



دانلود از سایت ریاضی سرا  
[www.riazisara.ir](http://www.riazisara.ir)

# هندسهٔ بُاچفسکئی

نوشته: آ.س. اسموگور ژفسکی ترجمه: احمد بیرشک

در میان پنج اصل موضوع اقلیدس  
اصل پنجم، یا اصل توازی، موجب زحمت  
فکری بود: نه چندان ساده بود که بتوان اصل  
بودنش را بی نگرانی پذیرفت و نه هم قابل  
اثبات بود. از همان آغاز کسانی دچار دودلی  
شدند و چه بسیار وقت برای اثبات آن یا قرار  
دادن اصلی به جای آن صرف شد. این کوششها  
هر چند به نتیجه قطعی نرسیدند راه را برای  
رسیدن به نتیجه مهمتری گشودند. در قرن  
نوزدهم سه دانشمند در سه کشور، گاوس  
در آلمان، بویلی در مجارستان و لباچفسکی  
در روسیه تقریباً همزمان به کشف، یا بهتر بگوییم  
به ابداع، هندسه‌هایی دست یافتند که گاوس بر  
آنها نام هندسه نا اقلیدسی نهاد.

هدف این کتاب آشنا ساختن خواننده  
است با اصول هندسه نا اقلیدسی لباچفسکی.  
لباچفسکی ریاضیدان نامی روس متفکری  
برجسته بود که جهان یکی از بزرگترین اکتشاف  
های ریاضی، یعنی ساختن يك دستگاه ابتکاری  
هندسی متمایز از هندسه اقلیدسی، را به او  
مدیون است.

در بخش ۱ این کتاب ترجمه احوال  
کوتاهی از لباچفسکی آمده است، بخش ۲  
به این مسئله می‌پردازد که مفهومی اساسی  
هندسه چگونه نشأت کردند و گسترش یافتند، در  
بخش ۳ با تبدیلی به نام انعکاس، که وقوف بر  
آن برای درك هندسه لباچفسکی لازم است  
آشنا می‌شویم، بخشهای دیگر کتاب، پاره‌ای از  
ویژگیهای هندسه لباچفسکی را مورد بررسی  
قرار می‌دهد.

# هندسهٔ لباچفسکئی

نوشتهٔ :

آ. س. اسموگورژفسکی

ترجمهٔ :

احمد بیرشک

مؤسسهٔ انتشارات علمی دانشگاه صنعتی شریف

دانلود از سایت ریاضی سرا

[www.riazisara.ir](http://www.riazisara.ir)

### هندسه لباجفسکئی

نوشته آ. س. اسموگورزفسکی (A. S. Smogorzhevsky)

مترجم از روسی به انگلیسی: و. کیسین (V. Kisin)

مترجم فارسی: احمد بیرشک

طراح: نجمه تجدد

روی جلد: سعید رحمتی

نظارت چاپ: ابوالفضل نادری

چاپ: چاپخانه مؤسسه انتشارات علمی دانشگاه صنعتی شریف

تعداد: ۳۵۰۰ نسخه

حق چاپ و هرگونه نقل خاص مؤسسه انتشارات علمی دانشگاه صنعتی شریف است.

تاریخ چاپ: ۱۳۵۷. تاریخ نشر: ۱۳۵۸. تهران.

## اهدای کتاب

این ترجمه کوچک را به کسانی تقدیم می‌دارم که  
در مدت بیشتر از چهل سالی که در دیرستان و  
دانشگاه تدریس کرده‌ام توانسته باشم در دلهای  
پاکشان شور کوچکی برای کسب معرفت برانگیخته  
باشم.

۱. ب.

## فهرست

|     |                                          |
|-----|------------------------------------------|
| ۵   | یادداشت مترجم                            |
| ۹   | یادداشت مؤلف                             |
| ۱۱  | سخنی کوتاه دربارهٔ لباچفسکی              |
| ۱۵  | در منشأ اصلهای موضوع                     |
| ۲۹  | انعکاس                                   |
| ۴۱  | نقشهٔ صفحهٔ لباچفسکی                     |
| ۵۹  | دایره در صفحهٔ لباچفسکی                  |
| ۶۵  | منحنی همفاصله                            |
| ۶۷  | دایرهٔ زمانی                             |
| ۷۱  | قضیه‌هایی برگزیده از هندسهٔ لباچفسکی     |
| ۷۷  | چند تبصرهٔ دیگر                          |
| ۷۹  | لگاریتم طبیعی و تابعهای هذلولوی          |
| ۸۷  | اندازه‌گیری پاره خطهای راست هذلولوی      |
| ۹۳  | دستورهای اصلی مثلثات هذلولوی             |
| ۱۰۱ | طول بعضی قوسهای مستوی در هندسهٔ لباچفسکی |
| ۱۰۹ | نتیجه                                    |

## یادداشت مترجم

هیجان انگیزترین پیشرفت ریاضی در سده  
نوزدهم کشف هندسه های نااقلیدسی بود.  
جمز نیومن، «جهان ریاضیات»  
ج. یکم، ص. ۵۴۶

### هندسه نااقلیدسی

انکارپذیر نیست که بسیاری از قسمتهای مهم ریاضی، حتی از آنچه  
دیاخییات محض نامیده می شود، در آغاز از تجربه الهام گرفته اند. هرکسی  
که با هندسه آشنا باشد می داند که نیاز آن را به وجود آورد. حتی نام آن  
در زبانهایی که از یونانی ریشه گرفته اند گویای آن است که این دانش  
برای اندازه گرفتن زمین آفریده شد. یونانیان جامعه آزمایشی بودن را از  
تن آن بیرون آوردند و قبای تجرید را بر بالای آن آراستند. اما میان  
تجرید اقلیدس و تجرید هیلبرت، میان اصل موضوعی ساختن هندسه بوسیله  
آن و این، بیست قرن راه است. وانگهی هندسه اقلیدسی به شکلهای کوچک  
و فضاهای محدود می پرداخت و وقتی که پای بعدهای نجومی به میان آمد  
هندسه اقلیدسی نارسا ماند.

در میان پنج اصل موضوع اقلیدس اصل پنجم، یا اصل توازی، موجب زحمت فکری بود: نه چنان ساده بود که بتوان اصل بودنش را بی نگرانی پذیرفت و نه هم قابل اثبات بود. از همان آغاز کسانی دچار دودلی شدند و چه بسیار وقت که در طی قرون برای اثبات آن یا قرار دادن اصلی به جای آن صرف شد. و قرن نوزدهم سر رسید بی آن که برای آن تلاشها پایانی پیدا شده باشد. اما کوششها بی ثمر نبودند و اگر به نتیجه قطعی نرسیدند راه را برای رسیدن به نتیجه مهمتری گشودند.

شگفت آن که این نتیجه مهمتر بوسیله یک نفر و در یک جا عاید نشد بلکه سه دانشمند در سه کشور، گاوس<sup>۲</sup>، پادشاه ریاضیات قرن نوزدهم در آلمان، بویچی<sup>۳</sup> در مجارستان و لباچفسکی در روسیه تقریباً همزمان به کشف، یا بهتر بگوییم به ابداع، هندسه‌هایی دست یافتند که گاوس بر آنها نام هندسه نااقلیدسی نهاد. اولین کسی که به آن دست یافت گاوس بود اما آنچه را یافته بود فاش نکرد. وی در حدود بیست سالگی، یعنی از زمانی که در زندگی راه خود را یافت و به دنبال ریاضیات رفت، دفتر یادداشت روزانه‌ای<sup>۴</sup> ترتیب داد که تا آخر عمر مطالبی، و نامه‌هایی را که می‌نوشت یا دریافت می‌کرد، در آن ثبت و نگاهداری می‌نمود. این دفتر که بسیاری از آنچه در آن است به صورت اختصار و رمز است چهل سال پس از درگذشت صاحبش به محافل علمی راه یافت و دانسته شد که عجب گنجینه‌ای است! معلوم شد که گاوس گذشته از هندسه نااقلیدسی به استقبال بسیار مطالب رفته بود که بعد دیگران، بی خبر از کار او، کشف کردند و به نامشان ثبت شد. اما گاوس به هیچ یک از آنان دربارهٔ تقدم خود مطلبی نگفت و کسی به این رازها پی نبرد مگر از روی دفتر یادداشتهای روزانهٔ او.

همدورهٔ تحصیلی گاوس در دانشگاه گوتینگن مردی مجار بود به نام ولفگانگ، یا فورگوش، بویچی<sup>۵</sup>، که به ریاضیات دل بست و در آن پیش رفت و کتابی پرطمطراق نوشت. پسر او یانوس یا یوهان<sup>۶</sup>، که به راه پدر رفته بود، به هندسه نااقلیدسی رسید و به پدر خود اطلاع داد. طرفه آن که



پدر به‌وی هشدار داد که در انتشار کشف خود شتاب کند، به دو دلیل: یکی این که اندیشه‌ها بآسانی نشر می‌یابد و چه بسا که کسی فکر را برآید و زودتر به نام خود منتشر کند؛ دوم این که، سابقه هم دارد، چند نفر بی ارتباط با یکدیگر مطلبی را کشف کنند و برنده کسی خواهد شد که زودتر کشف را برملا سازد.

این پیش‌بینی درست بود و برنده لباچفسکی شد که در این کتاب با او آشنا می‌شوید. با وجود این لباچفسکی در زمان حیات خود شاهد رواج کشفی که کرده بود نشد. چهل و پنج سال گذشت تا ریشارد بالتر در اصول ریاضیات<sup>۲</sup> به کار لباچفسکی اشاره کرد و هوئل<sup>۸</sup> را تشویق کرد که آن را به فرانسوی برگرداند.

اگر دوره گاوس - بویثی - لباچفسکی را دوره اول بدانیم دوره دوم از آن فریدریش برنهارد ریمان<sup>۹</sup> است که هندسه اقلیدسی نوع دیگری را وضع کرد.

در دوره سوم از کیلی<sup>۱۰</sup> و کلاین<sup>۱۱</sup> و کلیفرد<sup>۱۲</sup> می‌توان نام برد که کارهای گذشته را به‌کمال رسانیدند و هندسه نااقلیدسی را به‌صورت ابزار ریاضی مهمی درآوردند. کلاین سه نوع هندسه: اقلیدسی، لباچفسکی (بویثی) و ریمانی، را بترتیب هندسه‌های سهموی و هذلولوی و بیضوی نامید (به این دلیل که در فرضهای آن سه نوع هندسه خط راست بترتیب یک نقطه بی‌نهایت دور دارد (سهموی)، دو نقطه بی‌نهایت دور (هذلولوی)، یا نقطه بی‌نهایت دور ندارد (بیضوی).

از ریاضیدانان دیگری هم که در این راه کار کردند و به پیشرفت آن کمک نمودند می‌توان نام برد، مانند واختر<sup>۱۳</sup>، شواپکارت<sup>۱۴</sup>، تاورینوس<sup>۱۵</sup> و جز آنان.

این کتاب با سبک ساده و آسانی که دارد در کاخ با شکوه هندسه نااقلیدسی را به روی شما می‌گشاید. پیش از این کتابی که آقای پرویز شهریاری ترجمه کرده بود در دسترس بود. بعد از آن، تا جایی که من

اطلاع دارم، کتاب مفصلتری منتشر خواهد شد که آقای محمد هادی شفیعیه  
ترجمه کرده است. و بعد، اگر عمری باقی باشد، کتاب متنوعتری که اکنون  
در دست ترجمه دارم در دسترس پژوهندگان قرار خواهد گرفت.

شهریور ماه ۱۳۵۷

- 
1. James Newman, *World of Mathematics*
  2. Karl Friedrich Gauss
  3. Bolyai
  4. Notizen-Journal
  5. Wolfgang Bolyai (Bolyai Farkas)
  6. Johann Bolyai (Bolyai Janos)
  7. Richard Baltzer, *Elemente der Mathematik*
  8. Houel
  9. Friedrich Bernhard Riemann
  10. Kayley
  11. Klein
  12. Clifford
  13. Wachter
  14. Schweikart
  15. Taurinus

## یادداشت مؤلف

هدف این کتاب آشنا ساختن خواننده است با اصول هندسهٔ ناکلیدسی لباچفسکی. لباچفسکی ریاضیدان نامی روس متفکری برجسته بود که جهان یکی از بزرگترین اکتشافهای ریاضی، یعنی ساختن یک دستگاه ابتکاری هندسی متمایز از هندسهٔ اقلیدسی، را به او مدیون است. خواننده ترجمهٔ کوتاهی از احوال لباچفسکی را در بخش ۱ خواهد یافت.

هندسه‌های اقلیدسی و لباچفسکی در قسمتهای بسیار مشترک هستند، و تفاوتشان در تعریفها و قضیه‌ها و دستورهای مربوط به اصل موضوع توازی است. برای روشن ساختن دلایل این تفاوتها باید ببینیم که مفهومیهای اساسی هندسه چگونه نشأت کردند و گسترش یافتند. این کار را در بخش ۲ می‌کنیم. علاوه بر آشنایی به هندسهٔ مسطحه و مثلثات دایره‌ستانی، خواندن این کتاب نیازمند است به وقوف بر تبدیلی به نام انعکاس، که مهمترین قسمتهایش در بخش ۳ آمده‌اند. امیدواریم که خواننده توفیق یابد که اصول آن را بی‌زحمت زیاد دریابد و از آنها بهره‌برگیرد، زیرا که این قسمت، و نیز بخش ۱۰، نقشی بسیار مهم، هر چند کمکی، در آنچه عرضه می‌کنیم خواهند داشت.

## ۱

## سخنی کوتاه درباره زندگی و کار ن. ۱. لباچفسکی

نیکلای ایوانوویچ لباچفسکی در ۱۱ آذر ۱۲۳۵/۱ دسامبر ۱۷۹۲ (= ۲۵ نوامبر در تقویم قدیم ژولینانی) چشم به جهان گشود. پدرش یک کارمند کم حقوق کشوری بود. در اوایل زندگی مراقبت نیکلای و دو برادرش بر عهده مادرشان، که زنی فعال و هوشیار بود، قرار گرفت و او با همه امکانات بسیار محقری که داشت آنان را به دیبرستان غازان فرستاد. نیکلای از ۱۸۰۲/۲۳۶۱ تا ۲۳۶۶ در دیبرستان و از ۲۳۶۶ تا ۲۳۷۵ در دانشگاه غازان تحصیل کرد. چون استعداد ریاضی درخشانی داشت دوره‌ها را با توفیق پشت سر گذاشت و پس از دانش آموختگی در دانشگاه باقی ماند تا خود را برای تدریس آماده کند؛ و این مقام در ۲۳۷۵ به وی تفویض شد.

تدریس لباچفسکی اثری ژرف بر خاطر دانشجویان گذاشت. درسهای او به سبب روشنی و کمالی که در روش او بود زبانزد بودند. معرفت او از شاخه‌های مختلف علوم وسیع و متنوع بود، و این وضع او را قادر می‌ساخت که نه تنها ریاضی بیاموزد بلکه مکانیک و فیزیک و نجوم و شناخت زمین و مساحی نیز تعلیم دهد.

لباچفسکی در ۱۸۲۷/۲۳۸۶ به ریاست دانشگاه غازان برگزیده شد،

و نزدیک به بیست سال در آن سمت باقی بود. از آنجا که مدیری مستعد و نیرومند بود و ینشی نیک در هدفهای آموزش عالی داشت توانست دانشگاه کازان را به مقام یک مؤسسهٔ نمونهٔ آموزش عالی زمان خود برساند. به ابتکار او دانشگاه شروع کرد به انتشار نشریه‌های علمی. در زمان ریاست او ساختمانهای دانشگاه گسترش بسیار یافتند و رصدخانه‌ای در آن تأسیس شد.

اما آنچه شهرت جهانی را نصیب لباچفسکی ساخت کار علمی او بود. وی با آفرینش هندسه‌ای ناقلیدسی که اکنون به نام وی<sup>۱</sup> موسوم است اسم خود را مخلد ساخت.

در ۲۱ بهمن ۱۳۸۴/۲۳ (۱۱) فوریهٔ ۱۸۲۶ در جلسهٔ گروه علوم ریاضی و فیزیک دانشگاه غازان، لباچفسکی مقاله‌ای خواند که در آن به هندسهٔ ناقلیدسی که کشف کرده بود پرداخت. اولین مطلبی که در بارهٔ اصول او چاپ شد یادداشت‌هایش زیر عنوان در بارهٔ مبنای هندسه بود که در ۲۳۸۷ و ۲۳۸۸ در مجلهٔ پیک غازان انتشار یافتند.

بیشتر همعصران لباچفسکی کشف او را نفهمیدند و کارهایی که در بارهٔ هندسه کرده بود، هم در روسیه و هم در خارج از آن کشور، دشمنانه پذیرفته شدند. اندیشه‌هایش بسیار بی‌باکانه بودند و بیشتر از حد از مفهومی که آن روز بر علوم حکومت می‌کردند دور می‌شدند، تا جایی که مدتی دراز بایست تا مقبولیت عام پیدا کنند. و این کار نشد مگر بعد از مردن او.

لباچفسکی، با وجود حمله‌های انتقادکنندگان، در درستی نتایجی که بدست آورده بود تردیدی به خاطر راه نداد، و با نیرو و تصمیمی که جبلی او بود به گسترش دستگاه هندسی خود پرداخت، و تعدادی نوشته‌های

---

۱. نام دیگر این هندسه «هندسهٔ هذلولوی» است، از آن روی که در آن خط راست، مانند هذلولی در هندسهٔ اقلیدسی، دو نقطهٔ بی‌نهایت دور دارد. (← بخش ۴).

مربوط به مسائل هندسه نااقلیدسی منتشر ساخت. آخرین آنها را، که با مرگ او فاصله چندانی نداشت، مجبور شد که با دست کسی دیگر بنویسد، زیرا که کوری، که در سالهای آخر عمر گریبانگیر او شده بود، او را از نوشتن باز می داشت.

فعالیت علمی لباچفسکی منحصر به پژوهش وی در هندسه نبود: به پیشرفتهای جبر و حساب جامع و فاضل هم کمکهای اساسی چند کرد؛ روش تخمین جوابهای معادلات جبری که از او است بسیار ظریف و مؤثر است.

دیدهای فلسفی او آشکارا تمایلی مادی گرایانه داشت. به عقیده او تجربه و عمل قابل اعتمادترین وسایل برای آزمودن نتایج نظری بودند. آموزش ریاضیات را به صورتی می پسندید که پدیدههای واقعی نهفته در عملهای ریاضی را برملا سازد.

در ۱۸۴۶/۲۴۰۵ لباچفسکی از وظایفی که در دانشگاه بر عهده داشت معاف گردید و به معاونت هیأت امنای ناحیه فرهنگی غازان منصوب شد.

لباچفسکی در ۴ اسفند ۱۲۴۱۴/۲۴ (۱۲) فوریه ۱۸۵۶ درگذشت. در ۱۸۹۶/۲۴۴۵ بنای یادبودی برای او در غازان ساخته شد.

## ۲

### در منشأ اصلهای موضوع و نقش آنها در هندسه

برای روشن ساختن نقش اصلهای موضوع، به ترسیم طرحی کلی از مهمترین گامهایی که از زمانهای باستانی در راه هندسه برداشته شده‌اند می‌پردازیم.

زادگاه هندسه کشورهای خاور باستانی هستند. در آن کشورها هزارها سال پیش قاعده‌های عملی مهمی برای اندازه گرفتن زاویه‌ها، و مساحت بعضی شکلها، و حجم ساده‌ترین جسمها وضع شده بود تا نیازمندیهای مردم آنها را از حیث مساحی و معماری و ستاره‌شناسی برآورد. این قاعده‌ها از راه تجربی بدست آمده بودند و ظاهراً با الفاظ، و دهان به دهان، اشاعه می‌یافتند: درکهن‌ترین کتابهایی که به دست ما رسیده‌اند به کاربرد قاعده‌های هندسی برمی‌خوریم، اما از تلاش برای بیان منظم آنها نشانه‌ای نمی‌یابیم. با گذشت زمان دایره چیزهایی که برایشان معرفت هندسی مورد احتیاج بود گسترش یافت و این نیاز احساس شد که قاعده‌ها به کلی‌ترین صورت خود به نظم درآیند. و این موجب شد که هندسه از موضوعهای عینی به مفهومی ذهنی انتقال یابد. مثلاً قاعده‌ای که برای تعیین مساحت قطعه زمینی بکار می‌رفت در مورد اندازه گرفتن پهنه‌ی قالبی، یا سطح دیواری، هم سودمند افتاد؛ و سرانجام به یک مفهوم ذهنی، یعنی مربع

مستطیل، رسید.

و بدین سان دستگاهی از معرفت تشکیل شد، و بر آن نام هندسه نهادند. هندسه در روزهای اول زندگی خود دانشی تجربی بود، بدین معنی که همهٔ نتیجه‌ها مستقیماً از تجربه عاید می‌شدند.

گسترش هندسه وقتی راه تازه‌ای پیش گرفت که معلوم شد برخی از احکام آن نیازی به پشتوانهٔ تجربی ندارند، زیرا که می‌شد آنها را از حکمهای دیگری، با تکیه بر قانونهای منطق، نتیجه گرفت. پس حکمهای هندسی به دو دسته تقسیم شدند: آنهایی که از راه تجربه استقرار می‌یافتند (و بعداً اصلهای موضوع خوانده شدند)، و آنهایی که بر مبنای اصلهای موضوع به کمک منطق قابل اثبات بودند (قضایا).

از آنجایی که پشتوانهٔ منطقی، که نیازی به وسایل ویژه یا اندازه‌گیریهایی خسته‌کننده ندارد، از جنبهٔ فنی خیلی ساده‌تر از روشهای تجربی است طبیعی است که دانشمندان باستانی با این مسأله روبرو شده باشند که چگونه تعداد حکمهای نوع اول، یعنی اصلهای موضوع، را به حداقل برسانند تا هندسه سبکتر گردد و بار اصلی آن بردوش استدلالهای منطقی گذاشته شود. معلوم شد که این هدف دست یافتنی است، زیرا که هندسه از همهٔ خاصیتهای اجسام مجرد شده بود جز بسط دادن، که مطلبی اساسی بود، اما چندان آسان، که می‌شد با کمک قانونهای منطق همهٔ رابطه‌های هندسی را از معدود محدودی مقدمات، یا اصلهای موضوع، نتیجه گرفت.

