) P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|A \cap B)$$

فرمول احتمال کل :

$$۲۴) P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i) \cdot P(A|B_i) \quad , \begin{cases} B \text{ ها دو به دو متمایز} \\ S = \bigcup_{i=1}^n B_i \end{cases}$$

تست : اگر $P(A) = \frac{1}{4}$ و $P(B - A) = \frac{1}{3}$ باشد ، مقدار $P(B|A')$ کدام است؟

$$\frac{7}{12} \text{ (۴)}$$

$$\frac{4}{9} \text{ (۳)}$$

$$\frac{1}{3} \text{ (۲)}$$

$$\frac{1}{12} \text{ (۱)}$$

پاسخ :

$$P(B|A') = \frac{P(B \cap A')}{P(A')} = \frac{P(B - A)}{1 - P(A)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{9}$$

تست : اگر $P(A|B) = \frac{1}{3}$ و $P(B|A) = \frac{1}{4}$ و $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$ باشند ، حاصل $P(A - B)$ کدام است؟

$$\frac{1}{8} \text{ (۴)}$$

$$\frac{1}{2} \text{ (۳)}$$

$$\frac{3}{8} \text{ (۲)}$$

$$\frac{1}{4} \text{ (۱)}$$

پاسخ :

$$P(A|B) = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{3} \Rightarrow P(B) = 3P(A \cap B)$$

$$P(A|B) = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{4} \Rightarrow P(A) = 4P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

با فرض $P(A \cap B) = X$ داریم :

$$\frac{3}{4} = 3X + 4X - X \Rightarrow 6X = \frac{3}{4} \Rightarrow X = \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P(A \cap B) = X = \frac{1}{8} \\ P(A) = 4X = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \{P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = 4X - X = 3X = \frac{3}{8}\}$$

احتمال روی فضا های نمونه ای متناهی و غیر هم شانس :

اکنون تمام مسایلی که مورد بررسی قرار دادیم ، از دو ویژگی برخوردار بودند :

(الف) فضای نمونه ای آنها ، مجموعه ای متناهی بود.

(ب) اعضای فضای نمونه ای آنها ، هم شانس یا هم احتمال نبودند.

حال می خواهیم فضا هایی نمونه ای را بررسی کنیم که فاقد شرط دوم هستند ، یعنی فضا هایی با برآمد های غیر هم شانس لذا فرض می کنیم $S = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ یک فضای نمونه ای متناهی باشد، به هریک از e_i ها ، یک پیشامد ساده می گوییم ، برای تعریف تابع احتمال به ترتیب زیر عمل می کنیم :

(۱) به هر برآمد e_i از S ($1 \leq i \leq n$) ، عددی مانند $P(e_i)$ را به عنوان احتمال برآمد e_i ، اختصاص می دهیم ، به طوری که در دو شرط زیر صدق کند :

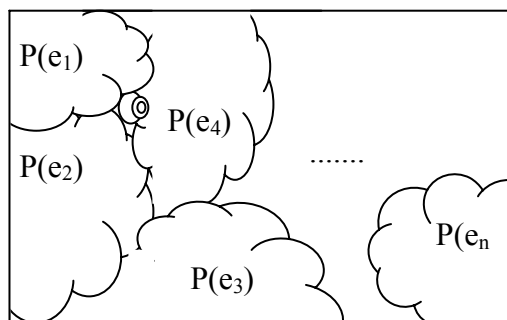
(الف) به ازاء هر $P(e_i) \geq 0$ ، $1 \leq i \leq n$ (یعنی احتمالی که به هر پیشامد ساده تخصیص داده ایم ، نا منفی باشد).

(ب) $P(e_1) + P(e_2) + \dots + P(e_n) = 1$ (یعنی مجموع احتمالات تام پیشامد های ساده S ، برابر یک باشد)

(۲) اکنون فرض می کنیم $A \subseteq S$ ، احتمال پیشامد A را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$P(A) = \begin{cases} 0 & , (A = \phi) \\ P(e_i) & , (A = \{e_i\}) \\ P(e_{i1}) + P(e_{i2}) + \dots + P(e_{ik}) & , (A = \{e_{i1}, e_{i2}, \dots, e_{ik}\}) \end{cases}$$

از نظر نمودار ون ، این چنین می توان تعبیر کرد که مستطیل S (فضای نمونه ای) را به عنوان پیشامد حتمی با احتمال ۱ در نظر می گیریم و سهم هر پیشامد ساده ، به طور نا مساوی در این مستطیل واقع شده است.



$$P(S) = 1$$

تذکر: به سادگی دیده می شود که تابع تعریف شده در فوق یک تابع احتمال است ، یسی سه شرط کولموگروف را دارد.

مثال : یک سکه را طوری ساخته اند که احتمال وقوع «رو» در آن دو برابر احتمال وقوع «پشت» ، است ، اگر این سکه را یک بار پرتاب کنیم ، احتمال آنکه «رو» ظاهر شود چقدر است؟

پاسخ : با توجه به صورت مسأله می توان دریافت که سهم پیشامد «رو» از عدد 1 دو برابر سهم پیشامد «پشت» است یعنی :

احتمال «رو» $X = 2$	$X =$ احتمال «پشت»
---------------------	--------------------

لذا طبق تعریف داریم :

$$x + 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \Rightarrow P(\text{رو ظاهر شود}) = 2x = \frac{2}{3}$$

مثال : یک تاس طوری ساخته شده است که در پرتاب آن ، احتمال آمدن هر عدد متناسب با خود آن عدد است ، احتمال اینکه در پرتاب تاس ، عدد زوج ظاهر شود چقدر است؟

پاسخ : داریم :

$P(1)$	$P(2)$	$P(3)$	$P(4)$	$P(5)$	$P(6)$	$P(S) = 1$
x	$2x$	$3x$	$4x$	$5x$	$6x$	

$$x + 2x + 3x + 4x + 5x + 6x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{21} \quad \text{لذا :}$$

$$P(\text{زوج}) = P(\{2, 4, 6\}) = P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) = 2x + 4x + 6x = 12x = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$$

تست : سه شناگر A و B و C با هم مسابقه می دهند ، احتمال برنده شدن A و B یکسان و احتمال برنده شدن هر کدام از آنها دو برابر احتمال برنده شدن C است ، احتمال اینکه B یا C برنده شوند ، چقدر است؟

$$\frac{4}{5} \text{ (۱)} \quad \frac{4}{7} \text{ (۲)} \quad \frac{3}{5} \text{ (۳)} \quad \frac{2}{3} \text{ (۴)}$$

پاسخ:

$P(C)$	$P(A)$	$P(B)$	$P(S) = 1$
x	$2x$	$2x$	

$$x + 2x + 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{5}$$

$$P(\{B, C\}) = P(\{B\}) + P(\{C\}) = 2x + x = 3x = \frac{3}{5}$$

مثال : یک فضای نمونه ای متشکل از 5 برآمد a و b و c و d و e است ، به شرط آنکه $P(a) = \frac{1}{4}$ و $P(\{a, b, c\}) = \frac{1}{2}$

، مطلوب است :

$$P(\{b, c, d\} | \{a, b, c\}) \text{ الف) محاسبه}$$

$$P(\{a\} | \{a, b, c\}) \text{ ب)}$$

پاسخ : یادآوری :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

لذا داریم :

$$P(\{b, c, d\} | \{a, b, c\}) = \frac{P(\{b, c, d\} \cap \{a, b, c\})}{P(\{a, b, c\})} = \frac{P(\{b, c\})}{P(\{a, b, c\})} \quad (1)$$

یادآوری :

$$A \subset B \Rightarrow P(B - A) = P(B) - P(A)$$

$$P(\{b, c\}) = P(\{a, b, c\} - \{a\}) = P(\{a, b, c\}) - P(\{a\}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$(1) \Rightarrow P(\{b, c, d\} | \{a, b, c\}) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$P(\{a\} | \{a, b, c\}) = \frac{P(\{a\} \cap \{a, b, c\})}{P(\{a, b, c\})} = \frac{P(\{a\})}{P(\{a, b, c\})} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \quad (\text{ب})$$

مثال : فرض کنید $S = \{a, b, c, d\}$ و $P(\{b, c\}) = \frac{3}{16}$ و $P(\{b, c, d\}) = \frac{5}{16}$ و $P(\{b\}) = \frac{1}{16}$ مطلوب است

محاسبه $P(\{a, b, c, d\})$

پاسخ :

روش اول

$$P(\{a, b\}) = P(S) - P(\{b, c\}) = 1 - \frac{3}{16} = \frac{13}{16}$$

$$P(\{a, b, d\}) = P(\{a, d\} \cup \{b\}) = P(\{a, d\}) + P(\{b\}) = \frac{13}{16} + \frac{1}{16} = \frac{14}{16} = \frac{7}{8}$$

روش دوم

$$P(\{a\}) = P(S) - P(\{b, c, d\}) = 1 - \frac{5}{16} = \frac{11}{16}$$

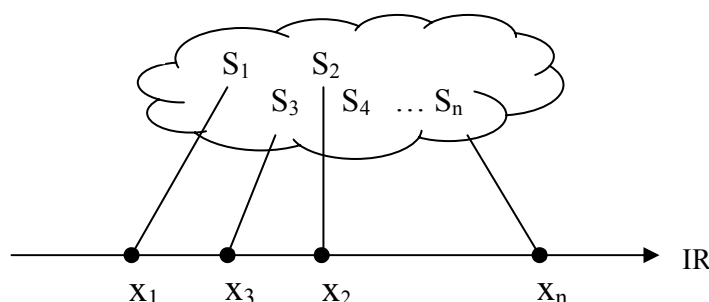
$$P(\{d\}) = P(S) - P(\{a\}) + P(\{b, c\}) = 1 - \left(\frac{11}{16} + \frac{3}{16}\right) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow P(\{a, b, c\}) = \frac{11}{16} + \frac{1}{16} + \frac{2}{16} = \frac{14}{16} = \frac{7}{8}$$

توزیع های احتمال

متغیر تصادفی گسسته :

تابعی مانند X از فضای نمونه ای S به اعداد حقیقی را متغیر تصادفی گوئیم ، به عبارت دیگر تابعی است که به هر عضو فضای نمونه ای ، عددی حقیقی را متناظر می کند ، حال اگر برد این تابع ، متناهی یا شمارا نا متناهی باشد ، متغیر تصادفی X را گسسته می گوئیم ، به طور شهودی می توان گفت که متغیر تصادفی ، امکان آنکه نتایج آزمایش های تصادفی را به اعداد دلخواه متناظر کنیم ، فراهم می سازد ، برای درک مطلب فرض کنید : $S = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ می گیریم که دامنه تعریف آن S و بردش نقاطی از محور اعداد حقیقی باشد ، به طوری که به هر برآمدی ، نقطه ای از محور مزبور را متناظر کند ، در این صورت مطابق شکل مقابل داریم :



$$\begin{cases} X(S_1) = x_1 \\ X(S_2) = x_2 \\ \vdots \\ X(S_n) = x_n \end{cases}$$

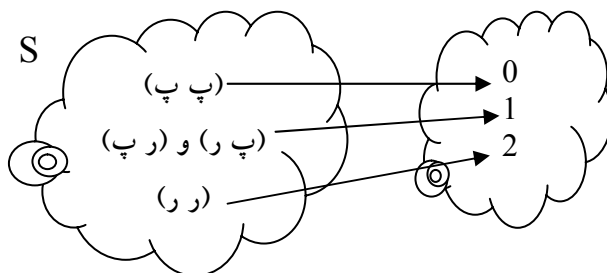
تابع X یک متغیر تصادفی است و $X_1, X_2, \dots, X_n$ برد آن یا مقادیر آن هستند، متغیرهای تصادفی را معمولاً با حروف بزرگ $X, Y, \dots$ نمایش می دهیم.

مثال: دو سکه را با هم پرتاب می کنیم، اگر متغیر تصادفی X ، تعداد روهای آمده باشد، تابع متناظر این متغیر تصادفی را مشخص کنید؟

پاسخ: می دانیم فضای نمونه ای این آزمایش تصادفی، عبارت است از:

$$S = \{(ر, ر) \text{ و } (ر, پ) \text{ و } (پ, ر) \text{ و } (پ, پ)\}$$

واضح است که تعداد روهای این آزمایش تصادفی می تواند هر یک از سه عدد 0 (متناظر (پ, پ)، 1 (متناظر (ر, پ) و (پ, ر)) و 2 (متناظر (ر, ر) باشد، بنابراین تعداد روهای این آزمایش تصادفی، یک متغیر تصادفی مانند X را به صورت زیر مشخص می کند.



مثال: هرگاه X متغیر تصادفی مجموع اعداد روش در پرتاب دو تاس باشد، X چه مقادیری از اعداد حقیقی را می تواند اختیار کند؟

پاسخ: می دانیم مجموع اعداد روش در دو تاس می تواند از 2 تا 12 باشد (در واقع از 1 و 1 تا 6 و 6) لذا مجموعه مقادیر یا برد این تصادفی برابر است با:

$$\{2 \text{ و } 3 \text{ و } 4 \text{ و } \dots \text{ و } 11 \text{ و } 12\}$$

تابع احتمال یا (تابع جرم احتمال) یا (تابع توزیع احتمال):

هرگاه $X = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ ، مجموعه مقادیر ممکن (برد) متغیر تصادفی X باشند در این صورت تابع $P: X \rightarrow \mathbb{R}$ ، که به هر یک از x_i ها ($1 \leq i \leq n$)، مطابق جدول زیر نا منفی مانند $P(X = x_i) = P_i$ را نسبت می دهد به طوری که در دو شرط زیر صدق کنند:

X_i	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_n
P_i	P_1	P_2	P_3	$\dots$	P_n

$$(1) \text{ به ازاء هر } 1 \leq i \leq n, P_i \geq 0$$

$$(2) P_1 + P_2 + \dots + P_n = 1$$

یک تابع احتمال برای متغیر تصادفی X می نامیم، اگر نقاط به طول $x_1, x_2, \dots, x_n$ را نقاطی مادی تلقی کنیم می توانیم $P_1, P_2, \dots, P_n$ را به ترتیب جرم این نقاط بگیریم، به همین دلیل رابطه $P(x = x_i) = P_i, i = 1, 2, \dots, n$ را تابع جرم احتمال یا حرفاً تابع احتمال متغیر تصادفی X می نامند. جدول بان در واقع نشانگر آن است که، مقدار کل احتمال (که می دانیم برابر 1 است) به چه ترتیب بین مقادیر متغیر تصادفی X توزیع شده است و به همین دلیل این جدول را جدول توزیع احتمال می گویند، تعداد مقادیری که X پذیرفته است متناهی است، گاهی تعداد مقادیری که X اختیار می کند نا متناهی ولی شمارا است، به مثال های زیر توجه کنید.

مثال: خانواده ای سه فرزندی را در نظر بگیرید، اگر متغیر تصادفی X را تعداد دخترهای این خانواده تعریف کنیم:

اولاً: مقادیری که متغیر تصادفی X می تواند اختیار کند را مشخص کنید؟

ثانیاً: با فرض برابری تولد دختر با پسر، جدول توزیع احتمال متغیر تصادفی X را مشخص کنید؟

ثالثاً: $P(X=1)$ و $P(X < 2)$ را بیابید؟

پاسخ: الف) واضح است که در این خانواده، تعداد دخترها می تواند 0، 1، 2 و یا 3 باشد، لذا مقادیر متغیر تصادفی X عبارتند از: 0، 1، 2، 3

پ پ پ) معادل است با: 0

د پ پ)، (پ د پ)، (پ پ د) معادل است با: 1

د پ د)، (د د پ)، (پ د د) معادل است با: 2

د د د) معادل است با: 3

X_i	0	1	2	3
P_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

(ب)

دقت کنید که در این حالت تعداد اعضای فضای نمونه ای برابر $n(S) = 2^3 = 8$ است.

$$P(X=1) = \frac{3}{8}$$

(ج)

$$P(X \leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$$

مثال: در آزمایشگاهی 5 موش سفید و 4 موش سیاه داریم، می خواهیم ۲۲ موش از بین آنها انتخاب کنیم، فرض کنید X متغیر تصادفی تعداد موش های سفید انتخاب شده باشد:

اولاً: مقادیری که متغیر تصادفی X می تواند اختیار کند را مشخص کنید؟

ثانیاً: با فرض برابری انتخاب موش سفید و سیاه، جدول توزیع احتمال این متغیر تصادفی را مشخص کند؟

پاسخ: الف) واضح است که X می تواند هر یک از سه مقدار 0، 1 و 2 را اختیار کند، لذا مقادیر متغیر تصادفی X عبارتند از: 0، 1، 2

$$= \frac{\binom{4}{2}}{\binom{9}{2}} = \frac{6}{36} \quad \text{(ب)}$$

$$P(X=0)$$

$$P(X=1) = \frac{\binom{5}{1} \binom{4}{1}}{\binom{9}{2}} = \frac{20}{36}$$

$$P(X=2) = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{9}{2}} = \frac{10}{36}$$

دقت کنید که:

$$\frac{6}{36} + \frac{20}{36} + \frac{10}{36} = \frac{36}{36} = 1$$

منظور از توزیع احتمال ، آن است که تعیین کنیم ، احتمال چگونه روی مقادیری ، توزیع شده است، مثلاً در جدول قبل ، توزیع احتمال روی مقادیر 0 ، 1 و 2 به ترتیب برابر $\frac{6}{36}$ ، $\frac{20}{36}$ ، $\frac{10}{36}$ است.

اما برخی از توزیع های احتمال ، به علت کاربرد های فراوانی که دارند ، از اهمیت زیادی برخوردارند یکی از مهم ترین این توزیع ها ، توزیع دو جمله ای است ، قبل از اینکه به این توزیع بپردازیم ، به ذکر دو مثال دیگر و تابع توزیع احتمال برنولی می پردازیم.