بدین ترتیب هندسه از یک دانش تجربی به یک علم قیاسی<sup>۱</sup> تبدیل شد و نمایش اصل موضوعی امروزی را پیدا کرد.

نخستین کتابی که به‌ما رسیده و در آن حکمهای اصلی هندسه به‌نحوی اصولی عرضه شده‌اند کتاب اصول<sup>۲</sup> اقلیدس است که در حدود ۳۰۰

۱. قیاس بیرون آوردن نتیجه است. علمی را قیاسی گویند که احکام جدید آن از احکامی که جلوتر گفته شده‌اند به‌کمک منطق نتیجه شوند.

۲. Elements



سال پیش از میلاد مسیح نوشته شد. ساختمان این کتاب بدین گونه است: بعد از تعریفها و اصلهای موضوع نوبت به قضایا و حل مسائل می‌رسد، و هر قضیه تازه بر پایه اصلهای موضوع و قضایائی که جلو تر ثابت شده‌اند اثبات می‌گردد. اصلهای موضوع ثابت نشده‌اند بلکه فقط به بیان آنها اکتفا شده است.

دو هزار سالی اصول بر دانشمندان تسلط بی‌منازع داشت. اما نکته‌ای در آن بود که موجه به نظر نمی‌رسید، و آن اصل موضوع توازی بود، بدین شرح:

اگر خطی که بر دو خط دیگر فرود می‌آید چنان باشد که دو زاویه داخلی که در یک طرف آن هستند وقتی که با هم گرفته شوند از دو قائمه کمتر باشند، آن دو خط راست اگر به‌طور نامتناهی امتداد یابند در آن طرفی که زاویه‌هایش با هم از دو قائمه کمتراند یکدیگر را قطع می‌کنند.<sup>۱</sup>

در اعتبار اصل موضوع توازی اقلیدس تردیدی حاصل نشد. اما دودلی در جای دیگر بود: آیا شمردن آن جزء اصلهای موضوع کار درستی است؟ آیا نمی‌توان آن را بر اساس اصل موضوعهای دیگر خود کتاب اثبات کرد و به جرگه قضایا انتقالش داد؟

در آغاز تلاش برای اثبات اصل موضوع توازی از این فکر، که جلو تر به آن اشاره شد، سرچشمه می‌گرفت که تعداد حکمهای هندسی که نیاز به پشتوانه تجربی داشتند هر چه ممکن باشد کمتر شود. با گذشت زمان وضع صورتی دیگر یافت: منشأ تجربی اصلهای موضوع به دست

۱. در کتابهای درسی به جای اصل موضوع توازی اقلیدس این گزاره، که هم‌ارز آن است، گذاشته شده است: از نقطه‌ای واقع در خارج خطی فقط یک خط می‌توان موازی با آن رسم کرد.

در هندسه اقلیدسی، یا هر هندسه دیگر، دو اصل را وقتی هم‌ارز گویند که نتایج حاصل از آن هر دو یکی باشند، مشروط به آن که اصلهای دیگر معتبر بمانند.



این تلاش اثبات با برهان خلف بود و برپایهٔ دلیلی که می‌آید قرار داشت: اگر اصل موضوع توازی اقلیدس نتیجهٔ اصل موضوعهای دیگر او باشد و اگر با وجود این فرض شود که از نقطهٔ واقع در خارج خطی که با آن خط دو خط صفحه باشد دست کم دو خط متمایز بتوان رسم کرد که آن خط را قطع نکنند، این فرض زود یا دیر، و به صورت نتیجه‌ای نزدیک یا دور، به تناقض برخورد خواهد خورد. اما لباچفسکی با بررسی بیشتر از بیشتر نتیجه‌های تازه‌ای که بر این فرض مترتب می‌شدند یقین حاصل کرد که، هر قدر هم از دیدگاه هندسهٔ اقلیدسی به نظر باطل نماید، این نتایج دستگاه سازگاری از قضایائی تشکیل می‌دهند که می‌توانند مبنای یک فرضیهٔ تازهٔ علمی باشند.

بدین ترتیب اساس هندسهٔ نااقلیدسی پی‌ریزی شد.<sup>۱</sup> اصل موضوع توازی آن با اصل اقلیدسی فرق دارد و به‌صورتی است که بالاتر بیان کردیم و از این پس به آن با عنوان اصل موضوع توازی لباچفسکی اشاره می‌کنیم. اما هنوز روشن نبود که آیا با اطمینان خاطر می‌توان حکم کرد که از مجموعهٔ نامتناهی نتیجه‌هایی که از اصل موضوع توازی لباچفسکی برمی‌آیند حتی یکی نیست که به تناقض برخورد. لباچفسکی راهی برای حل این مسأله اندیشید و به این نکته اشاره کرد که اگر هندسه‌ای که او کشف کرده است سازگار باشد باید حسابی کردن آن امکان‌پذیر باشد، یعنی بتوان حل هر مسألهٔ هندسی را منجر ساخت به محاسبهٔ آن، و تبدیل آن به تحلیلی با استفاده از دستورهایی مثلثات هذلولوی که خود او ابداع کرده بود. بعداً دانشمندان دیگر دلایل متقن بر سازگار بودن هندسهٔ او یافتند.

پژوهشهای لباچفسکی در قلمرو هندسهٔ هذلولوی خیلی دامنه‌دار بود و اصول هندسه و مثلثات و هندسهٔ تحلیلی و هندسهٔ تفاضلی (دیفرانسیل) را دربر می‌گرفت. وی، با استفاده از هندسهٔ خودش، بیشتر از ۲۰۰ دستور

---

۱. پس از آن معلوم شد که علاوه بر هندسهٔ لباچفسکی هندسه‌های نااقلیدسی متعدد دیگر می‌توان ساخت.

جدید برای محاسبه انتگرال معین نتیجه گرفت.

کشف لباچفسکی در نظر معاصران او، حتی شاگردانش، سخت بی‌معنی و در حکم سرپیچی گستاخانه از قواعد منطق و ذوق سلیم بود.<sup>۱</sup> این گونه برخورد با اندیشه‌های بزرگی که مفهومی را که در ردیف مقدسات قرار گرفته‌اند از بیخ و بن برمی‌اندازند، مایه شگفتی نیست. فرضیه خورشید-مرکزی کپرنیکوس هم، که منکر آنچه بدیهی می‌نمود، و مدعی آنچه قابل تصور بود، بود با چنین پیشواز دشمنانه‌ای روبرو شد. درکی بسیار عمیق لازم بود تا وجود دوگونه هندسه مختلف را بتوان دریافت. اکنون به‌عرضه کردن بعضی دلایل که به‌آسانترین صورت فهمیده می‌شوند می‌پردازیم.

در قسمت هندسه مسطحه دیرستان صفحه‌ای مورد مطالعه قرار می‌گیرد که از فضای اطراف خود مستقل است؛ به بیان دیگر هندسه مسطحه عبارت است از هندسه صفحه اقلیدسی. هندسه بعضی سطوح منحنی نیز کاملاً معروف هستند، مانند هندسه کروی که بسیار در اخترشناسی و شاخه‌های دیگری از علم بکار برده می‌شود.

در هر علمی ساده‌ترین مفهوماً مهمترین مفهوماً هستند. در هندسه اقلیدسی این مفهوماً عبارتند از مفهوماً نقطه و خط و صفحه. این

---

۱. البته نمی‌توان بی‌مجا با معاصران لباچفسکی را به‌نا توانی درک کشف او متصف کرد؛ بسیاری از آنان ابراز عقیده‌ای نکردند، شاید از این زوی که قلمرو علائق علمی آنان محیط تفحصات لباچفسکی را در بر نمی‌گرفت. این را هم می‌دانیم که ریاضیدان بزرگ آلمانی کارل گوس (Karl Gauss) و هندسه‌دان برجسته مجار یا‌نوش بویوئی (Janos Bolyai)، که بی‌ارتباط با لباچفسکی به‌فکر امکان ساختن هندسه‌ای نااقلیدسی افتادند، اندیشه‌هایی نظیر او داشتند. اما گوس از بیم آن که فکرش را نفهمند و به‌ریشی بختند چیزی به‌پشتیبانی لباچفسکی منتشر نکرد و بویوئی که دید تبعات خودش در هندسه نااقلیدسی (که در ۱۸۳۲/۲۳۹۱ انتشار داد) مورد قبول نیافت مطالعات ریاضی را کنار گذاشت. پس لباچفسکی ماند که به‌تنهایی برای به‌کرسی نشاندن حرف حسابش تقلا کند.

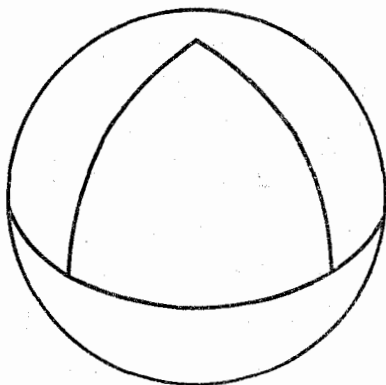
اصطلاحات در هندسه‌های نا اقلیدسی حفظ شده‌اند، بدین صورت که (همه‌جا) منظور از «خط راست» خطی است که در روی آن کوتاه‌ترین فاصله بین دو نقطه را می‌توان اندازه گرفت؛ «صفحه» سطحی است دارای این خاصیت که هرگاه دو نقطه از «خط راستی» متعلق به آن سطح باشند آنگاه همه نقاط آن «خط راست» به آن سطح تعلق داشته باشند. مثلاً در هندسه کروی سطح کره و دایره بزرگ آن، بترتیب، «صفحه» و «خط راست» شناخته شده‌اند. این‌گونه وضع اصطلاح کاملاً بمورد است زیرا که «خط راست» ساده‌ترین خطها، و «صفحه» ساده‌ترین صفحه‌هایی است که اولی واجد مهمترین صفت خط و دومی دارای مهمترین صفت صفحه هندسه اقلیدسی باشند.<sup>۱</sup>

پیردازیم به برخی خصایص هندسه کروی. برای مصور ساختن آن، آن را به صورت هندسه سطح یک کره در نظر می‌گیریم. درک این مطلب مشکل نیست که دو «خط راست» این هندسه (مثلاً دو نصف النهار) یکدیگر را در دو انتهای قطری از کره قطع می‌کنند. وانگهی مجموع زاویه‌های یک مثلث کروی بزرگتر است از  $\pi$ ؛ مثلاً در مثلثی محدود به ربع استوا و دو قوس از دو نصف النهار (شکل ۱) هر سه زاویه قائمه‌اند.<sup>۲</sup>

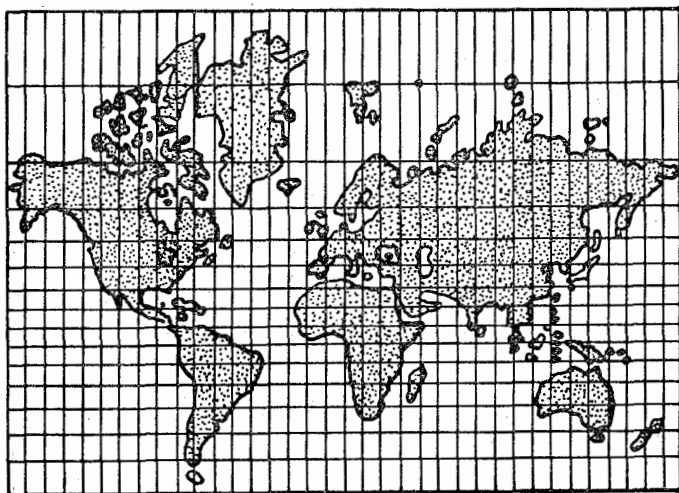
البته در جغرافیا، غیر از کره، نقشه‌های بر سطوح مستوی نیز متداول هستند. این کار بمنزله آن است که از روی نقشه‌های کره به بررسی هندسه کروی پرداخته شود، که کاری است شدنی، مشروط به آن که معلوم باشد اندازه‌های خطوط واقعی و زاویه‌های واقعی را چگونه می‌توان از روی نمایش آنها بر روی نقشه بدست آورد؛ زیرا که در این نمایشها اندازه‌ها بهم می‌خورند و میزان بهم‌خوردگی در سراسر نقشه یکی نیست. مثلاً در روی

۱. باید خاطر نشان کرد که در هندسه‌های تصویری از مفهوم فاصله بین دو نقطه اثری نیست. در این‌گونه هندسه‌ها تعبیر «خط راست» و «صفحه» مورد پیدا نمی‌کند.

۲. تعریف زاویه بین دو منحنی زاویه بین مماسهای بر آنهاست در نقطه تقاطعشان.



شکل ۱



شکل ۲

نقشه‌های کره زمین که به قاعدهٔ تصویر مرکا تر<sup>۱</sup> رسم شده‌اند تصویرهای نصف‌النهارها خطوط متوازی‌اند (شکل ۲)، و خطوط عمود بر آنها که نمایش مدارها هستند چنانند که پاره خطی که نمایندهٔ  $۱^\circ$  بر روی مدار است، بی‌توجه به عرض مدار، همه‌جا یکی است، حال آن که در حقیقت هرچه عرض مدار بیشتر باشد طول قوس  $۱^\circ$  بر روی آن کوتاه‌تر است.

چون سطح دارای دو بعد است هندسه‌ای که موضوعش مطالعهٔ شکل‌های واقع بر صفحه است دو بعدی، و خود سطح فضای دو بعدی نامیده می‌شوند. از زمان باستان دوگونه هندسهٔ دو بعدی شناخته شده بود، اقلیدسی (برای صفحه) و کروی. ریاضیدانان به وجود هندسهٔ دو بعدی نا اقلیدسی، یعنی هندسهٔ کروی، واقعی نمی‌گذاشتند؛ فقط به این دلیل ساده که کره در هندسهٔ سه بعدی اقلیدسی بررسی می‌شد. و این وضع موجب شده بود که خواص نا اقلیدسی خود کره نادیده گرفته شوند.

بر اثر پژوهشهای لباچفسکی معلوم شد که نه تنها سطوح با خواص نا اقلیدسی قابل تصور هستند بلکه فضاهای سه بعدی نا اقلیدسی هم وجود دارند.

وارد کردن مفهوم هندسه‌های سه بعدی نا اقلیدسی ممکن است مشکلی ایجاد کند مگر این که به این توضیح توجه کنیم: گاهی مناسب است که نتایج بررسی ردهٔ خاصی از پدیده‌ها را به صورت هندسی نمایش دهیم. مثلاً معلومات حاصل از نتایج رشد باروری کار کارگران را با منحنی‌ها و نمودارها مجسم می‌سازند. و این نشانهٔ آن است که بسیاری از فرایندهای واقعی و حالت‌هایی را که ارتباط مستقیمی با هندسه ندارند می‌توان بوسیلهٔ شکل‌های هندسی نمایان ساخت.

---

۱. گرهارد مرکا تر (Garhard Mercator) (۲۰۷۱ - ۲۱۵۳ / ۱۵۱۲ - ۱۵۹۴) نقشه‌کش برجستهٔ فلاندری، روش تصویری که او در ۱۵۶۹/۲۱۲۸ پیشنهاد کرد قبول عام یافت و از آن زمان نقشه‌های دریایی با این روش رسم می‌شوند.

اگر نمودار را همچون خطی در صفحهٔ اقلیدسی در نظر بگیریم آشکار می‌شود که شکل‌های هندسهٔ اقلیدسی در مثال ما بکار رفته‌اند. در حالت‌های پیچیده‌تر ممکن است به هندسه‌های سه بعدی، و حتی چند بعدی، اقلیدسی و نااقلیدسی توسل جوئیم. اما از آنچه گفتیم نمی‌توان نتیجه گرفت که همهٔ این هندسه‌ها نسبت‌ها را بتفصیل توصیف می‌کنند؛ نظریه‌هایی وجود دارند که اصطلاحات هندسی را در بیان مطلب خود بکار می‌برند و، بطور کلی، به این اصطلاحات معنی‌هایی اسناد می‌شود که با مفهومی فضائی ارتباطی ندارند. بدین ترتیب با افزودن زمان به عنوان بعد چهارم به سه بعد فضای حقیقی مفهوم فضای چهار بعدی را وارد می‌کنیم که در آن یک فاصلهٔ زمانی معین مانند «پاره خطی راست» در نظر گرفته می‌شود. در بیشتر حالت‌ها این شیوهٔ برخورد فقط ظاهری از تجسم می‌آفریند، با وجود این تا حدی به آسان شدن درک مفهوم پدیده‌هایی که با این روش مورد مطالعه قرار می‌گیرند کمک می‌کند.

بدین ترتیب ساختن هندسه‌های نااقلیدسی از این حیث قابل توجیه است که اطلاق آنها به چیزهایی که وجود عینی دارند امکان‌پذیر است. نفس این واقعیت که این نتایج با اصطلاحات هندسی بیان می‌شوند نتیجه‌ای حقیقی نیست: تغییر دادن این طرز بیان هندسی به صورتی که با خواص شیء و پدیده‌های مورد بحث مطابقت پیدا کنند کار دشواری بنظر نمی‌رسد.

این را هم بگوئیم که در ریاضیات عملی وقتی که نظریه‌ای چیزهای مختلفی را که تابع قوانین واحد ریاضی هستند از جنبهٔ کیفی توصیف می‌کند قرارداد بعضی مفهومیها به جای بعضی دیگر کاری است متداول و معمول. هندسه‌های سه بعدی درخور دقت خاص هستند. با صرف نظر از کاربردهای دیگری که این هندسه‌ها ممکن است داشته باشند در آنها باید به صورت فرضیه‌هایی نگریست که مدعی توصیف ویژگیهای فضائی حقیقی‌اند. این که کدام از این هندسه‌ها بیشتر با واقعیت مطابقت دارد



مسأله‌ای است که آن را فقط می‌توان با آزمونهای تجربی حل کرد. اما باید واقعیتی را خاطر نشان سازیم که برای آنچه بعداً عرضه می‌کنیم دارای اهمیتی است. نقشه‌ای از یک صفحهٔ لباچفسکی را می‌توان بر روی یک صفحهٔ اقلیدسی کشید، و آن هم به بیشتر از یک راه، درست همانطور که در مورد کره عمل می‌کنیم. ما باید تحلیل چنین نقشه‌ای را پایهٔ مطالعه‌ای قرار دهیم که در اینجا از هندسهٔ هذلولوی می‌شود.

هندسهٔ لباچفسکی در مواردی که اینک خواهیم گفت قبول عام یافت. در ۱۸۶۸/۲۴۲۷ هندسه‌دان ایتالیایی اجنیو بلترامی<sup>۱</sup> (۲۳۹۴ - ۱۸۳۵/۲۴۵۹) کشف کرد که در فضای اقلیدسی سطحی وجود دارد که دارای ویژگیهای صفحهٔ لباچفسکی، یا بهتر بگوییم (هرگاه کوتاه‌ترین خط بر روی سطوح را بمنزلهٔ «خط راست» بپذیریم) قسمتی از صفحهٔ لباچفسکی، است. این کشف، که دیری نکشید که منجر به ترسیم نقشه‌های گوناگون بر صفحهٔ لباچفسکی شد، دانشمندان را به درستی اندیشه‌های هندسه‌دان روسی معتقد ساخت، و موجب نهضتی برای بررسی دقیقتر کار او شد، و پژوهشهای متعدد در زمینهٔ هندسه‌های نااقلیدسی را برانگیخت.

کشف هندسه‌های نااقلیدسی مسأله‌ای بسیار دشوار برای علم فیزیک مطرح ساخت و آن توضیح این مسأله بود که آیا فضای واقعی فیزیکی، چنان که قبلاً پنداشته شده بود، اقلیدسی است، و اگر نیست به کدام نوع از فضاهای نااقلیدسی تعلق دارد؟<sup>۲</sup> برای یافتن جواب این مسأله لازم است که از راه تجربه به آزمون اعتبار اصول موضوع آن پرداخت، زیرا که آشکار است که با بهتر شدن ابزارهای اندازه‌گیری، اعتماد به معلوماتی

---

۱. Eugenio Beltrami

۲. وقتی که این مسأله مورد توجه قرار می‌گیرد از امکان یکنواخت نبودن فضای واقعی غافل نباید ماند، یعنی فضائی که نهاد هندسی آن در نقاط مختلف متفاوت باشد.

که از راه تجربه فراهم آیند بیشتر می‌شود و با بالا رفتن این اعتماد امکان نفوذ در جزئیاتی که از این پیش از دقت پژوهندگان گریخته‌اند افزایش می‌یابد.

بدین ترتیب لباچفسکی هندسه را به تعبیر مادی اصول موضوع آن باز گرداند، یعنی که این اصول احکامی هستند که خواص هندسی فضا را به صورتی که آدمی بر اثر تجربه درکشان می‌کند، به رشتهٔ قاعده می‌کشند. ما هنوز نمی‌توانیم مسألهٔ نهاد هندسی فضای حقیقی فیزیکی را بکلی حل شده انگاریم. با وجود این می‌توانیم خاطر نشان سازیم که در نظریهٔ جدید نسبیت، براساس داده‌های متعدد، چنین بنظر می‌رسد که فضای حقیقی ناقلیدسی است و خواص هندسی آن از خواص فضای لباچفسکی پیچیده‌ترند. یکی از بزرگترین ضربت‌هایی که بر اعتقاد به اقلیدسی بودن نهاد فضای حقیقی وارد آمد بر اثر کشف این قانون فیزیکی بود که ممکن نیست سرعتی بالاتر از سرعت نور وجود داشته باشد.

حالاً می‌توانیم به پرسشی که غالباً به گوش می‌رسد جواب بگوئیم، یعنی به این که کدام یک از دو هندسهٔ اقلیدسی یا لباچفسکی درست است. چنین پرسشی در مورد هندسه‌های دو بعدی اقلیدسی و کروی مطرح نمی‌شود، هر دو به وضوح درست هستند، و هر یک محیطی خاص برای کار برد خود دارد. نه دستورهای هندسهٔ کروی را می‌توان برای شکل‌های مسطح بکار برد و نه دستورهای هندسهٔ دو بعدی اقلیدسی را بر شکل‌های واقع بر روی کره بکار بست. همین حکم بر هندسه‌های مختلف سه بعدی روا است؛ هر یک از آنها که از جنبهٔ منطقی سازگار است در حوزهٔ خاصی، که الزاماً سرشت هندسی ندارد، بکار می‌رود؛ لیکن اگر به آن یک سرشت کلی بدهیم اعتبار خود را از دست می‌دهد.