مثال : جدول توزیع متغیر تصادفی Y به صورت زیر است :

Y_i	1	2	3
P_i	a^2	$2a$	$\frac{2}{a}$

($a > 0$)

مقدار a را تعیین کنید؟

پاسخ : باید داشته باشیم :

$$a^2 + 2a + \frac{2}{9} = 1 \Rightarrow 9a^2 + 18a + 2 - 9 = 0 \Rightarrow 9a^2 + 18a - 7 = 0$$

$$\Delta' = b'^2 - ac = (9)^2 + 63 = 144 \Rightarrow a = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{-9 \pm 12}{9}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} & \text{قابل قبول} \\ a = \frac{-7}{3} & \text{غیر قابل قبول} \end{cases} \quad (a > 0)$$

مثال : نشان دهید که تابع زیر یک تابع احتمال است؟

$$P(X=x) = \frac{1}{n^2} [2(n-x)+1] \quad , \quad x=1,2,3,\dots,n$$

پاسخ : باید دو شرط زیر را ثابت کنیم :

$$(1) \text{ به ازاء هر } x=1,2,\dots,n : P(X=x) \geq 0$$

$$(2) \sum_{i=1}^n P(X=x_i) = 1 \text{ یا } P(X=1) + P(X=2) + \dots + P(X=n) = 1$$

اما چون $X=1,2,\dots,n$ لذا $x \leq n$ و بنابراین $n-x \geq 0$ و در نتیجه $P(X=x) = \frac{1}{n^2} [2(n-x)+1] \geq 0$

الکون به اثبات شرط دوم می پردازیم :

$$\begin{aligned} \sum_{x=1}^n \frac{1}{n^2} [2(n-x)+1] &= \frac{1}{n^2} \sum_{x=1}^n (2n-2x+1) = \frac{1}{n^2} \left(\sum_{x=1}^n (2n+1) - 2 \sum_{x=1}^n x \right) \\ &= \frac{1}{n^2} \left(n(2n+1) - 2 \times \frac{n(n+1)}{2} \right) = \frac{1}{n^2} (n(2n+1) - n(n+1)) = \frac{n^2}{n^2} = 1 \end{aligned}$$

یادآوری :

$$1) 1+2+3+\dots+n = \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$۲) \sum_{i=1}^n c = n c$$

تذکر: اگر X مجموعه ای شمارا نا متناهی باشد، تابع $P: X \rightarrow IR$ را با دو شرط زیر، یک تابع احتمال برای متغیر تصادفی X می نامیم:

$$(۱) \text{ به ازاء هر } x_i : P(X = x_i) = P_i \geq 0$$

$$(۲) \sum_{i=1}^{\infty} P_i = 1$$

تست: به ازاء کدام مقدار a ، تابع $(x = 5, 6, 7, \dots)$ ، $P(X = x) = a P(1 - 2P)^{x-5}$ یک تابع احتمال است؟ (کنکور ریاضی ۷۷)

$$\frac{1}{2} (۴) \quad ۱۱ (۳) \quad 4 (۲) \quad 2 (۱)$$

پاسخ: باید داشته باشیم:

$$\sum_{i=1}^{\infty} P_i = 1 \Rightarrow \sum_{x=5}^{\infty} a P(1 - 2P)^{x-5} = 1$$

$$\Rightarrow a P \sum_{x=5}^{\infty} (1 - 2P)^{x-5} = 1 \quad \xrightarrow{\text{طبق فرمول حد مجموع در سری های هندسی همگرا}} a P \times \frac{1}{1 - (1 - 2P)} = 1$$

$$S = \frac{a}{1 - r}, 0 < r = 1 - 2P < 1$$

$$\Rightarrow ap = 2P \Rightarrow a = 2$$

متغیر تصادفی برنولی:

آزمایش برنولی یک آزمایش تصادفی است که فضای نمونه ای آن تنها از دو پیشامد S (پیروزی) و F (شکست) تشکیل شده باشد، مانند انداختن یک سکه و آمدن شیر یا خط، پرتاب یک تاس و آمدن عدد 6 و یا نیامدن آن، مسابقات دو تیم و پیروزی و شکست دو تیم، اکنون به تعریف متغیر تصادفی برنولی می پردازیم.

متغیری تصادفی است که مجموعه مقادیر آن (برد آن) فقط از دو عضو $\{0 \text{ و } 1\}$ تشکیل شده باشد، به طر کلی هرگاه، A پیشامدی از فضای یک نمونه ای باشد وقوع پیشامد A را پیروزی گرفته، احتمال آن را (احتمال پیروزی را یا احتمال وقوع A را) P فرض کنیم، آنگاه متغیر تصادفی X را که به صورت:

$$X = \begin{cases} 1 & \text{(اگر } A \text{ رخ دهد)}, \\ 0 & \text{(اگر } A \text{ رخ ندهد)}, \end{cases}$$

تعریف می شود متغیر تصادفی برنولی می گوئیم.

تابع توزیع احتمال برنولی:

توزیع احتمال یک متغیر تصادفی برنولی را یک تابع توزیع احتمال برنولی می گوئیم، در واقع تابع زیر را تابع متغیر تصادفی برنولی می گوئیم.

$$P(X = i) = p^i q^{1-i}, (i = 0, 1), \quad p + q = 1$$

X	0	1
P _i	q	p

مثال : در تابع زیر a را چنان بیابید تا تابع توزیع احتمال داده شده ، تابع توزیع احتمال برنولی باشد؟

$$P(X=i) = \begin{cases} 3a+1, & (i=1) \\ 2a-1, & (i=0) \end{cases}$$

پاسخ : باید داشته باشیم :

$$P(X=0) + P(X=1) = 1$$

لذا داریم :

$$3a+1+2a-1=1 \Rightarrow 5a=1 \Rightarrow a=\frac{1}{5}$$

توزیع دو جمله ای :

یکی از مهمترین تابع های توزیع احتمال گسسته ، تابع توزیع دو جمله ای می باشد ، فرض می کنیم آزمایش تصادفی داریم که فضای نمونه ای آن فقط شامل دو برآمد S (پیروزی) و F (شکست) بوده و احتمال این دو برآمد به ترتیب برابر p و q باشد ($p+q=1$) ، (به عبارت دیگر یک آزمایش برنولی داریم) و به علاوه فرض می کنیم تکرار هر بار این آزمایش به دفعات قبل بستگی نداشته باشد (به عبارت دیگر مستقل از هم باشند) ، اگر این آزمایش را n بار تکرار کنیم ، فضای نمونه ای آن عبارت است از :

$$S = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \{S, F\}\}$$

S یک فضای نمونه ای متناهی و غیر هم شانس است ، هر متغیر تصادفی که به صورت بالا معرفی می شود ، دارای توزیعی است که آن توزیع را توزیع دو جمله ای می نامیم ، توزیع دو جمله ای را می توانیم در حالت کلی به صورت زیر معرفی کنیم:

الف) آزمایشی است با دو نتیجه ، پیروزی (S) و شکست (F)

ب) این آزمایش را n بار تکرار می کنیم.

ج) آزمایش ها به صورت مستقل تکرار می شوند ، بنابراین اگر P احتمال آمدن پیروزی در انجام یک بار آزمایش باشد ، آنگاه P در طول آزمایش ثابت است و از آزمایشی به آزمایش دیگر عوض نمی شود.

د) تعداد پیروزی ها در n بار تکرار آزمایش ها را اختیار می کند ، متغیر تصادفی این توزیع ، X بار موفقیت در n بار آزمایش می باشد که احتمال موفقیت در یک بار این آزمایش ، مساوی p می باشد ، اگر این متغیر تصادفی را با x نشان دهیم ، آن گاه x می تواند هر یک از مقادیر $0, 1, 2, \dots, n$ را با احتمال های زیر اختیار می کند :

$$P(X=x) = \binom{n}{x} P^x (1-P)^{n-x}$$

نکته : در تابع فوق هرگاه $p=q$ باشد آنگاه اولاً p و q هر دو برابر $\frac{1}{2}$ بوده (زیرا $p+q=1$) و ثانیاً تابع توزیع احتمال

دو جمله ای به صورت زیر در می آید :

$$P(X=x) = \frac{\binom{n}{x}}{2^n}$$

زیرا در این حالت داریم :

$$P(X=x) = \binom{n}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{n-x} = \binom{n}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \binom{n}{x} \times \frac{1}{2^n} = \frac{\binom{n}{x}}{2^n}$$

مثال : یک سکه را 3 بار پرتاب می کنیم ، احتمال آن را حساب کنید که دقیقاً 2 بار ، پشت بیاید؟

پاسخ : در این مثال داریم :

$$P = \frac{1}{2} \text{ (احتمال پیروزی) ، احتمال پشت}$$

$$q = \frac{1}{2} \text{ (احتمال شکست) ، احتمال رو}$$

$$n = 3$$

$$x = 2$$

لذا داریم :

$$P(X=2) = \frac{\binom{3}{2}}{2^3} = \frac{3}{8}$$

راه دوم :

$$S = \{(ر ر ر) و (پ ر ر) و (ر پ ر) و (پ پ ر) و (ر پ پ) و (پ ر پ) و (پ پ پ)\}$$

$$A = \{(پ پ ر) ، (پ ر پ) ، (ر پ پ)\}$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{3}{8}$$

تذکر مهم : دقت کنید که اگر تعداد دفعات پرتاب ، عددی بزرگ باشد ، استفاده از روش دوم بسیار طولانی و خسته کننده خواهد شد.

تست : سکه ای را شش بار پرتاب می کنیم ، احتمال اینکه حداقل 2 رو بیاید کدام است؟

$$\frac{57}{64} \text{ (۱)} \quad \frac{63}{64} \text{ (۲)} \quad \frac{15}{64} \text{ (۳)} \quad \frac{52}{64} \text{ (۴)}$$

پاسخ :

یا ۲ رو یا بیشتر = احتمال حداقل 2 رو

$$= P(x=2) + P(x=3) + P(x=4) + P(x=5) + P(x=6)$$

$$= 1 - (P(X=0) + P(x=1))$$

$$P(X=0) = \frac{\binom{6}{0}}{2^6} = \frac{1}{64}$$

$$\Rightarrow \text{احتمال حداقل دو رو} = 1 - \left(\frac{1}{64} + \frac{6}{64} \right) = \frac{57}{64}$$

$$P(X=1) = \frac{\binom{6}{1}}{2^6} = \frac{6}{64}$$

تست : احتمال آنکه دانه نوعی لوبیا جوانه بزند ، 0/8 است ، اگر چهار دانه از این لوبیا را بکاریم ، احتمال آنکه فقط سه

تای آن جوانه بزند ، کدام است؟ (کنکور تجربی - ۷۵)

$$0/2496 \text{ (۱)} \quad 0/4096 \text{ (۲)} \quad 0/8332 \text{ (۳)} \quad 0/1032 \text{ (۴)}$$

پاسخ :

$$P = 0/8$$

$$q = 1 - 0/8 = 0/2 \Rightarrow P(X = 3) = \binom{4}{3} (0/8)^3 (0/2) = 0/4096$$

$$n = 4$$

$$x = 3$$

توزیع یکنواخت گسسته (توزیع گسسته ثابت) :

هرگاه متغیر تصادفی X ، مقادیر مختلف $1, 2, \dots, n$ را با احتمال همگن $\frac{1}{n}$ انتخاب کند، آن را متغیر تصادفی یکنواخت و تابع توزیع آن را، توزیع یکنواخت گسسته می نامیم :

جدول توزیع احتمال به صورت مقابل است :

X_i	1	2	3	...	n	
$P(X_i)$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	...	$\frac{1}{n}$	$\sum_{i=1}^n P(X_i) = 1$

لذا تابع توزیع احتمال متغیر یکنواخت گسسته فوق به صورت زیر است :

$$P(X = x_i) = \frac{1}{n}, \quad (x_i = 1, 2, 3, \dots, n)$$

کاربرد زیاد این توزیع در مبحث نمونه گیری است، یکی از نمونه های رو شده این توزیع، پرتاب یک تاس همگن می باشد که هر یک از برآمد های آن به تساوی، احتمالی برابر $\frac{1}{6}$ را اختیار می کنند.

اکنون به بیان این مثال و مثال هایی دیگر می پردازیم.

مثال : اگر متغیر تصادفی X را در ریختن تاسی همگن برابر با عددی که ظاهر می شود تعریف کنیم، مقادیری که X اختیار می کند، مقادیر صحیح 1 تا 6 است و احتمال متناظر با هر یک از این مقادیر $\frac{1}{6}$ است، جدول توزیع احتمال X به صورت زیر است :

X_i	1	2	3	4	5	6
P_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

این توزیع، توزیعی یکنواخت است.

مثال : شهین و احمد با هم تاس می ریزند و قرار می گذارند که هر کس برای اولین بار 4 بیاورد، برنده است، اگر شهین اول تاس بریزد، احتمال برنده شدن احمد چقدر است؟

پاسخ : متغیر تصادفی X را تعداد دفعات پرتاب احمد می گیریم و موفقیت آزمایش را برد احمد در نظر می گیریم، رو شده است که، برای آنکه احمد در یک پرتاب برنده شود، باید شهین در پرتاب خود برنده نشود و احمد برنده شود، و احتمال آن برابر است با :

$$P(X = 1) = \frac{5}{6} \times \frac{1}{6}$$

$$P(X = 2) = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6}$$

جدول توزیع احتمال این متغیر تصادفی به صورت زیر است :

x	1	2	3	...
P(X = x)	$\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)$	$\left(\frac{5}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)$	$\left(\frac{5}{6}\right)^3\left(\frac{1}{6}\right)$	...

اکنون احتمال برنده شدن احمد برابر است با:

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) &= \left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{5}{3}\right)^3\left(\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{5}{6}\right)^5\left(\frac{1}{6}\right) + \dots \\ &= \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{2n-1} = \frac{1}{6} \times \frac{q}{1-r} = \frac{1}{6} \times \frac{\frac{5}{6}}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2} \\ &= \frac{1}{6} \times \frac{\frac{5}{6}}{\frac{11}{36}} = \frac{1}{6} \times \frac{5 \times 36}{6 \times 11} = \frac{5}{11} \end{aligned}$$

مثال: سکهٔ سالمی را آنقدر پرتاب می‌کنیم، تا «پ» ظاهر شود، احتمال اینکه در پرتاب شماره‌های زوج، به این منظور برسیم چقدر است؟

پاسخ: فضای نمونه ای این آزمایش تصادفی عبارت است از:

$$S = \{ \text{ر ر و ر ب و ر ر ب و ر ر ر ر ب و ر ر ر ر ر ر ب و ...} \}$$

و پیشامد مطلوب عبارت است از :

$$A = \{ ر و پ ر ر و پ ر ر ر ر و پ ... \}$$

لذا داریم :

$$\begin{aligned} P(A) &= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right) + \dots \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots \\ &= \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

امید ریاضی یک متغیر تصادفی :

فرض کنید X یک متغیر تصادفی با تابع احتمال $P(X = x_i) = P_i$ ، $(i = 1, 2, \dots, n)$ باشد . امید ریاضی میانگین یا میانگین X ، که آن را با $E(X)$ نشان می دهند ، عددی است به صورت :

$$E(X) = P_1x_1 + P_2x_2 + \dots + P_ix_i + \dots + P_nx_n = \sum_{i=1}^n P_i x_i$$

فرض بر این است که مجموع طرف دوم موجود است ، یعنی سری سمت راست همگرا است چرا که تعداد جملات ممکن است نا متناهی باشد.

مثال : سه سکه را با هم پرتاب می کنیم و متغیر تصادفی X را برابر تعداد خط هایی که ظاهر می شوند ، تعریف می کنیم ، X می تواند مقادیر $0, 1, 2, 3$ را اختیار کند ، جدول توزیع احتمال این متغیر تصادفی به صورت مقابل است :

X_i	0	1	2	3
P_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

امید ریاضی این متغیر تصادفی برابر است با :

$$E(X) = 0\left(\frac{1}{8}\right) + 1\left(\frac{3}{8}\right) + 2\left(\frac{3}{8}\right) + 3\left(\frac{1}{8}\right) = 1/5$$

این بدین معنا است که در ریختن 3 سکه با هم یا ریختن یک سکه دو سه بار متوالی ، انتظار ظاهر شدن $1/5$ خط را داریم.

تذکر : همان طور که ملاحظه گردید ، گاهی امید X ، مقداری است که هرگز در عمل رخ نمی دهد ، ولی در اینجا ، امید X بدین معنا است که اگر به دفعات زیاد سه سکه را با هم بریزیم و شماره خط ها را در هر بار ثبت کنیم ، متوسط این شماره ها ، حدوداً برابر $1/5$ است.

تست : جدول مقابل ، توزیع احتمال متغیر تصادفی X است ، اگر امید ریاضی X برابر 5 باشد ، x برابر کدام است؟

X_i	1	3	7	x
P_i	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	α

(۴) 13

(۳) 12

(۲) 11

(۱) 9

پاسخ : اولاً باید داشته باشیم :

$$\sum_{i=1}^n P_i = 1 \Rightarrow \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{4}$$

ثانیاً طبق تعریف امید ریاضی باید داشته باشیم :

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i P_i = 5 \Rightarrow 1\left(\frac{1}{3}\right) + 3\left(\frac{1}{4}\right) + 7\left(\frac{1}{6}\right) + X(\alpha) = 5$$

$$\xrightarrow{\alpha=\frac{1}{4}} \frac{1}{3} + \frac{3}{4} + \frac{7}{6} + \frac{x}{4} = 5 \Rightarrow x = \frac{11}{4}$$

نکته : در هر آزمایش تجربی ، که توزیع احتمال آن ، توزیع برنولی (دو جمله ای) باشد ، امید ریاضی به سادگی از دستور $E(X) = np$ به دست می آید.

مثال : یک تیرانداز 60% شلیک های خود را به هدف می زند ، امید ریاضی آن که او در 5 بار شلیک ، به هدف بزند ، چقدر است؟

$$E(X) = np = 5 \times 0/6 = 3$$

پاسخ :

مثال : توزیع احتمال متغیر تصادفی X به صورت زیر مشخص می شود :

$$\begin{cases} P(X=i) = \frac{i}{i^2+3}, i=1,2,3 \\ P(X=j) = \frac{1}{14}, j=4,5,6 \end{cases}$$

جدول توزیع احتمال را بسازید ، میانگین X (امید X) را حساب کنید ، مقدار $P(X \geq 3)$ را حساب کنید؟

پاسخ :

X_i	1	2	3	4	5	6
P_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{14}$

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^6 P_i X_i = 1\left(\frac{1}{4}\right) + 2\left(\frac{2}{7}\right) + 3\left(\frac{1}{3}\right) + 4\left(\frac{1}{14}\right) + 5\left(\frac{1}{14}\right) + 6\left(\frac{1}{14}\right) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{4}{7} + 1 + \frac{4}{14} + \frac{5}{14} + \frac{6}{14} \\ &= \frac{7+16+28+8+10+12}{28} = \frac{81}{28} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X \geq 3) &= P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) + P(X=6) = \frac{1}{3} + \frac{1}{14} + \frac{1}{14} + \frac{1}{14} \\ &= \frac{1}{3} + \frac{3}{14} = \frac{23}{42} \end{aligned}$$

مثال : سه نفر به ترتیب ، سکه ای را پرتاب می کنند و اولین نفری که پرتاب او رو باشد برنده است ، و پرتاب ها همچنان ادامه می یابد تا بالاخره یکی برنده شود مطلوب است احتمال برد هر کدام از آنها.

پاسخ :

$$\begin{aligned} \text{احتمال برد نفر اول} = P_1 &= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{1} = 1 \\ \text{احتمال برد نفر دوم} = P_2 &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \dots = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{1} = 1 \\ \text{احتمال برد نفر سوم} = P_3 &= \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \dots = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{1} = 1 \end{aligned}$$

فضای نمونه ای پیوسته :

یک مجموعه متناهی به صورت بازه هایی از اعداد حقیقی IR و یا سطوحی در صفحه مختصات (IR^2) و احجام هندسی در فضا (IR^3) می باشند ، فضا های پیوسته ، برخلاف فضا های گسسته که از تعدادی متناهی نقطه (یا شمارا نا متناهی) تشکیل شده اند ، مجموعه هایی نا متناهی (نا متناهی ناشمارا) می باشند ، واضح است که در این حالت دیگر شمارش تعداد عناصر فضای نمونه ای یا پیشامد میسر نیست ولی آنچه که می تواند در تعریف احتمال در چنین فضا هایی مورد استفاده قرار گیرد ، در حالت یک بعدی (IR) طول بازه ، در حالت دو بعدی (IR^2) مساحت سطوح و در

حالت سه بعدی (IR^3) حجم اشکال فضایی می باشد ، در این حالت نسبت «اندازه» فضای پیشامد به «اندازه» فضای نمونه ای ، احتمال وقوع پیشامد را مشخص می کند . به عبارت دیگر ، اگر پیشامد مطلوب را با A نمایش دهیم ، داریم :

$$P(A) = \frac{\text{طول } A}{\text{طول } S} = \frac{\ell_A}{\ell_S}, \quad (A \subseteq S \subseteq IR)$$

(الف) در حالت 1 بعدی :

$$P(A) = \frac{\text{مساحت } A}{\text{مساحت } S} = \frac{a_A}{a_S}, \quad (A \subseteq S \subseteq IR^2)$$

(ب) در حالت 2 بعدی :

$$P(A) = \frac{\text{حجم } A}{\text{حجم } S} = \frac{V_A}{V_S}, \quad (A \subseteq S \subseteq IR^3)$$

(چ) در حالت 3 بعدی :

نکته مهم :

(۱) طول نقطه صفر است.

(۲) مساحت پاره خط صفر است.

(۳) حجم سطوح صفر است.

مثال : عددی حقیقی به تصادف بین -4 تا 6 اختیار می کنیم ، مطلوب است احتمال آنکه این عدد بین -2 تا 4 باشد؟

پاسخ : فضای نمونه ای از آزمایش تصادفی بازه $S = [-4, 6]$ و $A = [-2, 4]$ است لذا :

$$P(A) = \frac{\ell_A}{\ell_S} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

نکته : طول کلیه ی بازه های (a, b) ، $[a, b)$ ، (b, a) و $[b, a]$ برابر است با :

عدد سمت چپی - عدد سمت راستی $b-a$

نکته : طول مجموعه $A = [a, b] \cup [c, d]$ برابر است با :

$$(b-a) + (d-c)$$

پیشامد تقریباً غیر ممکن : هرگاه $S \subseteq IR$ نامتناهی باشد و $A \subseteq S$ متناظر باشد ، آنگاه $P(A) = 0$ (تقریباً صفر یا صفر حدی یا صفر نسبی) ، در این حالت A را یک پیشامد تقریباً غیر ممکن می نامیم.

مثال : عددی به طور تصادفی از بازه $[0, 3]$ اختیار می کنیم ، مطلوب است احتمال اینکه :

(الف) عدد انتخاب شده از ۲۲ بیشتر یا از 1 کمتر باشد؟

(ب) عدد رو شده 2 باشد؟

پاسخ :

$$S = [0, 3], A = [0, 1) \cup (2, 3] \Rightarrow P(A) = \frac{l_A}{l_S} = \frac{1+1}{3} = \frac{2}{3} \quad (\text{الف})$$

$$S = [0, 3], A = \{2\} = [2, 2] \Rightarrow P(A) = \frac{0}{3} = 0 \quad (\text{ب})$$

تذکر : ممکن است $A \neq \phi$ ولی با $P(A) = 0$.

مثال : هرگاه $S = [0, 1]$ و $A = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}\right\}$ ، آنگاه : $P(A) = 0$ در حالی که : $A \neq \phi$.

تذکر : ممکن است $A \neq S$ باشد ولی $P(A) = 1$.

مثال : هرگاه $S = [0, 1]$ و $A = (0, 1)$ ، آنگاه : $P(A) = 1$ در حالی که : $A \neq S$.

تست : پاره خطی به طول 4 را به دو قسمت تقسیم کرده ایم ، احتمال آنکه یکی از این دو قسمت از 5 برابر دیگری بزرگتر باشد چقدر است؟

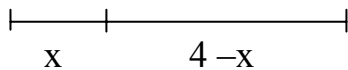
$$\frac{1}{3} \text{ (۴)}$$

$$\frac{1}{6} \text{ (۳)}$$

$$\frac{2}{5} \text{ (۲)}$$

$$\frac{1}{5} \text{ (۱)}$$

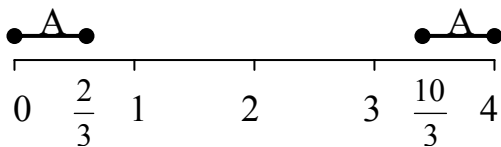
پاسخ :



باید داشته باشیم :

$$\begin{cases} x \cdot 5(4-x) \\ \text{یا} \\ (4-x) \cdot 5x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x > 20 \Rightarrow x > \frac{10}{3} \\ \text{یا} \\ 6x < 4 \Rightarrow x < \frac{2}{3} \end{cases}$$

بنابراین مطابق شکل پیشامد مطلوب (A) عبارت است از :



$$\Rightarrow \begin{cases} \ell_S = 4 \\ \ell_A = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{\ell_A}{\ell_S} = \frac{\frac{4}{3}}{4} = \frac{1}{3}$$

نکته : هرگاه پاره خطی به طول 1 را به 2 قسمت تقسیم کنیم ، احتمال آنکه یکی از آنها از n برابر دیگری بزرگتر باشد ،

$$\frac{2}{n+1} \text{ برابر است با :}$$

پاسخ : جواب تست فوق با استفاده از این نکته ، برابر است با :

$$\frac{2}{5+1} = \frac{1}{3}$$

تست : اتوبوسی هر 20 دقیقه از ایستگاهی خاص می گذرد ، هرگاه شروع به کار این اتوبوس از ساعت 6 صبح باشد ، اگر شخصی بین ساعت 6 تا 7 صبح به این ایستگاه بیاید ، احتمال آنکه حداکثر 5 دقیقه معطل شود چقدر است؟

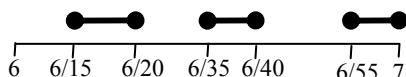
$$\%50 \text{ (۴)}$$

$$\%30 \text{ (۳)}$$

$$\%25 \text{ (۲)}$$

$$\%20 \text{ (۱)}$$

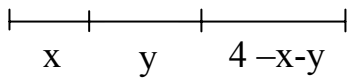
پاسخ :



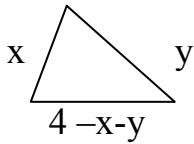
مطابق شکل داریم:

$$\begin{cases} \ell(S) = \text{ساعت } \ell = 60' \\ \ell(A) = 3 \times 5' = 15' \end{cases} \Rightarrow P(A) = \frac{\ell_A}{\ell_S} = \frac{15'}{60'} = \frac{1}{4} = \%25$$

تست : پاره خطی به طول 4 سانتی متر را به سه قسمت تقسیم می کنیم ، احتمال آنکه این سه قسمت ، تشکیل یک مثلث بدهند ، چقدر است؟



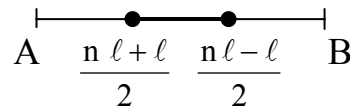
پاسخ : برای اینکه سه پاره خط تشکیل یک مثلث بدهند با توجه به شکل باید داشته باشیم:



$$\begin{cases} x < y + (4 - x - y) \rightarrow x < 4 \\ y < x + (4 - x - y) \rightarrow y < 4 \\ 4 - x - y < x + y \rightarrow x + y > 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ell < x + n\ell - x \Rightarrow \ell < n\ell \\ x < n\ell - x + \ell \Rightarrow \frac{n\ell + \ell}{2} \\ n\ell - x < x + \ell \Rightarrow x < \frac{n\ell - \ell}{2} \end{cases}$$

همواره برقرار است



لذا داریم :

$$\begin{cases} S = AB \\ A = \left(\frac{n\ell - \ell}{2}, \frac{n\ell + \ell}{2} \right) \Rightarrow \begin{cases} \ell_S = n\ell \\ \ell_A = \frac{n\ell + \ell}{2} - \frac{n\ell - \ell}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow P(A) = \frac{\ell}{n\ell} = \frac{1}{n} \end{cases}$$

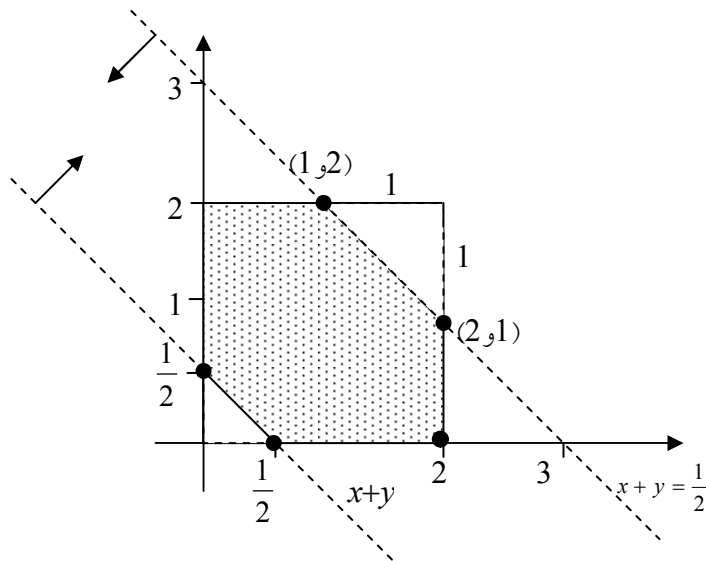
مثال : دو عدد به تصادف از بازه $[0, 2]$ انتخاب می کنیم ، مطلوب است احتمال اینکه مجموع این دو عدد از $\frac{1}{2}$ بیشتر و از 3 کمتر باشد؟

پاسخ : فضای نمونه ای مناسب عبارت است از :

$$S = \{(x, y) : 0 \leq x, y \leq 2\}$$

و پیشامد مطلوب ، مجموعه زیر است :

$$A = \left\{ (x, y) : \frac{1}{2} \leq x, y \leq 3 \right\}$$



با توجه به شکل داریم :

$$a_s = \text{مساحت مربع} = 2 \times 2 = 4$$

$$a_A = \text{مساحت هاشور خورده} = 4 - \left(\frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}{2} + \frac{1 \times 1}{2} \right) = 4 - \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{2} \right) = 4 - \frac{5}{8} = \frac{27}{8}$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{a_A}{a_s} = \frac{\frac{27}{8}}{\frac{4}{1}} = \frac{27}{32}$$

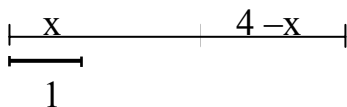
تست : دو پاره خط به طول های 1 و 4 سانتی متر داریم ، پاره خط بزرگتر را به دو قسمت تقسیم می کنیم احتمال آنکه این سه قطعه ، تشکیل یک مثلث بدهند ، چقدر است ؟

$$\frac{2}{5} \text{ (ع)}$$

$$\frac{2}{3} \text{ (ر)}$$

$$\frac{1}{3} \text{ (ز)}$$

$$\frac{1}{4} \text{ (ا)}$$

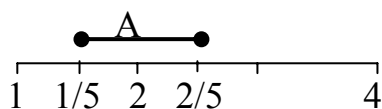


پاسخ : می دانیم شرط اینکه سه پاره خط مانند a و b و c تشکیل مثلث بدهند آن است که هر ضلع از مجموعه دو ضلع دیگر کوچکتر باشد .

لذا باید داشته باشیم :

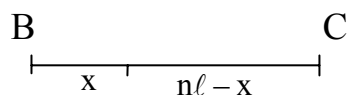
$$\begin{cases} x < (4-x) + 1 \Rightarrow 2x < 5 \Rightarrow x < \frac{5}{2} = 2.5 \\ 4-x < x + 1 \Rightarrow 2x > 3 \Rightarrow x > \frac{3}{2} = 1.5 \end{cases} \Rightarrow 1.5 < x < 2.5$$

$1 < x + 4 - x \Rightarrow 1 < 4 \rightarrow$ همواره برقرار است



$$\Rightarrow P(A) = \frac{\ell_A}{\ell_s} = \frac{1}{4}$$

نکته : در حالت کلی ، هرگاه دو پاره خط به طول های ℓ و $AB = n\ell$ ($2 \leq n \in \mathbb{N}$) داشته باشیم و پاره خط بزرگتر $(n\ell)$ به دو قسمت تقسیم کنیم ، آنگاه احتمال اینکه ، این سه قسمت تشکیل مثلث بدند برابر است با $\frac{1}{n}$.



تست : دو عدد به طور تصادفی بین 0 و 2 انتخاب می شوند ، احتمال آنکه نسبت بین این دو عدد مساوی 1 باشد ، چقدر است؟

$$\frac{1}{4} \text{ (ع)}$$

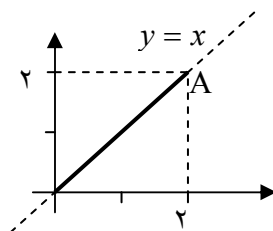
$$\frac{2}{3} \text{ (ر)}$$

$$\frac{1}{3} \text{ (ز)}$$

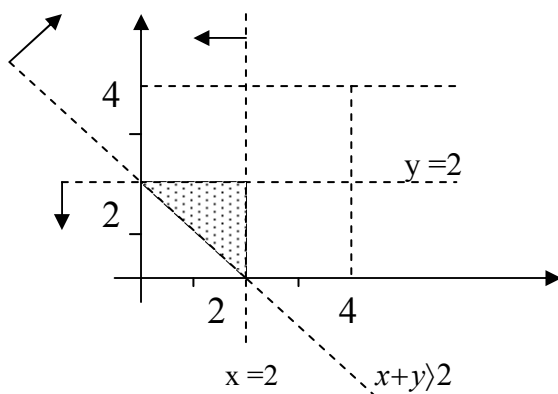
$$0 \text{ (ا)}$$

پاسخ : چون $\frac{x}{y} = 1$ لذا $y = x$ ، پس پیشامد مطلوب خط $y = x$ است که پاره خط $\overline{OA}$ می باشد و چون مساحت این پاره خط صفر است لذا :

$$P(A) = \frac{a_A}{a_s} = \frac{0}{4} = 0$$



اکنون با توجه به شکل زیر داریم :



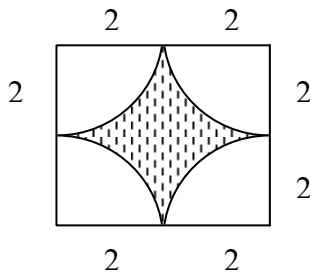
$$a_s = 4 \times 4 = 16$$

$$\frac{a_A}{a_s} = \frac{\frac{1}{8}a_s}{a_s} \Rightarrow \frac{1}{8}$$

تست : نقطه ای به تصادف داخل مربعی به ضلع 4 سانتی متر انتخاب می کنیم ، مطلوب است احتمال آنکه فاصله این نقطه از هر رأس این مربع بزرگتر از 2 باشد؟

$$1 - \frac{\pi}{6} \quad (۴) \qquad 1 - \frac{\pi}{8} \quad (۳) \qquad 1 - \frac{\pi}{4} \quad (۲) \qquad 1 - \frac{\pi}{2} \quad (۱)$$

پاسخ : مطابق شکل به مرکز رئوس مربع و به شعاع 2 ، چهار کمان می زنیم ، در این صورت پیشامد مطلوب (A) عبارت است از قسمت هاشور خورده ، مساحت متمم A را به دست آورده اند از مساحت کل (a_s) کم می کنیم لذا داریم :



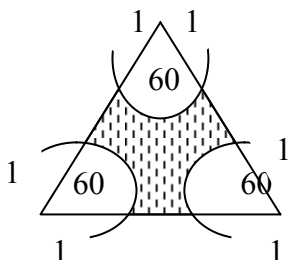
$16 - 4\pi$ = مساحت یک دایره کامل - a_s = مساحت چهار ربع دایره مساوی - $a_A = a_s$ و $4^2 = 16$ = مساحت مربع a_s

لذا احتمال مطلوب برابر است با :

$$P(A) = \frac{a_A}{a_s} = \frac{16 - 4\pi}{16} = \frac{16}{16} - \frac{4\pi}{16} = 1 - \frac{\pi}{4}$$

مثال : نقطه ای به تصادف درون یک مثلث متساوی الاضلاع به ضلع 3 انتخاب می کنیم ، مطلوب است احتمال آنکه فاصله آن نقطه از هر رأس بیشتر از 1 باشد.