اما در مورد نهاد هندسی فضای حقیقی، مسأله، به صورتی که مشخص کرده‌ایم، در قلمرو فیزیک قرار می‌گیرد و حل آن به وسیلهٔ هندسهٔ محض میسر نیست. از جمله، صفت مشخص‌کنندهٔ آن این است که هیچ هندسه‌ای

روابط فضائی را با دقت مطلق دربر نمی‌گیرد؛ مثلاً ساخت ملکولسی ماده وجود اجسامی با ابعاد قابل درک با لمس را که واجد خواص هندسی یک کره آرمانی باشند نفی می‌کند. از این روی کاربرد قاعده‌های هندسی در حل مسائل عینی بناچار نتایج تقریبی ببار می‌آورد. بدین ترتیب مفهومی که از نهاد هندسی فضای حقیقی داریم به این عقیده، که از جنبه علمی تأیید شده است، تحلیل می‌رود که گاهی هندسه‌ای روابط واقعی فضائی را بهتر از هندسه‌های دیگر توصیف می‌کند.

با این که نظریه نسبیت از دستورهای هندسه نااقلیدسی استفاده می‌کند، نتیجه نباید گرفت که از هندسه اقلیدسی سلب اعتبار شود، چنان‌که از اختر شماری و کیمیاگری و علوم کاذبی مانند آنها شد. هر دو هندسه ابزار پژوهش در صورتهای فضائی‌اند، اما هندسه نااقلیدسی پژوهشهای دقیقتری را میسر می‌سازد در حالی که هندسه اقلیدسی برای حل بیشتر مسایل مهم عملی با درجه خاصی از دقت بکار می‌رود؛ و چون در عین حال سادگی زیاد صفت برجسته آن است کاربرد وسیع آن برای همیشه تضمین می‌شود.

برای به پایان رساندن این زمینه مختصر اندیشه‌های تازه‌ای را که لب‌چفسکی در گسترش هندسه وارد عرصه کرده است خاطر نشان می‌سازیم. خدمات علمی این متفکر بزرگ منحصر به پرده برداشتن از راز هزار ساله اصل موضوع توازی نبود؛ بلکه کار او از اهمیت خیلی بیشتری برخوردار است.

لب‌چفسکی، با گذاشتن یکی از اصل موضوعهای اقلیدس در بوته انتقاد تحلیلی، زمینه‌را برای مطالعه مجدد بعضی از احکام مقدماتی دستگاه اقلیدسی فراهم ساخت و این کار به گسترش اصول دقیق علمی برای ساختمان اصل موضوعی هندسه و شاخه‌های دیگر ریاضی رهنمون گردید. کشف هندسه هذلولوی به وسیله لب‌چفسکی علم صورتهای فضائی را از چارچوب تنگ دستگاه اقلیدسی رها نید. هندسه او در نظریه انتگرالهای

معین و سایر محیطهای ریاضی کاربردی مستقیم یافت.  
 لباچفسکی پرداختن به مسائلی را آغاز کرد که در هیأت پیشین  
 ریاضیات ظهور نکرده بودند، از جمله مسألهٔ نهاد هندسی فضای حقیقی.  
 اگر هندسهٔ لباچفسکی نبود نظریهٔ نسبیت، که یکی از عظیمترین کارهای  
 فیزیک نوین است، امکان گسترش نمی یافت. بر مبنای پژوهشهای لباچفسکی  
 دانشمندان نظریه‌ای به وجود آوردند که تحلیل فرایندهایی را که در درون  
 هستهٔ اتم روی می دهند میسر سازد.

در پایان، اهمیت عرفانی اندیشه‌های این ریاضیدان بزرگ روس را  
 خاطر نشان می سازیم. پیش از لباچفسکی هندسه قرنهای زیر سیطرهٔ نظریات  
 آرمان گرایانه (ایده آلیست)، که از افلاطون فیلسوف بزرگ یونانی  
 سرچشمه می گرفتند، بود. افلاطون با اسناد سرشتی مطلق به اصل موضوعهای  
 اقلیدس منکر منشأ تجربی آنها شده بود. لباچفسکی با قاطعیت این بینش  
 را درهم کوفت و هندسه را به وضعی مادی باز گردانید.

# ۳

## انعکاس

فرض کنید که قاعده‌ای وجود داشته باشد که رسیدن از شکلی به شکل دیگری را میسر سازد، بقسمی که با مشخص بودن اولی دومی کاملاً معین باشد، و بعکس. این گونه رسیدن از شکلی به شکل دیگر را یک تبدیل، یا دگرگونی، هندسی گویند. متداولترین تبدیلهای هندسی عبارتند از انتقال، تجانس، دوران، تصویر و انعکاس. کاربرد انعکاس در ریاضیات بسیار است، مثلاً به عنوان روشی برای مسائل ساختمانهای هندسی، یا در نظریهٔ توابع یک متغیر مختلط، یا در بررسی نقشه‌ها بر روی یک صفحهٔ لباچفسکی.

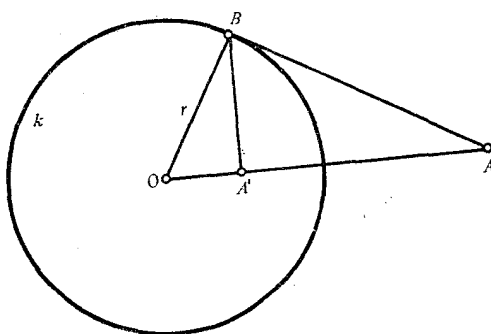
در این بخش به تعریف انعکاس و مفهومی وابسته به آن می‌پردازیم؛ و به تعدادی از خواص بنیادی آن توجه می‌کنیم.

دایرهٔ  $k$  به شعاع  $r$  و مرکز  $O$  را در صفحهٔ  $\alpha$ ، و نقطهٔ  $A$  را که با  $O$  یکی نباشد، در نظر می‌گیریم. نقطهٔ  $A'$  را بر نیمخط  $OA$  چنان اختیار می‌کنیم که حاصل ضرب اندازه‌های قطعات  $OA'$  و  $OA$  مساوی باشد با مربع اندازهٔ شعاع دایرهٔ  $k$ :

$$(۱) \quad OA \cdot OA' = r^2$$

توافق می‌کنیم که  $A$  و  $A'$  را قرینه نسبت به دایرهٔ  $k$  بنامیم.

اگر یکی از دو نقطهٔ  $A$  و  $A'$  در بیرون دایرهٔ  $k$  قرار داشته باشد دیگری در درون دایره می‌افتد، و بعکس؛ مثلاً، با توجه به شرط (۱)، از نامساوی  $OA > r$  نتیجه می‌گیریم  $OA' < r$ . اما اگر  $A$  یا  $A'$  روی دایره واقع شود دیگری بر آن منطبق می‌گردد. به شکل ۳، که در آن  $AB$  بر دایرهٔ  $k$  مماس است و  $BA'$  بر  $OA$



شکل ۳

عمود است، توجه کنید. چون  $OA'$  تصویر ضلع  $OA$  در مثل قائم‌الزاویهٔ  $OAB$  بر وتر  $OA$  است

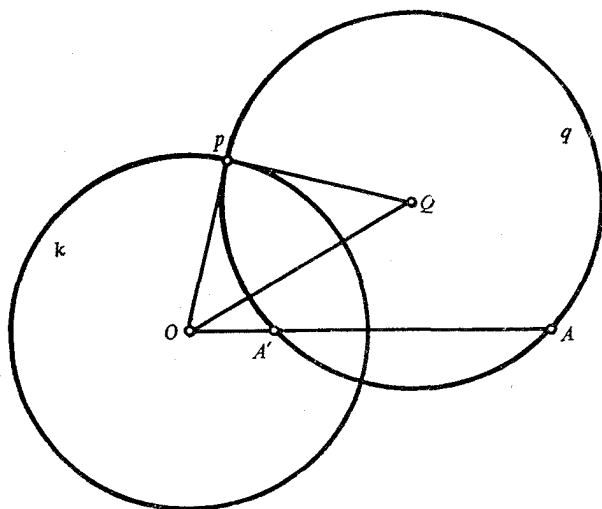
$$OA \cdot OA' = OB^2 = r^2$$

پس دو نقطهٔ  $A$  و  $A'$  نسبت به دایرهٔ  $k$  قرینه‌اند. در اینجا البته وسیله‌ای است برای آن که اگر  $A$  را داشته باشیم  $A'$  را، و اگر  $A'$  را داشته باشیم  $A$  را، بدست آوریم.

۵ قضیهٔ ۱. هرگاه دایره‌ای چون  $q$  بر دو نقطهٔ  $A$  و  $A'$  که نسبت به دایرهٔ مفروض  $k$  قرینه‌اند بگذرد، آنگاه دو دایرهٔ  $k$  و  $q$  بر یکدیگر عمودند.

دو دایره را برهم عمود گویند وقتی که به زاویهٔ قائمه تقاطع کنند،

یعنی وقتی که مماسهای بر آنها در نقطه تقاطع دوا بر برهم عمود باشند؛ یا شعاعهای آنها در آن نقطه برهم عمود باشند (چیزی که در حکم عمود بودن مماسها است).



شکل ۴

$P$  را یک نقطه تقاطع دو دایره  $k$  و  $q$  می‌انگاریم (شکل ۴). چون  $OP$  شعاع دایره  $k$  است رابطه (۱) به صورت  $OA \cdot OA' = OP^2$  در می‌آید. از سوی دیگر حاصل ضرب دو پاره خط  $OA$  و  $OA'$  مساوی است با مربع مماسی که از  $O$  بر  $q$  رسم شود. بنابراین  $OP$  مماس است بر  $q$ . در نتیجه شعاعهای  $OP$  و  $QP$  این دو دایره برهم عمودند، یعنی دو دایره متعامدند.

توجه داشته باشید که هر دایره که بر دو نقطه متمایز قرینه نسبت به یک خط راست بگذرد آن خط را به زاویه‌های قائمه قطع می‌کند. شباهتی که بین این خاصیت و واقعیتی که به موجب قضیه ۱ ثابت شد

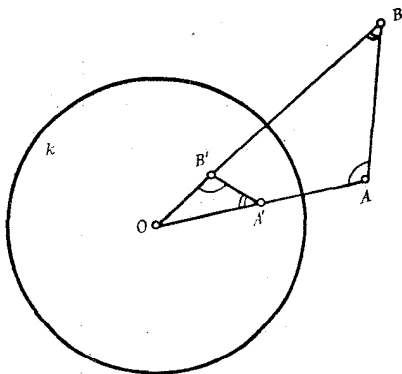
وجود دارد اطلاق اصطلاح «قرینه» را بر دو نقطه که نسبت به دایره مفروضی به وضعی که گفتیم قرار گرفته باشند موجب گردیده است؛ و نیز این را که هر دایره‌ای که بر آن دو نقطه بگذرد بر آن دایره عمود است.

۲. قضیه. هرگاه دو دایره  $k$  و  $q$  برهم عمود باشند هر خطی که بر  $O$  مرکز  $k$  بگذرد و  $q$  را قطع کند دو نقطه تقاطعش با  $q$  نسبت به دایره  $k$  قرینه‌اند.

دو نقطه‌ای را که در آنها خط  $q$  تقاطع می‌کند  $A$  و  $A'$ ، و یکی از نقاط برخورد دو دایره  $k$  و  $q$  را  $P$ ، می‌نامیم (شکل ۴). چون دو دایره برهم عمودند  $OP$  بر  $q$  مماس است، بنا براین  $OP^2 = OA \cdot OA'$ . از این رابطه نتیجه می‌گیریم که  $A$  و  $A'$  نسبت به  $k$  قرینه‌اند.

۳. قضیه. هرگاه مثلث  $OAB$ ، که در آن  $O$  مرکز دایره‌ای مانند  $k$  است، داده شده باشد و  $A'$  و  $B'$  قرینه‌های  $A$  و  $B$  نسبت به  $k$  باشند، آنگاه

$$\angle OBA = \angle OA'B' \text{ و } \angle OAB = \angle OB'A'$$



شکل ۵

شکل ۵ را در نظر بگیرید. از رابطه  $OA \cdot OA' = OB \cdot OB'$



که نتیجه شرط (۱) است، نتیجه می‌گیریم  $OA/OB' = OB/OA'$ . پس دو مثلث  $OAB$  و  $OB'A'$ ، که در یک زاویه هم مشترکند، متشابه‌اند. بنا بر این نتیجه می‌گیریم که قضیه صحیح است.

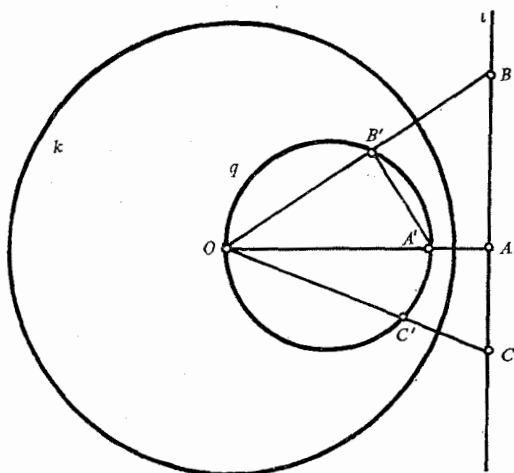
خاطر نشان می‌کنیم که می‌توان دایره‌ای بر چهار ضلعی  $ABB'A'$  محیط کرد، زیرا که  $\angle A'AB + \angle A'B'B = \pi$ . چنان که از قضیه ۱ برمی‌آید این دایره بر  $k$  عمود است.

اکنون در صفحه  $\alpha$  تبدیلی بدین‌گونه در نظر می‌گیریم که هر دو نقطه این صفحه که نسبت به  $k$  قرینه باشند جای خود را با یکدیگر عوض کنند. این تبدیل را انعکاس، دایره  $k$  را دایره انعکاس، و  $O$  مرکز آن را قطب انعکاس می‌نامیم. هرگاه انعکاس نسبت به دایره  $k$  شکلی مانند  $F$  را به  $F'$  تبدیل کند می‌گوئیم  $F'$  قرینه  $F$ ، و  $F$  قرینه  $F'$ ، است نسبت به  $k$ . توجه کنید که هیچ نقطه‌ای قرینه قطب انعکاس نسبت به دایره انعکاس نیست.

بآسانی دیده می‌شود که نقطه‌های بیرون دایره که به دایره محدود می‌شوند به نقطه‌هایی در درون دایره، جز مرکز دایره، تبدیل می‌گردند؛ و بعکس. نقطه‌های واقع بر دایره انعکاس به خودشان تبدیل می‌شوند؛ هر خط که بر قطب انعکاس  $O$  بگذرد به خودش تبدیل می‌شود اما در این فرایند نقطه  $O$  را از دست می‌دهد.

قضیه ۴. هر خطی که بر قطب انعکاس نگذرد در تبدیل به وسیله انعکاس به دایره‌ای تبدیل می‌شود که بر قطب انعکاس می‌گذرد.

$A$  را پای عمودی فرض کنید که از قطب انعکاس بر خط راست  $l$  فرود آید؛  $B$  را نقطه دلخواهی از  $l$  و  $A'$  و  $B'$  را بترتیب قرینه‌های  $B$  و  $A$  نسبت به دایره انعکاس  $k$  فرض کنید (شکل ۶). دایره  $q$  را به قطر  $OA'$  رسم می‌کنیم. به موجب قضیه ۳،  $\angle OB'A' = \angle OAB$ ، پس  $\angle OB'A' = \pi/2$ ؛ بنابراین نقطه  $B'$  واقع است بر دایره  $q$ . از سوی



شکل ۶

دیگر نقطه دلخواه  $C'$  را، متمایز از  $O$ ، بر دایره  $q$  اختیار کنید؛ خط  $OC'$  خط  $l$  را در نقطه‌ای مانند  $C$  قطع می‌کند که، بطوری که هم اکنون خواهیم دید، با این انعکاس به  $C'$  تبدیل می‌شود. قضیه بدین ترتیب اثبات شده است اما باید به یاد داشته باشیم که خط  $l$  بدین ترتیب به دایره  $q$ ، بی نقطه  $O$ ، تبدیل شده است.

توجه داشته باشید که مرکز دایره  $q$  بر روی عمودی است که از  $O$  بر  $l$  فرود آمده است.

اگر خط  $l$  با دایره انعکاس  $k$  نقطه مشترکی نداشته باشد، آنگاه  $q$  در درون  $k$  می‌افتد.

اگر  $l$  بر  $k$  در نقطه‌ای مماس باشد  $q$  هم بر  $k$  در آن نقطه مماس است.

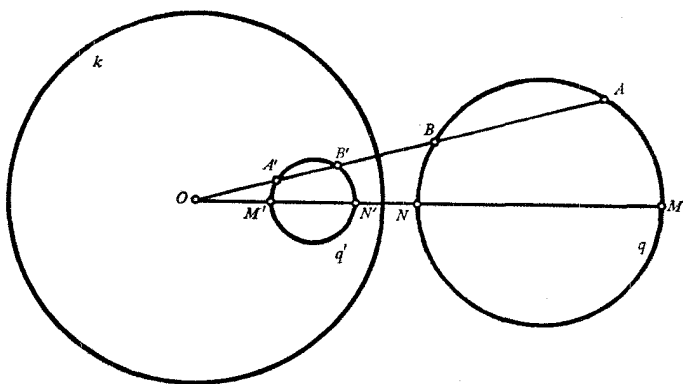
هرگاه  $l$  و  $k$  تقاطع کنند  $q$  بر نقطه‌های تقاطعشان می‌گذرد.

قضیه ۵. انعکاس دایره‌ای را که بر قطب انعکاس بگذرد به خطی تبدیل می‌کند که بر قطب انعکاس نمی‌گذرد.

$O$  (قطب انعکاس) و  $A$  و  $B$  سه نقطه متمایز بر دایره  $q$  در نظر بگیرید و  $A'$  و  $B'$  را قرینه‌های  $A$  و  $B$  نسبت به دایره انعکاس فرض کنید. به موجب قضیه ۴ خط  $A'B'$  تبدیل می‌شود به دایره‌ای که بر  $O$  و  $A$  و  $B$  بگذرد، یعنی به دایره  $q$ ؛ بنابراین نتیجه می‌شود که  $q$  تبدیل شده است به خط  $A'B'$ .

قضیه ۶. انعکاس دایره‌ای را که بر قطب انعکاس نگذرد به دایره دیگری تبدیل می‌کند که آن هم بر قطب انعکاس نمی‌گذرد.

دایره  $k$  به مرکز  $O$  و شعاع  $r$  را دایره انعکاس انگارید.  $q$  را دایره‌ای فرض کنید که بر  $O$  نگذرد (شکل ۷). اکنون نقطه دلخواهی



شکل ۷

مانند  $A$  بر  $q$  اختیار کنید و نقطه دیگر تلاقی خط  $OA$  با  $q$  را  $B$  و قرینه‌های  $A$  و  $B$  را نسبت به  $k$  بترتیب  $A'$  و  $B'$  بنامید. آنگاه

$$OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = r^2$$

$$(۲) \quad OA/OB' = OB/OA' \quad \text{و در نتیجه}$$

$$OA \cdot OB \cdot OA' \cdot OB' = r^4 \quad \text{و}$$

به موجب قضیه معروفی که در هندسه مقدماتی هست وقتی که  $A$  بر روی  $q$  تغییر مکان دهد مقدار حاصل ضرب

$$OA \cdot OB = g$$

تغییر نمی‌کند. بنا براین  $g$  مقدار ثابتی است که وقتی  $O$  بیرون  $q$  باشد مثبت است، و وقتی که  $O$  در داخل دایره باشد منفی است (زیرا که در حالت اخیر پاره خطهای  $OA$  و  $OB$  در جهت مخالف یکدیگر اند). از دو رابطه اخیر نتیجه می‌گیریم  $OA' \cdot OB' = (r^4/g)$ ، بنا براین

$$\frac{OA \cdot OB}{OB' \cdot OA'} = \frac{g^2}{r^4}$$

و چون رابطه (۲) را به میان آوریم:

$$\frac{OA}{OB'} = \frac{g}{r^2}$$

(علامت درست انتخاب شده است، زیرا که  $OB$  و  $OB'$  همجهت اند.) از آخرین رابطه برمی‌آید که دو شکلی که به وسیله  $A$  و  $B'$  ترسیم می‌شوند مجانس یکدیگرند. پس قضیه به ثبوت رسید:  $B'$  دایره‌ای ترسیم می‌کند (که  $q'$  می‌نامیم).

قطب انعکاس  $O$  مرکز تجانس دایره‌های  $q$  و  $q'$  است، که متخارج اند. اگر  $g > 0$  و متداخل اند هرگاه  $g < 0$ . در حالت اول  $O$  بیرون  $q$  و  $q'$  است و در حالت دوم در درون آنها.

هرگاه  $q$  در نقطه‌ای بر  $k$  مماس باشد  $q'$  نیز در همان نقطه بر آن مماس است.

اگر  $q$  و  $k$  تقاطع کنند  $q'$  بر نقاط تقاطعشان می‌گذرد.  
 در صورتی که  $q$  بر  $k$  عمود باشد در انعکاس نسبت به  $k$  به خودش  
 تبدیل می‌شود ( $q'$  بر  $q$  منطبق است)، و این نتیجه قضیه ۲ است.  
 هرگاه خط بین مرکزهای دو دایره  $k$  و  $q$  دایره  $q$  را در  $M$  و  $N$   
 قطع کند (و  $M'$  و  $N'$  قرینه‌های  $M$  و  $N$  نسبت به  $k$  باشند) پاره خط  
 $M'N'$  قطر دایره  $q'$  (شکل ۷) خواهد بود. از این نکته می‌توان برای  
 ساختن  $q'$  استفاده کرد.  
 خاطر نشان می‌سازیم که مرکزهای دو دایره  $q$  و  $q'$  نسبت به  $k$   
 قرینه نیستند.

قضیه ۷. نقاط برخورد دو دایره  $p$  و  $q$  عمود بر دایره  $k$ ، نسبت به  $k$   
 قرینه‌اند.

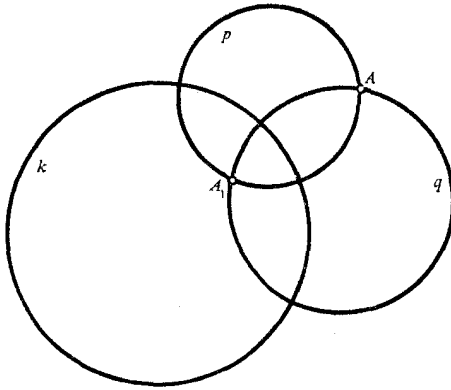
قضیه واضح است، زیرا که هر یک از دو دایره  $p$  و  $q$  با انعکاس  
 نسبت به  $k$  به خودش تبدیل می‌شود؛ پس دو نقطه تقاطع آنها جا عوض  
 می‌کنند (شکل ۸).