پاسخ : مطابق شکل به مرکز رئوس مثلث و به شعاع 1 ، سه کمان می زنیم ، در این صورت پیشامد مطلوب (A) عبارت است از قسمت هاشور خورده مساحت متمم A را به دست آورده ، از مساحت کل (a_s) کم می کنیم لذا داریم :



$$a_s = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{3^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$$

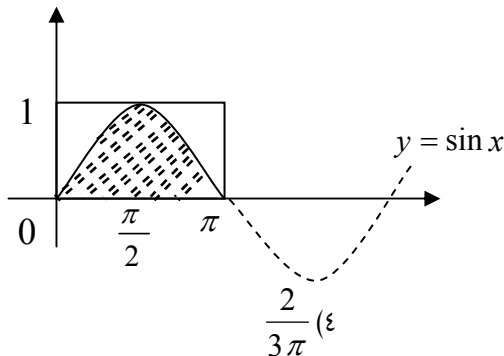
(سه قطاع مساوی با زاویه مرکزی 60°) $a_A = a_s$ - مساحت قسمت هاشور خورده

$$= a_s - (\text{مساحت یک نیم دایره به شعاع 1}) = \frac{9\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi R^2}{2}$$

$$= \frac{9\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{a_A}{a_S} = \frac{\frac{9\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{2}}{\frac{9\sqrt{3}}{4}} = 1 - \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}$$

تست : از داخل مستطیل مقابل یک نقطه به تصادف اختیار می کنیم ، احتمال آنکه این نقطه درون قسمت هاشور خورده قرار بگیرد چقدر است؟



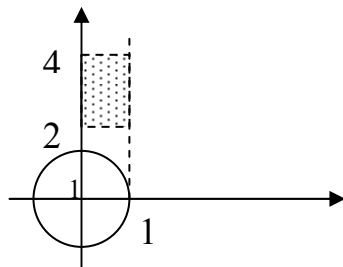
پاسخ : واضح است که :

$$a_S = \text{مساحت مستطیل} = 1 \times \pi = \pi$$

$$a_A = \text{مساحت قسمت هاشور خورده} = \int_0^{\pi} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\pi} = 1 - (-1) = 2$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{a_A}{a_S} = \frac{2}{\pi}$$

مثال : از هر یک از دو بازه $[0, 1]$ و $[2, 4]$ یک عدد به طور تصادفی اختیار می کنیم ، مطلوب است احتمال آنکه مجموع مربعات آن دو عدد کمتر از 1 باشد؟



$$S = [0, 1] \times [2, 4] \Rightarrow a_S = 1 \times 2 = 2$$

$$A = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\} \Rightarrow a_A = 0$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{a_A}{a_S} = \frac{0}{2} = 0$$

تست : نقطه ای به تصادف از درون مکعب واحد (مکعب به طول 1) انتخاب می کنیم ، احتمال آنکه این نقطه درون کره ای که در این مکعب محاط شده است نباشد ، چقدر است؟

$$\frac{4-\pi}{4} \quad (4) \quad \frac{3-\pi}{3} \quad (3) \quad \frac{8-\pi}{8} \quad (2) \quad \frac{6-\pi}{6} \quad (1)$$

پاسخ : حجم مکعب برابر است با :

$$V_S = 1^3 = 1$$

حجم پیشامد مطلوب برابر است با حجم مکعب منهای حجم کره محاط در آن ، اما با توجه به نکته زیر :

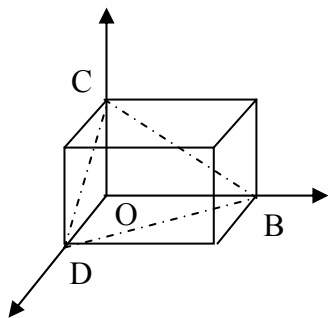
(نکته : شعاع کره محاط در مکعبی به ضلع a برابر است با : $\frac{a}{2}$) داریم :

$$V_A = V_S - \frac{4}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^3 = 1 - \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{V_A}{V_S} = \frac{1 - \frac{\pi}{6}}{1} = 1 - \frac{\pi}{6} = \frac{6 - \pi}{6}$$

نکته : شعاع کره محیط بر مکعبی به ضلع a برابر است با : $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

تست : در مکعب مقابل ، احتمال آنکه نقطه انتخاب شده ، درون هرم BCD باشد چقدر است؟



$$\frac{1}{6} \text{ (ع)}$$

$$\frac{1}{4} \text{ (ر)}$$

$$\frac{1}{12} \text{ (ز)}$$

$$\frac{1}{3} \text{ (ا)}$$

پاسخ :

$$V_S = \text{حجم مکعب} = a^3$$

$$V_A = \text{حجم هرم} = \frac{1}{6} \text{ حجم مکعب} = \frac{1}{6} a^3$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{V_A}{V_S} = \frac{\frac{1}{6} a^3}{a^3} = \frac{1}{6}$$

یادآوری : حجم هرم مزبور عبارت است از :

$$V_A = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{مساحت قاعده}}{3} = \frac{\frac{a \times a}{2} \times 3}{3} = \frac{1}{3} a^3$$

تست : از درون مکعب واحد ، یک نقطه به تصادف انتخاب می کنیم ، احتمال اینکه مجموع طول و عرض و ارتفاع این نقطه کمتر از 1 باشد کدام است؟

$$\frac{1}{12} \text{ (ع)}$$

$$\frac{1}{4} \text{ (ر)}$$

$$\frac{1}{6} \text{ (ز)}$$

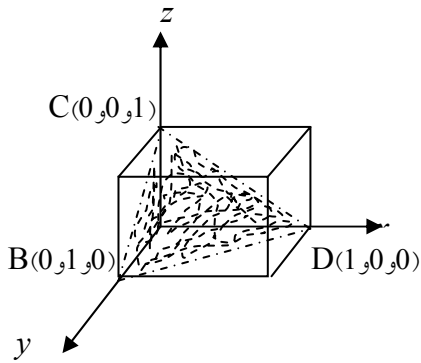
$$\frac{1}{3} \text{ (ا)}$$

پاسخ : فرض می کنیم $M(x, y, z)$ ، نقطه مورد نظر باشد ، پیشامد مطلوب عبارت است از :

$$A = \{(x, y, z) : x + y + z < 1\}$$

واضح است که مطابق شکل $x + y + z = 1$ صفحه گذرنده از نقاط D و B و C می باشد لذا برای آنکه مجموع طول و عرض و ارتفاع نقطه M کمتر از $\frac{1}{2}$ باشد، کافی است که نقطه M درون هرم BCD قرار گیرد لذا بنابر آنچه در تست قبل گفتیم داریم :

$$P(A) = \frac{1}{6}$$



آمار :

الف : مفاهیم :

- ۱- جامعه ی آماری : دسته ی وسیعی از اشیاء است که می خواهیم مطالعاتی درباره ی آنها ، انجام دهیم.
- ۲- متغیر تصادفی : مشخصه ی ویژه ای از افراد یک جامعه را که می خواهیم مورد مطالعه قرار دهیم متغیر تصادفی می گوئیم.
- ۳- متغیر تصادفی کمی : صفتی را که برای اعضای یک جامعه می توان با عدد و کمیت بیان کرد صفت کمی می گوئیم. مانند : سن و قد.
- ۴- انواع متغیر های کمی عبارتند از :

- ۱- متغیر کمی پیوسته : متغیری است که با اندازه گیری حاصل می شود. مانند : طول قد ، اندازه ی وزن و ...
- ۲- متغیر کمی گسسته : مجموعه مقادیری است که از طریق شمارش بدست می آیند ، به عبارت دیگر شمارش پذیر هستند. مانند : تعداد دانش آموزان یک مدرسه ، مجموعه ی اعداد طبیعی و ...
- ۵- نمونه : به علت در دسترس نبودن کل جامعه و اقتصادی نبودن مطالعه روی آن ، بخشی از جامعه را به طور تصادفی انتخاب کرده ، مطالعه ی آماری را روی این بخش انجام می دهیم و سپس نتیجه ی حاصل را به کل جامعه تعمیم می دهیم ، این بخش از جامعه را نمونه ی تصادفی یا به اختصار نمونه می گوئیم.
- ۶- داده : اطلاعات حاصل از نمونه را داده می گوئیم.
- ۷- حجم یا اندازه ی نمونه : تعداد افرادی را که در نمونه انتخاب می شوند ، حجم یا اندازه ی نمونه می نامیم.

ب : جدول توزیع فراوانی :

- (۱) دامنه ی تغییرات : فاصله ی بین کوچکترین و بزرگترین داده را دامنه ی تغییرات داده ها می گویند و آن را با R نمایش می دهند . لذا : $R = \text{Max} - \text{Min}$
- (۲) حدود دسته ها : عدد اول هر دسته را حد پایین (کران پایین) دسته و عدد دوم آن را حد بالای (کران بالای) دسته گوئیم.
- (۳) طول دسته ها : فاصله یا اختلاف دو کران پایین متوالی (دو کران بالای متوالی) را طول دسته می نامیم.
- (۴) فراوانی (فراوانی مطلق) : تعداد دفعات تکرار یک داده را فراوانی آن داده می گوئیم ، همچنین تعداد داده های موجود در هر دسته را فراوانی مطلق یا فراوانی آن دسته می گوئیم و آن را با F_i نمایش می دهیم ، توجه داشته باشید که اگر داده ای ، با کران بالای دسته ای برابر بود ، آن را در دسته ی بعدی قرار می دهیم.
- (۵) مرکز یا نشان یا نماینده ی دسته : مرکز هر دسته ، عبارت است از میانگین کران پایین و بالای آن دسته ، در واقع داده های نزدیک به هم را در یک دسته قرار می دهیم (یعنی آنها را برابر فرض می کنیم) و مرکز دسته می نامیم ، مرکز دسته ها را با x_i نمایش می دهیم.
- (۶) رابطه ی بین دامنه ی تغییرات ، طول دسته ها و تعداد دسته ها :

$$\text{دامنه ی تغییرات} = \frac{\text{دامنه ی تغییرات}}{\text{تعداد دسته ها}} \quad \text{یا} \quad \text{تعداد دسته ها} = \frac{\text{دامنه ی تغییرات}}{\text{تعداد دسته ها}}$$

تست: در یک دسته بندی داده ها، مرکز 4 دسته ی متوالی 5، 8، 11 و 14 و تعداد دسته ها برابر 10 است، دامنه ی تغییرات داده ها کدام است؟

(۱) 20 (۲) 40 (۳) 30 (۴) 15

$$C = 8 - 5 = 3$$

حل:

$$\frac{R}{C} = \frac{R}{3} \Rightarrow 10 = \frac{R}{3} \Rightarrow R = 30$$

توجه داشته باشید که هر چه دامنه ی تغییرات بزرگتر باشد، تعداد دسته ها بیشتر خواهد بود.

(۷) فراوانی نسبی: فراوانی نسبی هر دسته عبارت است از فراوانی مطلق آن دسته تقسیم بر مجموع همه فراوانی های مطلق (مجموع همه ی فراوانی های مطلق را با n نمایش می دهیم)، یعنی:

$$f_i = \frac{\text{فراوانی مطلق}}{n} = \frac{F_i}{n}$$

(۸) درصد فراوانی نسبی: درصد فراوانی نسبی هر دسته، عبارت است از فراوانی نسبی آن دسته ضربدر 100.

تست: اگر درصد فراوانی نسبی دسته ی سوم برابر 7 و فراوانی آن دسته 35 باشد، تعداد کل داده های جامعه کدام است؟

(۱) 750 (۲) 100 (۳) 700 (۴) 500

$$\frac{35}{n} \times 100 = 7 \Rightarrow n = 500$$

پاسخ:

تست: اگر فراوانی مطلق دسته ای 30 و فراوانی نسبی آن 0/12 باشد، تعداد داده ها کدام است؟

(۱) 300 (۲) 360 (۳) 250 (۴) 220

حل:

$$f_i = \frac{F_i}{n} \Rightarrow \frac{12}{100} = \frac{30}{n} \Rightarrow n = \frac{30 \times 100}{12} = 10 \times 25 = 250$$

(۹) فراوانی تجمعی: فراوانی تجمعی هر دسته، عبارت است از فراوانی آن دسته به علاوه ی کل فراوانی مطلق طبقات ما قبل، فراوانی تجمعی را با $F C_i$ نمایش می دهیم.

(۱۰) فراوانی نسبی تجمعی (فراوانی تجمعی نسبی): فراوانی تجمعی نسبی هر دسته، عبارت است از فراوانی تجمعی آن دسته، تقسیم بر n ، به بیان دیگر می توان گفت که فراوانی نسبی تجمعی هر دسته، عبارت است از فراوانی نسبی آن دسته، به علاوه ی فراوانی های نسبی طبقات ما قبل.

(۱۱) درصد فراوانی نسبی تجمعی: درصد فراوانی نسبی تجمعی هر دسته عبارت است از فراوانی نسبی تجمعی آن دسته ضربدر 100.

نکته: مجموع همه ی فراوانی های مطلق برابر n است.

نکته: مجموع همه ی فراوانی های نسبی برابر 1 است.

نکته: مجموع همه ی درصد های فراوانی های نسبی برابر 100 % است.

نکته: آخرین فراوانی تجمعی، همیشه برابر n است.

نکته: آخرین درصد فراوانی نسبی تجمعی، همیشه برابر 100 % است.

مثال ۱: اولاً جدول توزیع فراوانی داده های جدول زیر را تشکیل دهید؟ ثانیاً فراوانی نسبی و تجمعی و درصد های فراوانی نسبی و فراوانی تجمعی را در جدول حساب کنید؟

2	3	1	0	1	1	3	2	1	0
1	4	2	4	0	2	1	0	4	1

(تعداد اتومبیل های خراب یک آژانس در یک روز) ←

حل: همان گونه که در جدول فوق دیده می شود، تعداد اتومبیل های خراب (متغیر گسسته)، فقط مقادیر 0 و 1 و 2 و 3 و 4 را اختیار می کند، بنابراین چون تنوع داده ها، در این جدول کم می باشد لذا هر داده را معادل یک دسته در نظر می گیریم.

درصد فراوانی نسبی تجمعی	فراوانی تجمعی	درصد فراوانی نسبی	فراوانی نسبی	فراوانی مطلق	تعداد اتومبیل های خراب
$\frac{4}{20} \times 100 = 20$	4	$0/20 \times 100 = 20$	$\frac{4}{20} = 0/20$	4	0
55	11	35	0/35	7	1
75	15	20	0/20	4	2
85	17	10	0/10	2	3
100	$20 = n$	15	0/15	3	4
		% 100	1	$n = 20$	

مثال ۲: داده های زیر طول 50 برگ را که با دقت میلی متری اندازه گیری شده اند، نشان می دهد، مطلوب است:

الف) جدول توزیع فراوانی این داده ها، به طوری که 7 دسته داشته باشیم؟

ب) مرکز تمام دسته ها

21 42 35 26 34 36 33 31 11 30
 14 34 47 22 40 41 30 39 31 13
 32 16 17 41 36 25 35 24 21 26
 38 20 39 30 33 28 43 37 28 23
 38 32 20 31 25 29 33 18 27 18

پاسخ: با توجه به داده های فوق، دیده می شود که کوچکترین داده برابر 11 mm و بزرگترین آنها 47 mm است لذا داریم:

$$R = \text{Max} - \text{Min} = 47 - 11 = 36$$

اکنون برای اینکه 7 دسته داشته باشیم، با توجه به:

$$\text{طول دسته} = \frac{\text{دامنه ی تغییرات}}{\text{تعداد دسته ها}} = \frac{36}{7} = 5 \frac{1}{7}$$

لازم است که طول دسته را برابر 6 اختیار کنیم.

نکته : حد پایین دسته ی اول را می توان برابر یا حتی کوچکتر از کوچکترین داده اختیار کرد.

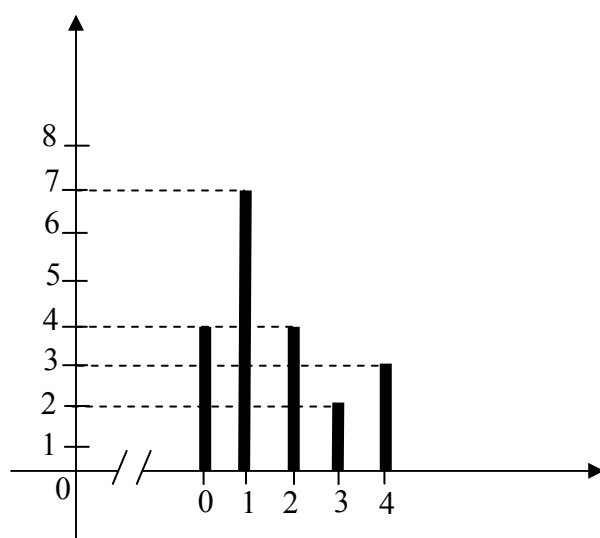
مرکز دسته ها	فراوانی	حدود دسته ها
$\frac{11+17}{2} = 14$	4	11-17
20	8	17-23
26	9	23-29
32	14	29-35
38	10	35-41
44	4	41-47
50	1	47-53
	$n = 50$	$C = 6$

نکته ی مهم : توجه کنید که اگر تعداد دسته ها کاهش یابد ، اطلاعات مربوط به توزیع فراوانی کم و کمتر می شود تا اینکه از بین می رود و هر چقدر تعداد دسته ها بیشتر باشد کار مورد نظر برای تجزیه و تحلیل اطلاعات بیشتر است ، بنابراین ایجاد نوعی تعادل ضروری به نظر می رسد.

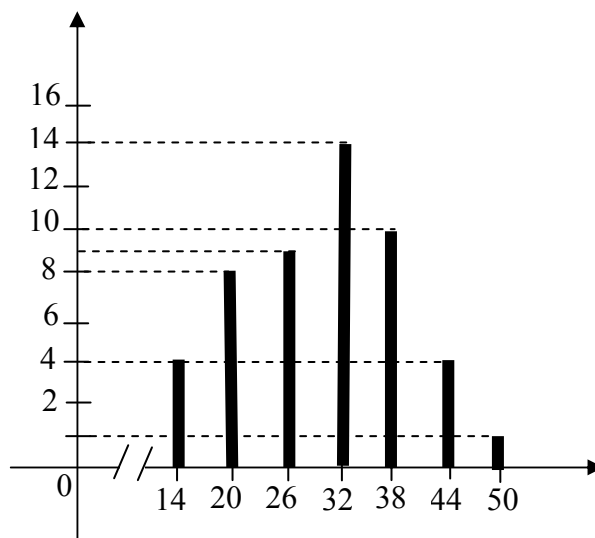
لذا در حالت کلی ، خوب است که داده ها را به طور تقریبی به 6 تا 10 دسته ، (همان طور که در مثال فوق دیدیم) تقسیم کنیم.

(۱۲) نمودار میله ای : برای رسم نمودار میله ای ، مرکز دسته ها را روی محور x ها و فراوانی هر دسته را روی محور y ها نمایش داده ، از مرکز هر دسته به اندازه ی فراوانی آن دسته بالا می رویم.

مثال :



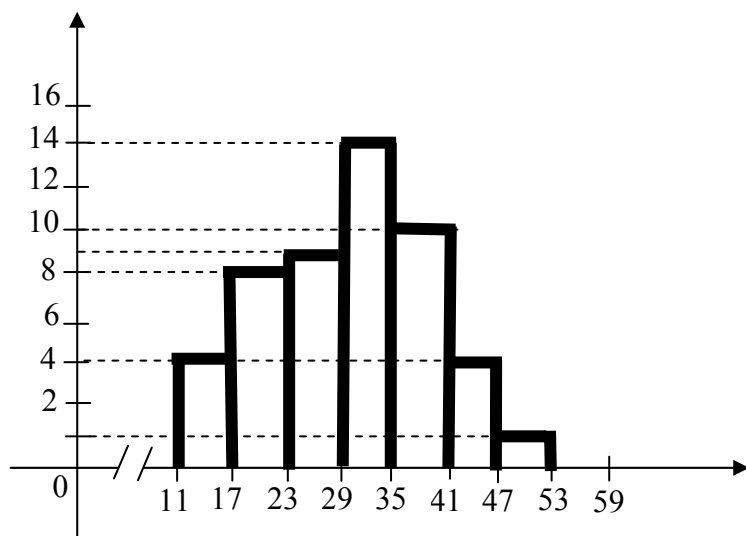
نمودار میله ای مثال (۱)
(تعداد اتومبیل های خراب)



نمودار میله ای مثال (۲)
(طول برگ ها)

۱۳) نمودار هیستوگرام (مستطیلی): این نمودار را زمانی می توان رسم کرد که جدول توزیع فراوانی، دارای حدود دسته باشد، برای رسم این نمودار، روی محور x ها، حدود دسته ها و روی محور y ها فراوانی دسته ها را مشخص می کنیم.

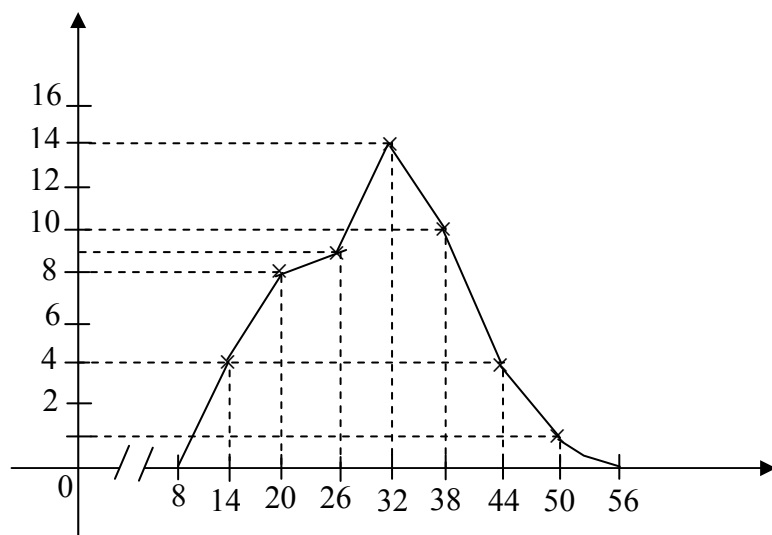
مثال:



نمودار هیستوگرام مثال (2)
(طول برگ ها)

۱۳) نمودار چند ضلعی فراوانی (چند بر فراوانی): در این نمودار، نقاطی را در صفحه مشخص می کنیم که طول آنها، برابر مرکز دسته ها و عرض نقاط، برابر فراوانی همان دسته است، پس این نقاط را به یکدیگر وصل می کنیم، در نهایت، از نقاط ابتدایی و انتهایی مرکز دسته ها به اندازه ی طول دسته ها، روی محور x ها فاصله می دهیم، این دو نقطه را A و B نامیده و سپس دو سر منحنی را به A و B وصل می کنیم.

مثال:



نمودار چند بر مثال (2)
(طول برگ ها)

۱۴) نمودار دایره ای : برای رسم این نمودار ، مساحت دایره را به وسیله ی قطاع هایی به نسبت فراوانی ها تقسیم می کنیم ، این نسبت ها به وسیله فرمول زیر بر حسب درجه به دست می آیند :

$$\alpha = \frac{F_i}{n} \times 360^\circ = \frac{\text{فراوانی هر دسته}}{n} \times 360^\circ$$

مثال : تولید سالانه ی یک کارخانه ی ماشین سازی به شرح زیر است ، نمودار دایره ای این داده ها را رسم کنید؟

15000 : ماشین سواری چهار در

5000 : ماشین سواری دو در

6000 : استیشن

2000 : وانت

2000 : کامیون سبک

حل : مجموع کل خودرو ها $n = \sum F_i = 30000$

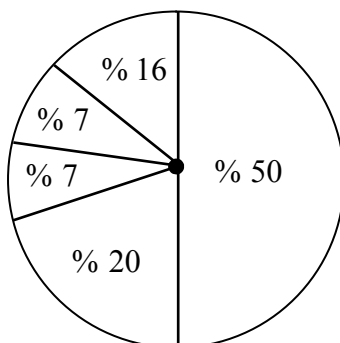
$$\alpha_1^0 = \frac{15000}{30000} \times 360^\circ = 180^\circ \quad \xrightarrow{\text{درصد فراوانی}} \quad \frac{15000}{30000} \times 100 = \% 50$$

$$\alpha_2^0 = \frac{5000}{30000} \times 360^\circ = 60^\circ \quad \xrightarrow{\text{درصد فراوانی}} \quad \frac{5000}{30000} \times 100 = \% 16$$

$$\alpha_3^0 = \frac{6000}{30000} \times 360^\circ = 72^\circ \quad \xrightarrow{\text{درصد فراوانی}} \quad \frac{6000}{30000} \times 100 = \% 20$$

$$\alpha_4^0 = \frac{2000}{30000} \times 360^\circ = 24^\circ \quad \xrightarrow{\text{درصد فراوانی}} \quad \frac{2000}{30000} \times 100 = \% 7$$

$$\xrightarrow{\text{درصد فراوانی}} \quad \frac{2000}{30000} \times 100 = \% 7$$



تست : در نمودار دایره ای نمرات 84 دانش آموز ، کمان متناظر با نمرات بین 18-16 ، برابر 60° است ، فراوانی متناظر نمره ی 17 در نمودار میله ای کدام است؟ (سراسری - 75)

16 (ع

14 (س

13 (ب

12 (ا

پاسخ :

$$\frac{F_i}{n} \times 360^\circ = 60^\circ \Rightarrow \frac{F_i}{84} = \frac{1}{6} \Rightarrow F_i = 14$$

شاخص ها

۱- شاخص های هندسی

- ۱- نمودار میله ای
- ۲- نمودار مستطیلی
- ۳- نمودار چند ضلعی
- ۴- نمودار دایره ای

۱- شاخص های مرکزی

- ۱- میانگین $(\bar{x})$
- ۲- میانه $(\tilde{x})$
- ۳- مُد

۲- شاخص های عددی

۲- شاخص های پراکندگی

- ۱- دامنه ی تغییرات (R)
- ۲- واریانس σ^2
- ۳- انحراف معیار (σ)
- ۴- ضریب تغییرات (CV)

شاخص های مرکزی :

۱- میانگین : عبارت است از مجموع کل داده ها تقسیم بر تعداد آنها ، یعنی :

$$\bar{x} = \frac{\sum F_i}{n}$$

مثال : میانگین داده های زیر را حساب کنید؟

$$x_i : 2, 5, 3, 9, 11$$

$$\bar{x} = \frac{\sum F_i}{n} = \frac{30}{5} = 6$$

مثال : میانگین داده های زیر را حساب کنید؟

$$x_i : 2-2-2-2-2-3-3-5-7-12$$

$$\bar{x} = \frac{\sum F_i X_i}{n} = \frac{(2 \times 5) + (3 \times 2) + (5 \times 1) + (7 \times 1) + (12 \times 1)}{10}$$

$$\bar{x} = \frac{40}{10} = 4$$

نکته: با استفاده از فرمول $\bar{x} = \frac{\sum F_i}{n}$ ، داریم:

میانگین $\times$ تعداد داده ها = مجموع کل داده ها یا $\sum F_i = n \times \bar{x}$

تست: میانگین 5 داده برابر 9 است، مجموع داده ها چقدر است؟

(۱) 50 (۲) 45 (۳) 95 (۴) 40

پاسخ:

$$\sum x_i = n \times \bar{x} = 5 \times 9 = 45$$

تست: میانگین نمرات دوازده درس دانش آموزی در امتحان 14/5 است، اگر نمره ی یک درس او 20 باشد، میانگین نمره ی یازده درس دیگر او کدام است؟ (سراسری - 57)

(۱) 13 (۲) 13/2 (۳) 14 (۴) 14/2

پاسخ:

$$\sum x_i = n \times \bar{x} = 12 \times 14/5 = 174 \Rightarrow 174 - 20 = 154$$

میانگین یازده درس دیگر $\bar{y} = \frac{154}{11} = 14$

تست: میانگین 10 داده ی آماری برابر 5 محاسبه شده است، پس از محاسبه معلوم گردید که دو مقدار 10 و 12 نیز باید به داده ها اضافه گردد، میانگین داده های جدید کدام است؟

پاسخ: $\sum x_i = n \times \bar{x} = 10 \times 5 = 50$

مجموع کل دوازده داده $50 + 10 + 12 = 72$

میانگین جدید $\bar{y} = \frac{72}{12} = 6$

تست: اگر میانگین داده های آماری $x_1, x_2, \dots, x_n$ برابر $\bar{x}$ باشد، میانگین داده های $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \bar{x} + n$ کدام است؟ (آزاد - 72)

(۱) $n\bar{x} + 1$ (۲) $\frac{n\bar{x} + n}{n+1}$ (۳) $\bar{x} + \frac{n}{n+1}$ (۴) $\frac{\bar{x} + n}{n+1}$

پاسخ:

مجموع داده ها $\sum x_i = n\bar{x}$

مجموع کل $(n+1)$ داده $n\bar{x} + \bar{x} + n = (n+1)\bar{x} + n$

میانگین جدید $\bar{y} = \frac{(n+1)\bar{x} + n}{n+1} = \frac{(n+1)\bar{x}}{n+1} + \frac{n}{n+1} = \bar{x} + \frac{n}{n+1}$

نکته: هرگاه میانگین $x_1, x_2, \dots, x_n$ برابر $\bar{x}$ و میانگین $y_1, y_2, \dots, y_m$ برابر $\bar{y}$ باشد، آنگاه میانگین

همه ی $(m+n)$ داده ی $x_1, x_2, \dots, x_n$ و $y_1, y_2, \dots, y_m$ برابر است با: $\bar{Z} = \frac{n\bar{x} + m\bar{y}}{n+m}$

تست: میانگین 8 داده برابر 5 و میانگین 12 داده ی دیگر برابر 10 است، میانگین کل این 20 داده برابر است با؟ (سراسری - 63)

(۱) 7/5 (۲) 8 (۳) 10 (۴) $\frac{32}{3}$

پاسخ:

$$\begin{aligned}\sum x_i &= n \bar{x} = 8 \times 5 = 40 && \text{مجموع 8 داده ی اول} \\ \sum y_i &= m \bar{y} = 12 \times 10 = 120 && \text{مجموع 12 داده ی دوم} \\ n \bar{x} + m \bar{y} &= 40 + 120 = 160 && \text{مجموع کل 20 داده}\end{aligned}$$

$$\bar{Z} = \frac{n \bar{x} + m \bar{y}}{n + m} = \frac{160}{20} = 8$$

نکته: در صورتی که بخواهیم میانگین را در یک جدول توزیع فراوانی حساب کنیم، از رابطه زیر استفاده می کنیم:

$$\bar{x} = \frac{\sum F_i \times x_i}{n}$$

تست: در توزیع

x_i	1	2	3	4	5	6
f_i	4	6	8	7	3	2

، میانگین کدام است؟ (سراسری - 69)

4/2 (۴)

4 (۳)

3/5 (۲)

3/17 (۱)

پاسخ:

x_i	F_i	$F_i x_i$
1	4	4
2	6	12
3	8	24
4	7	28
5	3	15
6	2	12
$n = 30$		$\sum F_i X_i = 95$

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{\sum F_i x_i}{n} = \frac{95}{30} = 3/17$$

تذکر: اگر جدول دارای حدود دسته باشد، x_i ها، همان مراکز دسته ها خواهند بود.

تست: میانگین داده های جدول زیر کدام است؟ (سراسری - 80)

حدود دسته ها	2-4	4-6	6-8	8-10
فراوانی	2	4	3	1

5/6 (۴)

5/5 (۳)

5/4 (۲)

5/2 (۱)

پاسخ:

حدود دسته ها	$n \bar{F}_i^{10}$	x_i	$\sum F_i x_i = 56$
2-4	2	3	6
4-6	4	5	20
6-8	3	7	21
8-10	1	9	9

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{\sum F_i x_i}{n} = \frac{56}{10} = 5/6$$

۲- **میان:** برای محاسبه ی میانه ، ابتدا داده ها را به طور صعودی یا نزولی مرتب کرده ، در صورتی که تعداد داده ها فرد باشد ، میانه داده ی وسطی است و در صورتی که تعداد داده ها زوج باشد ، میانه نصف مجموع دو داده ی وسطی است ، ضمناً میانه را با $\bar{x}$ (بخوانید $\bar{x}$ مد) نمایش می دهیم.

تذکر: مرتب کردن داده ها ، یادتان نرود.

تست: میانه ی داده های آماری زیر کدام است؟ (سراسری - 67)

17 , 11 , 41 , 58 , 35 , 40

49/5 (ع)

58 (۳)

37/5 (۲)

41 (۱)

پاسخ: ابتدا داده ها را مرتب می کنیم :

58 و 41 و 40 و 35 و 17 و 11

$$\bar{x} = \frac{35+40}{2} = \frac{75}{2} = 37.5$$

۳- **مد (نما):** در بین همه ی داده ها ، داده ای که از همه ی داده ها بیشتر تکرار شده باشد (به عبارت دیگر دارای حداکثر فراوانی باشد) را مد یا نما می گوئیم.

تذکر: در یک سری از داده ها ، اگر دو یا چند داده ، بیش از داده های دیگر ، تکرار شده باشند ، هر دو یا چند داده مد خواهند بود و اگر هیچ کدام از داده ها ، تکرار نشده باشند ، مد نخواهیم داشت.

مثال: در هر یک از موارد زیر ، مد را مشخص کنید؟

$$\text{مد} = 3$$

الف) 10 و 5 و 5 و 3 و 3 و 3

$$\text{مد} = 4, 7$$

ب) 7 و 7 و 7 و 6 و 6 و 6 و 5 و 4 و 4 و 4 و 3 و 2 و 1

مد وجود ندارد

ج) 21 و 17 و 11 و 4 و 1

تذکر: دقت کنید که در یک سری از داده ها ، مد داده ای است که بیش از همه تکرار شده باشد ، نه تعداد دفعات تکرار آن داده.