قضیه ۸. هرگاه دو نقطه  $M$  و  $M'$  که نسبت به یک دایره  $k$  قرینه‌اند  
 بر دوی دو منحنی  $m$  و  $m'$  باشند که آنها نیز نسبت به  $k$  قرینه‌اند، آنگاه  
 مماسهای  $m$  و  $m'$  در  $M$  و  $M'$  یا بر  $MM'$  عموداند یا با آن مثلث  
 متساوی‌الساقینی می‌سازند که  $MM'$  قاعده آن است.

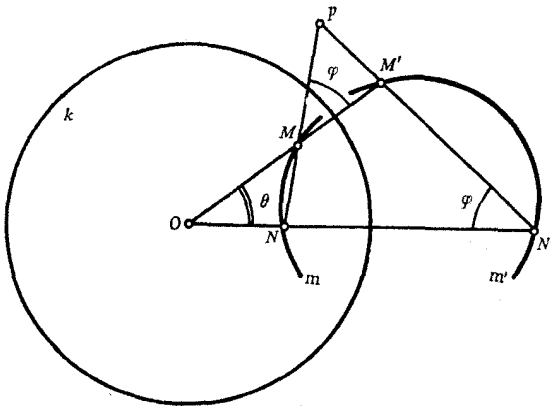
بر  $m$  نقطه‌ای چون  $N$ ، جدا از  $M$ ، اختیار کنید و  $N'$  قرینه آن  
 نسبت به  $k$  را بدست آورید (شکل ۹). واضح است که  $N'$  بر  $m'$   
 قرار دارد. خطهای  $MM'$  و  $NN'$  بر  $O$ ، مرکز  $k$ ، می‌گذرند. خطهای  
 $MN$  و  $M'N'$  را رسم کنید و نقطه تقاطع آنها را  $P$  بنامید. اگر

$$\angle OMN = \varphi \text{ و } \angle MON = \theta$$

آنگاه، به موجب قضیه ۳،  $\angle ON'M' = \varphi$ . بنابراین در مثلث  $MM'P$



شکل ۸



شکل ۹

$$\angle M' = \varphi + \theta \text{ و } \angle M = \varphi$$

نقطه  $M$  را ثابت نگاه می‌داریم و  $\theta$  را به صفر میل می‌دهیم. در وضع حدی قاطعهای  $MN$  و  $M'N'$  به مماسهای بر  $m$  و  $m'$  در  $M$  و  $M'$  تبدیل می‌شوند و مثلث  $MM'P$  متساوی الساقین خواهد شد. در حقیقت

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} (\varphi + \theta) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \varphi + \lim_{\theta \rightarrow 0} \theta = \lim_{\theta \rightarrow 0} \varphi$$

قضیه ۹. انعکاس اندازه‌های زاویه‌ها را تغییر نمی‌دهد.

دو خط  $m$  و  $n$  را که در  $A$  تقاطع می‌کنند در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم انعکاس نسبت به دایره  $k$  دو خط  $m$  و  $n$  و نقطه  $A$  را به دو خط  $m'$  و  $n'$  و نقطه  $A'$  تبدیل کند. از قضیه ۸ برمی‌آید که زاویه بین مماسهای بر  $m$  و  $n$  در  $A$  مساوی است با زاویه بین مماسهای بر  $m'$  و  $n'$  در  $A'$ . هم‌آنچه می‌خواستیم ثابت کنیم.

تبدیلی که زاویه‌ها را تغییر ندهد همدیس<sup>۱</sup> نامیده می‌شود. از آنچه گذشت نتیجه می‌گیریم که انعکاس تبدیلی است همدیس.

## ۴

## نقشه صفحه لبافسکی

صفحه‌ای چون  $\omega$ ، و خطی چون  $u$  بر آن فرض کنید که  $\omega$  را به دو نیم‌صفحه  $\tau$  و  $\tau'$  تقسیم کند. فرض کنید که نیم‌صفحه  $\tau$  نقشه فضای دو بعدی  $H$  باشد. بر روی خطی از  $H$  طولی مانند  $s$  در نظر می‌گیریم و طول نگار آن بر نقشه را  $\sigma$  می‌نامیم؛ دو مقدار  $s$  و  $\sigma$  را، بترتیب، طولهای هذلولوی و اقلیدسی نام می‌گذاریم.

اصول زیرین برای اندازه‌گرفتن طولها روی نقشه ما بکارخواهند رفت:

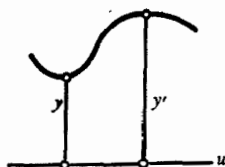
۱. طول هذلولوی پاره خط  $MN$  که با خط  $u$  موازی باشد و در فاصله  $y$  از آن قرار گرفته شده باشد مساوی  $MN/y$ ، یعنی نسبت طول اقلیدسی آن به فاصله اقلیدسی از  $u$ ، است.

۲. هرگاه  $\sigma$  طول اقلیدسی و  $s$  طول هذلولوی قوسی از یک منحنی (یا پاره خطی ناموازی با  $u$ ) باشند و  $y$  و  $y'$ ، بترتیب، کوچکترین و بزرگترین فاصله‌های اقلیدسی نقطه‌های آن از  $u$  باشند، و هرگاه  $y \neq y'$  (شکل ۱۵)، آنگاه این نامساویها برقرارند

$$\frac{\sigma}{y'} < s < \frac{\sigma}{y}$$

بعد ثابت خواهیم کرد که فضای  $H$  که نقشه‌اش دو خاصیت یاد شده



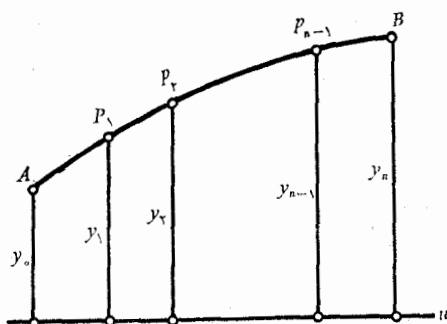


شکل ۱۰

را داشته باشند یک صفحه لباچفسکی است.

براساس اصلهای ۴۱ و ۴۲ تعیین روشی کلی برای اندازه گرفتن طولهای هذلولوی دشوار نیست.

نخست به یافتن  $s$  طول هذلولوی قوسی چون  $AB$  که دارای خواص ذیل است می پردازیم: اگر نقطه‌ای روی این منحنی از  $A$  به طرف  $B$  حرکت کند فاصله‌اش از خط  $u$  به فزونی گراید؛ فاصله نقطه  $A$  از  $u$  مساوی صفر نباشد؛ قوس  $AB$  هموار باشد، یعنی تیزی نداشته باشد (شکل ۱۱).



شکل ۱۱

بر روی قوس  $AB$ ، در حالی که از  $A$  به سوی  $B$  پیش می‌رویم نقطه‌های

$$(*) \quad A, P_1, P_2, \dots, P_{n-1}, B$$

را نشان می‌کنیم. فاصله‌های اقلیدسی نقطه‌های  $(*)$  از خط راست  $u$ ، طولهای اقلیدسی قوسهای  $AP_1, P_1P_2, \dots, P_{n-1}B$ ، پاره‌های قوس  $AB$ ، و طولهای اقلیدسی وترهای این قوسها، را بترتیب

$$y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n$$

$$\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$$

$$\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$$

می‌نامیم. این جمعها را بجای می‌آوریم:

$$\Sigma = \frac{\sigma_1}{y_1} + \frac{\sigma_2}{y_2} + \dots + \frac{\sigma_n}{y_n}$$

$$\Sigma' = \frac{\sigma_1}{y_0} + \frac{\sigma_2}{y_1} + \dots + \frac{\sigma_n}{y_{n-1}}$$

$$Z = \frac{\zeta_1}{y_1} + \frac{\zeta_2}{y_2} + \dots + \frac{\zeta_n}{y_n}$$

بموجب اصل ۴۲ بدست می‌آید

$$\Sigma < s < \Sigma'$$

زیرا که با توجه به شرط اولی  $0 < y_0 < y_1 < \dots < y_n$  اینک به در نظر گرفتن تفاضل  $\Sigma' - \Sigma$  می‌پردازیم:

$$\begin{aligned} \Sigma' - \Sigma &= \frac{\sigma_1}{y_0 y_1} (y_1 - y_0) + \frac{\sigma_2}{y_1 y_2} (y_2 - y_1) + \dots \\ &\quad + \frac{\sigma_n}{y_{n-1} y_n} (y_n - y_{n-1}) \end{aligned}$$

طرف راست این رابطه بزرگ می‌شود اگر به جای هر یک از

مقدارهای  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$  بزرگترین مقدار آنها را (که  $\sigma'$  نامیده شده است)، و به جای هر مخرج  $y_0^2$  قرار دهیم. در نتیجه

$$\Sigma' - \Sigma < \frac{\sigma'}{y_0^2} (y_1 - y_0 + y_2 - y_1 + \dots + y_n - y_{n-1}) = \frac{\sigma'}{y_0^2} (y_n - y_0)$$

اگر  $\sigma'$  به سوی صفر بگراید، تفاضل  $\Sigma' - \Sigma$  نیز به سمت صفر میل می‌کند. مجموع  $Z$  را به صورت

$$Z = \frac{\sigma_1}{y_1} \cdot \frac{\zeta_1}{\sigma_1} + \frac{\sigma_2}{y_2} \cdot \frac{\zeta_2}{\sigma_2} + \dots + \frac{\sigma_n}{x_n} \cdot \frac{\zeta_n}{\sigma_n}$$

تبدیل می‌کنیم.

چون کهین<sup>۱</sup> نسبت‌های  $\zeta_1/\sigma_1, \zeta_2/\sigma_2, \dots, \zeta_n/\sigma_n$  را  $\alpha$  و مهین<sup>۲</sup> آنها را  $\beta$  بنامیم بدست می‌آوریم

$$\alpha \Sigma \leq Z \leq \beta \Sigma$$

$n$  را می‌گذاریم که به‌طور نامحدود افزایش یابد و در همان حال هر یک از مقدارهای  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ ، و در نتیجه  $\sigma'$ ، را به طرف صفر سوق می‌دهیم. در این صورت، همچنان که پیش از این ثابت شد، تفاضل  $\Sigma' - \Sigma$  به سمت صفر می‌گراید در حالی که مقدارهای  $\alpha$  و  $\beta$  به سمت واحد<sup>۳</sup> میل می‌کنند. با توجه به این وضع از رابطه‌های (۳) و (۴) برمی‌آید که هر سه حاصل جمع  $\Sigma$  و  $\Sigma'$  و  $Z$  به سوی یک مقدار حد

1. Minimal      2. Maximal

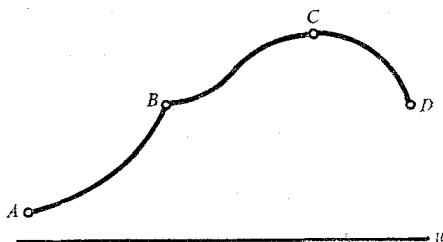
۳. می‌دانیم که (تا جایی که فقط قوسهای هموار را در نظر داریم) نسبت درازای وتر به اندازه قوسی که وتر متعلق به آن است به سوی ۱ می‌گراید وقتی که اندازه قوس میل کند به سمت صفر.

می‌گیرند و این حد برابر است با  $s$  طول هذلولوی قوس  $AB$ .  
مناسبت آن است که مجموع  $Z$  را بکار ببریم زیرا که متضمن طولهای  
اقلیدسی پاره خطها است نه طول قوسها. بدین سان

$$(5) \quad s = \lim Z = \lim \left( \frac{\xi_1}{\gamma_1} + \frac{\xi_2}{\gamma_2} + \dots + \frac{\xi_n}{\gamma_n} \right)$$

که در آن رفتن به حد با شرایطی که در بالا گفته شد صورت می‌پذیرد.  
خاطر نشان سازیم که در رابطه (5) می‌توان  $\gamma_1$  را فاصله هر نقطه  
دلخواه پاره خط  $AP_1$  از خط  $u$ ،  $\gamma_2$  را مساوی فاصله هر نقطه اختیاری  
پاره خط  $P_1P_2$  از  $u$ ، و به همین قیاس، بدانیم؛ این وضع بر مقدار  
مجموع  $Z$  اثر می‌گذارد، اما در حد آن تأثیر نمی‌کند.

هرگاه قوسی از یک منحنی را بتوان به تعدادی متناهی قطعاتی  
تقسیم کرد که در شرایطی که در بالا درباره قوس  $AB$  گفته شد صدق کنند،  
آنگاه طول هذلولوی آن مساوی خواهد بود با مجموع طولهای اجزای  
آن. مثلاً قوس  $AD$  را که در شکل ۱۲ نشان داده شده است به اجزای  
 $AB$  و  $BC$  و  $CD$  تقسیم می‌کنیم، اما می‌توانیم نقاط تقسیم را بر روی  
قوس  $DC$  از  $D$  به سوی  $C$  اختیار کنیم.



شکل ۱۲

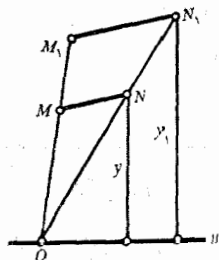
نقاط نیمصفحه  $\pi$  را طوری تغییر مکان می‌دهیم که طول هذلولوی هر  
قوسی که بر آن جا داشته باشد مساوی باشد با طول هذلولوی همان قوس

در وضع جدیدش. ما به این گونه تغییر جای نقاط با عنوان حرکت هذلولوی اشاره خواهیم کرد، که مفهومی است شبیه به مفهوم حرکت یک صفحهٔ اقلیدسی، مثلاً دوران صفحهٔ اقلیدسی حول یکی از نقاطش به اندازهٔ زاویه‌ای مشخص.

هرگاه حرکت هذلولوی شکلی چون  $F$  را به  $F_1$  تبدیل کند شکلهای  $F$  و  $F_1$  را هذلولیانه متساوی می‌نامیم. اکنون به ساده‌ترین حرکت‌های هذلولوی می‌پردازیم.

(۱) اگر همه نقاط نیم‌صفحهٔ  $\pi$  به یک مقدار و در یک جهت موازی با خط  $u$  انتقال داده شوند، هر شکل این صفحه به شکلی که هذلولیانه با آن مساوی است تبدیل می‌شود، زیرا که نه بعدهاى اقلیدسی آن تغییر کرده‌اند و نه فاصله‌های نقطه‌هایش از  $u$ .  
از این روی نتیجه می‌گیریم که تغییر مکان اقلیدسی نیم‌صفحهٔ  $\pi$  در طول یک خط راست حرکتی هذلولوی است.

(۲) تجانسی را در نظر می‌گیریم که مرکز آن نقطهٔ دلخواه  $O$  واقع بر خط  $u$  باشد و ضریب مثبت تجانس پاره‌خط  $MN$  را به  $M_1N_1$  تبدیل کند (شکل ۱۳). فاصله‌های دو نقطهٔ  $N$  و  $N_1$  از  $u$  را به  $y$  و  $y_1$  نشان می‌دهیم. به سبب مجانس بودن مثلث‌های  $OMN$  و  $OM_1N_1$  این رابطه را داریم:  $MN/y = M_1N_1/y_1$ .



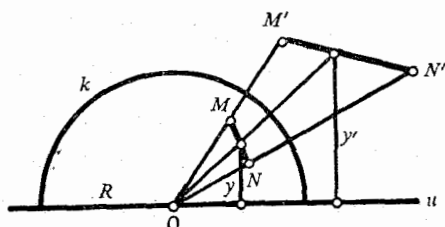
شکل ۱۳

از این عبارت و رابطه (۵) نتیجه می شود که طول هذلولوی هیچ قوس هیچ منحنی خاصی بر اثر این تبدیل تغییر نمی کند.

بنا بر این، تجانس به مرکز واقع بر خطی راست چون  $u$  و با ضریب تجانس مثبت حرکتی است هذلولوی.

ضریب تجانس مثبت اختیاری می شود تا پاره خط  $M_1 N_1$  در نیم صفحه  $\tau$  واقع شود، نه در نیم صفحه  $\tau'$ .

(۳) انعکاس نسبت به یک دایره  $k$  با شعاع اختیاری  $R$  را که مرکزش بر یک خط راست  $u$  (شکل ۱۴) باشد در نظر می گیریم.  $M$  و  $N$  را دو



شکل ۱۴

نقطه که به اندازه کافی به هم نزدیک باشند، و  $M'$  و  $N'$  قرینه های آنها را نسبت به  $k$ ، اختیار می کنیم؛ فاصله های نقاط برخورد نیمساز زاویه  $MON$  و پاره خطهای  $MN$  و  $M'N'$  از  $u$  را  $y$  و  $y'$  می نامیم. چون مثلثهای  $OMN$  و  $OM'N'$  متشابهند،

$$\frac{MN}{y} = \frac{M'N'}{y'}$$

از این عبارت و رابطه (۵) نتیجه می گیریم که طول هذلولوی هر قوس دلخواهی از هر منحنی با این تبدیل تغییر نمی کند.

در نتیجه، انعکاس نسبت به دایره ای با هر شعاع، که مرکزش بر خطی

داست باشد، نیز حرکتی است هذلولوی.

(۴) مثالها را با این حکم ختم می‌کنیم: اثبات این مطلب دشوار نیست که تقارن محوری نسبت به محوری که پریک خط داست عمود باشد حرکتی هذلولوی است.

خاطر نشان سازیم که هریک از حرکت‌های هذلولوی که در باره‌اش بحث کردیم تبدیلی است همدیس. این خاصیت در انتقال نیمصفحه  $\pi$  در طول خط راست  $u$ ، و تجانس، و تقارن، واضح است. خاصیت همدیسی انعکاس را در بخش ۳ ثابت کردیم.

چون حرکت هذلولوی این خاصیت را دارد که هر شکل را به شکلی تبدیل می‌کند که هذلولیانه با آن برابر است، هر تبدیلی که عبارت باشد از دنباله‌ای از چند حرکت هذلولوی همین خاصیت را دارد، به نحوی که آن نیز حرکتی است هذلولوی.

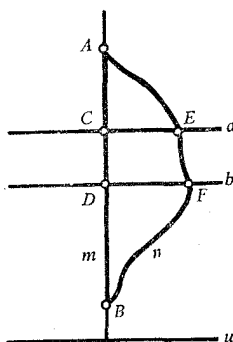
می‌گوئیم، اما ثابت نمی‌کنیم، که هر حرکت هذلولوی را ممکن است به صورت دنباله‌ای از تعدادی متناهی از ساده‌ترین حرکت‌های هذلولوی، که در بالا مورد بحث واقع شدند، نمایش داد.

حالا می‌پردازیم به نشان دادن این که اگر قواعد اندازه‌گیری طولها آنها را باشند که در بالا گفته شدند قوانین هندسه لباچفسکتی در نیمصفحه  $\pi$  تحقق می‌پذیرند.

ما ناگزیر در نیمصفحه  $\pi$  برخی شکلهای را در نظر خواهیم گرفت که با همان صفاتی مشخص می‌شوند که شکلهای متناظر آنها در هندسه اقلیدسی دارند، اما شاید از حیث صورت اختلافی داشته باشند؛ و همان اصطلاحات هندسی اقلیدسی را، با افزودن صفت هذلولوی، حفظ می‌کنیم. مثلاً خطی را که در طول آن کوتاه‌ترین فاصله هذلولوی بین نقاط آن اندازه گرفته می‌شود، خط راست هذلولوی می‌نامیم؛ یا مکان هندسی نقاطی را که از نقطه مفروضی به فاصله هذلولوی ثابتی باشند دایره هذلولوی می‌خوانیم.

اینک تعیین می‌کنیم که در نیم‌صفحه  $\pi$  کدام منحنیها خط راست هذلولوی هستند.

چنان که از دلیلی که هم‌اکنون خواهیم گفت برمی‌آید، خطهای راست هذلولوی در درجه اول نیم‌خطهای اقلیدسی هستند که بر خط  $u$  عمودند.



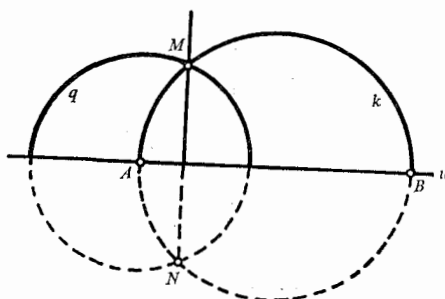
شکل ۱۵

$A$  و  $B$  را دو نقطه واقع بر خطی عمود بر  $u$  می‌انگاریم (شکل ۱۵) که با پاره خط  $AmB$  و نیز با منحنی، یا خط شکسته،  $AnB$  به یکدیگر مربوط شده‌اند. فرض می‌کنیم دو خط  $a$  و  $b$ ، موازی  $u$  و به اندازه کافی نزدیک به یکدیگر،  $AmB$  را در  $C$  و  $D$  و  $AnB$  را در  $E$  و  $F$  قطع کنند. چون به‌طور کلی طول اقلیدسی پاره خط  $CD$  کوچکتر است از طول قوس  $EF$ ، و چون طولهای اقلیدسی آنها را می‌توان  $\frac{CD}{y}$  و  $\frac{EF}{y}$  انگاشت، که در آنها  $y$  فاصله  $D$  (یا  $F$ ) از  $u$  باشد، پس به‌طور کلی طول هذلولوی  $CD$  کوتاه‌تر است از طول  $EF$  (این دو طول هذلولوی فقط وقتی متساوی می‌توانند بود که  $EF$  پاره‌ای از یک خط اقلیدسی عمود بر  $u$  باشد؛ واضح است که این شرط همیشه تحقق نمی‌پذیرد، زیرا که در آن صورت



قوس  $AnB$  برخط راست  $AmB$  منطبق می‌شود). پس طول هذلولوی پاره‌خط  $AmB$  کوچکتر است از طول هذلولوی قوس  $AnB$ .  
ه. ب. ث.

اکنون نشان می‌دهیم که نیمی از یک دایرهٔ اقلیدسی  $k$  که مرکزش برخط  $u$  باشد خط راستی هذلولوی است.