شاخص های پراکندگی:

۱- دامنه ی تغییرات (R):

$$R = \text{Max} - \text{Min}$$

نکته: اگر بخواهیم پراکندگی داده ها را خیلی سریع ولی با دقت کم (به دلیل اینکه در دامنه ی تغییرات ، تنها کوچکترین و بزرگترین داده مؤثرند) تعیین کنیم ، از دامنه ی تغییرات استفاده می کنیم.

تست: چرا استفاده از دامنه ی تغییرات به عنوان مقیاس پراکندگی توصیه نمی شود؟ (آزمون سراسری - 67)

(۱) مقدار آن اغلب بزرگ است.

(۲) مقدار آن از یک نمونه به نمونه ی دیگر تغییر می کند.

(۳) با ازدیاد تعداد داده ها ، فقط می تواند کم گردد.

(۴) در محاسبه ی آن فقط از دو اندازه استفاده می شود.

پاسخ: گزینه «4» صحیح است.

۲- **واریانس (σ^2):** یکی دیگر از پارامترهای پراکندگی داده ها ، واریانس است و کارآیی آن از دامنه ی تغییرات بیشتر است ، واریانس به ما می گوید که هر عدد و یا داده ، تا چه اندازه به میانگین داده ها نزدیک است ، هر چقدر واریانس بزرگتر باشد ، پراکندگی داده ها ، بیشتر خواهد بود.

برای محاسبه واریانس از دو فرمول زیر می توان استفاده کرد.

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

فرمول (1)

$$\sigma^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2$$

فرمول (2)

دقت کنید که فرمول (2) را به سادگی و به صورت زیر می توان از فرمول (1) بدست آورد.

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum (x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2)}{n} \\ &= \frac{\sum x_i^2 - \sum 2x_i\bar{x} + \sum \bar{x}^2}{n} \\ &= \frac{\sum x_i^2 - 2\bar{x} \sum x_i + n\bar{x}^2}{n} \\ &= \frac{\sum x_i^2 - 2\bar{x} \times n\bar{x} + n\bar{x}^2}{n} \\ &= \frac{\sum x_i^2 - 2n\bar{x}^2 + n\bar{x}^2}{n} \\ &= \frac{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}{n} \\ &= \frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2 \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^n c = n c \quad \text{نکته:}$$

تست: واریانس داده های 0، 1، 2، 3، 5، 7 کدام است؟

$$\frac{34}{6} \quad (\epsilon)$$

$$\frac{12}{6} \quad (\zeta)$$

$$\sqrt{\frac{34}{6}} \quad (\eta)$$

$$\sqrt{\frac{12}{6}} \quad (\theta)$$

پاسخ:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{0+1+2+3+5+7}{6} = \frac{18}{6} = 3$$

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{(0-3)^2 + (1-3)^2 + (2-3)^2 + (5-3)^2 + (7-3)^2}{6} \\ &= \frac{9+4+1+4+16}{6} = \frac{34}{6} \end{aligned}$$

نکته: واریانس بهترین پارامتر محاسبه ی پراکندگی داده هاست.

نکته: واحد واریانس با واحد داده های اولیه متفاوت است.

تست: برای 5 داده داریم: $\sum x_i^2 = 35$ و $\bar{x} = 2$ ، واریانس کدام است؟

(۱) 3 (۲) 4 (۳) 5 (۴) 6

پاسخ:

$$\sigma^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2 = \frac{35}{5} - 2^2 = 7 - 4 = 3$$

نکته: برای محاسبه ی واریانس در جدول، از فرمول زیر استفاده می کنیم:

$$\sigma^2 = \frac{\sum F_i (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

مثال: واریانس داده های جدول مقابل را حساب کنید؟

دسته ها	F_i
2-5	2
5-8	3
8-11	1
11-14	4
$C = 3$	$n = 10$

پاسخ:

دسته ها	F_i	x_i	$F_i x_i$	$(x_i - \bar{x})^2$	$F_i (x_i - \bar{x})^2$
0-2	6	1	6	$(-2/2)^2 = 4/86$	29/16
2-4	9	3	27	$(0/2)^2 = 0/04$	0/36
4-6	2	5	10	$(1/8)^2 = 3/24$	6/48
6-8	3	7	21	$(3/8)^2 = 14/44$	43/32
$C = 2$	$n = 20$		64		$\sum F_i (x_i - \bar{x})^2 = 79/32$

$$\bar{x} = \frac{\sum F_i x_i}{n} = \frac{64}{20} = \frac{32}{10} = 3/2$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum F_i (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{79/32}{20} = 3/966$$

۳- انحراف معیار (σ): برای محاسبه اندازه ی پراکندگی می توان از انحراف معیار (که جذر واریانس است) نیز استفاده کنیم.

تست : انحراف معیار داده های جدول مقابل کدام است؟ (سراسری - 77)

x_i	2	3	4	5	6	7
F_i	1	1	3	5	4	2

$$\sqrt{1/75} \text{ (۴)}$$

$$\sqrt{1/5} \text{ (۳)}$$

$$\sqrt{1/25} \text{ (۲)}$$

$$\sqrt{1/05} \text{ (۱)}$$

پاسخ :

$$\bar{x} = \frac{2+3+12+25+24+14}{16} = \frac{80}{16} = 5$$

$$\sigma^2 = \frac{1(2-5)^2 + 1(3-5)^2 + 3(4-5)^2 + 5(5-5)^2 + 4(6-5)^2 + 1(7-5)^2}{16}$$

$$\sigma^2 = 1/75 \Rightarrow \sigma = \sqrt{1/75}$$

۴- ضریب تغییرات (C_v) : از تقسیم انحراف معیار به میانگین ، یکی دیگر از پارامترهای تشخیص پراکندگی ، به نام ضریب تغییرات بدست می آید.

$$C_v = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

تذکر : دقت کنید که اشتباهاً خیال نکنید که ضریب تغییرات ، خارج قسمت میانگین به انحراف معیار است ، لذا :

$$C_v \neq \frac{\bar{x}}{\sigma}$$

نکته : ضریب تغییرات ، بدون واحد است.

نکته : معمولاً ضریب تغییرات را به صورت درصد بیان می کنند.

تست : کدام یک از تعاریف زیر ، تعریف صحیحی برای ضریب تغییرات است؟ (آزمون سراسری - 67)

(۱) جذر واریانس

(۲) خارج قسمت انحراف معیار به میانگین

(۳) خارج قسمت واریانس به میانگین

(۴) فاصله ی بزرگترین عدد از کوچکترین عدد

پاسخ : گزینه ی « 2 » صحیح است.

تست : ضریب تغییرات داده های 8 ، 10 ، 12 ، 14 کدام است؟ (آزاد - 75)

$$\frac{11}{5} \text{ (۴)}$$

$$\frac{5}{11} \text{ (۳)}$$

$$\frac{11}{\sqrt{5}} \text{ (۲)}$$

$$\sqrt{\frac{5}{11}} \text{ (۱)}$$

پاسخ :

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{44}{4} = 11$$

$$\sigma^2 = \frac{(8-11)^2 + (10-11)^2 + (12-11)^2 + (14-11)^2}{4} = \frac{9+1+1+9}{4} = 5$$

$$\sigma = \sqrt{5} \Rightarrow C_v = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{5}}{11}$$

نکته: اگر کلیه ی داده های یک جامعه ی آماری برابر باشند، آنگاه تمامی پارامترهای پراکندگی (نه پارامترهای مرکزی) آن جامعه (دامنه ی تغییرات، واریانس، انحراف معیار، ضریب تغییرات) برابر صفر خواهند بود، دقت کنید که در این حالت، میانگین برابر است با یکی از داده ها.

تست: انحراف معیار داده های آماری $\{7, 7, \dots, 7\}$ کدام است؟

- (۱) 7 (۲) 14 (۳) 49 (۴) صفر

پاسخ: طبق نکته ی قبل، گزینه ی «4» صحیح است.

تست: اگر واریانس داده های $x_1, x_2, x_3, \dots, x_7$ برابر صفر باشد، میانگین داده ها برابر است با: (آزاد - 75)

- (۱) 7 (۲) 14 (۳) 28 (۴) مشخص نیست

پاسخ: طبق نکته ی فوق، گزینه ی «1» صحیح است.

نکته: اگر داده ها تشکیل تصاعد عددی بدهند، میانگین با میانه برابر خواهد شد، یعنی $\bar{x} = \tilde{x}$ ، در این حالت داریم:

$$\sigma = d \sqrt{\frac{n^2 - 1}{12}}, \quad (d \text{ قدر نسبت داده ها است})$$

تست: انحراف معیار داده های 1، 2، 3، 4، 5 کدام است؟

- (۱) 2 (۲) $\sqrt{2}$ (۳) 4 (۴) $\sqrt{5}$

پاسخ:

راه معمولی $\rightarrow \bar{x} = \frac{15}{5} = 3$

$$\sigma^2 = \frac{4+1+0+1+4}{5} = 2 \Rightarrow \sigma = \sqrt{2}$$

راه دوم $\rightarrow \sigma = d \sqrt{\frac{n^2 - 1}{12}} = 1 \times \sqrt{\frac{5^2 - 1}{12}} = \sqrt{2}$

نکته: اگر داده های آماری تشکیل تصاعد عددی بدهند و n برابر 5 باشد آنگاه همواره: $\sigma = d \sqrt{2}$ خواهد بود. (به مثال بالا توجه کنید).

تست: انحراف معیار داده های زیر کدام است؟

8، 11، 14، 17، 20

- (۱) $3\sqrt{2}$ (۲) $2\sqrt{2}$ (۳) $4\sqrt{2}$ (۴) $5\sqrt{2}$

پاسخ: طبق نکته ی قبل داریم:

$$\sigma = d \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

نکته ی مهم: هرگاه به همه ی داده ها عددی مانند K ، اضافه یا کم شود، آنگاه:

(۱) دامنه ی تغییرات، تغییری نخواهد کرد.

(۲) عدد K به میانگین اضافه یا کم خواهد شد.

(۳) عدد K به میانه اضافه یا کم خواهد شد.

(۴) انحراف معیار تغییری نخواهد کرد.

(۵) واریانس نیز تغییری نخواهد کرد.

$$\sigma(x \pm K) = \sigma(x)$$

$$\sigma^2(x \pm K) = \sigma^2(x)$$

(۶) ضریب تغییرات داده ها، تغییر خواهد کرد.

تست: اگر میانگین داده های $x_1, x_2, \dots, x_n$ برابر $\bar{x}$ باشد، میانگین داده های $x_1 + k, x_2 + k, \dots, x_n + k$ برابر است با

$$(۱) \quad \bar{x} \quad (۲) \quad \bar{x} + k \quad (۳) \quad \bar{x} + 2k \quad (۴) \quad \bar{x} - k$$

پاسخ: طبق نکته ی فوق، گزینه ی «۲» صحیح است.

تست: در داده های آماری $x_1, x_2, \dots, x_n$ مقادیر میانگین و واریانس به ترتیب ۵ و ۴ می باشند، اگر به تمامی داده ها، یک واحد اضافه کنیم، درصد ضریب تغییرات داده های جدید کدام است؟

$$(۱) \quad 40 \quad (۲) \quad 30 \quad (۳) \quad 27 \quad (۴) \quad 33$$

پاسخ: گزینه ی «۴» صحیح است. طبق نکته ی فوق، میانگین داده های جدید برابر $5+1=6$ بوده، اما واریانس تغییری نکرده و همان ۴ خواهد بود، لذا داریم:

$$C_v = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{4}}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0/33$$

$$0/33 \times 100 = 33 \quad \text{درصد ضریب تغییرات}$$

نکته ی مهم: اگر همه ی داده ها را در عددی مانند k ($k \neq 0$) ضرب و یا تقسیم کنیم، آنگاه:

(۱) دامنه ی تغییرات در k ضرب و یا بر آن تقسیم می شود.

(۲) میانگین در k ضرب و یا بر آن تقسیم می شود.

(۳) میانه در k ضرب و یا بر آن تقسیم می شود.

$$(۴) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma(kx) = |k| \sigma(x) \\ \sigma\left(\frac{1}{k}x\right) = \frac{1}{|k|} \sigma(x) \end{array} \right. \leftarrow \text{انحراف معیار در } |k| \text{ ضرب و یا بر } |k| \text{ تقسیم می شود.}$$

$$(۵) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma^2(kx) = k^2 \sigma^2(x) \\ \sigma^2\left(\frac{1}{k}x\right) = \frac{1}{k^2} \sigma^2(x) \end{array} \right. \leftarrow \text{واریانس در } k^2 \text{ ضرب و یا بر } k^2 \text{ تقسیم می شود.}$$

(۶) ضریب تغییرات داده ها، نیز تغییر خواهد کرد.

تست: اگر دامنه ی تغییرات داده های آماری $x_1, x_2, \dots, x_n$ ، برابر صفر باشد، میانگین داده های آماری $2x_1+1, 2x_2+1, \dots, 2x_n+1$ کدام است؟ (آزاد - 73)

$$(۱) \quad \frac{x_1 + x_n}{2} \quad (۲) \quad 2(x_1 + x_2 + \dots + x_n) + 1 \quad (۳) \quad x_n \quad (۴) \quad 2x_1 + 1$$

پاسخ: گزینه ی «۴» صحیح است. چون دامنه ی تغییرات، صفر است پس همه ی داده ها با یکدیگر برابرند، ضمناً در

این حالت $\bar{x} = x_1 = x_2 = \dots = x_n$ ، لذا طبق نکته ی فوق: میانگین داده های $2x_1+1, 2x_2+1, \dots, 2x_n+1$ برابر $2\bar{x}+1$ و یا $2x_1+1$ خواهد بود.

تست: اگر میانگین و انحراف معیار داده های $x_1, x_2, \dots, x_n$ به ترتیب $\bar{x}$ و σ باشد، میانگین و انحراف معیار داده های $ax_1+b, ax_2+b, \dots, ax_n+b$ به ترتیب عبارتند از:

$$(۱) \quad \bar{x} + b \text{ و } \sigma + b \quad (۲) \quad \bar{x} + b \text{ و } a\sigma + b \quad (۳) \quad \bar{x} + b \text{ و } a^2\sigma \quad (۴) \quad \bar{x} + b \text{ و } |a|\sigma$$

پاسخ: گزینه ی «۴» صحیح است، دقت کنید که:

$$\sigma(ax \pm b) = |a| \sigma(x)$$

تست های آمار:

۱- کوچکترین داده ی آماری 12 و بزرگترین داده ی آماری 67 است ، اگر دو داده ی دیگر ، یکی برابر 20 و دیگری 50 به اطلاعات فوق اضافه شود ، دامنه ی تغییرات؟

(۱) دو واحد اضافه می شود (۲) دو برابر می شود (۳) دو واحد کم می شود (۴) تغییر نمی کند
پاسخ: گزینه ی « 4 » صحیح است. چون اعداد 20 و 50 بین دو عدد 12 و 67 هستند لذا کوچکترین و بزرگترین داده ها باز هم 12 و 67 بوده ، بنابراین دامنه ی تغییرات تغییری نخواهد کرد.

۲- تعدادی داده را در هشت دسته طبق بندی نموده ایم ، در صورتی که مراکز دسته های اول و سوم به ترتیب 11/5 و 15/5 باشد ، بیشترین مقدار داده ها ، کدام می تواند باشد؟

(۱) 24 (۲) 26 (۳) 28 (۴) 30

پاسخ: گزینه ی « 2 » صحیح است.

نکته: می دانیم فاصله ی هر دو مرکز دسته ی متوالی برابر طول دسته است ، اما اگر x_m و x_n به ترتیب مرکز دسته ی n ام و m ام باشند آنگاه:

$$x_n - x_m = (n - m) c$$

از طرفی با توجه به آنکه مرکز هر دسته ، وسط دو کران می باشد ، لذا فاصله ی مرکز هر دسته تا کران بالا یا پایین همان دسته برابر نصف طول دسته است یعنی:

$$\text{کران بالای دسته ی } n \text{ ام} = x_n + \frac{c}{2}$$

$$\text{کران پایین دسته ی } n \text{ ام} = x_n - \frac{c}{2}$$

می دانیم بیشترین تعداد داده ها در دسته ی آخر قرار دارد لذا کران پایین و بالای دسته ی هشتم را بدست می آوریم ، برای این منظور بهتر است ابتدا مرکز دسته ی هشتم تعیین شود ، اما داریم:

$$x_8 - x_3 = 5c \Rightarrow x_8 - 15/5 = 10 \Rightarrow x_8 = 25/5$$

$$\text{کران بالای دسته ی هشتم} = x_8 + \frac{c}{2} = 25/5 + 1 = 26/5$$

$$\text{کران پایین دسته ی هشتم} = x_8 - \frac{c}{2} = 25/5 - 1 = 24/5$$

لذا حدود دسته ی هشتم عبارت است از: $(24/5 - 26/5)$ که با توجه به گزینه ها ، فقط عدد گزینه ی 2 در دسته ی هشتم قرار دارد.

۳- کرانه ی پایین دسته ی دوم یک جامعه ی آماری برابر 24 و مرکز دسته برابر 25 است ، کرانه ی بالای دسته ی دوم چقدر است؟

(۱) 24/5 (۲) 23 (۳) 26 (۴) 24

پاسخ: گزینه ی « 3 » صحیح است.

$$\text{کران پایین دسته ی دوم} = x_2 - \frac{c}{2} \Rightarrow 24 = 25 - \frac{c}{2} \Rightarrow \frac{c}{2} = 1 \Rightarrow c = 2$$

$$\text{کران بالای دسته ی دوم} = x_2 + \frac{c}{2} = 25 + \frac{2}{2} = 26$$

۴- در یک جدول توزیع فراوانی ، بیشترین داده 50 ، تعداد دسته ها 6 و طول دسته ها 5 است ، کمترین داده چقدر است؟ (آزاد انسانی - 80)

(۱) 40 (۲) 30 (۳) 20 (۴) 10

پاسخ: گزینه ی «3» صحیح است.

$$k = \frac{R}{c} \Rightarrow k = \frac{Max - Min}{c} \Rightarrow 6 = \frac{50 - Min}{5} \Rightarrow 30 = 50 - Min$$

$$\Rightarrow Min = 20$$

۵- دامنه ی تغییرات یک نمونه ی آماری 20 می باشد، اگر بخواهیم تعداد دسته ها 1 واحد از طول دسته ها کمتر باشد، باید طول دسته را چقدر در نظر گرفت؟

- (۱) 4 (۲) 5 (۳) 6 (۴) 7

پاسخ: گزینه ی «2» صحیح است.

$$k = \frac{R}{c} \Rightarrow c = \frac{R}{k} \Rightarrow c = \frac{20}{c-1} \Rightarrow c(c-1) = 5 \times 4 \Rightarrow c = 5$$

۶- تعداد دانش آموزان 3 کلاس یک مدرسه 70، 60 و 50 نفر است، در نمودار دایره ای این 3 کلاس، زاویه ی مربوط به کلاس 50 نفری چند درجه است؟

- (۱) 50 (۲) 150 (۳) 100 (۴) 120

پاسخ: گزینه ی «3» صحیح است.

$$n = 50 + 60 + 70 = 180$$

$$\alpha^\circ = \frac{x_i}{n} \times 360^\circ = \frac{50}{180} \times 360 = 50 \times 2 = 100^\circ$$

۷- توزیع گروه های خونی تعدادی از افراد به صورت زیر است:

A	B	AB	O
24	14	10	12

درصد مساحت مربوط به گروه خونی O در نمودار دایره ای کدام است؟

- (۱) 15 (۲) 20 (۳) 25 (۴) 40

پاسخ: گزینه ی «2» صحیح است.

$$60 = \text{تعداد کل افراد}$$

$$O \text{ کمان مربوط به گروه خونی } = \frac{2}{60} \times 360 = 12 \times 6 = 72^\circ$$

$$O \text{ درصد مساحت مربوط به گروه خونی } = \frac{72^\circ}{360^\circ} \times 100 = 20$$

۸- فراوانی نسبی داده ای 0/3 است، اگر فراوانی این داده، 3 واحد افزایش یابد، فراوانی نسبی آن $\frac{2}{5}$ خواهد شد،

تعداد کل داده ها در ابتدا، چقدر بوده است؟

- (۱) 15 (۲) 14 (۳) 18 (۴) 17

پاسخ: گزینه ی «3» صحیح است.

فراوانی داده را با F_i و فراوانی نسبی آن را با f_i و تعداد داده ها را با n نشان می دهیم، لذا داریم:

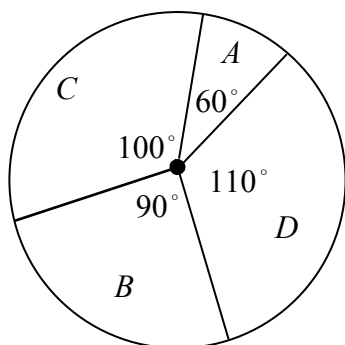
$$f_i = \frac{F_i}{n} \Rightarrow \frac{3}{10} = \frac{f_i}{n} \quad (1)$$

در حالتی که فراوانی این داده 3 واحد افزایش می یابد، تعداد داده ها یعنی n نیز 3 واحد افزایش خواهد یافت اما با توجه به اینکه فراوانی نسبی در این حالت $\frac{2}{5}$ است داریم:

$$\left. \begin{aligned} \frac{2}{5} &= \frac{f_i + 3}{n + 3} \quad (2) \\ (1) &\Rightarrow f_i = \frac{3n}{10} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{2}{5} = \frac{\frac{3n}{10} + 3}{n + 3} \Rightarrow 2n + 6 = \frac{3}{2}n + 15$$

$$\frac{1}{2}n = 9 \Rightarrow n = 18$$

۹- اگر نمودار زیر، توزیع 60000 نفر را در گروه های سنی A و B و C و D نشان دهد، چند نفر در گروه سنی A قرار دارند؟



(۱) 1000

(۲) 6000

(۳) 10000

(۴) 15000

پاسخ: گزینه ی «3» صحیح است.

$$A \text{ کمان مربوط به } = \frac{x}{60000} \times 360^\circ$$

$$60^\circ = \frac{x}{1000} \times 6 \Rightarrow x = 10000$$

۱۰- تعدادی داده را در چند طبقه دسته بندی کرده ایم، اگر بخواهیم فاصله ی طبقات نصف شود، برای تعداد طبقات کدام حالت پیش خواهد آمد؟

(۱) نصف می شود

(۲) 2 برابر می شود

(۳) تغییر نمی کند

(۴) 2 واحد به آن اضافه می شود

پاسخ: گزینه ی «2» صحیح است.

در این تست منظور از فاصله ی طبقات، طول دسته می باشد، اما می دانیم:

$$\text{طول دسته} = \frac{\text{دامنه ی تغییرات}}{\text{تعداد طبقات}} \Rightarrow k = \frac{R}{c} \Rightarrow R = k c$$

حال چون دامنه ی تغییرات تغییری نکرده و ثابت مانده است لذا هنگامی که طول دسته ها را نصف می کنیم تعداد دسته

$$R = \frac{c}{2} \times 2 k$$

ها باید دو برابر شود یعنی:

زیرا 2 با 2 ساده می شود.

۱۱- اگر فراوانی یک دسته 15 و زاویه ی مربوط به آن در نمودار دایره ای 18 درجه باشد، حجم جامعه ی آماری کدام است؟

- (۱) 200 (۲) 300 (۳) 180 (۴) 150

پاسخ: گزینه ی «2» صحیح است.

$$\alpha^\circ = \frac{F_i}{n} \times 360^\circ \Rightarrow 18^\circ = \frac{15}{n} \times 360^\circ \Rightarrow 18n = 15 \times 360^\circ$$

$$n = 15 \times 20^\circ = 300^\circ$$

۱۲- در یک نمونه گیری آماری، تعداد داده ها 10 و مجموع مربعات تفاضل داده ها از میانگین برابر 14/4 است، اگر ضریب تغییرات داده ها 0/04 باشد، میانگین داده ها چقدر است؟

- (۱) 18 (۲) 24 (۳) 30 (۴) 32

پاسخ: گزینه ی «3» صحیح است.

منظور از مجموع مربعات تفاضل داده ها از میانگین، همان $\sum (x_i - \bar{x})^2$ است، در نتیجه داریم:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} \Rightarrow \sigma^2 = \frac{14/4}{10} = 1/44 \Rightarrow \sigma = \sqrt{1/44} = 1/2$$

$$c_v = \frac{\sigma}{\bar{x}} \Rightarrow \frac{4}{100} = \frac{1/2}{\bar{x}} \Rightarrow \bar{x} = \frac{120}{4} = 30$$

چون ضریب تغییرات 0/04 است لذا:

۱۳- اگر میانگین اعداد x و y و z برابر 7 و واریانس آنها 16 باشد، ضریب تغییرات اعداد $3x - 1$ ، $3y - 1$ ، $3z - 1$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{3}}{5}$ (۲) $\frac{3}{5}$ (۳) $\frac{11}{20}$ (۴) $\frac{9}{5}$

پاسخ: گزینه ی «2» صحیح است.

واضح است که میانگین داده های جدید برابر خواهد بود با:

$$3\bar{x} - 1 = 3(7) - 1 = 20$$

و واریانس برابر خواهد بود با:

$$3^2 \sigma^2(x) = 9 \times 16 = 144$$

و در نتیجه $\sigma = 12$ لذا داریم:

$$c_v = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

۱۴- اگر مجموع مساحت های مستطیل ها در نمودار مستطیلی تعدادی داده برابر 250 و فراوانی نسبی دسته ی اول

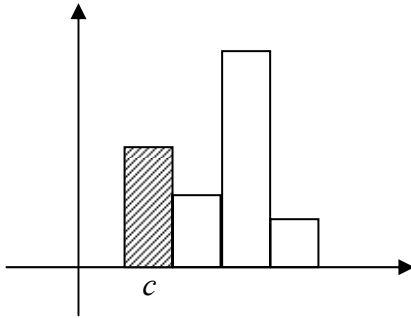
$\frac{1}{10}$ و فراوانی همین دسته، 5 باشد، طول هر دسته چقدر خواهد بود؟

- (۱) 3 (۲) 4 (۳) 5 (۴) 6

پاسخ: گزینه ی «3» صحیح است.

می دانیم در نمودار مستطیلی، بر روی محور x ها حدود دسته ها و بر روی محور y ها فراوانی نشان داده می شود، از آنجایی که تفاضل بین کران های بالا و پایین هر دسته برابر طول دسته است، برای تعیین مساحت هر یک از مستطیل ها، کافی است طول دسته را در فراوانی آن دسته ضرب کنیم.

لذا با توجه به شکل داریم :



$$S = cF_1 + cF_2 + \dots + cF_n = c \sum F_i$$

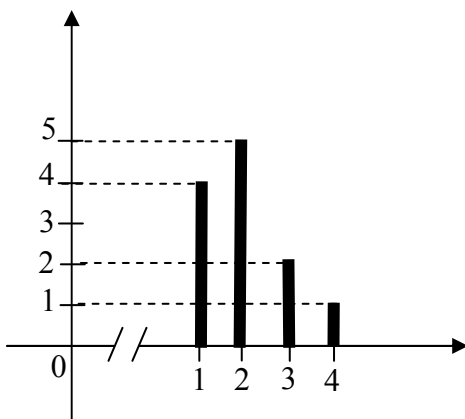
مساحت کل مستطیل ها

نکته : سطح زیر نمودار چند بر فراوانی با سطح زیر نمودار مستطیلی متناظرش برابر است ، به عبارت دیگر مساحت زیر نمودار چند بر فراوانی نیز از رابطه ی $c \sum F_i$ بدست می آید.
اکنون داریم :

$$f_i = \frac{F_i}{n} \Rightarrow \frac{1}{10} = \frac{5}{n} \Rightarrow n = 50 \Rightarrow \sum F_i = 50$$

$$S = c \cdot \sum F_i \Rightarrow 250 = c \times 50 \Rightarrow c = 5$$

۱۵- واریانس داده ها در نمودار میله ای رو به رو چقدر است؟



- (۱) $\frac{5}{6}$
(۲) $\frac{1}{2}$
(۳) $\frac{1}{3}$
(۴) $\frac{5}{4}$

پاسخ : گزینه ی « ۱ » صحیح است.

ابتدا با توجه به نمودار می توان جدول فراوانی را به صورت زیر تشکیل داده و سپس واریانس را حساب کنیم :

x_i مرکز دسته	1	2	3	4
f_i فراوانی	4	5	2	1

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{\sum F_i x_i}{n} = \frac{4+10+6+4}{4+5+2+1} = \frac{24}{12} = 2$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum F_i (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{4(1-2)^2 + 5(2-2)^2 + 2(3-2)^2 + 1(4-2)^2}{12} = \frac{4+0+2+4}{12} = \frac{5}{6}$$

۱۶- یک سری داده‌ی آماری را در k دسته طبق بندی نموده ایم، طول دسته 12، شده است. اگر تعداد دسته‌ها را 4 واحد افزایش دهیم، طول هر دسته 6 خواهد شد، k کدام است؟

- (۱) 3 (۲) 6 (۳) 5 (۴) 4

پاسخ: گزینه ی «4» صحیح است.

$$c = \frac{R}{k} \Rightarrow 12 = \frac{R}{k} \Rightarrow R = 12k$$

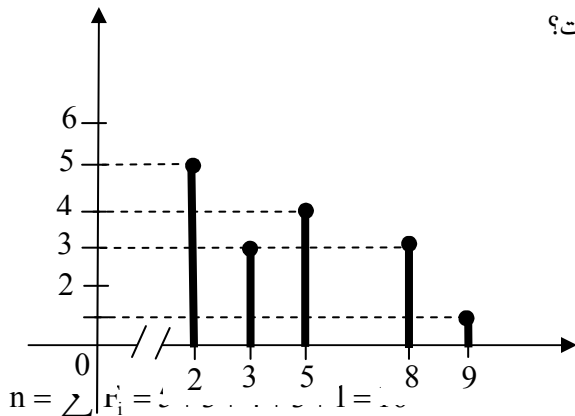
پس از آنکه تعداد دسته‌ها، 4 واحد افزایش می‌یابد، طول دسته 6 خواهد شد، اما واضح است در این حالت دامنه‌ی تغییرات تغییری نکرده است، پس داریم:

$$6 = \frac{12k}{k+4} \Rightarrow 6k + 24 = 12k \Rightarrow 6k = 24 \Rightarrow k = 4$$

۱۷- با توجه به نمودار میله‌ای رو به رو، میانه‌ی داده‌ها کدام است؟

- (۱) 3
(۲) 4
(۳) 5
(۴) 7/5

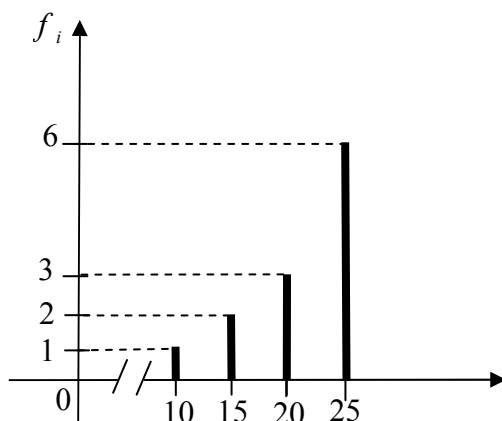
پاسخ: گزینه ی «2» صحیح است.



چون 16 داده داریم، لذا میانه برابر میانگین داده‌های هشتم و نهم خواهد بود، اما اگر داده‌ها را از ابتدا شمارش کنیم، عدد 2، پنج بار تکرار شده، عدد 3، سه بار تکرار دارد، حال چون داده‌ی هشتم عدد 3 و داده‌ی نهم عدد 5 می‌باشد، میانه برابر است با:

$$\tilde{x} = \frac{3+5}{2} = 4$$

۱۸- نمودار میله‌ای یک سری از داده‌ها به شکل مقابل است، در نمودار میله‌ای این داده‌ها، زاویه‌ی مربوطه به $x_i = 25$ چند درجه است؟



پاسخ: گزینه ی «3» صحیح است.

در نمودار میله‌ای مرکز دسته‌ها (یا خود داده‌ها) را روی محور x ها مشخص کرده، سپس روی هر یک از داده‌ها، میله‌ای که طول برابر با فراوانی آن داده باشد رسم می‌کنیم، اکنون داریم:

$$n = \sum f_i = 1 + 2 + 3 + 6 = 12 \Rightarrow \alpha^\circ = \frac{F_i}{n} \times 360^\circ$$

- (۱) 90°
(۲) 150°
(۳) 180°
(۴) 120°

چون فراوانی مربوط به $x_i = 25$ برابر 6 می باشد لذا زاویه ی نظیر این داده در نمودار دایره ای برابر است با :

$$\alpha^\circ = \frac{6}{12} \times 360^\circ = 180^\circ$$

۱۹- در دو دسته ی داده های $\begin{cases} x_i : 2, 3, 5, 7 \\ y_i : 9, 13, 21, 29 \end{cases}$ ، کدام گزینه درست است؟

(۱) میانگین گروه دوم ، چهار برابر میانگین گروه اول است.

(۲) واریانس گروه دوم ، چهار برابر واریانس گروه اول است.

(۳) ضریب تغییرات گروه دوم ، از ضریب تغییرات گروه اول بیشتر است.

(۴) ضریب تغییرات گروه دوم ، از ضریب تغییرات گروه اول کمتر است.

پاسخ : گزینه ی « 4 » صحیح است.

با کمی دقت دیده می شود که همه ی داده های گروه اول چهار برابر شده و با عدد 1 جمع شده اند پس میانگین گروه دوم از 4 برابر میانگین گروه اول یک واحد بیشتر است ، همچنین انحراف معیار گروه دوم 4 برابر انحراف معیار گروه اول است پس واریانس گروه دوم ، 16 برابر واریانس گروه اول است اما در مورد ضریب تغییرات :

اگر ضریب تغییرات گروه اول را با cv نمایش دهیم داریم :

$$cv = \frac{\sigma}{x}$$

در گروه دوم ضریب تغییرات برابر است با :

$$(cv)' = \frac{4\sigma}{4x+1}$$

با توجه به آنکه نسبت به حالت اول مخرج کسر در مقایسه با صورت کسر ، بیشتر بزرگ شده است ، ضریب تغییرات گروه دوم کمتر خواهد بود.

۲۰- اگر میانگین داده های $3x_1+1, 3x_2+1, \dots, 3x_n+1$ برابر با 7 باشد ، آنگاه میانگین داده های $3-2x_1, 3-2x_2, \dots, 3-2x_n$ کدام است؟

$$\begin{matrix} (۱) & -\frac{14}{3} & (۲) & -1 & (۳) & -\frac{8}{3} & (۴) & 1 \end{matrix}$$

پاسخ : گزینه ی « 2 » صحیح است.