شکل ۱۶

فرض کنید دایرهٔ  $k$  خط  $u$  را در  $A$  و  $B$  قطع کند (شکل ۱۶). دایره‌ای چون  $q$  به مرکز  $A$  رسم کنید و آن را دایرهٔ انعکاس انگارید. فرض کنید  $k$  و  $q$  در  $M$  و  $N$  تقاطع کنند. دایرهٔ  $k$ ، که برقطب انعکاس می‌گذرد، بوسیلهٔ انعکاس نسبت به  $q$  به خط راست  $MN$  تبدیل می‌شود (بخش ۳). چون انعکاس حرکتی هذلولوی است، و  $MN$  عمود است بر  $u$ ، نتیجه می‌گیریم که نیمه‌دایرهٔ  $k$  بوسیلهٔ حرکت هذلولوی به یک خط راست هذلولوی تبدیل شده است. پس نیمه‌دایره هم یک خط راست هذلولوی است.

بدین ترتیب خطهای راست هذلولوی نیمصفحهٔ  $\pi$  بوسیلهٔ نیمخطهای اقلیدسی عمود برخط راست  $u$ ، و نیمه‌دایره‌های اقلیدسی که مرکزشان بر  $u$  است، نمایش داده می‌شوند. بعد از این، با توجه به اصل موضوع یکم،

خواهیم دید که این دوشکل تنها خطهای راست هذلولوی هستند که ممکن است وجود داشته باشند.

از نقطه  $M$  واقع بر  $u$  و در نیمصفحه  $\pi$  عمودی بر این خط اخراج کنید (شکل ۱۷)، و نقطه  $A$  را بر آن اختیار نمایید، و نقطه‌های  $A_1, A_2, A_3, \dots$  را بر  $AM$  چنان بیابید که

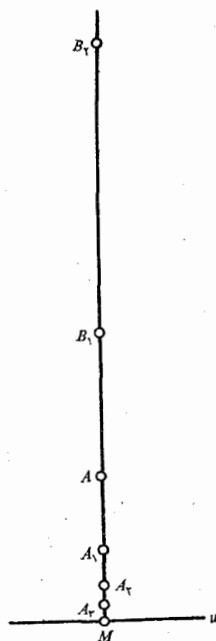
$$\dots, A_2 A_3 = A_2 M, A_1 A_2 = A_2 M, A A_1 = A_1 M$$

به بیانی دیگر،  $A_1$  وسط  $AM$ ،  $A_2$  وسط  $A_1 M$ ،  $A_3$  وسط  $A_2 M$ ،  $\dots$  باشد. تجانسی را که مرکزش در  $M$  و ضریبش  $\frac{1}{2}$  باشد در نظر می‌گیریم. این تبدیل یک حرکت هذلولوی است که نقطه‌های  $A$  و  $A_1$  و  $A_2$  و  $\dots$  را، بترتیب، به نقطه‌های  $A_1$  و  $A_2$  و  $A_3$  و  $\dots$  تبدیل می‌کند. نتیجه آن که طولهای هذلولوی  $AA_1$  و  $A_1 A_2$  و  $A_2 A_3$  و  $\dots$  همه با هم برابرند. پس شکلی که ساختیم عبارت از این است که پاره خطهای  $AA_1$  و  $A_1 A_2$  و  $A_2 A_3$  و  $\dots$  را که طولهایشان هذلولیانه برابرند از نقطه  $A$  در پی هم برخط راست  $AM$  قرار داده‌ایم، و از ترسیمی که کرده‌ایم پیدا است که هر قدر هم تعداد قطعات زیاد شوند هیچگاه به  $M$  نتوان رسید. نتیجه آن که  $M$  یک نقطه بی‌نهایت دور بر خط هذلولوی  $AM$  است. چون  $M$  نقطه داخواهی از  $u$  است به این نتیجه می‌رسیم که همه نقطه‌های خط  $u$  نقطه‌های بی‌نهایت دور نیمصفحه  $\pi$  هستند. فرایند به دنبال هم قراردادن پاره خطهای هذلولیانه متساوی  $AB_1, B_1 B_2, B_2 B_3, \dots$  برخط راست هذلولوی  $AM$  (شکل ۱۷) را می‌توان در امتدادی مخالف آن امتداد که برویش عمل کردیم انجام داد. از آنچه گفته شد نتیجه می‌شود که نقطه‌ای از خط  $AM$  که به معنی اقلیدسی کلمه بی‌نهایت دور است در همان حال نقطه‌ای بی‌نهایت دور از خط راست هذلولوی  $AM$  است.

هر نقطه خط راست  $AM$ ، به استثنای دو نقطه‌ای که در بالا تعیین شدند،

در فاصله هذلولوی متناهی از  $A$  قرار دارند، زیرا که به ازای مقدار بسیار بزرگ متناهی از عدد صحیح مثبت  $n$  نقطه مورد نظر بر امتداد قطعه  $AA_n$  یا بر امتداد  $AB_n$  قرار می گیرد.

بنابراین خط راست هذلولوی  $AM$ ، که در حکم هر خط راست هذلولوی است، دارای دو، و فقط دو، نقطه بی نهایت دور است.



شکل ۱۷

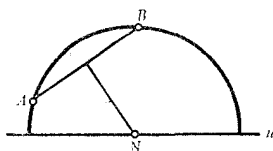
هرگاه خط راست هذلولوی به شکل یک نیمدایره اقلیدسی که مرکزش بر  $u$  است نمایش داده شود دو نقطه برخورد این نیمدایره با  $u$  دو نقطه

بی نهایت دور آن خط خواهند بود.

خاطر نشان سازیم که خط راست اقلیدسی فقط یک نقطه بی نهایت دور دارد، و این همان نقطه مشترک خط با خطهای موازی آن است. اکنون بآسانی دیده خواهد شد که همه اصلهای موضوع هندسه مسطحه لباچفسکی در نیم صفحه  $\pi$  معتبرند. ما فقط به تحلیل دو اصل موضوع می پردازیم.

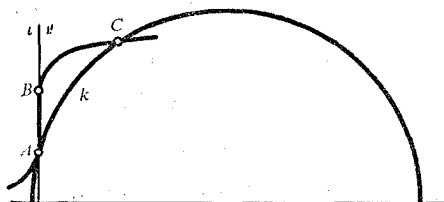
اصل موضوع ۱. بر هر دو نقطه متمایز  $P$ ، و فقط  $P$ ، خط راست هذلولوی می توان گذراند.

هرگاه دو نقطه مفروض  $A$  و  $B$  برخطی اقلیدسی واقع باشند که بر  $u$  عمود است همان خط خط هذلولوی مطلوب است؛ اگر نباشند بر روی  $u$  نقطه ای چون  $O$  بدست می آوریم که از  $A$  و  $B$  به یک فاصله باشد. نیمدایره اقلیدسی به مرکز  $O$  و شعاع  $OA$  (شکل ۱۸) خط راست هذلولوی



شکل ۱۸

مطلوب است. برای نشان دادن این که ممکن نیست دو خط راست هذلولوی مانند  $l$  و  $l'$  بردونقطه  $A$  و  $B$  بگذارند کافی است فرض شود که  $A$  و  $B$  بر روی یک عمود اقلیدسی بر خط  $u$  قرار دارند (شکل ۱۹)، زیرا که



شکل ۱۹

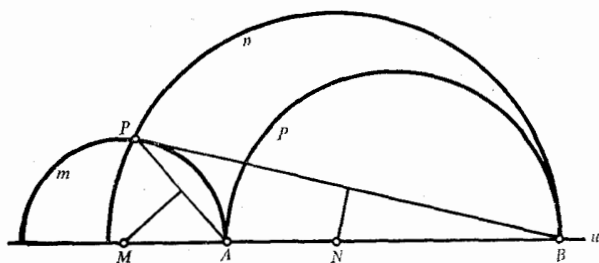
هر حالت دیگری را می توان با حرکت هذلولوی مناسبی به این حالت تبدیل کرد. برای این گونه آرایش  $A$  و  $B$  کوتاه ترین فاصله هذلولوی بین آنها آن فاصله ای است که بر امتداد خط راست اقلیدسی  $l$  است و در نتیجه  $l$  و  $l'$  روی پاره خط  $AB$  برهم منطبقند. حالا فرض می کنیم که نقطه ای چون  $C$  که بر  $l'$  قرار دارد بر  $l$  واقع نباشد و بر  $l'$  نقطه  $B$  بین  $A$  و  $C$  قرار بگیرد. در این صورت قوس  $AC$  از یک نیمدایره اقلیدسی  $k$ ، که مرکزش روی  $u$  است، جزئی است از یک خط راست هذلولوی که در پاره خط  $AC$  بر  $l$  منطبق نیست؛ اما هم اکنون دیدیم که چنین کاری شدنی نیست؛ پس  $l$  و  $l'$  همه جا برهم منطبق اند.

پس نتیجه می شود که خط راست هذلولوی نیست مگر نیمخط های اقلیدسی عمود بر  $u$  و نیمدایره های اقلیدسی که مرکزشان روی  $u$  است، تنها یک خط راست هذلولوی بر هر دو نقطه می گذرد و آن یکی از این دو گونه است.

اصل موضوع ۲. از هر نقطه  $P$  که بر خط راست هذلولوی  $p$  واقع باشد دو خط راست هذلولوی می توان موازی  $p$  کشید.

دو خط راست هذلولوی را متوازی گویند اگر یک نقطه بی نهایت دور مشترک داشته باشند. بخصوص خطهای راست هذلولوی که به صورت خطهای اقلیدسی عمود بر  $u$  داده شده باشند متوازی اند؛ نقطه بی نهایت دور مشترک بین آنها در نیم صفحه  $\pi$  با همان نقطه در صفحه اقلیدسی  $\omega$  یکی است.

نقطه های بی نهایت دور خط راست هذلولوی  $p$  (شکل ۲۵) را  $A$  و  $B$  می نامیم و بر  $P$  و  $A$  یک نیمدایره اقلیدسی  $m$  به مرکز  $M$  واقع بر  $u$ ، و بر  $P$  و  $B$  نیمدایره اقلیدسی دیگر  $n$  به مرکز  $N$  واقع بر  $u$  را می گذرانیم. دو نیمدایره اقلیدسی  $m$  و  $n$  خطهای راست هذلولوی مطلوبند که با خط راست هذلولوی  $p$  در دو امتداد مختلف آن موازی اند،  $m$  در امتداد  $B$



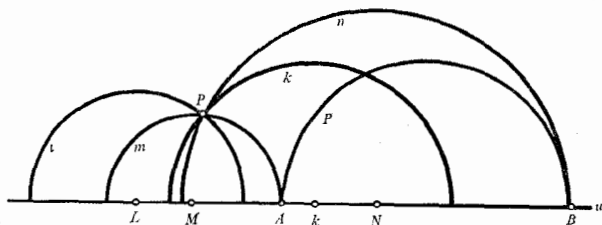
شکل ۲۰

به  $A$  و  $n$  در امتداد  $A$  به  $B$

سه نوع خط راست هذلولوی بر نقطه  $P$  می‌گذرند: (۱) خط راست  $p$  را قطع می‌کنند؛ (۲) با  $p$  موازی‌اند؛ (۳) نه  $p$  را قطع می‌کنند و نه با آن موازی هستند.

تعدادی نامتناهی خط راست هذلولوی از نوع (۱) وجود دارند؛ و نیز تعدادی نامتناهی از نوع (۳)؛ اما فقط دو خط از نوع (۲)

برای ساختن یک خط راست هذلولوی از نوع (۱) نقطه‌ای عادی و دلخواه مانند  $K$  بر پاره خط  $MN$  را اختیار کرده نیم‌دایره  $k$  را به مرکز  $K$  و شعاع  $KP$  رسم می‌کنیم (شکل ۲۱). اگر همین کار را برای یک نقطه



شکل ۲۱

$L$  روی خط  $u$  و بیرون پاره خط  $MN$  انجام دهیم نمونه (۳) خطهای راست هذلولی  $l$  را بدست می آوریم (شکل ۲۱). اکنون آشکار می شود که اصل موضوع (۲) هم ارز است با اصل موضوع توازی لباچفسکی که در بخش ۲ گفته شد.

دو خط راست لباچفسکی که نه متقاطع باشند و نه متوازی واگرا نامیده می شوند. مثلاً در روی شکل ۲۱ دو خط راست  $p$  و  $l$  واگری اند. بدین ترتیب در نیم صفحه  $\pi$  اصلهای موضوع، و در نتیجه قضایای هندسه لباچفسکی برقرارند. بنا براین نیم صفحه  $\pi$ ، با قاعدهائی که جلوتر برای محاسبه طولها گفتیم، یک صفحه لباچفسکی، یا به عبارتی دقیقتر، نقشه ای از صفحه ای لباچفسکی بر صفحه ای اقلیدسی، است.

آموزنده است که این نقشه را با نقشه سطح زمین در تصویر مرکا تر قیاس کنیم. در نقشه مرکا تر نصف النهارها به صورت خطوط متوازی عمود بر خطوط راستی که تصویرهای مدارهای جغرافی اند نمایش داده می شوند. (شکل ۲ صفحه ۲۲). دایره های بزرگ، از جمله نصف النهارها، را بر روی کره می توان «خط راست» فرض کرد مدارها، به استثنای استوا، روی کره خط راست نیستند، هرچند در نقشه به صورت خط راست اقلیدسی نموده می شوند. همچنین از خطهای اقلیدسی در نیم صفحه  $\pi$  آنها که عمود بر  $u$  هستند خطهای راست هذلولی اند؛ و آنها که موازی  $u$  هستند خطهای هذلولوی نیستند. (در این باره در بخش ۷ بتفصیل صحبت خواهیم کرد.)

بعلاوه، هرچه عرض مدار بیشتر شود طول قوس  $1^\circ$  بر روی آن کوچکتر می گردد؛ اما در نقشه مرکا تر طول قوس  $1^\circ$  همه جا، و صرف نظر از عرض جغرافیایی مدارها، یکی است. طرح بر روی نیم صفحه  $\pi$  نیز چنین است (اصل ۱).

توجه به این نکته مهم است که نقشه  $\pi$  همدیس است، یعنی اندازه اقلیدسی زاویه ای در این نقشه برابر است با اندازه آن در صفحه لباچفسکی.





$NA$  زاویه  $\angle ۱$  شکل ۲۲ را به زاویه‌های ۵ و ۶ تقسیم می‌کند، که، همانطور که بآسانی دیده می‌شود، اندازه‌های اقلیدسی آنها برابرند. انعکاس نسبت به  $n$  دایره  $k$  را به  $p$  و  $p$  را به  $k$  تبدیل می‌کند، در نتیجه زاویه‌های ۵ و ۶ می‌توانند تغییر جا بدهند. پس به این نتیجه می‌رسیم که نه تنها اندازه‌های اقلیدسی  $\angle ۵$  و  $\angle ۶$  یکی هستند بلکه اندازه فعلی (یعنی هذلولوی) آنها هم یکی است؛ یعنی در هندسه لباچفسکئی (همچنان که در نقشه  $\tau$ ) هر یک برابر است با نصف زاویه قائمه.

نقطه برخورد خطهای  $u$  و  $n$  را، که با  $N$  در یک طرف  $M$  است،  $L$  می‌نامیم، و دایره  $l$  را به مرکز  $L$  و شعاع  $LA$  رسم می‌کنیم (شکل ۲۳). دایره  $l$  زاویه ۶ را به زاویه‌های ۷ و ۸ تقسیم می‌کند. بآسانی دیده می‌شود که

$$\angle ۸ = \angle NAL = \frac{\pi}{۸}$$

و چون  $\angle ۶ = (\pi/۸)$ ، پس  $\angle ۷ = (\pi/۸)$ ؛ بنا بر این اندازه اقلیدسی زاویه‌های  $\angle ۷$  و  $\angle ۸$  یکی است. در همان حال اندازه‌های هذلولوی آنها مساوی هستند، زیرا که این زاویه‌ها بوسیله انعکاس نسبت به  $l$  به یکدیگر تبدیل می‌شوند.

با همین روش ثابت می‌کنیم که زاویه‌های نقشه  $\tau$  که اندازه‌های اقلیدسیشان  $\pi/۱۶$  و  $\pi/۳۲$  و ... است در صفحه هذلولوی دارای یک مقدار اند.

چون هر زاویه را می‌توان با مجموع تعدادی متناهی، و در حد با تعدادی نامتناهی، از جمله‌هایی به صورت

$$\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۴}, \frac{\pi}{۸}, \frac{\pi}{۱۶}, \frac{\pi}{۳۲}, \dots$$

نمایش داد خاصیت همدیسی نقشه  $\tau$  به اثبات می‌رسد.

## ۵

## دایره در صفحه لباچفسکئی

بینیم دایره در صفحه لباچفسکئی در نقشه  $\tau$  چگونه نمایش داده می‌شود.

از نقطه  $M$  واقع بر خط  $u$  خط اقلیدسی  $p$  را عمود بر  $u$  رسم کنید، و در نیم‌صفحه  $\tau$  دو نقطه دلخواه  $B$  و  $C$  بر آن اختیار نمایید (شکل ۲۴؛  $MB > MC$ ). اکنون بر  $p$  نقطه‌ای مانند  $A$  بیابید چنان‌که برابری

$$(۶) \quad \frac{CM}{AM} = \frac{AM}{BM}$$

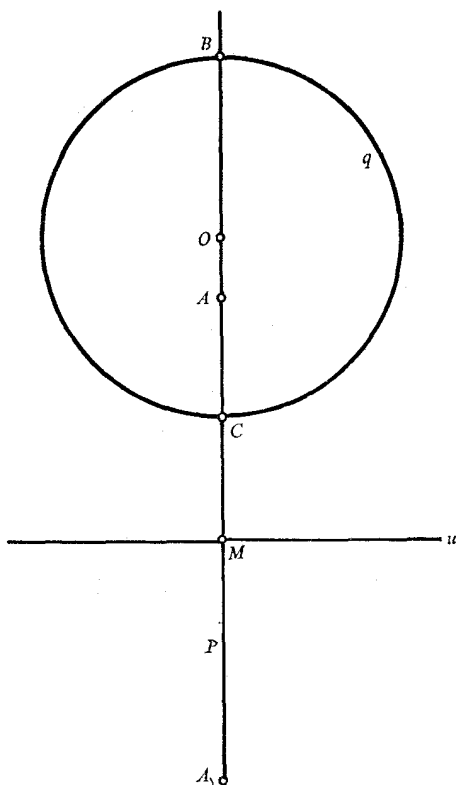
برقرار باشد.

از این تساوی نتیجه می‌گیریم که طولهای هذلولوی قطعه‌های  $CA$  و  $CB$  یکی هستند. در حقیقت تجانسی با مرکز تجانس  $M$  و ضریب تجانس  $CM/AM$  قطعه  $AB$  را به  $CA$  تبدیل می‌کند.<sup>۱</sup> هرگاه وسط اقلیدسی پاره خط  $BC$  را  $O$  بنامیم، یک دایره اقلیدسی  $q$  به مرکز  $O$  و با شعاع

---


$$۱. \quad \frac{CM}{AM} = BM \frac{AM}{BM} = AM \quad \text{در نتیجه } B \text{ به } A \text{ تبدیل}$$

شده است؛  $AM \cdot \frac{CM}{AM} = CM$ ، در نتیجه  $A$  به  $C$  تبدیل شده است.



شکل ۲۴

$OB$  رسم می‌کنیم و نقطهٔ  $A_1$  قرینهٔ  $A$  نسبت به خط  $u$  را مشخص می‌سازیم.  
چون

$$OA = OM - AM, OA_1 = OM + MA_1 = OM + AM$$

پس

$$(۷) \quad OA \cdot OA_1 = OM^2 - AM^2$$

علاوه بر این

$$OM = \frac{1}{2}(BM + CM)$$

و بموجب رابطه (۶)

$$AM^2 = BM \cdot CM$$

پس رابطه (۷) را می‌توان به این صورت درآورد:

$$\begin{aligned} OA \cdot OA_1 &= \frac{1}{4}(BM + CM)^2 - BM \cdot CM \\ &= \frac{1}{4}(BM^2 + 2BM \cdot CM + CM^2 - 2BM \cdot CM) \end{aligned}$$

اما

$$(۸) \quad OA \cdot OA_1 = \frac{1}{4}(BM - CM)^2$$

چون

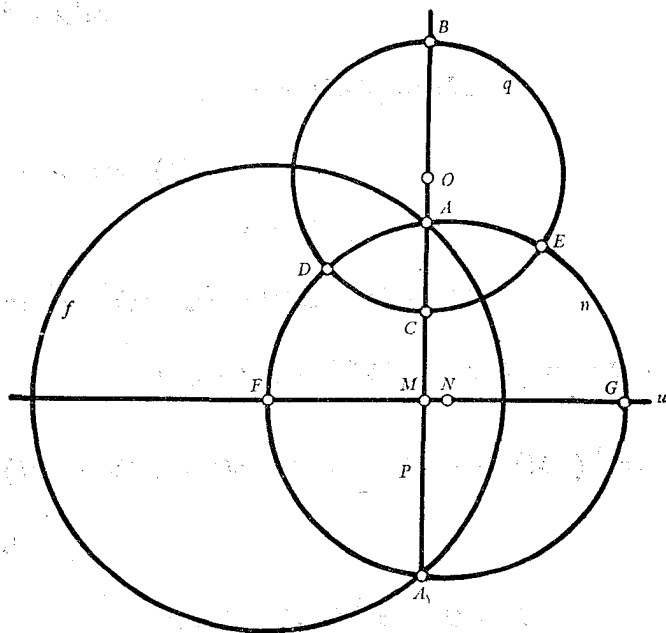
$$\frac{1}{2}(BM - CM) = OB$$

از رابطه (۸) نتیجه می‌گیریم

$$OA \cdot OA_1 = OB^2$$

و این رابطه بیان می‌کند که دو نقطه  $A$  و  $A_1$  نسبت به دایره  $q$  قرینه‌اند. ثابت می‌کنیم که فواصل هذلولوی همهٔ نقاط خط  $q$  تا نقطهٔ  $A$  متساوی‌اند.

دایرهٔ اقلیدسی دلخواهی بر  $A$  و  $A_1$  می‌گذرانیم (شکل ۲۵). مرکز آن بر خط  $u$  قرار دارد: پس جزئی از آن که در نیم‌صفحهٔ  $\pi$  است



شکل ۲۵

خط راست هذلولوی است.

فرض کنید  $n$  و  $q$  در نقطه‌های  $D$  و  $E$ ، و  $n$  و  $u$  در  $F$  و  $G$  تقاطع کنند، دایرهٔ اقلیدسی  $f$  را به مرکز  $F$  و شعاع  $FA$  رسم کنید. چون دایرهٔ  $f$  بر دو نقطهٔ  $A$  و  $A_1$  که نسبت به دایرهٔ  $q$  قرینه‌اند می‌گذرد، دو دایرهٔ  $q$  و  $f$  بر یکدیگر عمودند (← بخش ۳)؛ پس انعکاس نسبت به  $f$  دایرهٔ  $q$  را به خودش تبدیل می‌کند.

وانگهی، همین انعکاس خط  $p$  را که بر قطب  $F$  نمی‌گذرد به دایره‌ای تبدیل می‌کند که بر قطب، و نیز بر  $A$  و  $A_1$  (که در این تبدیل ثابت می‌مانند)، می‌گذرد، یعنی به دایرهٔ  $n$ . از سوی دیگر دایرهٔ  $n$  که بر قطب

انعکاس می‌گذرد تبدیل به خط راست  $p$  می‌شود زیرا که چنین خطی باید بر  $A$  و  $A_1$  مرور کند.

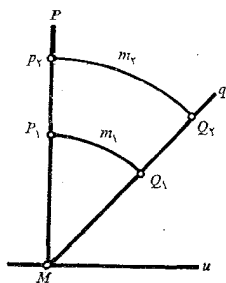
از آنچه گذشت نتیجه می‌شود که قوسهای  $AD$  و  $AE$  دایره  $n$  بترتیب تبدیل می‌شوند به پاره خطهای  $AB$  و  $AC$  واقع بر خط  $p$ . بنابراین طولهای هذلولوی پاره‌های  $AD$  و  $AE$  از خط راست هذلولوی  $n$  مساوی هستند با طولهای هذلولوی پاره‌های  $AB$  و  $AC$  از خط راست هذلولوی  $p$ ؛ به بیانی دیگر فاصله‌های هذلولوی نقاط  $B$  و  $C$  و  $D$  و  $E$  از نقطه  $A$  برابرند. آنچه دیدیم نشان می‌دهد که تصویر یک دایره هذلولوی بر نقشه  $\pi$  یک دایره اقلیدسی است که با خط راست  $u$  نقطه مشترکی ندارد، اما تصویر مرکزش ( $A$ ) بر ( $O$ ) مرکز دایره اقلیدسی متناظر با آن منطبق نیست.

در خاتمه خاطر نشان سازیم که هر خط راست هذلولوی که بر ( $مرکز$ )  $A$  بگذرد دایره  $q$  را به زاویه قائمه قطع می‌کند، و این خاصیت شبیه است به خاصیت معروف قطرهای دایره اقلیدسی.

## ۶

## منحنی همفاصله

فرض می‌کنیم  $p$  و  $q$  به ترتیب عمود و مایل باشند که با  $u$  در  $M$  تلاقی کرده باشند و قوسهای  $P_1Q_1$  و  $P_2Q_2$  دایره‌های اقلیدسی به مرکز مشترک  $M$  باشند، یا به بیان دیگر قطعه‌هایی از دو خط راست هذلولوی  $m_1$  و



شکل ۲۶

$m_2$  باشند (شکل ۲۶). چون  $m_1$  و  $m_2$  خط  $p$  را به زاویه قائمه قطع می‌کنند طولهای هذلولوی قوسهای  $P_1Q_1$  و  $P_2Q_2$  فاصله‌های هذلولوی نقاط  $Q_1$  و  $Q_2$  را از خط راست هذلولوی  $p$  مشخص می‌سازند، و این فاصله‌ها متساوی‌اند زیرا که قوس  $P_1Q_1$  را می‌توان با تجانس به مرکز  $M$  تبدیل به قوس  $P_2Q_2$  کرد.

از این روی می‌توان نتیجه‌گرفت که خط  $q$  مکان هندسی نقاطی است که به فاصلهٔ هذلولوی مشخصی از خط هذلولوی  $p$  قرار دارند. این خط را منحنی همفاصله، و خط راست هذلولوی  $p$  را پایهٔ آن می‌نامند. بطوری که از بخش ۴ بر می‌آید منحنی همفاصله خطی هذلولوی نیست. فرض این که مکان نقاطی که به یک فاصله از خط راست مفروضی، و در یک طرف آن، باشند خطی است راست با این خاصیت منحنی همفاصله، و در نتیجه با اصل موضوع توازی لباچفسکئی، تناقض دارد و هم‌ارز است با اصل موضوع توازی اقلیدسی.

خاطر نشان می‌سازیم که خط راست هذلولوی عمود بر پایهٔ یک منحنی همفاصله آن را به زاویه قائمه قطع می‌کند، و این خود از شکل ۲۶ بوضوح بر می‌آید.

انعکاس نسبت به دایره‌ای که مرکزش بر خط راست  $u$  در یک نقطهٔ مشخص  $M$  باشد  $q$  را به یک دایرهٔ اقلیدسی تبدیل می‌کند که مانند خط راست هذلولوی  $u$  را قطع می‌کند اما مرکزش روی  $u$  نیست.

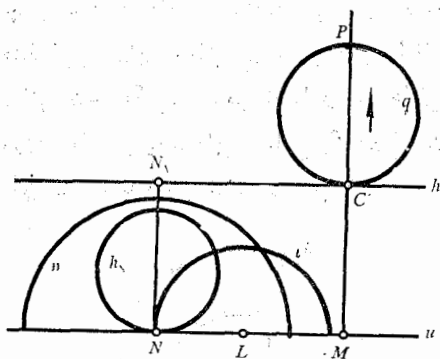
بدین ترتیب یک منحنی همفاصله بر روی نقشهٔ  $\pi$  یا به‌وسیلهٔ نیمخطی اقلیدسی نمایش داده می‌شود که خط  $u$  را به زاویه‌ای حاده یا منفرجه قطع کند، یا به‌وسیلهٔ قوسی از دایره‌ای که  $u$  را قطع کند اما مرکزش بر  $u$  نباشد. بآسانی دیده می‌شود که منحنی همفاصلهٔ دیگری وجود ندارد.



## ۷

## دایره زمانی

قطر  $p$  از دایره  $q$  را عمود بر خط  $u$  رسم می‌کنیم و آن نقطه تقاطع آن با دایره را که به  $u$  نزدیکتر باشد  $C$  می‌نامیم (شکل ۲۷). اگر  $C$  را ثابت نگاه داریم و شعاع دایره را به‌طور نامحدود افزایش دهیم به‌طوری که مرکز همواره بر  $p$  قرار داشته باشد و در امتدادی که با پیکان نشان



شکل ۲۷

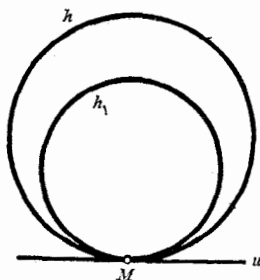
داده شده است دور شود، در آرایش حدی  $q$  به خط راست اقلیدسی  $h$  تبدیل می‌شود که با  $u$  موازی است.

خط  $h$  را که هذلولوی نیست خط حدی یا دایره زمانی نامیده اند. بدین ترتیب حد دایره ای که یک نقطه اش و مماس بر آن نقطه اش ثابت بمانند و شعاعش بی حد ترقی کند در هندسه اقلیدسی خطی راست و در هندسه لباچفسکتی دایره زمانی است.

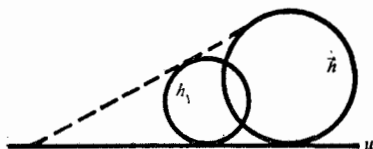
حرکتی هذلولوی را که بوسیله انعکاس نسبت به یک دایره  $n$  که مرکزش  $N$  روی خط  $u$  (شکل ۲۷) است نموده می شود در نظر می گیریم. این انعکاس خط  $h$  را به دایره اقلیدسی  $h_1$  تبدیل می کند که بر  $N$  می گذرد و مرکزش روی عمود مشترک  $NN_1$  خطهای اقلیدسی  $u$  و  $h$  است؛ نتیجه آن که  $h_1$  مماس است بر خط  $u$ .

بدین ترتیب در نقشه  $\pi$  دایره زمانی یا بوسیله یک خط راست اقلیدسی موازی با  $u$ ، و یا بوسیله یک دایره اقلیدسی مماس بر  $u$ ، نمایش داده می شود.

بر  $N$  دایره ای اقلیدسی مانند  $l$  بگذرانیم که مرکزش  $L$  بر  $u$  باشد (شکل ۲۷). چون شعاعهای دایره های اقلیدسی  $h_1$  و  $l$  بر یکدیگر عمودند، خط راست هذلولوی  $l$  دایره زمانی  $h_1$  را به زاویه قائمه قطع می کند. از اینجا می توانیم نتیجه بگیریم که هر خط راست هذلولوی که بر یک نقطه بینهایت دور واقع بر یک دایره زمانی بگذرد (و عنوان محدود آن را داشته باشد) آن خط را به زاویه قائمه قطع می کند.



شکل ۲۸



شکل ۲۹

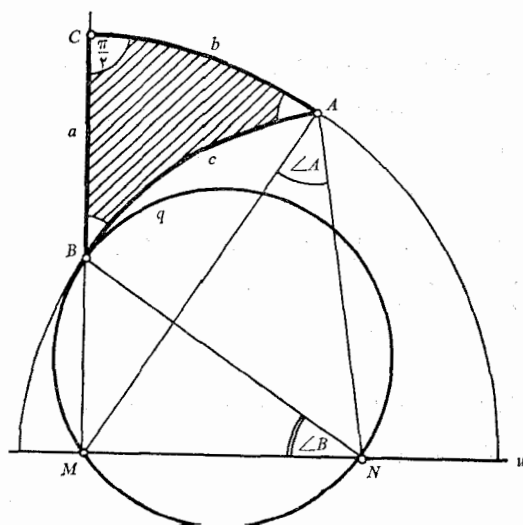
هر دایره زمانی  $h$  هذلولیانه برابر است با هر دایره زمانی دیگر  $h_1$ ، یعنی حرکتی هذلولوی وجود دارد که  $h$  را به  $h_1$  تبدیل می‌کند. این حرکت‌های هذلولوی عبارتند از: (آ) تجانس وقتی که مرکز تجانس بر  $u$  باشد، و این هنگامی است که  $h$  و  $h_1$  خط‌های اقلیدسی موازی با  $u$  یا دایره‌های نامساوی اقلیدسی مماس بر  $u$  باشند (شکلهای ۲۸ و ۲۹)؛ (ب) تغییر مکان نیم‌صفحه  $\tau$  در امتداد خط  $u$ ، و این هنگامی است که  $h$  و  $h_1$  دایره‌های اقلیدسی متساوی و مماس بر  $u$  باشند؛ (ج) انعکاسی که قطبش بر  $u$  باشد، و این هنگامی است که یکی از دو منحنی  $h$  و  $h_1$  خطی راست اقلیدسی موازی  $u$ ، و دیگری دایره‌ای اقلیدسی مماس بر  $u$  باشد.



## قضیه‌هایی برگزیده از هندسهٔ لباچفسکئی

قضیهٔ ۱. مجموع زاویه‌های هر مثلث کوچکتر است از  $\pi$ .

نخست یک زاویه قائمه مانند  $ABC$  در نظر می‌گیریم (شکل ۳۰). اضلاع  $a$  و  $b$  و  $c$  آن، بترتیب، به‌وسیلهٔ پاره خطی اقلیدسی عمود بر  $u$ ، قوسی از دایره‌ای اقلیدسی به مرکز  $M$  و قوسی از دایره‌ای دیگر اقلیدسی به



شکل ۳۰

مرکز  $N$  نمایش داده شده‌اند. زاویهٔ  $C$  قائمه است. زاویهٔ  $A$  برابر است با زاویهٔ بین مماسهای بر دایره‌های  $b$  و  $c$  در نقطهٔ  $A$ ، یا به بیانی دیگر، زاویهٔ بین شعاعهای  $MA$  و  $NA$  این دو دایره، و  $\angle B = \angle BNM$ . دایره‌ای اقلیدسی به قطر  $BN$  رسم می‌کنیم؛ این دایره فقط یک نقطهٔ مشترک  $B$  با دایرهٔ  $C$  خواهد داشت زیرا که قطر آن شعاع این است. پس نقطهٔ  $A$  در بیرون دایره‌ای است که به  $q$  محدود می‌شود، و از این روی

$$\angle A = \angle MAN < \angle MBN$$

بنابراین، بموجب رابطهٔ  $\angle MBN + \angle B = \pi/2$  نتیجه می‌گیریم

$$\angle A + \angle B < \frac{\pi}{2}$$

$$(9) \quad \angle A + \angle B + \angle C < \pi \quad \text{پس}$$

ه. ب. ث

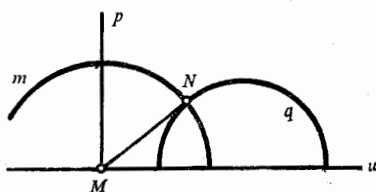
خاطر نشان سازیم که هر مثلث قائم‌الزاویه را می‌توان بوسیلهٔ حرکتی هذلولوی به صورتی تبدیل کرد که یکی از ضلعهایش بر خطی اقلیدسی عمود بر  $u$  واقع شود؛ پس روشی را که برای رسیدن به نامساوی (۹) بکار بردیم در مورد هر مثلث قائم‌الزاویه قابل استفاده است.

وقتی که مثلث غیر قائم‌الزاویه داده شده باشد با رسم ارتفاعی آن را به دو مثلث قائم‌الزاویه تبدیل می‌کنیم، و با توجه به نامساوی (۹) به این نتیجه می‌رسیم که قضیه در مورد هر مثلثی معتبر است.

قضیهٔ ۲. مجموع زاویه‌های هر چهار ضلعی کوچکتر است از  $2\pi$ .  
برای اثبات کافی است چهار ضلعی را به وسیلهٔ قطرش به دو مثلث تقسیم کرد.

قضیهٔ ۳. دو خط راست واگرا یک، و فقط یک، عمود مشترک دارند.

در نقشهٔ  $\tau$  یکی از دو خط واگرا را با خط اقلیدسی  $p$  عمود بر  $u$  در  $M$ ، و دیگری را با نیمدایرهٔ اقلیدسی  $q$  که مرکزش بر  $u$  باشد، نمایش می‌دهیم، بطوری که  $p$  و  $q$  نقطهٔ مشترک نداشته باشند (شکل ۳۱) این گونه آرایش دو خط راست هذلولوی واگرا را می‌توان همواره با حرکت هذلولوی مناسبی فراهم ساخت.

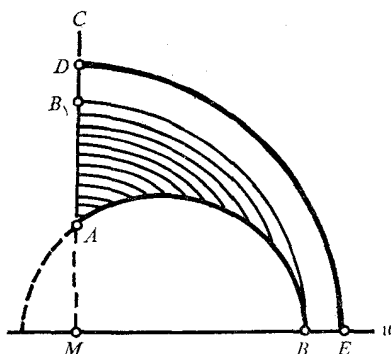


شکل ۳۱

ماس اقلیدسی  $MN$  را بر  $q$  می‌کشیم و نیمدایرهٔ اقلیدسی  $m$  را به مرکز  $M$  (و با شعاع  $MN$ ) رسم می‌کنیم. واضح است که  $m$  یک خط راست هذلولوی است که هم  $p$  و هم  $q$  را به زاویهٔ قائمه قطع می‌کند. پس در نقشهٔ  $\tau$  خط  $m$  عمود مشترک مطلوب بر دو خط راست واگرا است. دو خط راست واگرا نمی‌توانند دو عمود مشترک داشته باشند، زیرا که در چنین حالتی یک چهار ضلعی بوجود می‌آید که مجموع زاویه‌هایش چهار قائمه است، و این وضع ناقض قضیهٔ ۲ خواهد بود.

قضیهٔ ۴. تصویر قائم هر ضلع زاویهٔ حاده بر ضلع دیگر آن پاره خط است (نه نیمخط، مانند آنچه در هندسهٔ اقلیدسی است).

اعتبار این قضیه از شکل ۳۲ پیدا است؛ در این شکل  $AB$  تصویر قائم ضلع  $AB$  زاویهٔ حادهٔ  $BAC$  است بر ضلع  $AC$  آن. در همین شکل قوس  $DE$  دایرهٔ اقلیدسی به مرکز  $M$  عمود است بر



شکل ۳۲

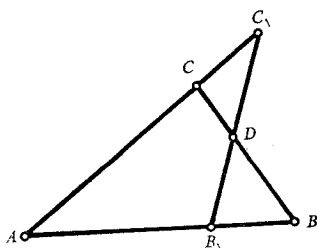
خط راست هذلولوی  $AC$ . این عمود مایل  $AB$  را قطع نمی‌کند. پس فرض این که یک عمود و یک مایل بر یک خط مفروض همیشه تقاطع می‌کنند نقیض اصل توازی لباچفسکتی و هم ارز با اصل توازی اقلیدسی است.

قضیه ۵. هرگاه سه زاویه مثلث  $ABC$ ، نظیر به نظیر، با سه زاویه مثلث  $A'B'C'$  مساوی باشند، آنگاه دو مثلث متساوی‌اند.

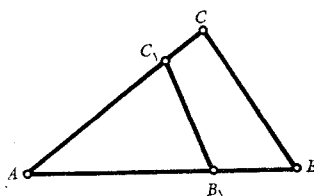
فرض کنیم که عکس قضیه صحیح باشد، و طولهای  $AB = A'B'$  و  $AC = A'C'$  را بترتیب روی نیمخطهای  $AB$  و  $AC$  جدا کنیم. واضح است که دو مثلث  $AB_1C_1$  و  $A'B'_1C'_1$  که دو ضلع و زاویه بین آن دو ضلعشان نظیر به نظیر برابرند مساوی یکدیگرند. چون نقطه  $B_1$  بر  $B$  منطبق نیست نقطه  $C_1$  بر  $C$  منطبق نمی‌تواند بود والا دو مثلث متساوی می‌شدند، و این مخالف فرض است.

به امکانات زیرین توجه می‌کنیم.

(آ) نقطه  $B_1$  بین  $A$  و  $B$  و نقطه  $C_1$  بین  $A$  و  $C$  قرار می‌گیرند



شکل ۳۳



شکل ۳۴

(شکل ۳۳؛ در این شکل و شکل بعدی، هر دو، خطها به‌طور قراردادی، هم نمایش خطهای اقلیدسی هستند و هم نمایش خطهای هذلولوی). با سانی دیده می‌شود که مجموع زاویه‌های چهار ضلعی  $BCC_1B_1$  مساوی  $2\pi$  است، و چنین چیزی به‌موجب قضیهٔ ۲ شدنی نیست.

(ب) نقطهٔ  $B_1$  بین  $A$  و  $B$  و نقطهٔ  $C$  بین  $A$  و  $C_1$  واقع می‌شوند (شکل ۳۴). نقطهٔ برخورد  $BC$  و  $B_1C_1$  را  $D$  می‌نامیم. چون  $\angle C = \angle C_1$  و  $\angle C' = \angle C_1$ ، پس  $\angle C = \angle C'$ ، و چنین چیزی ممکن نیست، زیرا که زاویهٔ  $C$  زاویهٔ خارجی مثلث  $CC_1D$  است.<sup>۱</sup>

حالت‌های دیگری که امکان پذیر باشند به همین گونه تعبیر می‌شوند. قضیه به‌ثبوت رسیده است، زیرا که فرضی که در بالا کردیم به تناقض انجامید.

از قضیهٔ ۵ چنین برمی‌آید که در هندسهٔ لباچفسکی مثلی نیست که با مثلث دیگر مشابه باشد اما با آن مساوی نباشد.

۱. اثبات این که «هر زاویهٔ خارجی مثلث از هر زاویهٔ داخلی غیر مجاور آن بزرگتر است» بستگی به اصل موضوع توازی ندارد.



# ۹

## چند تبصره دیگر

از بررسی نقشه  $\tau$  تعدادی نتایج مهم می‌توان بیرون کشید. نخست آن که هر قضیه هندسه لباچفسکی در نقشه  $\tau$  به قضیه‌ای از هندسه اقلیدسی گشانیده می‌شود. پس هر تناقضی در هندسه لباچفسکی لزوماً به تناقضی در هندسه اقلیدسی می‌رسد. بنابراین هندسه لباچفسکی سازگار است.

دو دیگر آن که آشنائی با هندسه لباچفسکی کشف خطاهایی را که در تلاش برای اثبات اصل موضوع توازی در هندسه اقلیدسی صورت پذیرد بسیار آسان می‌کند، این خطاها وقتی سر می‌زنند که قضیه‌ای هم‌ارز با آن اصل تصور شود. دلیلی بر این که این فرض با اصل موضوع توازی لباچفسکی تناقض دارد برای بی‌اعتبار ساختن آن کفایت می‌کند. این همان روشی است که، در سه حالتی که جلوتر به بحث درباره آنها پرداختیم بکار بردیم (یعنی در مورد مکان هندسی نقاط همفاصله از خطی راست؛ و در تقاطع عمود و مایلی که بر یک خط رسم شوند؛ و در وجود مثلثی مشابه اما نه مساوی مثلثی دیگر).

به مثال دیگری می‌پردازیم. ریاضیدانی از قرن نوزدهم، فورکوش بویوئی (پدر یانوش بویوئی که پیشتر از او یاد کردیم) برهانی برای اصل توازی اقلیدس عرضه کرد که بر این فرض که همیشه بر سه نقطه غیرواقع

بر یک خط می‌توان دایره‌ای گذراند استوار بود. بویوئی این مطلب را واضح می‌پنداشت اما در هندسه لباچفسکی وضع بدین منوال نیست، زیرا که در این هندسه بر سه نقطه واقع در صفحه لباچفسکی اما غیر واقع بر یک خط راست می‌توان یک دایره، یا یک دایره زمانی، یا یک منحنی همفاصله مرور داد؛ در نتیجه همیشه بر چنین سه نقطه‌ای نمی‌توان دایره‌ای گذراند. بدین ترتیب می‌بینم که فرض یانی هم‌ارز است با اصل موضوع توازی اقلیدسی، و این خود از برهان بویوئی سلب اعتبار می‌کند.

لباچفسکی در کتاب خودش روش ساختن نقشه یک صفحه هذلولوی را بکار نبرد؛ این نقشه را برای اولین بار هندسه‌دان ایتالیائی اجینو بلترامی در مقاله‌ای که در ۱۸۶۸، دوازده سال پس از مردن لباچفسکی، منتشر ساخت، عرضه کرد.

نقشه صفحه لباچفسکی که در این هندسه مورد بحث قرار گرفته است با آن که بلترامی ساخته بود تفاوت بین دارد. این نقشه را دانشمند فرانسوی هانری پوانکاره (۲۴۱۳ - ۲۴۷۱/۱۸۵۴ - ۱۹۱۲) وارد ساخته است.

## ۱۰

## در لگاریتم طبیعی و تابعهای هذلولوی

آنچه را در پایین می‌آوریم در بخشهای آینده بکار خواهیم برد.  
 نخست به بیان چند رابطه مهم می‌پردازیم.  
 علامتگذاریهای

$$(۱۰) \quad a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

را معرفی می‌کنیم. واضح است که

$$(۱۱) \quad a_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1},$$

$$b_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2}$$

از رابطه‌های (۱۰) و (۱۱) بدست می‌آوریم:

$$(۱۲) \quad b_n - a_n = \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{a_n}{n}$$

$$(۱۳) \quad b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

$$b_n - a_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

باسازهٔ مشترک گرفتن در طرف راست رابطهٔ اخیر بدست می‌آید:

$$(۱۴) \quad \frac{1}{n(n+1)} \left[ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) + \dots + \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n-1} + \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n \right]$$

حال اگر در داخل قلابها  $1 + 1/n$  را به جای هر همسازهٔ  $1 + 1/(n+1)$  قرار دهیم عبارت (۱۴) بزرگتر می‌شود و پس از ساده شدن نتیجه می‌دهد

$$b_n - a_{n+1} < \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

از این رابطه و به کمک رابطهٔ (۱۲) بدست می‌آوریم

$$b_n - a_{n+1} < b_n - a_n$$

$$a_{n+1} > a_n \quad \text{یا}$$

نتیجه آن که  $a_n$  با عدد صحیح  $n$  بزرگ می‌شود.

حالا در داخل قلابهای رابطهٔ (۱۴) به جای هر همسازهٔ  $1 + 1/n$  مقدار  $1 + 1/(n+1)$  را قرار می‌دهیم؛ در نتیجه مقدار داخل قلابها تنزل می‌کند؛ پس از ساده کردن حاصل می‌شود.

$$(۱۵) \quad b_n - a_{n+1} > \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n$$

و بآسانی دیده می‌شود که

$$(۱۶) \quad \frac{1}{n} \left( 1 + \frac{1}{n+1} \right)^n > \frac{1}{n+1} \left( 1 + \frac{1}{n+1} \right)^{n+1}$$

در حقیقت این عبارت پس از ساده شدن به

$$\frac{1}{n} > \frac{n+2}{(n+1)^2}$$

یا به

$$(n+1)^2 > n(n+2)$$

تبدیل می‌شود.

آخرین نامساوی آشکارا صحیح است.

از (۱۵) و (۱۶) و (۱۳) نتیجه می‌گیریم

$$b_n - a_{n+1} > b_{n+1} - a_{n+1}$$

و در نتیجه

$$b_n > b_{n+1}$$

بدین ترتیب وقتی که  $n$  ترقی کند  $b_n$  تنزل می‌کند.

چون  $a_1 = 2$  و  $b_1 = 4$ ، از این تحلیل نتیجه می‌توان گرفت که

$$2 \leq a_n < b_n \leq 4$$

و از این نامساوی و تساوی (۱۲) چنین برمی‌آید که

$$(۱۷) \quad b_n - a_n < \frac{4}{n}$$

چون وقتی که  $n$  ترقی کند  $a_n$  ترقی و  $b_n$  تنزل می‌کنند و، چنان که

از نامساوی (۱۷) نتیجه می‌شود،  $b_n - a_n$  به‌سوی صفر می‌گراید، مقدار های  $a_n$  و  $b_n$  باید به سوی حد مشترکی میل کنند، که معمولاً با  $e$  نموده می‌شود.  $a_n$  همیشه کوچکتر و  $b_n$  همیشه بزرگتر از این مقدار حدی هستند. پس

$$(۱۸) \quad e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

و

$$(۱۹) \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

بویژه، به ازای  $n = ۱$

$$(۲۰) \quad ۲ < e < ۴$$

عدد  $e$  گنگ است و مقدار تقریبی آن ۲٫۷۱۸۲۸ است.  
از رابطه (۱۹) تساوی تقریبی

$$(۲۱) \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx e$$

نتیجه می‌شود. خطای محاسبهٔ آن کمتر از تفاضل  $b_n - a_n$ ، و در نتیجه کوچکتر از  $n/۴$  است.

فرض می‌کنیم  $x$  کسری مثبت و گویا و کوچکتر از ۱ باشد، و فرض می‌کنیم آن مقدارهای عدد مثبت صحیح آن را در نظر بگیریم که  $nx = k$  عددی صحیح باشد. آنگاه به‌موجب نامساوی (۱۹) بدست می‌آوریم:

$$\left(1 + \frac{x}{k}\right)^k < e^x < \left(1 + \frac{x}{k}\right)^{k+x}$$

در نتیجه این تساوی تقریبی برقرار خواهد بود:

$$(22) \quad \left(1 + \frac{x}{k}\right)^k \approx e^x$$

و خطائی که در این محاسبه ارتکاب می‌شود کوچکتر است از

$$(23) \quad \left(1 + \frac{x}{k}\right)^{k+x} - \left(1 + \frac{x}{k}\right)^k = \left(1 + \frac{x}{k}\right)^k \left[ \left(1 + \frac{x}{k}\right)^x - 1 \right] < \frac{x e^x}{k}$$

بعلاوه از دستور دو جمله‌ای نیوتن این رابطه را داریم

$$(24) \quad \left(1 + \frac{x}{k}\right)^k = 1 + x + \frac{k(k-1)}{2k^2} x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{6k^3} x^3 + \dots + \frac{1}{k^k} x^k$$

که از آن رابطه تقریبی زیرین نتیجه می‌شود:

$$(25) \quad \left(1 + \frac{x}{k}\right)^k \approx 1 + x$$

خطاهای محاسبه را با  $\sigma$  نشان می‌دهیم. واضح است که

$$(26) \quad \sigma = \frac{x^2}{2} \left[ \frac{k-1}{k} + \frac{(k-1)(k-2)}{3k^2} x + \dots + \frac{2}{k^k} x^{k-2} \right] < \frac{x^2}{2} (1 + x + x^2 + \dots) = \frac{x^2}{2(1-x)}$$

از (22) و (25) و (26) به این نتیجه می‌رسیم که

$$(27) \quad e^x \approx 1 + x$$

خطای این رابطه از  $x^2/[2(1-x)]$  بیشتر نیست زیرا که حد عبارت  $(xe^x/k)$  (رابطهٔ (۲۳)) صفر است وقتی که  $k$  بی نهایت بزرگ شود. هرگاه به  $x$  مقدارهای خیلی کوچک داده شود این خطا هر قدر بسوایم کوچک می شود.

رابطهٔ (۲۷) در حالتی هم معتبر است که  $x < 1$  عدد گنگ مثبتی باشد؛ اگر تخمین‌های گویای مقدارهای  $x$  را در نظر بگیریم آنچه را گفتیم می توان اثبات کرد.

شایان تذکار است که رابطهٔ (۲۷) برای مقدارهای منفی  $x$  که قدر مطلقشان کوچکتر از ۱ باشد معتبر است و خطا در این مورد از  $(x^2/2(x+1))$  بیشتر نیست.

از رابطه‌های (۲۲) و (۲۴) رابطهٔ تقریبی دیگری، دقیقتر از رابطهٔ (۲۷) بدست می آوریم. وقتی که  $k \rightarrow \infty$  حد جملهٔ سوم طرف راست رابطهٔ (۲۴) مقدار  $x^2/2$  است. در نتیجه بدست می آید:

$$(28) \quad e^x \approx 1 + x + x^2/2$$

این دستور وقتی بکار می رود که  $x$  آنقدر کوچک باشد که بتوان از  $x^3$  چشم پوشید. از برآورد خطای دستور (۲۸) صرف نظر می کنیم. اکنون به دستگاه لگاریتمهای به مبنای  $e$ ، یا لگاریتم طبیعی، که نقشی مهم در ریاضیات ایفا می کنند، می پردازیم.

لگاریتم طبیعی عدد  $x$  را با  $\ln x$  نمایش می دهیم. بر طبق خواص معلوم لگاریتمها  $\ln 1 = 0$  و  $\ln e = 1$ .

اگر از دو طرف رابطهٔ (۲۷) لگاریتم بگیریم رابطهٔ تقریبی

$$\ln(1+x) \approx x$$

را بدست می آوریم که می تواند وقتی که  $x$  خیلی کوچک باشد بکار برده شود.



تابعهای هذلولوی، یعنی جیب هذلولوی و جیب تمام هذلولوی (که  $\sinh$  و  $\cosh$  نوشته می‌شوند) به کمک عدد  $e$  تعریف می‌شوند:

$$(30) \quad \sinh x = (e^x - e^{-x})/2$$

$$\cosh x = (e^x + e^{-x})/2 \text{ و}$$

دو تابع هذلولوی دیگر، ظل هذلولوی و ظل تمام هذلولوی (نوشته می‌شوند  $\tanh$  و  $\coth$ ) را می‌توان چنین تعریف کرد.

$$(31) \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

تابعهای هذلولوی خواص متعددی دارند شبیه به خواص تابعهای مثلثاتی نظیرشان.

دستورهای تقریبی زیرین، برای مقادیرهای به اندازه کافی کوچک  $x$ ، از رابطه‌های (27) و (30) و (31) نتیجه شده‌اند:

$$(32) \quad \sinh x \approx x, \quad \cosh x \approx 1, \quad \tanh x \approx x$$

و از روابط (28) و (30) و (31):

$$(33) \quad \sinh x \approx x, \quad \cosh x \approx 1 + \frac{1}{2}x^2,$$

$$\tanh x \approx \frac{2x}{2+x^2}$$

## ۱۱

## اندازه‌گیری پاره‌خطهای راست‌هذلولوی

در این بخش نشان خواهیم داد که چگونه می‌توان طول پاره‌های خطهای راست‌هذلولوی را حساب کرد.

نخست یک نیم‌خط اقلیدسی را در نظر می‌گیریم که از نقطه‌ای مانند  $M$  از خط  $u$  بر این خط عمود شده است (شکل ۱۵)، و بر این خط به چهار نقطه  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $D$ ، به فواصلی از هم که در این رابطه صدق کنند، توجه می‌کنیم:

$$\frac{MB}{MA} = \frac{MD}{MC}$$

یا به صورتی هم‌ارز این رابطه:

$$\frac{MB}{MD} = \frac{MA}{MC}$$

چون هر یک از این دو نسبت را  $\mu$  بنامیم خاطر نشان می‌سازیم که تجانس‌ی که مرکزش در  $M$  و ضریبش  $\mu$  باشد پاره خط  $CD$  را به پاره خط  $AB$  تبدیل می‌کند؛ پس طولهای هذلولوی این قطعات متساویند. از این مطالب نتیجه می‌شود که طول هذلولوی پاره خط  $AB$  (که آن را با  $AB_h$  می‌نمائیم)، بوسیله نسبت  $MB/MA$  مشخص می‌شود، یا،

به عبارتی دیگر، تابعی است از این نسبت. حالا نشان می‌دهیم که لگاریتم را می‌توان برای این تابع اختیار کرد، یعنی که می‌توانیم فرض کنیم

$$(۳۴) \quad AB_h = \log \frac{MB}{MA}$$

هرگاه  $F$  نقطه‌ای از پاره خط  $AB$  باشد، آنگاه

$$\frac{MB}{MA} = \frac{MF}{MA} \cdot \frac{MB}{MF}$$

اگر لگاریتم رابطهٔ اخیر را بگیریم به‌موجب رابطهٔ (۳۴) بدست می‌آوریم

$$AB_h = AF_h + FB_h$$

که با قاعدهٔ جمع پاره خطها مطابقت دارد.

به‌طور کلی می‌توان لگاریتم رابطهٔ (۳۴) را با هر مبنای مثبتی (جز واحد) - البته برای همهٔ پاره خطها مبنا باید یکی باشد - گرفت؛ با وجود این، برای آن که قاعدهٔ مورد بحث را با محتوای بخش ۴ هماهنگ سازیم باید انتخاب خود را به لگاریتم طبیعی محدود کنیم، و در نتیجه رابطهٔ (۳۴) را به صورت

$$AB_h = \ln \frac{MB}{MA}$$

محدود سازیم.

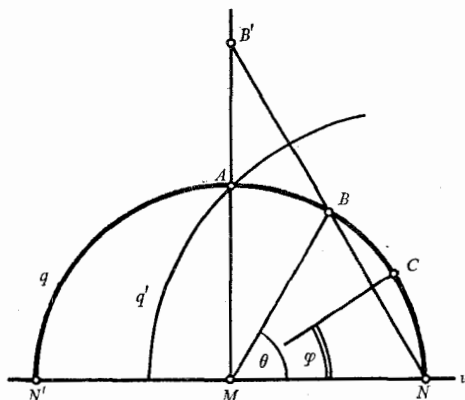
براستی، وقتی که پاره خط  $AB$  در مقایسه با پاره خط  $MA$  به‌اندازهٔ کافی کوچک باشد به‌موجب رابطه‌های (۲۹) و (۳۵) از رابطهٔ

$$\ln \frac{MB}{MA} = \ln \frac{MA + AB}{MA} = \ln \left( 1 + \frac{AB}{MA} \right)$$

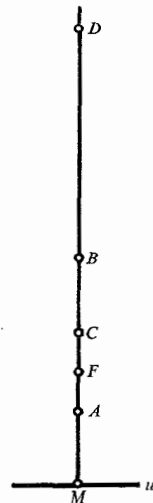
$$AB_h \approx \frac{AB}{MA} \quad \text{به رابطه}$$

می‌رسیم که با اصلی که در بخش ۴ فرض کردیم مطابقت دارد. لازم است خاطر نشان شود که طولهای هذلولوی پاره‌خطهای  $AB$  و  $BA$ ، که بوسیله رابطه (۳۵) حساب شوند از حیث مقدار مطلق برابراند اما علامتهای مخالف دارند. از اینجا معلوم می‌شود که عوض کردن جهت پاره خط موجب تغییر علامت طول هذلولوی آن است. اگر جهت پاره خط مورد علاقه ما نباشد طرف راست رابطه (۳۵) باید متضمن قدر مطلق لگاریتم باشد.

اکنون نیم‌دایره اقلیدسی  $q$  را که مرکزش  $M$  بر خطی چون  $u$  باشد و  $u$  را در  $N$  و  $N'$  قطع کند، و نیز عمودی را که در  $M$  بر  $u$  اخراج شود و  $q$  را در  $A$  قطع کند در نظر می‌گیریم (شکل ۳۶).



شکل ۳۶



شکل ۳۵

نقطه  $B$  را بر قوس  $AN$  اختیار می‌کنیم. خط راست اقلیدسی  $NB$  را می‌کشیم و نقطه برخوردش با  $MA$  را  $B'$  می‌نامیم. دیدن این که پاره‌های  $AB$  و  $AB'$  از خطهای راست هذلولوی  $q$  و  $MA$  متساوینند دشوار نیست. درحقیقت انعکاس نسبت به دایره  $q'$  (با شعاع  $NA$  و مرکز  $N$ ) را به خط راست اقلیدسی  $MA$  تبدیل می‌کند؛ با این انعکاس نقطه  $A$  به خودش و نقطه  $B$  به  $B'$  تبدیل می‌شوند، زیرا که  $B$  و  $B'$  هر دو بر یک خط راست اقلیدسی قرار دارند که بر قطب انعکاس  $N$  می‌گذرد. بنابراین

$$AB_h = AB'_h = \ln \frac{MB'}{MA}$$

زاویه  $NMB$  را  $\theta$  می‌نامیم؛ پس  $\angle MNB = 90^\circ - \theta/2$  و

$$\frac{MB'}{MA} = \frac{MB'}{MN} = \tan \left( 90^\circ - \frac{\theta}{2} \right) = \cot \frac{\theta}{2}$$

و از آن روی

$$(36) \quad AB_h = \ln \cot \frac{\theta}{2}$$

هرگاه  $C$  نقطه‌ای از قوس  $BN$  (شکل ۳۶) باشد و  $\angle NMC = \varphi$ ،  
آنگاه از رابطه (۳۶) برمی‌آید:

$$\begin{aligned} AC_h &= \ln \cot \frac{\varphi}{2}, \quad BC_h = AC_h - AB_h \\ &= \ln \cot \frac{\varphi}{2} - \ln \cot \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

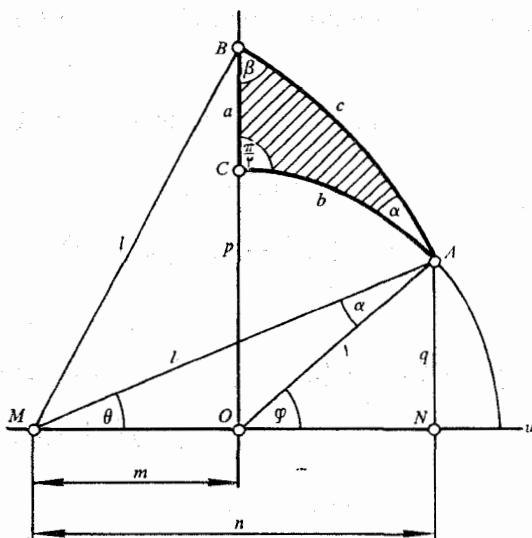
$$(37) \quad BC_h = \ln \left( \cot \frac{\varphi}{2} \cdot \tan \frac{\theta}{2} \right) \quad \text{و بالمال}$$

بدین ترتیب دستور طول یک پاره خط راست هذلولوی را هم برای وقتی که آن پاره جزئی از یک خط راست اقلیدسی باشد، و هم برای وقتی که با یک نیم‌دایره اقلیدسی نموده شود، بدست آوردیم.

# ۱۲

## دستورهای اصلی مثلثات هذلولوی

مثلث قائم الزاویه  $ABC$  را در نیم صفحه  $\tau$  در نظر می گیریم (شکل ۳۷). ضلع  $BC$  آن پاره ای است از یک خط راست اقلیدسی  $OB$  (با شرط  $OB \perp u$ )، ضلع  $CA$  قوسی است از یک دایره اقلیدسی به مرکز



شکل ۳۷

$O$  و به شعاع ۱،  $AB$  قوسی است از یک دایرهٔ اقلیدسی به مرکز  $M$  و به شعاع  $l$ ؛  $\angle C$  قائمه است و  $\angle A = \alpha$  و  $\angle B = \beta$ .  
از  $A$  عمود  $AN$  را بر  $u$  فرود می‌آوریم و قرارداد می‌کنیم

$$OB = p, NA = q, MO = m, MN = n, \\ \angle NMA = \theta, \angle NOA = \varphi$$

طولهای هذلولوی اضلاع  $BC$  و  $CA$  و  $AB$  مثلث را به ترتیب  $a$  و  $b$  و  $c$  می‌نامیم (بعکس  $l$ ،  $m$  و  $n$  و  $p$  و  $q$  طولهای اقلیدسی‌اند).  
توجه کنید که

$$\angle OAM = \alpha, \quad \angle OMB = \beta$$

زیرا که مماسهای بر اضلاع زاویهٔ  $A$  در  $A$  بر اضلاع زاویهٔ  $OAM$ ،  
و مماسهای در  $B$  بر اضلاع زاویهٔ  $OMB$  عموداند.  
اکنون به برقراری تعدادی رابطه بین مقادیرهایی که مورد بحث هستند می‌پردازیم.

از مثلثهای  $OAM$  و  $OBM$  بدست می‌آوریم

$$p^2 = l^2 - m^2$$

$$1 = l^2 + m^2 - 2mn (= OA^2)$$

در نتیجه

$$(38) \quad p^2 - 1 = 2m(n - m), \quad p^2 + 1 = 2(l^2 - mn)$$

وانگهی به‌موجب رابطهٔ (۳۵)

$$a = \ln \frac{p}{1} = \ln p$$

و در نتیجه



$$e^a = p, \quad e^{-a} = 1/p$$

$$\sinh a = \frac{1}{2}(e^a - e^{-a}) = \frac{1}{2}\left(p - \frac{1}{p}\right) = \frac{p^2 - 1}{2p}$$

$$\cosh a = \frac{1}{2}(e^a + e^{-a}) = \frac{1}{2}\left(p + \frac{1}{p}\right) = \frac{p^2 + 1}{2p}$$

پس با بکار بردن رابطه ۳۶ بدست می آوریم

$$(۳۹) \quad \sinh a = \frac{m(n-m)}{p}, \quad \cosh a = \frac{l^2 - nm}{p}$$

در مثلث  $OAN$  این رابطه‌ها را داریم.

$$(۴۰) \quad \sin \varphi = q, \quad \cos \varphi = n-m$$

در نتیجه

$$\cot \frac{\varphi}{2} = \frac{1 + \cos \varphi}{\sin \varphi} = \frac{1 + n - m}{q}$$

$$\tan \frac{\varphi}{2} = \frac{1 - \cos \varphi}{\sin \varphi} = \frac{1 - n + m}{q}$$

چون از رابطه (۳۶) برمی آید که

$$b = \ln \cot \frac{\varphi}{2}$$

پس

$$e^b = \cot \frac{\varphi}{2} = \frac{1 + n - m}{q}, \quad e^{-b} = \tan \frac{\varphi}{2} = \frac{1 - n + m}{q}$$

در نتیجه

$$(۴۱) \quad \sinh b = \frac{n-m}{q}, \quad \cosh b = \frac{1}{q}$$

بعلاوه، از مثلثهای  $OAN$  و  $OBM$  بدست می‌آوریم

$$(۴۲) \quad \sin \theta = \frac{q}{l}, \quad \cos \theta = \frac{n}{l}$$

$$(۴۳) \quad \sin \beta = \frac{p}{l}, \quad \cos \beta = \frac{m}{l}$$

در نتیجه

$$\cot \frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} = \frac{l+n}{q},$$

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} = \frac{l-n}{q}$$

$$\tan \frac{\beta}{2} = \frac{1 - \cos \beta}{\sin \beta} = \frac{l-m}{p},$$

$$\cot \frac{\beta}{2} = \frac{1 + \cos \beta}{\sin \beta} = \frac{l+m}{p}$$

چون از رابطه (۳۷) برمی‌آید که

$$c = \ln \cot \frac{\theta}{2} \tan \frac{\beta}{2}$$

پس

$$e^c = \cot \frac{\theta}{2} \tan \frac{\beta}{2} = \frac{(l+n)(l-m)}{pq} = \frac{l^2 + ln - lm - mn}{pq}$$

$$e^{-c} = \tan \frac{\theta}{2} \cot \frac{\beta}{2} = \frac{(l-n)(l+m)}{pq} = \frac{l^2 - ln + lm - mn}{pq}$$

بنابراین

$$(۴۴) \quad \sinh c = \frac{l(n-m)}{pq}, \quad \cosh c = \frac{l^2 - mn}{pq}$$

و سرانجام، از مثلث  $OAM$  بدست می‌آوریم

$$\alpha = \varphi - \theta$$

چون رابطه‌های (۴۰) و (۴۲) را هم در محاسبه وارد کنیم نتیجه می‌گیریم

$$\sin \alpha = \sin \varphi \cos \theta - \cos \varphi \sin \theta = \frac{qn - q(n-m)}{l}$$

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \cos \varphi \cos \theta + \sin \varphi \sin \theta \\ &= \frac{n(n-m) + q^2}{l} = \frac{n(n-m) + l^2 - n^2}{l} \end{aligned}$$

زیرا که  $q^2 = l^2 - n^2$  بدین ترتیب

$$(۴۵) \quad \sin \alpha = \frac{qm}{l}, \quad \cos \alpha = \frac{l^2 - mn}{l}$$

از رابطه‌های (۳۹) و (۴۱) و (۴۳) و (۴۴) و (۴۵) بدست می‌آوریم

$$(۴۶) \quad \tanh a = \frac{m(n-m)}{l^2 - mn}, \quad \tanh b = n - m,$$

$$\tanh c = \frac{l(n-m)}{l^2 - mn}$$

$$(۴۷) \quad \tan \alpha = \frac{qm}{l^2 - mn}, \quad \cot \alpha = \frac{l^2 - mn}{qm}$$

$$(۴۸) \quad \tan \beta = \frac{p}{m}, \quad \cot \beta = \frac{m}{p}$$

تحقیق اعتبار دستورهای زیرین، که دستورهای اصلی مثلثات هذلولوی را تشکیل می‌دهند، با کمک رابطه‌های (۳۹) و (۴۰) و (۴۳) تا (۴۸) کار دشواری نیست

$$(۴۹) \quad \cosh c = \cosh a \cdot \cosh b$$

$$(۵۰) \quad \sinh a = \sinh c \cdot \sin \alpha$$

$$(۵۱) \quad \sinh b = \sinh c \cdot \sin \beta$$

$$(۵۲) \quad \tanh a = \sinh b \cdot \tan \alpha$$

$$(۵۳) \quad \tanh b = \sinh a \cdot \tan \beta$$

$$(۵۴) \quad \tanh a = \tanh c \cdot \cos \beta$$

$$(۵۵) \quad \tanh b = \tanh c \cdot \cos \alpha$$

$$(۵۶) \quad \cos \alpha = \cosh a \cdot \sin \beta$$

$$(۵۷) \quad \cos \beta = \cosh b \cdot \sin \alpha$$

$$(۵۸) \quad \cosh c = \cot \alpha \cdot \cot \beta$$

هرگاه به جای مقدارهای  $a$  و  $b$  و  $c$ ، بترتیب، مقدارهای  $(a/r)$  و  $(b/r)$  و  $(c/r)$  را بگذاریم، یعنی مقیاس طولهای هذلولوی را تغییردهیم، روابط (۴۹) تا (۵۸) را می‌توان با عبارتهایی دیگر بیان کرد. در اینجا  $r$  ثابتی است که بین همهٔ پاره خطها مشترک است.

جالب دقت است که با استفاده از روابطی که گفتیم و با فرض این که  $a$  و  $b$  و  $c$  به اندازهٔ کافی کوچک باشند، می‌توان رابطه‌هایی تقریبی، شبیه به دستورهای مثلثات اقلیدسی، بین اجزای مثلث قائم‌الزاویه یافت. مثلاً با استفاده از رابطه‌های (۳۲) و (۳۳) دستورهای ذیل را از رابطه‌های (۵۰) و (۵۲) و (۵۴) نتیجه می‌گیریم.

$$a \approx c \sin \alpha$$

$$a \approx b \tan \alpha$$

$$a \approx c \cos \beta$$

رابطه (۴۹) به

$$1 + \frac{1}{2}c^2 \approx \left(1 + \frac{1}{2}a^2\right)\left(1 + \frac{1}{2}b^2\right)$$

تبدیل می‌شود و در نتیجه بدست می‌آید:

$$\frac{1}{2}c^2 \approx \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{4}a^2b^2$$

بعد از ساده کردن و صرف نظر کردن از جمله سوم طرف راست رابطه، که بسیار کوچک است، به این نتیجه می‌رسیم

$$c^2 \approx a^2 + b^2$$

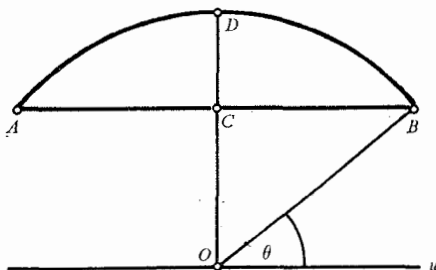
بدین ترتیب رابطه (۴۹) متناظر است با قضیه فیثاغورس در هندسه

اقلیدسی.

## ۱۳

## طول بعضی قوسهای مستوی در هندسه لباچفسکئی

طول قوس دایره زمانی. در شکل ۳۸ قوس  $ADB$  از دایره اقلیدسی که مرکزش  $O$  بر خط  $u$  واقع است نمایش پاره‌ای است از یک خط راست هذلولوی، و پاره خط اقلیدسی  $AB$  که موازی  $u$  است نمایش قوسی است از دایره زمانی؛ طولهای هذلولوی آنها را بترتیب با  $2a$  و  $2s$  نمایش می‌دهیم.



شکل ۳۸

با بکار بردن رابطه (۳۶) بدست می‌آوریم  $a = \ln \cot(\theta/2)$  که نتیجه‌اش  $\cot(\theta/2) = e^a$  است. بعلاوه بکار بستن اصل ۱ (بخش

(۴) منجر می‌شود به

$$s = \frac{AC}{OC} = \cot \theta = \frac{1}{2} \left( \cot \frac{\theta}{2} - \tan \frac{\theta}{2} \right) = \frac{1}{2} (e^a - e^{-a})$$

از تعریف سینوس هذلولوی بدست می‌آوریم

$$(59) \quad s = \sinh a$$

در نتیجه  $2s = 2 \sinh a$ . بدین ترتیب طول قوس دایرهٔ زمانی دو برابر سینوس هذلولوی نصف وتر آن قوس است. چون  $s < a$ ، از رابطهٔ (۵۹) نتیجه می‌گیریم

$$(60) \quad a < \sinh a \quad (\text{اگر } a > 0)$$

طول دایره ۰ در گام اول به اثبات دو حکم کمکی می‌پردازیم.

(آ) اگر  $a$  به اندازهٔ کافی کوچک باشد  $\tanh a < a$ ، در

حقیقت رابطهٔ (۳۳) نتیجه می‌دهد

$$(a > 0) \quad \tanh a \approx \frac{2a}{2+a^2} < a$$

(ب) اگر به این نکته توجه کنیم که محیط‌های  $n$  ضلعی منتظم محاط

در، و محیط بر، دایره‌ای به شعاع ۱، وقتی که  $n$  بی نهایت زیاد شود، به

یک حد مشترک، که طول دایره است، میل می‌کنند نتیجه می‌گیریم

$$(61) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} 2n \sin \frac{\pi}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2n \tan \frac{\pi}{n} = 2\pi$$

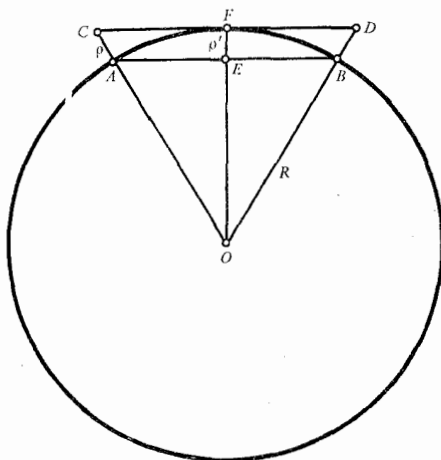
اکنون به یافتن طول  $s$  دایرهٔ هذلولوی به شعاع  $R$  می‌پردازیم

(اینجا و از این پس همهٔ نمادها نمایندهٔ طول هذلولوی هستند). فرض

۱. بی اثبات می‌گوییم که این نامساوی، برای هر مقدار مثبت،

$a$  معتبر است.

کنید  $AB$  و  $CD$  اضلاع  $n$  ضلعی های منتظم محاط در دایره  $1$  و محیط بر آن باشند. محیطهای آنها را بترتیب  $p$  و  $P$  و طولهای قطعات  $AC$  و  $EF$  را  $\rho$  و  $\rho'$  می نامیم ( ← شکل ۳۹، که در آن شکلهای هذلولوی به نحوی قرار دادی مانند شکلهای اقلیدسی نمایش داده شده اند).



شکل ۳۹

۱. فرض کنید  $A$  نقطه ای از دایره هذلولوی  $q$  به مرکز  $O$  باشد. زاویه  $\angle AOM = \pi/m$  را، که در آن  $m$  عدد صحیح مثبتی است، بسازید و در نقطه  $A$  مماسی بر دایره  $q$  بکشید. این مماس و نیمخط  $OM$  یا در نقطه ای مانند  $B$  تلاقی می کنند، یا نقطه مشترک ندارند. در صورت اول پاره خط  $AB$  نصف ضلع  $m$  ضلعی منتظم محیط بر دایره  $q$  است. در حالت دوم هیچ  $m$  ضلعی منتظم نمی توان بر  $q$  محیط کرد، اما می توان  $n$  ضلعی منتظم بر آن محیط نمود مشروط به آن که عدد صحیح  $n < m$  به اندازه کافی بزرگ باشد



برای مثلثهای قائم الزاویه  $OAE$  و  $OCF$ ، که در آنها  $O$  مرکز دایرهٔ مفروض است، از رابطه‌های (۵۲) و (۵۰) بدست می‌آوریم

$$\tanh AE = \sinh OE \cdot \tan \frac{\pi}{n}$$

$$\sinh CF = \sinh OC \cdot \sin \frac{\pi}{n}$$

یا

$$(۶۲) \quad \tanh \frac{P}{2n} = \sinh (R - \rho') \cdot \tan \frac{\pi}{n}$$

$$(۶۳) \quad \sinh \frac{P}{2n} = \sinh (R + \rho) \cdot \sin \frac{\pi}{n}$$

$n$  را آنقدر بزرگ انگارید که  $tg \frac{p}{2n} < \frac{p}{2n}$ ؛ چون بر طبق نامساویهای (۶۰)،  $(P/2n) < \sinh (P/2n)$ ، از ضرب عضو به عضو رابطه‌های (۶۲) و (۶۳) در  $2n$  نتیجه می‌گیریم.

$$(۶۴) \quad \sinh (R - \rho') \cdot 2n \tan \frac{\pi}{n} < p < s$$

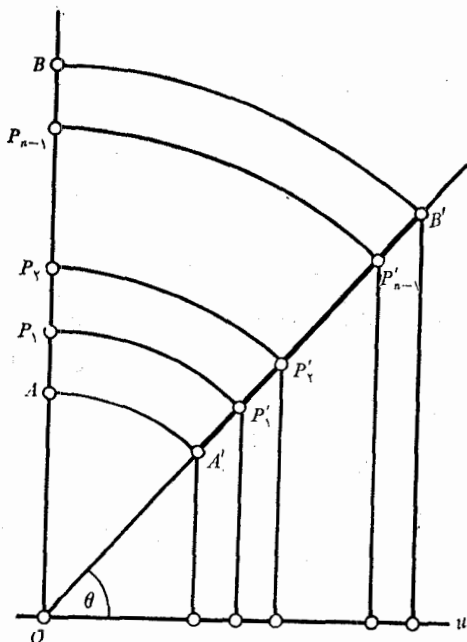
$$< P < \sinh (R + \rho) \cdot 2n \sin \frac{\pi}{n}$$

وقتی که تساویهای (۶۱) را در نظر بگیریم و توجه کنیم که هرگاه  $n$  بیحد بزرگ شود  $\rho$  و  $\rho'$  به سوی صفر می‌گرایند به این نتیجه می‌رسیم که اولین و آخرین جمله‌های رشتهٔ نامساویهای (۶۴) به یک حد مشترک  $2\pi \sinh R$ ، که با مقدار  $s$  منطبق است، می‌گرایند

$$s = 2\pi \sinh R$$

بنابراین طول محیط دایره در هندسهٔ لباچفسکئی مساوی است با  
با حاصل ضرب سینوس هذلولوی شعاعش در  $2\pi$ .

طول قوس منحنی همفاصله. فرض می‌کنیم  $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$  نقطه‌هایی باشند که به فاصله‌های اقلیدسی  $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$  از خط  $u$  واقع باشند و پاره خط  $AB$  را، که بر  $u$  عمود است، به  $n$  جزء متساوی (به مفهوم اقلیدسی) تقسیم کنند و طولهای اقلیدسی پاره خطهای  $OB$  و  $AB$  را، بترتیب،  $y_n$  و  $z$  می‌نامیم (شکل ۴۰). قوسهای  $AA'$  و  $P_1P'_1$  و  $\dots$  و  $BB'$  از دایره‌های اقلیدسی به مرکز مشترک  $O$  را، که نمایش عمودهایی هستند که از نقاطی از همفاصلهٔ  $OB'$  بر  $OB$  قاعدهٔ آن فرود آمده‌اند، رسم می‌کنیم. به موجب رابطهٔ (۳۶) طول هذلولوی هریک



شکل ۴۰

از این عمودها با دستور  $h = \ln \cot(\theta/2)$  مشخص شده است. طولهای هذلولوی قوس  $A'B'$  از منحنی همفاصله، و پاره خط  $AB$  را که قاعدهٔ آن است،  $s$  و  $a$  می‌نامیم. چون فاصله‌های اقلیدسی نقاط  $P_1', \dots, P_r'$  و  $B$  از خط، بترتیب، مساوی هستند با  $y_1 \sin \theta, \dots, y_r \sin \theta$  و چون طولهای اقلیدسی هر یک از تقسیمات  $AB$  و  $A'B'$  مساوی  $\xi/n$  هستند، به‌موجب نتیجهٔ بخش ۴ بدست می‌آوریم:

$$Z = \lim_{n \rightarrow \infty} Z' \quad \text{و} \quad s = \lim_{n \rightarrow \infty} Z', \quad \text{که در آنها}$$

$$Z = \frac{\xi}{n} \left( \frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \dots + \frac{1}{y_n} \right)$$

$$Z' = \frac{\xi}{n} \left( \frac{1}{y_1 \sin \theta} + \frac{1}{y_2 \sin \theta} + \dots + \frac{1}{y_n \sin \theta} \right)$$

و در نتیجه

$$\frac{Z'}{Z} = \frac{1}{\sin \theta}$$

چون نسبت اندازه‌های  $Z$  و  $Z'$  ثابت می‌ماند نسبت حدهای آنها نیز همان مقدار است:

$$\begin{aligned} \frac{s}{a} = \frac{1}{\sin \theta} &= \frac{1}{2} \left( \cot \frac{\theta}{2} + \tan \frac{\theta}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} (e^h + e^{-h}) = \cosh h \end{aligned}$$

بنابراین

$$s = a \cosh h$$

طول بعضی قوسهای مستوی ...

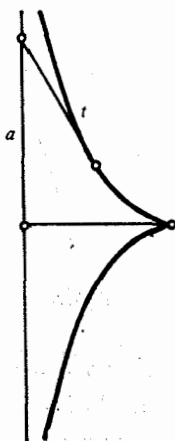
بدین ترتیب طول قوسی از یک منحنی همفاصله مساوی است با حاصل ضرب تصویر قائم قوس بر قاعده همفاصله در جیب تمام هذلولوی فاصله بین نقاط آن قوس و قاعده.

## نتیجه

اینک که این جزوه به پایان نزدیک می شود دوست داریم که خواننده را (بی آن که وارد استدلال و اثبات شویم) با برخی احکام هندسهٔ لباچفسکی، که نمایندهٔ سرشت خاص آن شمرده می شوند، آشنا سازیم.

نخست سطح فضائی اقلیدسی را، که در بخش ۴ در حال عبور فقط نظری به آن افکندیم، توصیف می کنیم.

در شکل ۴۱ صفحه ای اقلیدسی و در آن خط راست  $a$  و منحنی  $t$

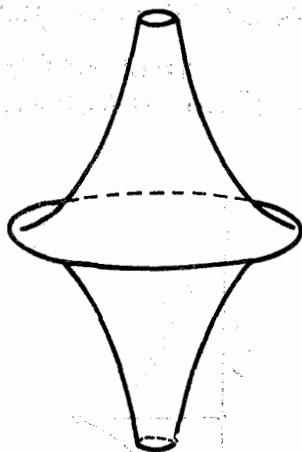


شکل ۴۱

(به نام کشنده<sup>۱</sup>) را در نظر گرفته‌ایم. خاصیت منحنی کشنده آن است که قطعه‌ای از مماس بر هر نقطه آن که بین نقطه تماس و نقطه تقاطع مماس با خط  $a$  محدود شود همواره دارای طولی ثابت است، که بستگی به نقطه تماس ندارد.

اگر منحنی  $\gamma$  حول خط  $a$  دوران کند سطحی بوجود می‌آورد به نام کره کاذب<sup>۲</sup>.

کره کاذب سطحی است که بلترامی<sup>۳</sup> درباره آن پژوهش کرده و ثابت نموده است که دارای خواصی است که جبلی قطعه‌ای از صفحه لیاچفسکتی است (اگر کوتاه‌ترین مسیرهای روی این سطح را «خط راست» در نظر بگیریم).



شکل ۴۲

به نحوی مشابه، در فضای لیاچفسکتی سطحی هست که ثابت شده است (با همان تعبیری که از خط راست کردیم) احکام هندسه مسطح

1. Tractrix
3. Beltrami

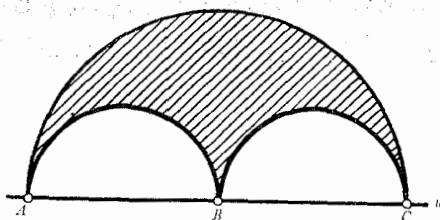
2. Pseudosphere

اقلیدسی در آن صادق اند؛ این سطح را گوی حدی یا کرهٔ زمانی<sup>۱</sup> می نامند و از دوران دایرهٔ زمانی حول یکی از محورهایش بوجود می آید، و اینک به بیان تعدادی از ساده ترین حکمهای مشخص کننده هندسهٔ لباچفسکئی می پردازیم.

۱. دو خط راست متوازی در امتداد توازی خود مجانبانه به یکدیگر نزدیک می شوند (یعنی فاصلهٔ بین یک نقطهٔ یکی از آنها و دیگری هر قدر خواسته باشیم کوچک می شود)، و در جهت مقابل بیحد از هم دور می گردند.

۲. هرگاه خط راست  $c$  دو خط راست  $a$  و  $b$  را در  $A$  و  $B$  قطع کند، آنگاه طول پاره خط  $AB$  وقتی به کمترین مقدار می رسد که بر عمود مشترک آن دو خط واگرا منطبق شود ( $a$  و  $b$  در دو طرف عمود مشترک بیحد از یکدیگر دور می شوند).

۳. مساحت مثلث  $ABC$  مساوی  $r^2(\pi - \angle A - \angle B - \angle C)$  است که در آن زاویه ها با رادیان اندازه گیری می شوند و  $r$  عدد ثابتی است که در بخش ۱۲ از آن یاد شد و در همهٔ مثلثها مشترک است. مثلثی که هر سه زاویه اش صفر باشند بزرگترین مساحت، یعنی  $\pi r^2$  را دارد (چنین مثلثی در شکل ۴۳ هاشور خورده است).



شکل ۴۳

1. Horosphere

۴. اندازهٔ زاویهٔ محاطی همیشه مساوی با نصف قوس روبروی آن نیست. بخصوص زاویهٔ محاطی که اضلاعش بر دو سر قطر بگذرند همیشه حاده است (و مانند هندسهٔ اقلیدسی قائمه نیست).

۵. هرگاه عدد صحیح دلخواه  $n$ ،  $n > 6$ ، داده شده باشد، می‌توانیم دایره‌ای بسازیم آن‌چنان که ضلع  $n$  ضلعی منتظم محاط در آن مساوی شعاع دایره باشد. ضلع شش ضلعی منتظم محاط در دایره همیشه از شعاع دایره بزرگتر است.

۶. در برخی حالتها هندسهٔ لباچفسکی تربیع دایره را میسر می‌سازد، یعنی امکان می‌بخشد که فقط با خط‌کش و پرگار «دایره» و «مربعی» معادل یکدیگر بسازیم (سخن درستر بگوییم، یک لوزی متساوی‌الزوایای معادل با دایره، زیرا که در صفحهٔ هذلولوی چهار ضلعی با چهار زاویهٔ قائمه وجود پیدا نمی‌کند). البته در هندسهٔ اقلیدسی تربیع دایره مقدور نیست.



و اینک ما فقط تعداد کمی از سنگهای کیلومتر نمای کنار راهی را که به ژرفنای هندسهٔ هذلولوی رهنمون می‌شود ترسیم کرده‌ایم. مایهٔ شادمانی ما خواهد بود که خواننده‌ای که با طرحی که عرضه کرده‌ایم به اصول این دانش برجسته آشنا می‌شود بدان دل‌بستگی یابد و بر آن شود که با خواندن کتابهای ویژه‌ای که دربارهٔ آن نوشته شده‌اند، از جمله کتاب بنیادگذار آن، یعنی نیکالای ایوانوویچ لباچفسکی، بیشتر به بررسی آن بپردازد.





**درسنامه ها و جزوه های دروس ریاضیات**

**دانلود نمونه سوالات امتحانات ریاضی**

**نمونه سوالات و پاسخنامه کنکور**

**دانلود نرم افزارهای ریاضیات**

**و...**

**سایت ویژه ریاضیات** [www.riazisara.ir](http://www.riazisara.ir)