اگر میانگین داده های $x_1, x_2, \dots, x_n$ را $\bar{x}$ در نظر بگیریم ، آنگاه میانگین داده های $3x_1+1, 3x_2+1, \dots, 3x_n+1$ برابر $3\bar{x}+1$ خواهد بود ، لذا داریم :

$$3\bar{x}+1=7 \Rightarrow \bar{x}=2$$

از طرفی اگر میانگین داده های $3-2x_1, 3-2x_2, \dots, 3-2x_n$ را با $\bar{x}'$ نمایش دهیم ، داریم:

$$\bar{x}' = 3 - 2\bar{x} = 3 - 2(2) = -1$$

۲۱- اگر واریانس قیمت ها در سال گذشته 1000 ریال بوده و امسال 10 درصد به قیمت ها افزوده شده باشد ، واریانس جدید قیمت ها کدام است؟

$$\begin{matrix} (۱) & 100 & (۲) & 121 & (۳) & 1000 & (۴) & 1210 \end{matrix}$$

پاسخ : گزینه ی « 4 » صحیح است.

اگر x قیمت های پارسال باشد، داریم:

$$y = x + \frac{10}{100}x = \frac{110}{100}x = \frac{11}{10}x$$

یعنی قیمت ها $\frac{11}{10}$ برابر شده اند، پس واریانس قیمت ها $\left(\frac{11}{10}\right)^2 = \frac{121}{100}$ برابر خواهد شد. بنابراین داریم:

$$1000 = \text{واریانس قیمت های پارسال}$$

$$1210 = \frac{121}{100} \times 1000 = \text{واریانس قیمت های امسال}$$

۲۲- اگر واریانس داده های $6, k+1, m+n, m-n$ برابر صفر باشد، انحراف معیار داده های k و $n+3$ و $m+1$ کدام است؟

- (۱) 0 (۲) 1 (۳) 2 (۴) 3

پاسخ: گزینه ی «1» صحیح است.

چون واریانس داده های $6, k+1, m+n, m-n$ صفر است، لذا همه ی داده ها با هم برابرند. پس همه ی آنها برابر 6 می باشند، در نتیجه داریم:

$$\begin{cases} 2m-n=6 \\ m+n=6 \end{cases} \Rightarrow m=4, n=2$$

$$k+1=6 \Rightarrow k=5$$

در این صورت داده های $k, n+3, m+1$ همه برابر 5 شده و چون داده ها با هم برابرند، انحراف معیار آنها صفر خواهد بود.

۲۳- در داده های جدول زیر، اگر درصد فراوانی نسبی دسته ی وسط برابر 30 باشد، فراوانی دسته ی 12-10 کدام است؟ (سراسری تجربی - 79)

مرکز دسته	7	9	11	13	15
فراوانی دسته	9	15	x	10	8

- (۱) 14 (۲) 16 (۳) 18 (۴) 20

پاسخ: گزینه ی «3» صحیح است.

$$\text{درصد فراوانی نسبی هر دسته} = \frac{\text{فراوانی آن دسته}}{\text{کل فراوانی ها}} \times 100$$

$$30 = \frac{x}{9+15+x+10+8} \times 100 \Rightarrow 30 = \frac{x}{x+42} \times 100$$

$$3x+126=10x \Rightarrow 7x=126 \Rightarrow x=18$$

۲۴- اگر میانگین داده های $n, n+1, \dots, 2n$ برابر $\bar{x}$ باشد، میانگین داده های $n-1, (n+1)-2, \dots, 2n-(n+1)$ چقدر است؟ (آزاد پزشکی - 79)

- (۱) $\bar{x} - \frac{n}{2}$ (۲) $\bar{x}$ (۳) $\bar{x} - \frac{n+2}{2}$ (۴) $\bar{x} - \frac{n+1}{2}$

پاسخ: گزینه ی «3» صحیح است.

راه حل اول: فرض می کنیم $\bar{x}$ میانگین داده های اولیه و $\bar{Y}$ میانگین داده های مطلوب باشد، در این صورت داریم:

$$\bar{x} = \frac{n + n + 1 + n + 2 + \dots + 2n}{n + 1}$$

$$\bar{Y} = \frac{n - 1 + (n + 1) - 2 + \dots + 2n - (n + 1)}{n + 1} = \frac{n + n + 1 + \dots + 2n - (1 + 2 + 3 + \dots + (n + 1))}{n + 1}$$

$$= \frac{n + n + 1 + n + 2 + \dots + 2n}{n + 1} - \frac{(n + 1)(n + 2)}{2(n + 1)} = \bar{x} - \frac{n + 2}{2}$$

راه حل دوم: عدد گذاری: n را مثلاً برابر 3 می گیریم، لذا میانگین داده های 6، 5، 4، 3 برابر $\bar{x}$ است و میانگین داده های گروه دوم یعنی 2، 2، 2، 2 خواسته شده (به جای n ، 3 قرار داده ایم)، با این شرایط داریم:

$$\bar{x} = \frac{3 + 4 + 5 + 6}{4} = \frac{9}{2}$$

و میانگین داده های گروه دوم برابر است با 2، حال در گزینه ها به جای $n = 3$ و به جای $\bar{x} = \frac{9}{2}$ را قرار می دهیم

باید به عدد 2 برسیم، اما تنها گزینه ی درست گزینه ی (3) است زیرا:

$$\bar{x} - \frac{n + 2}{2} = \frac{9}{2} - \frac{3 + 2}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

۲۵- اگر میانگین داده های $x_1, x_2, \dots, x_n$ برابر $\bar{x}$ باشد، میانگین داده های $x_1 + \bar{x}, x_2 + 2\bar{x}, \dots, x_n + n\bar{x}$ کدام است؟ (آزاد غیر پزشکی - 79)

$$\frac{(n + 1)\bar{x}}{2} \quad (۱) \quad 2\bar{x} \quad (۲) \quad \frac{(n + 3)\bar{x}}{2} \quad (۳) \quad \frac{n\bar{x}}{2} \quad (۴)$$

پاسخ: گزینه ی «3» صحیح است.

راه حل اول: فرض می کنیم $\bar{x}$ و $\bar{Y}$ به ترتیب میانگین گروه اول و دوم باشند، لذا داریم:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

$$\bar{Y} = \frac{x_1 + \bar{x} + x_2 + 2\bar{x} + \dots + x_n + n\bar{x}}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} + \frac{(1 + 2 + \dots + n)\bar{x}}{n}$$

$$= \bar{x} + \frac{\frac{n(n + 1)}{2}\bar{x}}{n} = \bar{x} + \frac{(n + 1)\bar{x}}{2} = \frac{(n + 3)\bar{x}}{2}$$

راه حل دوم: x_1, x_2 و x_3 را به ترتیب 1، 2، 3 فرض می کنیم در این صورت داریم:

$$\bar{x} = \frac{1 + 2 + 3}{3} = 2$$

اما میانگین داده های گروه دوم یعنی 9، 6، 3 برابر $\bar{Y} = \frac{3 + 6 + 9}{3} = 6$ خواهد شد اکنون $n = 3$ و $\bar{x} = 2$ را در

گزینه ها قرار می دهیم، حاصل باید برابر $\bar{Y} = 6$ شود که تنها گزینه ی «3» در ست خواهد بود.

۲۶- میانگین داده های 5-، 4-، 3-، 2- و 1- و داده های $a, 98, 97, 96$ و 95 برابرند، a کدام است؟ (آزاد پزشکی - 80)

$$100 \quad (۱) \quad -401 \quad (۲) \quad -399 \quad (۳) \quad -101 \quad (۴)$$

پاسخ: گزینه ی «2» صحیح است.

$$\left. \begin{aligned} \bar{x} &= \frac{-1-2-3-4-5}{5} = \frac{-15}{5} = -3 \\ \bar{y} &= \frac{95+96+97+98+a}{5} = \frac{386+a}{5} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{386+a}{5} = -3 \Rightarrow a = -15 - 386 = -401$$

۲۷- میانگین داده های $a, 4, 4, 3$ و 2 برابر 2 است، میانگین داده های $(100+6a), 4, 4, 3, 2$ چقدر است؟ (آزاد غیر پزشکی - 80)

(۱) 18

(۲) 20

(۳) 19

(۴) 22

پاسخ: گزینه ی «3» صحیح است.

$$\bar{x} = \frac{2+3+4+4+a}{5} = 2 \Rightarrow 13+a=10 \Rightarrow a=-3$$

$$\bar{y} = \frac{2+3+4+4+(100+6a)}{5} = \frac{13+82}{5} = \frac{95}{5} = 19$$

۲۸- اگر میانگین داده های x_1+1, x_2+2, x_3+3 برابر $\bar{x}$ باشد، میانگین داده های $3x_1+1, 3x_2+2, 3x_3+3$ (آزاد پزشکی - 81)

(۱) $3\bar{x}-6$ (۲) $3\bar{x}-4$ (۳) $3\bar{x}$ (۴) $3\bar{x}-2$

پاسخ: گزینه ی «2» صحیح است.

$$\bar{x} = \frac{(x_1+1)+(x_2+2)+(x_3+3)}{3} \Rightarrow x_1+x_2+x_3 = 3\bar{x}-6$$

$$\bar{y} = \frac{(3x_1+1)+(3x_2+2)+(3x_3+3)}{3} = \frac{3(x_1+x_2+x_3)}{3} + \frac{6}{3}$$

$$= \frac{3(3\bar{x}-6)}{3} + 2 = 3\bar{x}-6+2 = 3\bar{x}-4$$

۲۹- نمره ی کل آزمون عمومی یک داوطلب، مطابق جدول زیر، 58 درصد است، نمره ی آزمون زبان انگلیسی او چند درصد است؟ (سراسری تجربی - 81)

زبان انگلیسی	معارف اسلامی	عربی	ادبیات فارسی	درس
؟	70	52	65	درصد
2	3	2	4	ضریب

(۱) 31

(۲) 32

(۳) 33

(۴) 34

پاسخ: گزینه ی «2» صحیح است.

نمره ی کل آزمون عمومی این داوطلب، همان میانگین نمرات دروس عمومی او با احتساب ضریب هر درس است، اما داریم:

$$\bar{x} = \frac{4(65)+2(52)+3(70)+2x}{11} \Rightarrow 58 = \frac{260+104+210+2x}{11}$$

مجموع کل فراوانی ها یا ضرایب دروس

$$\Rightarrow 638 = 574 + 2x \Rightarrow x = 32$$

۳۰- اگر میانگین داده های $x_1 - 1$ و $x_2 - 2, \dots, x_n - n$ برابر $\bar{x}$ باشد، میانگین داده های $x_1 + 1, x_2 + 2, \dots, x_n + n$ کدام است؟ (آزاد غیر پزشکی - 81)

$$(۱) \bar{x} + n + 1 \quad (۲) \bar{x} + \frac{n(n+1)}{2} \quad (۳) \bar{x} + \frac{n+1}{2} \quad (۴) 2\bar{x}$$

پاسخ: گزینه ی «۱» صحیح است.

راه حل اول:

$$\bar{x} = \frac{(x_1 - 1) + (x_2 - 2) + \dots + (x_n - n)}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} - \frac{1 + 2 + \dots + n}{n}$$

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} + \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n} \Rightarrow \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \bar{x} + \frac{n+1}{2}$$

$$\bar{Y} = \frac{(x_1 + 1) + (x_2 + 2) + \dots + (x_n + n)}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} + \frac{1 + 2 + \dots + n}{n}$$

$$\bar{Y} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} + \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n}$$

$$\bar{Y} = \left(\bar{x} + \frac{n+1}{2} \right) + \frac{n+1}{2} = \bar{x} + (n+1)$$

راه حل دوم (عدد گذاری): به جای x_1, x_2, x_3 به ترتیب 1 و 2 و 3 را قرار دهید و همانند تست های قبل عمل کنید.

۳۱- اگر میانگین داده های a, b, c, d برابر 5 و واریانس آنها برابر صفر باشد، میانگین داده های $a, b, c, d, c + d, a + b$ کدام است؟ (آزاد تجربی - 82)

$$(۱) 10 \quad (۲) 4 \quad (۳) 5 \quad (۴) 8$$

پاسخ: چون واریانس داده ها صفر است، لذا همه ی داده ها برابرند و چون میانگین آنها، 5 است، لذا همگی برابر 5 هستند، بنابراین داریم:

$$\bar{x} = \frac{a + b + c + d + (a + b) + (c + d)}{6} = \frac{5 + 5 + 5 + 5 + 10 + 10}{6} = \frac{40}{6} = \frac{20}{3}$$

که در گزینه ها نیست.

۳۲- اگر واریانس داده های $a, b, c, d, 3$ برابر صفر باشد، میانگین داده های $3 + 6, d + 5, c + 4, b + 3, a + 2$ کدام است؟ (آزاد پزشکی - 82)

$$(۱) 20 \quad (۲) \text{ صفر} \quad (۳) 3 \quad (۴) 7$$

پاسخ: گزینه ی «۴» صحیح است.

چون واریانس داده ها صفر است لذا همه ی داده ها برابر بوده و همه با 3 برابرند، بنابراین داریم:

$$\bar{x} = \frac{(3 + 6) + (d + 5) + (c + 4) + (b + 3) + (a + 2)}{6}$$

$$\bar{x} = \frac{5 + 6 + 7 + 8 + 9}{5} = \frac{35}{5} = 7$$

۳۳- اندازه ی قد 120 دانش آموز، در جدول زیر دسته بندی شده است، فراوانی دسته ی چهارم کدام است؟ (سراسری تجربی - 83)

مرکز دسته	155	158	161	164	167	170
درصد فراوانی نسبی	10	15	18	x	20	12

(۴) 30

(۳) 25

(۲) 24

(۱) 20

پاسخ: گزینه ی «4» صحیح است.

در هر جدول، مجموع درصد های فراوانی های نسبی همیشه برابر 100 است، پس داریم:

$$10 + 15 + 18 + x + 20 + 12 = 100 \Rightarrow x = 25$$

اما با توجه به آنکه درصد فراوانی نسبی دسته ی چهارم 25 است و تعداد داده ها نیز 120 داده شده است، می توان فراوانی این دسته را به صورت زیر بدست آورد:

$$\text{درصد فراوانی نسبی} = \frac{\text{فراوانی}}{n} \times 100 \Rightarrow 25 = \frac{F_i}{120} \times 100 \Rightarrow \frac{F_i}{120} = \frac{1}{4} \Rightarrow F_i = 30$$

۳۴- به داده های 3، 6، 7، 8 کدام عدد را اضافه کنیم، تا میانگین داده های حاصل یک واحد اضافه گردد؟ (آزاد غیر پزشکی - 83)

(۴) 11

(۳) 10

(۲) 9

(۱) 8

پاسخ: گزینه ی «4» صحیح است.

$$\bar{x} = \frac{3+6+7+8}{4} = \frac{24}{4} = 6$$

$$\bar{Y} = \frac{3+6+7+8+a}{5} = \bar{x} + 1 = 6 + 1 = 7$$

$$\Rightarrow 24 + a = 35 \Rightarrow a = 11$$

۳۵- هشت داده ی آماری با میانگین 15 و واریانس 4 مفروض است، اگر دو داده ی 12 و 8 به آنها اضافه شود، واریانس 10 داده ی حاصل کدام است؟ (سراسری تجربی - 84)

(۴) 5

(۳) 4/8

(۲) 4/5

(۱) 4

پاسخ: گزینه ی «4» صحیح است.

چون میانگین دو داده ی 12 و 18 برابر $\frac{12+18}{2} = 15$ می باشد، با افزوده شدن این دو عدد به هشت داده ی قبلی، میانگین تغییر نخواهد کرد و همان 15 خواهد بود، از طرفی با توجه به اینکه واریانس هشت داده ی اولیه، برابر 4 است، نتیجه می گیریم:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^8 (x_i - 15)^2}{8} \Rightarrow \sum_{i=1}^8 (x_i - 5)^2 = 8 \times 4 = 32$$

با اضافه شدن دو داده ی 12 و 18، واریانس به صورت زیر محاسبه خواهد شد:

$$(\sigma^2)' = \frac{\sum_{i=1}^{10} (x_i - 15)^2}{10} = \frac{32 + (12-15)^2 + (18-15)^2}{10} = \frac{32 + 9 + 9}{10} = 5$$

۳۶- در 60 داده ی آماری، میانگین 3 و انحراف معیار $1/2$ محاسبه شده است، اگر به تمام داده ها 9 واحد اضافه شود، ضریب تغییرات داده های جدید کدام است؟ (آزمون سراسری تجربی - 85)

- (۱) $0/1$ (۲) $0/2$ (۳) $0/3$ (۴) $0/4$

پاسخ: گزینه ی «1» صحیح است.

چون به تمام داده ها، 9 واحد اضافه شده لذا به میانگین نیز 9 واحد اضافه می شود، اما انحراف معیار ثابت می ماند بنابراین داریم:

$$CV = \frac{\sigma}{x} = \frac{1/2}{3+9} = \frac{1/2}{12} = \frac{1}{24} = 0/04$$

۳۷- کوچکترین و بزرگترین داده های آماری 31 و 52 می باشند، این داده ها در 7 دسته، دسته بندی شده اند، 37 درصد داده ها کمتر از 40 و 48 درصد آنها بیشتر یا مساوی 43 می باشند، اگر فراوانی کل 80 باشد، فراوانی دسته ی وسط کدام است؟

- (۱) 9 (۲) 12 (۳) 15 (۴) 16

پاسخ: گزینه ی «2» صحیح است.

$$\frac{15}{100} \times 80 = 12 \Rightarrow 15 \text{ درصد داده ها مربوط به دسته ی وسط است} \Rightarrow 48 + 37 = 85$$



درسنامه ها و جزوه های دروس ریاضیات

دانلود نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نمونه سوالات و پاسخنامه کنکور

دانلود نرم افزارهای ریاضیات

و...

سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir