

به نام خدا

جزوه تکمیلی هندسه

دوره راهنمایی

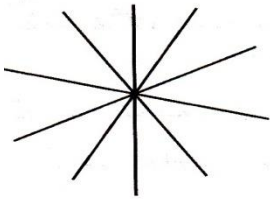
شامل ۳۲۷ نکته آموزشی

گردآورنده: محسن ذاکری

خط و زاویه



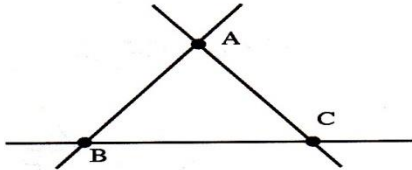
نکته ۱: از یک نقطه تعداد بیشماری خط راست می‌گذرد.



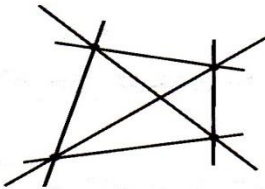
نکته ۲: از دو نقطه فقط یک خط راست می‌گذرد.



نکته ۳: از سه نقطه‌ی غیرواقع بر یک خط راست سه خط می‌گذرد.



نکته ۴: از چهار نقطه که هیچ سه تای آن‌ها روی یک خط نباشند شش خط می‌گذرد.



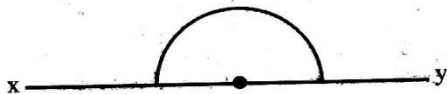
نکته ۵: از n نقطه که هیچ سه تای آن‌ها روی یک خط راست نباشند $\frac{n(n-1)}{2}$ خط می‌گذرد.

نکته ۶: اگر n نقطه روی یک خط راست قرار بگیرند به تعداد $\frac{n(n-1)}{2}$ پاره‌خط پدید می‌آید.

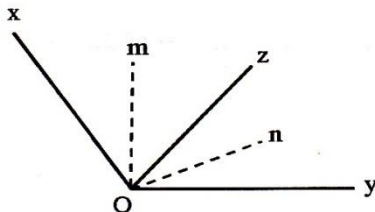
نکته ۷: اگر n نقطه روی یک خط راست اختیار کنیم $2n$ نیم‌خط پدید می‌آید.

نکته ۸: زاویه‌ای که از 90° کوچکتر باشد زاویه‌ی حاده (تند)، زاویه‌ی 90° را قائمه (راست)، زاویه‌ای که از 90° بزرگتر و از 180° کوچکتر باشد زاویه‌ی منفرجه (باز) نامیده می‌شود.

نکته ۹: زاویه‌ای که اضلاع آن در امتداد یک‌دیگر باشند زاویه‌ی نیم‌صفحه نامیده می‌شود. زاویه‌ی نیم‌صفحه 180° است.

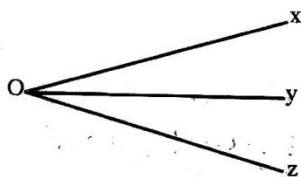


نکته ۱۰: اگر نیمسازهای دو زاویه‌ی مجاور را رسم کنیم، زاویه‌ای که این دو نیمساز پدید می‌آورند نصف مجموع دو زاویه مجاور می‌باشد.



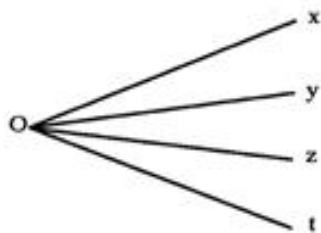
$$\widehat{mon} = \frac{1}{2} \widehat{xOy}$$

نکته ۱۱: اگر سه نیم‌خط در مبدأ مشترک باشند سه زاویه پدید می‌آورند.



$$\hat{xOy} - \hat{xOz} - \hat{yOz}$$

نکته ۱۲: اگر چهار نیم‌خط در مبدأ مشترک باشند ۶ زاویه پدید می‌آورند



$$\hat{xOy} - \hat{yOz} - \hat{zOt}$$

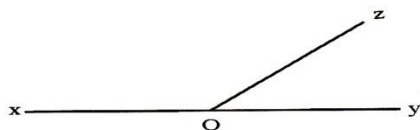
$$\hat{xOz} - \hat{yOt} - \hat{xOt}$$

نکته ۱۳: اگر n نیم‌خط در مبدأ مشترک باشند $\frac{n(n-1)}{2}$ زاویه پدید می‌آورند.

نکته ۱۴: دو زاویه که در رأس و یک ضلع مشترک بوده و ضلع دیگر قرار داشته باشد دو

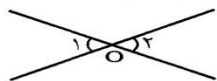
نکته ۱۵: دو زاویه‌ی مجاور که مجموعشان 180° باشد را دو زاویه‌ی مجانب می‌نامند.

(زاویه‌های $\hat{xOz}$ و $\hat{zOy}$ مجانبند)



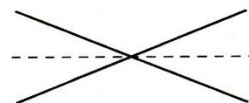
نکته ۱۶: دو زاویه که در رأس مشترک بوده و اضلاعشان در امتداد یک‌دیگر باشند دو زاویه‌ی متقابل به رأس نامیده می‌شوند.

(زاویه‌های O_1 و O_2 متقابل به رأسند)



نکته ۱۷: دو زاویه‌ی متقابل به رأس با هم برابرند.

نکته ۱۸: نیمسازهای دو زاویه‌ی متقابل به رأس در امتداد یک‌دیگرند.



نکته ۱۹: دو زاویه که مجموعشان 90° باشند، دو زاویه‌ی متمم نامیده می‌شوند.

نکته ۲۰: دو زاویه که مجموعشان 180° باشند، دو زاویه‌ی مکمل نامیده می‌شوند.

نکته ۲۱: دو زاویه‌ی مجانب همواره مکملند.

نکته ۲۲: اگر متمم‌های دو زاویه مساوی باشند، آن دو زاویه مساوی‌اند.

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} + \hat{B} = 90^\circ \\ \hat{C} + \hat{B} = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{A} = \hat{C}$$

نکته ۲۳: اگر مکمل‌های دو زاویه مساوی باشند، آن دو زاویه مساوی‌اند.

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} + \hat{B} = 180^\circ \\ \hat{C} + \hat{B} = 180^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{A} = \hat{C}$$

نیمسازهای دو زاویه‌ی مجانب بر هم عمودند

ساعت ۳۰× - (دقیقه ۵/۵)

زاویه‌ی بین عقربه‌های ساعت از فرمول زیر به دست می‌آید.

مکمل هر زاویه از متمم همان زاویه 90° بیش‌تر است.

تساوی مثلث‌ها

نکته ۲۴: دو مثلث در سه حالت با هم مساوی (قابل انطباق) هستند:

(۱) دو ضلع و زاویه‌ی بین آن‌ها از یک مثلث با دو ضلع و زاویه‌ی بین آن‌ها از مثلث دیگر دوه‌دو مساوی باشند. (ض‌ض)

(۲) دو زاویه و ضلع بین آن‌ها از یک مثلث با دو زاویه و ضلع بین آن‌ها از مثلث دیگر دوه‌دو مساوی باشند. (ض‌ض‌ض)

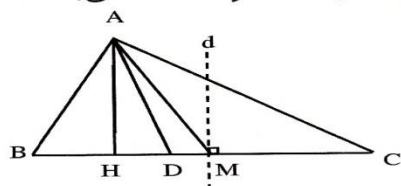
(۳) سه ضلع یک مثلث با سه ضلع مثلث دیگر دوه‌دو مساوی باشند. (ض‌ض‌ض)

نکته ۲۵: اگر سه زاویه از یک مثلث با سه زاویه از مثلث دیگر دوه‌دو مساوی باشند نمی‌توان گفت دو مثلث مساوی‌اند.

نکته ۲۶: در هر مثلث زاویه‌ها و اضلاع را اجزای اصلی مثلث و ارتفاع‌ها، میانه‌ها، نیمسازها و عمودمنصف‌ها را اجزای فرعی مثلث می‌نامند.

نکته ۲۷: در دو مثلث مساوی، اجزای فرعی متناظر با هم برابرند.

نکته ۲۸: هر مثلث ۱۲ جزء فرعی دارد که شامل سه ارتفاع، سه نیمساز، سه میانه و سه عمودمنصف می‌باشند.

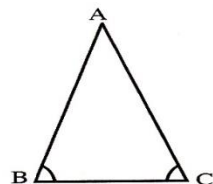


AH	←	ارتفاع
AD	←	نیمساز
AM	←	میانه
d	←	عمودمنصف

نکته ۲۹: مثلثی که دو ضلع مساوی داشته باشد مثلث متساوی‌الساقین نامیده می‌شود.

نکته ۳۰: در مثلث متساوی‌الساقین دو زاویه‌ی مجاور به قاعده با هم برابرند.

$$AB = AC \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{C}$$



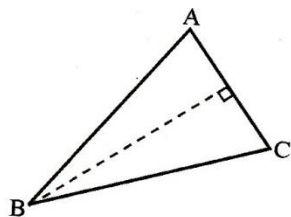
نکته ۳۱: در مثلث متساوی‌الساقین نیمساز زاویه‌ی رأس، ارتفاع، میانه و عمودمنصف قاعده بر هم منطبقند.

نکته ۳۲: مثلثی که دو زاویه‌ی مساوی داشته باشد متساوی‌الساقین است.

نکته ۳۳: اگر در یک مثلث نیمساز یک زاویه ارتفاع ضلع مقابل آن نیز باشد، آن مثلث متساوی‌الساقین است.

نکته ۳۴: اگر در یک مثلث نیمساز یک زاویه میانه‌ی ضلع مقابل آن نیز باشد، آن مثلث متساوی‌الساقین است.

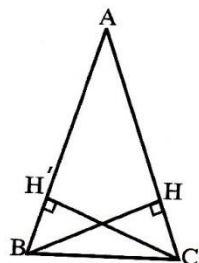
نکته ۳۵: اگر در یک مثلث ارتفاع نظیر یک ضلع، میانه آن ضلع نیز باشد، آن مثلث متساوی‌الساقین است.



اگر در مثلثی نیمساز یک زاویه ارتفاع نظیر ضلع مقابل آن زاویه نیز باشد
مثلث متساوی الساقین است.

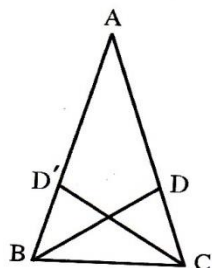


نکته ۳۶: در مثلث متساوی الساقین ارتفاع‌های نظیر ساق‌ها با هم برابرند.



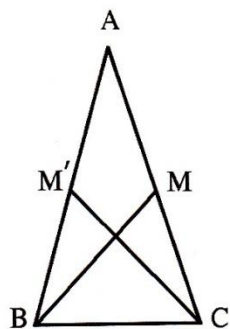
$$BH = CH'$$

نکته ۳۷: در مثلث متساوی الساقین نیمسازهای دو زاویه‌ی مجاور به قاعده با هم برابرند.



$$BD = CD'$$

نکته ۳۸: در مثلث متساوی الساقین میانه‌های نظیر ساق‌ها با هم برابرند.



$$BM = CM'$$

نکته ۳۹: به طور کلی در مثلث متساوی الساقین دو ساق، دو زاویه، دو ارتفاع، دو نیمساز و دو میانه با هم برابرند. و عکس تمام این موارد نیز درست است.

مثال ۴۵: تعداد اجزای فرعی در مثلث متساوی الساقین چند تا است؟

۶ (۴)

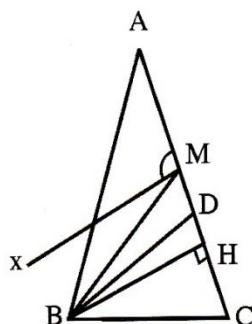
۸ (۳)

۹ (۲)

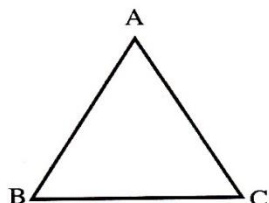
۱۲ (۱)

حل: گزینه‌ی «۲»

رأس B چهار جزء فرعی رسم شده که BH ارتفاع، BD نیمساز، BM میانه و MX عمود منصف AC است. از رأس C نیز چهار جزء فرعی و از رأس A فقط یک جزء فرعی رسم می‌شود.



$$۴ + ۴ + ۱ = ۹$$



نکته ۴۰: مثلثی که سه ضلع آن مساوی باشند مثلث متساوی الاضلاع نامیده می شود.

$$AB = AC = BC$$

نکته ۴۱: در مثلث متساوی الاضلاع سه زاویه با هم برابرند.

نکته ۴۲: در مثلث متساوی الاضلاع نیمساز هر زاویه ارتفاع، میانه و عمودمنصف ضلع مقابل آن نیز می باشد.

نکته ۴۳: در مثلث متساوی الاضلاع سه ارتفاع، سه میانه، سه نیمساز و سه عمودمنصف با هم مساوی اند.

نکته ۴۴: مثلثی که سه نیمساز آن مساوی باشند متساوی الاضلاع است.

نکته ۴۵: مثلثی که سه ارتفاع آن مساوی باشند متساوی الاضلاع است.

نکته ۴۶: مثلثی که سه میانه آن مساوی باشند متساوی الاضلاع است.

نکته ۴۷: مثلثی که سه عمودمنصف آن مساوی باشند متساوی الاضلاع است.

نکته ۴۸: عمودمنصف یک پاره خط، خطی است که از وسط پاره خط بگذرد و بر آن عمود شود.

نکته ۴۹: هر نقطه ای واقع بر عمودمنصف یک پاره خط از دو سر پاره خط به یک فاصله است.

نکته ۵۰: هر نقطه ای که از دو سر یک پاره خط به یک فاصله باشد روی عمودمنصف پاره خط قرار می گیرد.

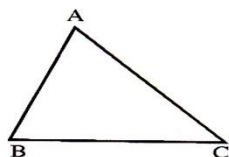
نکته ۵۱: عمودمنصف هر وتر دایره از مرکز دایره می گذرد.

نکته ۵۲: هر قطر مربع عمودمنصف قطر دیگر آن است.

نکته ۵۳: عمودمنصف های اضلاع هر مثلث در یک نقطه هم دیگر را قطع می کنند. که این نقطه از سه رأس

نکته ۵۴: اگر وسط های اضلاع یک مثلث متساوی الساقین را به هم وصل کنیم مثلث حاصل نیز متساوی الساقین است.

نکته ۵۵: در هر مثلث مجموع هر دو ضلع باید از ضلع سوم بزرگتر باشد.



$$AB + BC > AC$$

$$AB + AC > BC$$

$$AC + BC > AB$$

مثال ۷۳: با کدامیک از اندازه های زیر می توان مثلث رسم کرد؟

(۴) ۵ و ۵ و ۱۰

(۳) ۵ و ۷ و ۸

(۲) ۷ و ۴ و ۱۳

(۱) ۵ و ۸ و ۳

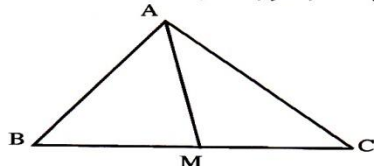
ل: گزینه ی «۳»

$$7 + 5 > 8$$

$$5 + 8 > 7$$

$$8 + 7 > 5$$

نکته ۵۶: در هر مثلث اندازه ی میانه ی نظیر هر ضلع از نصف مجموع دو ضلع دیگر کوچکتر است.



$$AM < \frac{AB + AC}{2}$$

مثلث قائم الزاویه



نکته ۵۷: اگر وتر و یک زاویه ی تند از یک مثلث قائم الزاویه با وتر و یک زاویه ی تند از مثلث قائم الزاویه ی دیگر دوجه دو مساوی باشند آن دو مثلث مساوی اند.

نکته ۵۸: اگر وتر و یک ضلع از یک مثلث قائم الزاویه با وتر و یک ضلع از مثلث قائم الزاویه ی دیگر دوجه دو مساوی باشند آن دو مثلث مساوی اند.

نکته ۵۹: هر نقطه ی واقع بر نیمساز یک زاویه از دو ضلع زاویه به یک فاصله است و بالعکس.

مثال ۷۷: کدامیک از جملات زیر نادرست است؟

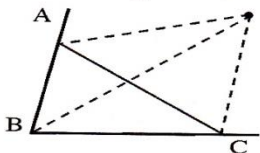
- (۱) هر نقطه ی واقع بر ارتفاع نظیر قاعده در مثلث متساوی الساقین از دو ساق مثلث به یک فاصله است.
- (۲) در مثلث متساوی الساقین وسط قاعده از دو ساق مثلث به یک فاصله است.
- (۳) مثلثی که دو ارتفاع برابر داشته باشد متساوی الساقین است.
- (۴) در مثلث متساوی الساقین ارتفاع نظیر هر ساق آن ساق را نصف می کند.

حل: گزینه ی «ع»

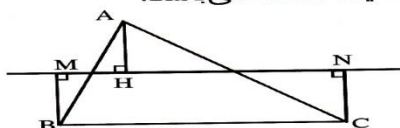
در مثلث متساوی الساقین فقط ارتفاع وارد بر قاعده آن را نصف می کند.

نکته ۶۰: در هر مثلث نیمسازهای زاویه های داخلی در یک نقطه همدیگر را قطع می کنند.

نکته ۶۱: در هر مثلث نیمسازهای دو زاویه ی خارجی و یک زاویه ی داخلی در یک نقطه همدیگر را قطع می کنند.

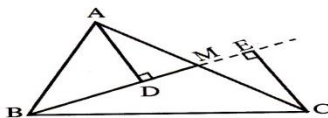


نکته ۶۲: سه رأس مثلث از خطی که وسطهای دو ضلع را به هم وصل می کند به یک فاصله می باشد.



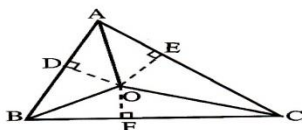
$$AH = BM = CN$$

نکته ۶۳: دو رأس هر مثلث از میانه ی مرسوم از رأس سوم به یک فاصله می باشند.



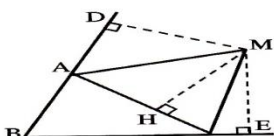
$$AD = CE$$

نکته ۶۴: در هر مثلث نقطه ی برخورد نیمسازهای زاویه های داخلی از سه رأس مثلث به یک فاصله می باشند.



$$OD = OE = OF$$

نکته ۶۵: در هر مثلث نقطه ی برخورد نیمسازهای دو زاویه ی خارجی از سه ضلع مثلث به یک فاصله می باشند.

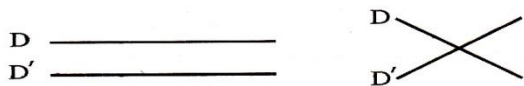


$$MH = MD = ME$$

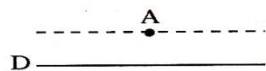
توازی



نکته ۷۶: دو خط در صفحه یا موازی‌اند یا متقاطع.



نکته ۷۷: از هر نقطه‌ای واقع در خارج یک خط فقط یک خط می‌توان به موازات آن رسم کرد.



نکته ۷۸: دو خط که بیش از یک نقطه‌ای مشترک داشته باشند بر هم منطبقند.

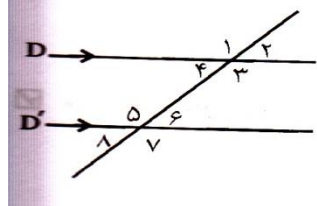
نکته ۷۹: اگر خطی یکی از دو خط موازی را قطع کند دیگری را نیز قطع می‌کند.

نکته ۷۰: دو خط موازی با یک خط خودشان با هم موازی‌اند.

نکته ۷۱: دو خط عمود بر یک خط با هم موازی‌اند.

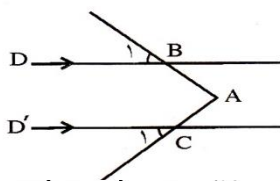
نکته ۷۲: اگر خطی بر یکی از دو خط موازی عمود شود بر دیگری نیز عمود می‌شود.

نکته ۷۳: اگر دو خط موازی را خط موربی قطع کند چهار زاویه‌ی تند مساوی و چهار زاویه‌ی باز مساوی پدید می‌آید که هر زاویه‌ی باز و هر زاویه‌ی تند مکمل یک‌دیگرند.

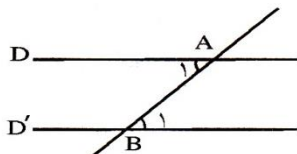


$$\begin{aligned}\hat{2} &= \hat{4} = \hat{6} = \hat{8} & \hat{1} &= \hat{3} = \hat{5} = \hat{7} \\ \hat{3} + \hat{6} &= 180^\circ & \hat{2} + \hat{7} &= 180^\circ\end{aligned}$$

نکته ۷۴: در شکل زیر $\hat{A} = \hat{B}_1 + \hat{C}_1$



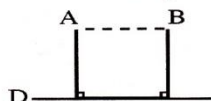
نکته ۷۵: اگر خط موربی دو خط را قطع کرده و زاویه‌های تند مساوی با آن‌ها بسازد آن دو خط موازی‌اند.



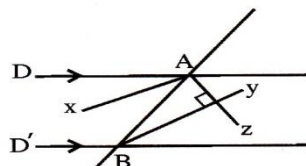
$$\hat{A}_1 = \hat{B}_1 \Rightarrow D \parallel D'$$

نکته ۷۶: فاصله‌ی دو خط موازی همواره مقدار ثابتی است.

نکته ۷۷: اگر دو نقطه‌ی A و B در یک طرف خط D بوده و از خط به یک فاصله باشند آن‌گاه $AB \parallel D$.



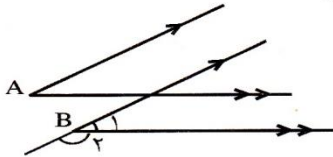
نکته ۷۸: در شکل زیر نیمسازهای هر دو زاویه‌ی تند با هم موازی‌اند و نیمسازهای یک زاویه‌ی تند و یک زاویه‌ی باز بر هم عمودند.



$$Ax \parallel By$$

$$Az \perp By$$

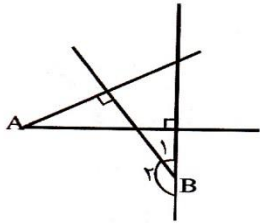
نکته ۷۹: اگر اضلاع دو زاویه دوجه دو موازی باشند آن دو زاویه یا مساوی اند یا مکمل.



$$\hat{A} = \hat{B}_1$$

$$\hat{A} + \hat{B}_2 = 180^\circ$$

نکته ۸۰: اگر اضلاع دو زاویه دوجه دو بر هم عمود باشند آن دو زاویه یا مساوی اند یا مکمل.



$$\hat{A} = \hat{B}_1$$

$$\hat{A} + \hat{B}_2 = 180^\circ$$

نکته ۸۱: مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° است.

نکته ۸۲: در مثلث متساوی الاضلاع اندازهی هر زاویه 60° است.

نکته ۸۳: در مثلث قائم الزاویهی متساوی الساقین اندازهی هر زاویهی تند 45° است.

نکته ۸۴: مجموع زوایای داخلی هر n ضلعی برابر است با: $(n - 2) \times 180^\circ$

مثال ۹۶: مجموع زوایای داخلی یک ده ضلعی چقدر است؟

$$1260^\circ \quad (۴)$$

$$1620^\circ \quad (۳)$$

$$1440^\circ \quad (۲)$$

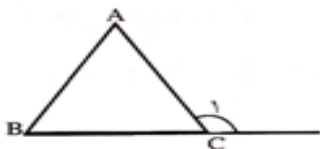
$$1800^\circ \quad (۱)$$

حل: گزینهی «۲»

$$(10 - 2) \times 180 = 8 \times 180 = 1440$$

نکته ۸۵: اندازهی هر زاویهی داخلی یک n ضلعی منتظم برابر است با: $\frac{(n - 2) \times 180}{n}$

نکته ۸۶: اندازهی زاویهی خارجی هر مثلث در هر رأس برابر است با مجموع دو زاویهی داخلی غیر مجاور به آن رأس.

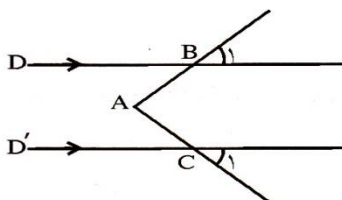


$$\hat{C}_1 = \hat{A} + \hat{B}$$

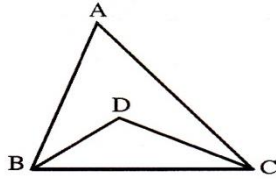
نکته ۸۷: هر n ضلعی n زاویهی خارجی دارد.

نکته ۸۸: مجموع زوایای خارجی هر n ضلعی 360° است.

نکته ۸۹: اگر در شکل زیر $\hat{A} = \hat{B}_1 + \hat{C}_1$ آن گاه $D \parallel D'$.

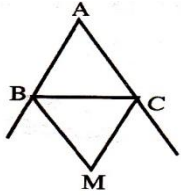


نکته ۹۰: در شکل زیر اگر BD و CD نیمساز زاویه‌های B و C باشند، آن‌گاه:

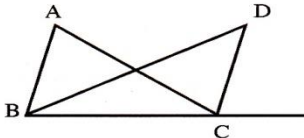


$$\hat{D} = 90 + \frac{\hat{A}}{2}$$

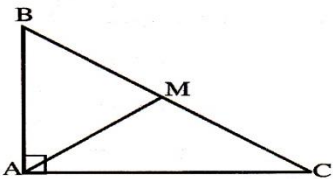
نکته ۹۱: اگر BM و CM نیمساز زاویه‌های خارجی مثلث باشند آن‌گاه: $\hat{M} = 90 - \frac{\hat{A}}{2}$



نکته ۹۲: در شکل زیر BD نیمساز $\hat{B}$ و CD نیمساز زاویه‌ی خارجی رأس C است. در این صورت $\hat{D} = \frac{\hat{A}}{2}$

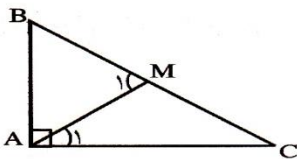


نکته ۹۳: در مثلث قائم‌الزاویه میانه‌ی نظیر وتر نصف وتر است.



$$AM = \frac{BC}{2}$$

مثال ۱۲۱: در شکل زیر AM میانه و $\hat{C} = 37^\circ$ است. اندازه‌ی $\hat{M}_1$ چقدر است؟



(۱) 64°

(۲) 53°

(۳) 72°

(۴) 74°

حل: گزینه‌ی «ع»

$$AM = \frac{BC}{2} \Rightarrow AM = MC \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{C} = 37^\circ$$

$$\hat{M}_1 = \hat{A}_1 + \hat{C} = 37 + 37 = 74^\circ$$

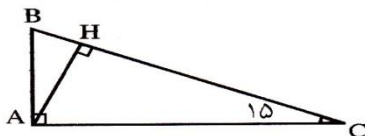
نکته ۹۴: اگر در یک مثلث میانه‌ی نظیر یک ضلع نصف آن ضلع نیز باشد مثلث قائم‌الزاویه است.

نکته ۹۵: اگر در یک مثلث قائم‌الزاویه یک زاویه 30° باشد، ضلع مقابل به آن زاویه نصف وتر است و بالعکس.

H C

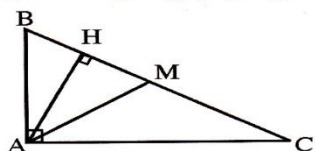
نکته ۹۶: اگر در مثلث قائم‌الزاویه‌ای یک زاویه 15° باشد در آن مثلث ارتفاع وارد بر وتر ربع وتر است و

بالعکس.



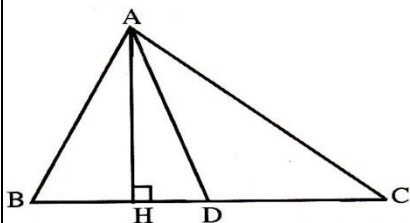
$$\hat{C} = 15^\circ \Rightarrow AH = \frac{1}{4} BC$$

نکته ۹۷: در هر مثلث قائم‌الزاویه زاویه بین میانه و ارتفاع وارد بر وتر مثلث با تفاضل دو زاویه حادهی مثلث برابر است.



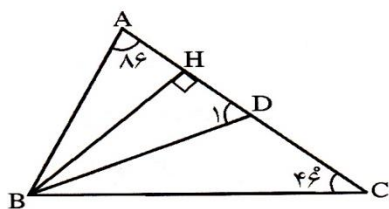
$$\widehat{MAH} = \widehat{B} - \widehat{C}$$

نکته ۹۸: در هر مثلث زاویه بین ارتفاع و نیمساز یک رأس برابر نصف تفاضل دو زاویه دیگر می‌باشد.



$$\widehat{HAD} = \frac{\widehat{B} - \widehat{C}}{2}$$

مثال ۱۲۷: در شکل زیر BD نیمساز $\widehat{B}$ و BH ارتفاع است اندازهی $\widehat{D_1}$ چقدر است؟



(۱) 15°

(۲) 20°

(۳) 25°

(۴) 40°

تل: گزینه‌ی «۲»

$$\widehat{HBD} = \frac{86 - 46}{2} = \frac{40}{2} = 20^\circ$$

نکته ۹۹: در هر n ضلعی تعداد قطرهای که از یک رأس می‌گذرد برابر است با: $n - 3$

نکته ۱۰۰: تعداد قطرهای هر n ضلعی برابر است با: $\frac{n(n-3)}{2}$

چهارضلعی‌ها



نکته ۱-۱: در یک چهارضلعی دو ضلع که در یک رأس مشترک باشند، دو ضلع مجاور نامیده می‌شوند.

نکته ۱-۲: در یک چهارضلعی دو ضلع که نقطه‌ی مشترکی نداشته باشند دو ضلع مقابل نامیده می‌شوند.

نکته ۱-۳: در یک چهارضلعی دو زاویه که در یک ضلع مشترک باشند دو زاویه‌ی مجاور نامیده می‌شوند.

نکته ۱-۴: در یک چهارضلعی دو زاویه که ضلع مشترکی نداشته باشند دو زاویه‌ی مقابل نامیده می‌شوند.

نکته ۱-۵: چهارضلعی که اضلاع آن دوجه‌دو موازی باشند متوازی‌الاضلاع نامیده می‌شوند.

نکته ۱-۶: در متوازی‌الاضلاع زاویه‌های مجاور مکمل‌اند.

نکته ۱-۷: در متوازی‌الاضلاع زاویه‌های مقابل برابرند.

نکته ۱-۸: در متوازی‌الاضلاع اضلاع مقابل برابرند.

نکته ۱-۹: در متوازی‌الاضلاع قطر‌ها منصف یک‌دیگرند.

نکته ۱۱-: هر چهارضلعی که زاویه‌های مجاور آن دوجه‌دو مکمل یک‌دیگر باشند متوازی‌الاضلاع است.

نکته ۱۱۱: هر چهارضلعی که زاویه‌های مقابل آن دوجه‌دو برابر باشند، متوازی‌الاضلاع است.

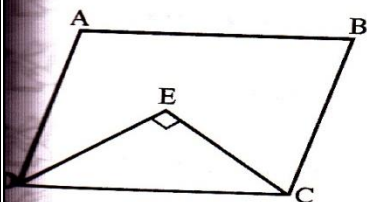
نکته ۱۱۲: هر چهارضلعی که اضلاع مقابل آن دوجه‌دو مساوی باشند، متوازی‌الاضلاع است.

نکته ۱۱۳: هر چهارضلعی که قطرهای آن منصف یک‌دیگر باشند متوازی‌الاضلاع است.

نکته ۱۱۴: چهارضلعی که دو ضلع مقابل آن موازی و مساوی باشند متوازی‌الاضلاع است.

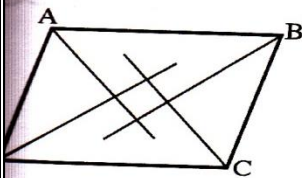
نکته ۱۱۵: در متوازی‌الاضلاع قطر‌ها نیمساز نیستند.

نکته ۱۱۶: در متوازی‌الاضلاع نیمسازهای دو زاویه‌ی مجاور بر هم عمودند.



نکته ۱۱۷: در متوازی‌الاضلاع نیمسازهای زاویه‌های مقابل با هم موازی‌اند.

نکته ۱۱۸: اگر از رئوس یک چهارضلعی خطوطی موازی قطرهای آن رسم کنیم از برخورد این خطوط متوازی‌الاضلاع پدید می‌آید.



نکته ۱۱۹: از برخورد نیمسازهای زاویه‌های یک متوازی‌الاضلاع مستطیل پدید می‌آید.

نکته ۱۲۰: اگر از هر رأس یک مثلث متساوی الاضلاع خطی موازی ضلع مقابل آن رسم کنیم از برخورد آن‌ها یک مثلث متساوی الاضلاع پدید می‌آید.

نکته ۱۲۱: اگر از هر رأس یک مثلث متساوی الساقین خطی موازی ضلع مقابل آن رسم کنیم از برخورد آن‌ها مثلثی متساوی الساقین پدید می‌آید.

نکته ۱۲۲: چهارضلعی که تمام زاویه‌های آن قائمه باشند مستطیل است.

نکته ۱۲۳: مستطیل نوعی متوازی الاضلاع است بنابراین تمام خواص آن را داراست.

نکته ۱۲۴: در مستطیل قطرهای با هم برابرند.

نکته ۱۲۵: متوازی الاضلعی که یک زاویه‌ی قائمه داشته باشد مستطیل است.

نکته ۱۲۶: متوازی الاضلعی که قطرهاش برابر باشند مستطیل است.

نکته ۱۲۷: اگر وسط‌های اضلاع یک متوازی الاضلاع را متوالیاً به هم وصل کنیم چهارضلعی حاصل متوازی الاضلاع است.

نکته ۱۲۸: در مستطیل قطرهای نیمساز زاویه‌ها نیستند.

نکته ۱۲۹: اگر قطرهای یک چهارضلعی برابر باشند لزوماً چهارضلعی مستطیل نیست.

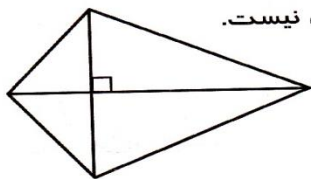
نکته ۱۳۰: چهارضلعی که چهار ضلع آن مساوی باشند لوزی نامیده می‌شود.

نکته ۱۳۱: لوزی نوعی متوازی الاضلاع است پس تمام خواص آن را داراست.

نکته ۱۳۲: در لوزی قطرهای بر هم عمودند.

نکته ۱۳۳: در لوزی قطرهای نیمساز زاویه‌ها نیز هستند.

نکته ۱۳۴: اگر قطرهای یک چهارضلعی بر هم عمود باشند لزوماً این چهارضلعی لوزی نیست.



نکته ۱۳۵: متوازی الاضلعی که قطرهاش بر هم عمود باشند لوزی است.

نکته ۱۳۶: متوازی الاضلعی که یکی از قطرهاش نیمساز دو زاویه‌ی مقابل آن باشد لوزی است.

نکته ۱۳۷: چهارضلعی که هر دو قطر آن نیمساز دو زاویه‌ی مقابل آن باشند لوزی است.

نکته ۱۳۸: چهارضلعی که تمام زاویه‌های آن قائمه و چهار ضلع آن مساوی باشند مربع نامیده می‌شود.

نکته ۱۳۹: مربع هم نوعی متوازی الاضلاع، هم نوعی مستطیل و هم نوعی لوزی است. پس تمام خواص آن‌ها را داراست.

نکته ۱۴۰: متوازی الاضلعی که دو ضلع مجاور آن مساوی باشند لوزی است.

نکته ۱۴۱: مستطیلی که قطرهاش نیمساز زاویه‌هایش نیز باشند مربع است.

نکته ۱۴۲: مستطیلی که دو ضلع مجاور آن مساوی باشند مربع است.

نکته ۱۴۳: مستطیلی که قطرهايش بر هم عمود باشند مربع است.

نکته ۱۴۴: لوزی که قطرهايش مساوی باشند مربع است.

نکته ۱۴۵: لوزی که یک زاویه‌ی قائمه داشته باشد مربع است.

نکته ۱۴۶: اگر وسط‌های اضلاع یک مستطیل را متوالیاً به هم وصل کنیم چهارضلعی حاصل لوزی است.

نکته ۱۴۷: از برخورد نیمساز زاویه‌های یک مستطیل مربع پدید می‌آید.

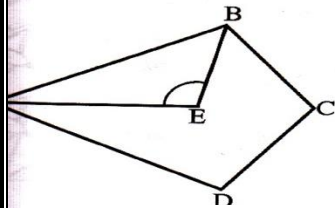
نکته ۱۴۸: اگر وسط‌های اضلاع یک لوزی را متوالیاً به هم وصل کنیم چهارضلعی حاصل مستطیل است.

نکته ۱۴۹: تنها مستطیلی که لوزی نیز می‌باشد مربع است.

نکته ۱۵۰: اگر هر قطر یک چهارضلعی عمود منصف قطر دیگر آن باشد آن چهارضلعی لوزی است.

نکته ۱۵۱: اگر وسط‌های اضلاع یک مربع را متوالیاً به هم وصل کنیم، چهارضلعی حاصل مربع است.

نکته ۱۵۲: در هر چهارضلعی زاویه‌ای که نیمسازهای دو زاویه‌ی مجاور با هم می‌سازند با نصف مجموع زاویه‌ی دیگر برابر است.



$$\widehat{E} = \frac{\widehat{C} + \widehat{D}}{2}$$

نکته ۱۵۳: چهارضلعی که دو ضلع آن موازی باشد، دوزنقه نامیده می‌شود.

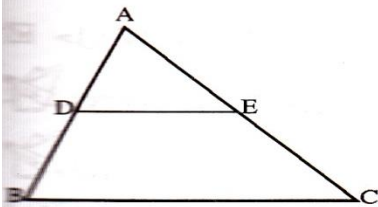
نکته ۱۵۴: در هر دوزنقه زاویه‌های مجاور به هر ساق مکمل یک‌دیگرند.

نکته ۱۵۵: در دوزنقه‌ی متساوی‌الساقین زاویه‌های مجاور به هر قاعده مساوی‌اند و بالعکس.

نکته ۱۵۶: در دوزنقه‌ی متساوی‌الساقین قطر‌ها با هم برابرند و بالعکس.

نکته ۱۵۷: در دوزنقه‌ی متساوی‌الساقین زاویه‌های مقابل مکمل یک‌دیگرند.

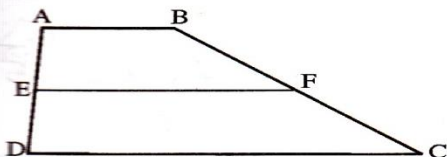
نکته ۱۵۸: پاره‌خطی که وسط‌های دو ضلع یک مثلث را به هم وصل می‌کند با ضلع سوم موازی و مساوی نصف آن است.



$$DE \parallel BC, \quad DE = \frac{BC}{2}$$

نکته ۱۵۹: اگر از وسط یک ضلع مثلث خطی موازی یک ضلع دیگر آن رسم کنیم خط از وسط ضلع سوم می‌گذرد.

نکته ۱۶۰: پاره‌خطی که وسط‌های دو ساق یک دوزنقه را به هم وصل می‌کند با قاعده‌های آن موازی و مساوی نصف مجموع دو قاعده است.



$$EF \parallel AB \parallel CD$$

$$EF = \frac{AB + CD}{2}$$

نکته ۱۶۱: خطی که از وسط یک ساق دوزنقه موازی قاعده‌های آن رسم شود از وسط ساق دیگر نیز می‌گذرد.

محیط و مساحت



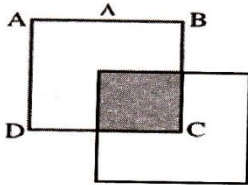
نکته ۱۷۲: مساحت مستطیل برابر است با طول ضربدر عرض.

نکته ۱۷۳: محیط مستطیل برابر است با مجموع طول و عرض ضربدر دو.

نکته ۱۷۴: مساحت مربع با مجذور ضلع آن مساوی است.

نکته ۱۷۵: محیط مربع برابر است با ضلع مربع ضربدر چهار.

مثال ۱۴۳: در شکل زیر دو مربع مساوی اند اگر مساحت مربع رنگی ۲۵ سانتی متر مربع باشد محیط کل



شکل چقدر است؟

۴۴ (۲)

۴۲ (۱)

۳۸ (۴)

۳۲ (۳)

ج: گزینه ی «۲»

$$۸ - ۵ = ۳$$

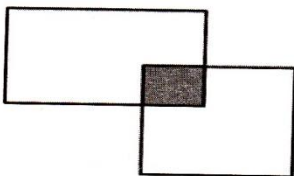
ع مربع رنگی ۵ سانتی متر است.

$$۴ \times ۸ + ۴ \times ۳ = ۳۲ + ۱۲ = ۴۴$$

نکته ۱۷۶: اگر ضلع مربعی را m برابر کنیم محیط آن m برابر و مساحت آن m^2 برابر می شود.

نکته ۱۷۷: اگر طول و عرض یک مستطیل را m برابر کنیم محیط آن m برابر و مساحت آن m^2 برابر می شود.

مثال ۱۴۴: در شکل زیر مساحت مربع رنگی $\frac{1}{12}$ مساحت مستطیل و $\frac{1}{10}$ مساحت مربع است. نسبت مساحت



ناحیه ی سفید مستطیل به ناحیه ی سفید مربع چقدر است؟

$\frac{6}{5}$ (۲)

$\frac{5}{6}$ (۱)

$\frac{11}{9}$ (۴)

$\frac{9}{11}$ (۳)

ج: گزینه ی «۴»

ر مساحت قسمت رنگی برابر x باشد مساحت مستطیل $۱۲x$ و مساحت قسمت سفید مستطیل $۱۱x$ می شود.

$$\frac{11x}{9x} = \frac{11}{9}$$

مچنین مساحت مربع $۱۰x$ و مساحت قسمت سفید مربع $۹x$ می شود.

۱۷۸: مساحت متوازی الاضلاع برابر است با ارتفاع ضربدر قاعده.

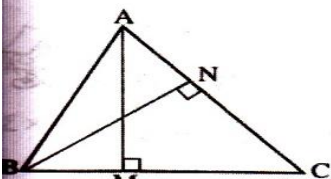
۱۷۹: محیط متوازی الاضلاع برابر است با مجموع دو ضلع مجاور ضربدر دو.

نکته ۱۷۰: هر قطر متوازی الاضلاع آن را به دو مثلث هم مساحت تقسیم می کند.

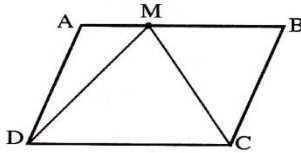
$$\text{مساحت مثلث} = \frac{\text{قاعده} \times \text{ارتفاع}}{۲}$$

نکته ۱۷۱:

نکته ۱۷۲: در شکل زیر $AM \times BC = BN \times AC$

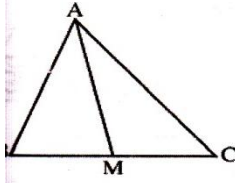


نکته ۱۷۳: اگر M نقطه‌ی دلخواهی روی ضلع AB از متوازی‌الاضلاع ABCD باشد آن‌گاه مساحت مثلث MCD نصف مساحت متوازی‌الاضلاع است.



$$S(MCD) = \frac{1}{2} S(ABCD)$$

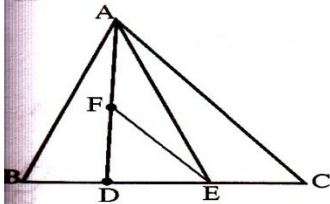
نکته ۱۷۴: میانه هر مثلث آن‌را به دو مثلث هم‌مساحت (معادل) تقسیم می‌کند.



$$S(AMB) = S(AMC)$$

نکته ۱۷۵: اگر یک ضلع مثلثی را به n قسمت مساوی تقسیم کرده و نقاط حاصل را به رأس مقابل به آن ضلع وصل کنیم مثلث اصلی به n مثلث هم‌مساحت تقسیم می‌شود.

مثال ۱۵۶: در شکل زیر F وسط AD و $BD = DE = EC$ است. مساحت مثلث ABC چند برابر مساحت مثلث AEF است؟



(۱) ۴ برابر

(۲) ۵ برابر

(۳) ۶ برابر

(۴) ۸ برابر

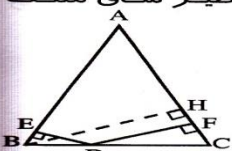
پاسخ: گزینه‌ی «۳»

$$S(AEF) = \frac{1}{2} S(ADE) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} S(ABC) = \frac{1}{6} S(ABC)$$

$$S(ABC) = 6 S(AEF)$$

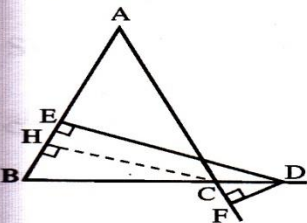
نکته ۱۷۶: قطرهای متوازی‌الاضلاع آن‌را به چهار ناحیه‌ی هم‌مساحت تقسیم می‌کنند.

نکته ۱۷۷: مجموع فواصل هر نقطه‌ی واقع بر قاعده‌ی یک مثلث متساوی‌الساقین با ارتفاع نظیر ساق مثلث برابر است.



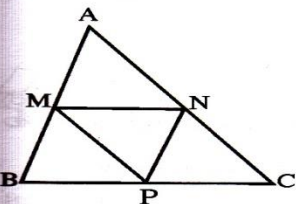
$$DE + DF = BH$$

نکته ۱۷۸: تفاضل فواصل هر نقطه‌ی واقع بر امتداد قاعده‌ی یک مثلث متساوی‌الساقین با ارتفاع نظیر ساق برابر است.



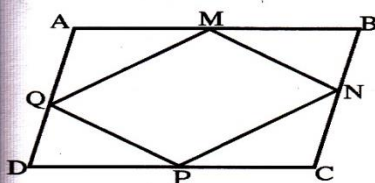
$$DE - DF = CH$$

نکته ۱۷۹: اگر وسط‌های اضلاع یک مثلث را به هم وصل کنیم مثلثی به‌دست می‌آید که مساحت آن ربع مساحت مثلث اصلی و محیط آن نصف محیط مثلث اصلی است.



نکته ۱۸۰: اگر دو مثلث ارتفاع‌های برابر داشته باشند نسبت مساحت‌های آن‌ها با نسبت قاعده‌هایشان مساوی است.

نکته ۱۸۱: اگر وسط‌های اضلاع یک متوازی‌الاضلاع را متوالیاً به هم وصل کنیم متوازی‌الاضلاعی پدید می‌آید که مساحت آن نصف مساحت متوازی‌الاضلاع اصلی است.

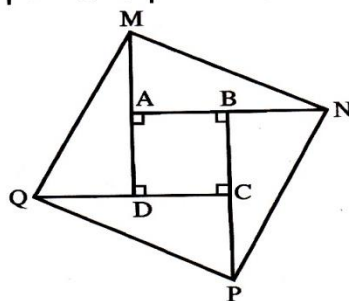


$$S(MNPQ) = \frac{1}{2} S(ABCD)$$

نکته ۱۸۲: اگر وسط‌های اضلاع یک مستطیل را به هم وصل کنیم لوزی پدید می‌آید که مساحت آن نصف مساحت مستطیل است.

نکته ۱۸۳: اگر وسط‌های اضلاع یک مربع را به هم وصل کنیم مربعی پدید می‌آید که مساحت آن نصف مساحت مربع اصلی است.

نکته ۱۸۴: اگر هر ضلع مربع را از یک طرف به اندازه‌ی خودش امتداد داده و نقاط حاصل را به هم وصل کنیم مربعی پدید می‌آید که مساحت آن ۵ برابر مساحت مربع اصلی است.



$$S(MNPQ) = 5 S(ABCD)$$

مثال ۱۶۱: اگر هر ضلع یک مربع را به اندازه‌ی دو برابر خودش امتداد داده و نقاط حاصل را به هم وصل کنیم مساحت چهارضلعی حاصل چند برابر مساحت مربع اصلی است؟

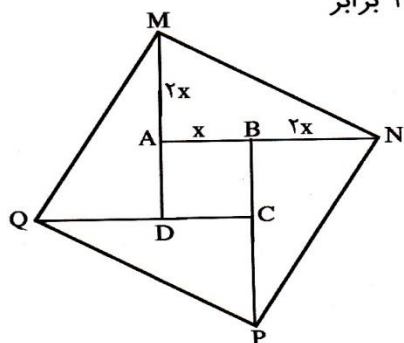
(۴) ۱۲ برابر

(۳) ۷ برابر

(۲) ۱۳ برابر

(۱) ۹ برابر

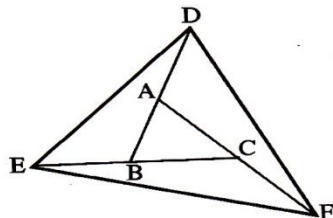
حل: گزینه‌ی «۲»



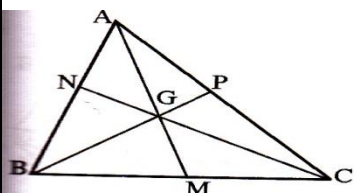
$$S(\triangle AMN) = \frac{2x \times 3x}{2} = 3x^2$$

$$S(MNPQ) = 4 \times 3x^2 + x^2 = 13x^2 = 13 S(ABCD)$$

نکته ۱۸۵: اگر هر ضلع یک مثلث را از یک طرف به اندازه‌ی خودش امتداد داده و نقاط حاصل را به هم وصل کنیم مساحت مثلث حاصل ۷ برابر مساحت مثلث اصلی است.

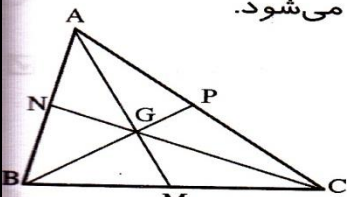


$$S(DEF) = 7 S(ABC)$$



نکته ۱۸۶: اگر G نقطه‌ی برخورد میانه‌های مثلث ABC باشد آن‌گاه

$$S(GAB) = S(GAC) = S(GBC)$$



نکته ۱۸۷: اگر میانه‌های یک مثلث را رسم کنیم مثلث به ۶ ناحیه‌ی هم‌مساحت تقسیم می‌شود.

$$S(GAP) = S(GNA) = S(GNB) = S(GBM) =$$

$$S(GMC) = S(GPC)$$

نکته ۱۸۸: مساحت لوزی برابر است با حاصلضرب دو قطر تقسیم بر دو.

نکته ۱۸۹: محیط لوزی با چهار برابر ضلع آن مساوی است.

نکته ۱۹۰: مساحت مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین که وتر آن برابر a باشد برابر است با $\frac{a^2}{\varepsilon}$.

مثال ۱۹۶: وتر یک مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین ۸ سانتی‌متر است. مساحت مثلث چقدر است؟

۲۴ (۴)

۱۶ (۳)

۳۲ (۲)

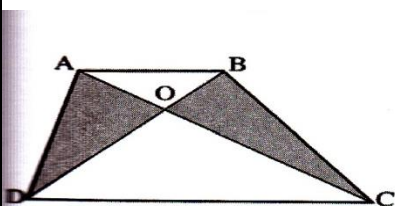
۶۴ (۱)

حل: گزینه‌ی «۳»

$$S = \frac{a^2}{\varepsilon} = \frac{64}{4} = 16$$

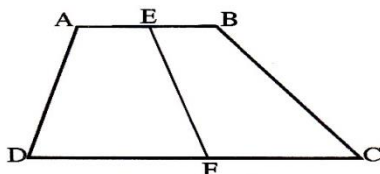
نکته ۱۹۱: مساحت هر چهارضلعی که قطرهایش بر هم عمود باشند برابر است با حاصلضرب دو قطر تقسیم بر دو.

نکته ۱۹۲: مساحت ذوزنقه برابر است با مجموع دو قاعده ضربدر ارتفاع تقسیم بر دو.



نکته ۱۹۳: در ذوزنقه‌ی زیر همواره $S(\triangle AOD) = S(\triangle BOC)$.

نکته ۱۹۴: در هر ذوزنقه پاره‌خطی که وسط‌های دو قاعده را به هم وصل می‌کند ذوزنقه را به دو ناحیه‌ی هم‌مساحت تقسیم می‌کند.



$$S(AEFD) = S(EBCF)$$

نکته ۱۹۵: مساحت دایره برابر است با مجذور شعاع ضربدر عدد پی.

$$S = \pi R^2$$

نکته ۱۹۶: محیط دایره برابر است با قطر ضربدر عدد پی.

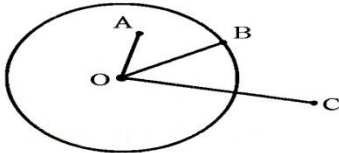
نکته ۱۹۷: اگر شعاع دایره‌ای را m برابر کنیم محیط آن m برابر و مساحت آن m^2 برابر می‌شود.

دایره



نکته ۱۹۸: نقطه و دایره نسبت به هم سه حالت دارند.

- ۱- نقطه داخل دایره است که در این صورت فاصله‌ی نقطه تا مرکز دایره از شعاع کوچک‌تر است.
- ۲- نقطه روی دایره است که در این صورت فاصله‌ی نقطه تا مرکز دایره با شعاع مساوی است.
- ۳- نقطه خارج دایره است که در این صورت فاصله‌ی نقطه تا مرکز دایره از شعاع بزرگ‌تر است.



$$OA < R$$

$$OB = R$$

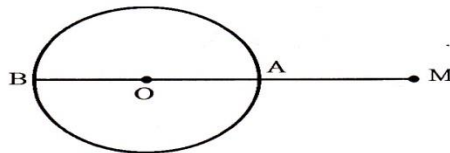
$$OC > R$$

مثال ۱۸۲: فاصله‌ی نقطه‌ای تا مرکز دایره ۱۰ سانتی‌متر و شعاع دایره ۷ سانتی‌متر است. نقطه و دایره نسبت

به هم چگونه‌اند؟

- (۱) نقطه داخل دایره است.
- (۲) نقطه روی دایره است.
- (۳) نقطه خارج دایره است.
- (۴) نمی‌توان گفت.

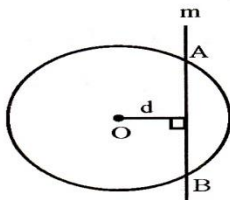
حل: گزینه‌ی «۳»



نکته ۱۹۹: اگر از نقطه‌ی M واقع در خارج دایره به مرکز دایره وصل کرده و امتداد می‌دهیم نزدیک‌ترین نقطه‌ی دایره تا M نقطه‌ی A و دورترین نقطه‌ی دایره تا M نقطه‌ی B است.

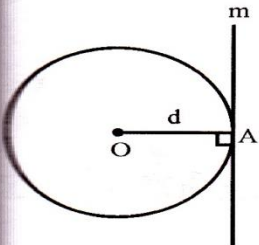
نکته ۲۰۰: خط و دایره نسبت به هم سه حالت دارند:

- ۱- خط دایره را در دو نقطه قطع می‌کند. که در این صورت فاصله‌ی خط تا مرکز دایره از شعاع کوچک‌تر است.



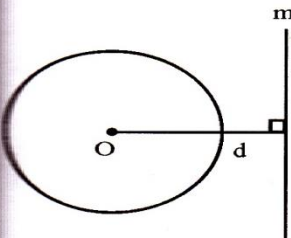
$$d < R$$

- ۲- خط بر دایره مماس است که در این صورت فاصله‌ی خط تا مرکز دایره با شعاع مساوی است.

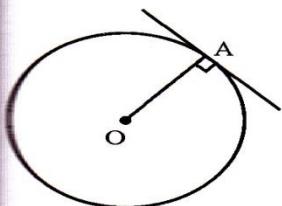


$$d = R$$

- ۳- خط و دایره هیچ نقطه‌ی مشترکی ندارند که در این صورت فاصله‌ی خط تا مرکز دایره از شعاع بزرگ‌تر است.



$$d > R$$



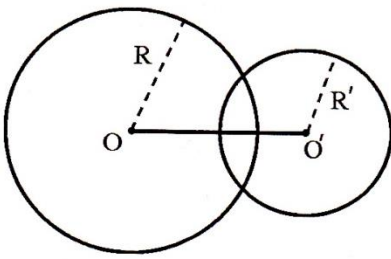
نکته ۲۰۱: خط مماس در نقطه‌ی تماس بر شعاع دایره عمود است.

نکته ۲۰۲: در هر نقطه‌ی واقع بر یک دایره فقط یک مماس می‌توان بر دایره رسم کرد.

نکته ۳-۲: دو دایره نسبت به هم سه حالت دارند:

۱- دو دایره دو نقطه‌ی مشترک دارند (مقاطع‌اند).

در این حالت طول خط‌المرکزین از جمع دو شعاع کوچک‌تر و از تفاضل دو شعاع بزرگ‌تر است.

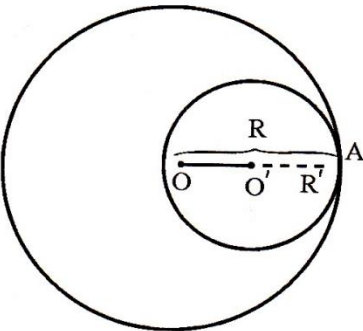


$$OO' = d$$

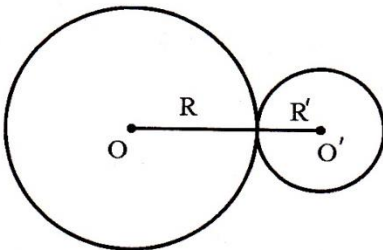
$$R - R' < d < R + R'$$

۲- دو دایره یک نقطه‌ی مشترک دارند (مماسند)

الف) مماس داخلی (در این حالت طول خط‌المرکزین با تفاضل دو شعاع مساوی است).



$$d = R - R'$$

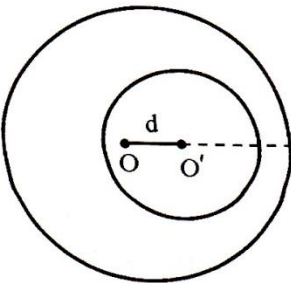


ب) مماس خارجی (در این حالت طول خط‌المرکزین با جمع دو شعاع برابر است).

$$d = R + R'$$

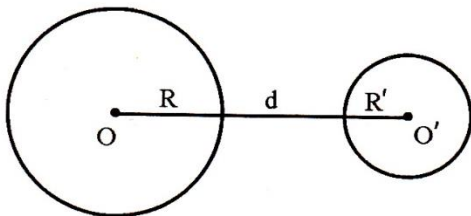
۳- دو دایره هیچ نقطه‌ی مشترکی ندارند.

الف) متداخل (در این صورت طول خط‌المرکزین از تفاضل دو شعاع کوچک‌تر است).



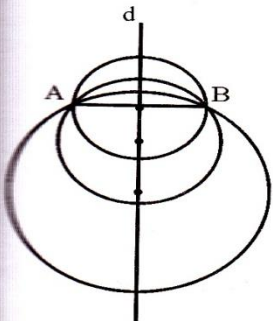
$$d < R - R'$$

ب) متخارج (در این صورت طول خط‌المرکزین از جمع دو شعاع بزرگ‌تر است).

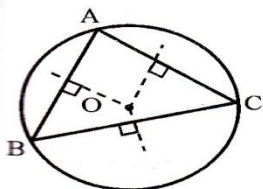


$$d > R + R'$$

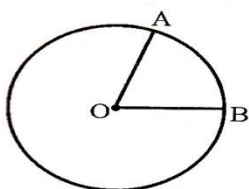
نکته ۲-۴: دو دایره‌ی متقاطع دو مماس مشترک، دو دایره‌ی مماس داخل یک مماس مشترک، دو دایره‌ی مماس خارج سه مماس مشترک، دو دایره متخارج چهار مماس مشترک دارند و دو دایره‌ی متداخل مماس مشترک ندارند.



نکته ۲-۵: از دو نقطه‌ی A و B تعداد بی‌شماری دایره می‌گذرد که مکان مراکز این دایره‌ها روی عمودمنصف AB قرار می‌گیرند.

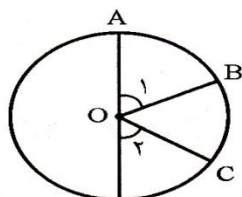


نکته ۲-۶: از سه نقطه‌ی غیرواقع بر یک خط راست فقط یک دایره می‌گذرد که مرکز این دایره نقطه‌ی برخورد عمودمنصف‌های پاره‌خط‌هایی است که سه نقطه را دوبه‌دو به هم وصل می‌کنند.



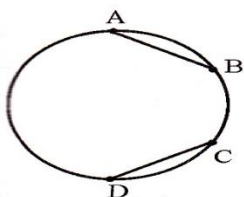
نکته ۲-۷: زاویه‌ای که رأس آن مرکز دایره باشد زاویه‌ی مرکزی نامیده می‌شود زاویه‌ی مرکزی با کمان مقابلش مساوی است.

$$\widehat{O} = \widehat{AB}$$



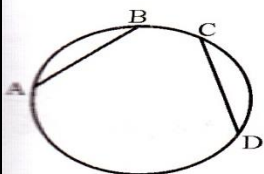
نکته ۲-۸: اگر دو زاویه‌ی مرکزی مساوی باشند کمان‌های نظیرشان نیز مساوی است و بالعکس.

$$\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2 \Leftrightarrow \widehat{AB} = \widehat{CD}$$



نکته ۲-۹: اگر دو کمان از یک دایره مساوی باشند وترهای نظیرشان نیز مساوی است.

$$\widehat{AB} = \widehat{CD} \Rightarrow AB = CD$$

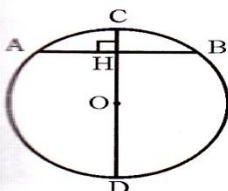


نکته ۲-۱۰: اگر دو وتر از یک دایره مساوی باشند کمان‌های نظیرشان نیز مساوی است.

$$AB = CD \Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{CD}$$

نکته ۲-۱۱: بزرگ‌ترین وتر هر دایره قطر آن است.

نکته ۲-۱۲: اگر قطری از یک دایره بر وتری از آن عمود شود آن وتر و کمان‌های نظیرش را نصف می‌کند.



$$AH = HB$$

$$\widehat{AC} = \widehat{BC}$$

$$\widehat{AD} = \widehat{BD}$$

نکته ۲-۱۳: اگر قطری از یک دایره وتری از آن دایره را نصف می‌کند بر آن وتر عمود می‌شود.

نکته ۲۱۴: شعاعی از دایره که به وسط یک کمان وصل شود بر وتر نظیر آن کمان عمود می‌شود و آن را نصف می‌کند.

نکته ۲۱۵: دو وتر مساوی از مرکز دایره به یک فاصله‌اند و بالعکس.

نکته ۲۱۶: اگر دو وتر مساوی نباشند آن که بزرگ‌تر است به مرکز نزدیک‌تر است و بالعکس.

نکته ۲۱۷: زاویه‌ای که رأس آن روی دایره و اضلاع آن وترهایی از دایره باشند زاویه‌ی محاطی نامیده می‌شود. زاویه‌ی محاطی با نصف کمان مقابلش برابر است.

$$\widehat{A} = \frac{\widehat{BC}}{2}$$

نکته ۲۱۸: زاویه‌ی محاطی روبه‌روی قطر همواره قائمه است.

$$\widehat{M} = \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

نکته ۲۱۹: اگر دو زاویه‌ی محاطی مساوی باشند کمان‌های مقابلشان نیز مساوی است و بالعکس.

$$\widehat{A} = \widehat{B} \Leftrightarrow \widehat{CD} = \widehat{EF}$$

نکته ۲۲۰: کمان‌های محصور بین دو وتر موازی در یک دایره با هم برابرند.

$$AB \parallel CD \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD}$$

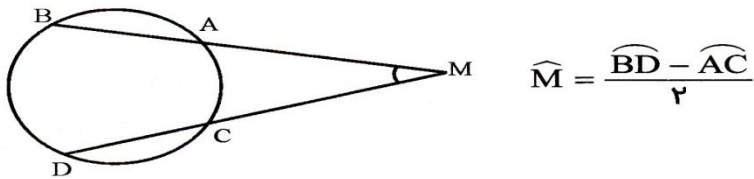
نکته ۲۲۱: زاویه‌ی ظلی زاویه‌ای است که رأس آن روی دایره بوده و یک ضلع آن وتر دایره و ضلع دیگرش بر دایره مماس باشد. زاویه‌ی ظلی با نصف کمان مقابلش مساوی است.

$$\widehat{A} = \frac{\widehat{AB}}{2}$$

نکته ۲۲۲: زاویه‌ای که از برخورد دو وتر در داخل دایره پدید می‌آید زاویه‌ی داخلی نامیده می‌شود.

$$\widehat{M}_1 = \frac{\widehat{AD} + \widehat{BC}}{2}$$

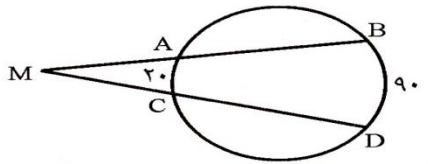
نکته ۲۲۳: زاویه‌ای که از برخورد امتدادهای دو وتر در خارج دایره پدید می‌آید زاویه‌ی خارجی نامیده می‌شود.



مثال ۲۱۰: در شکل زیر اندازه‌ی $\widehat{M}$ چقدر است؟

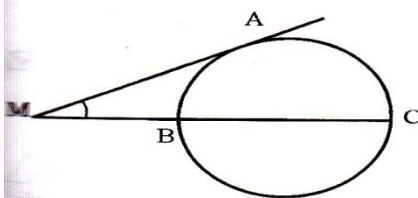
- (۱) 70°
- (۲) 35°
- (۳) 50°
- (۴) 60°

ل: گزینه‌ی «۲»



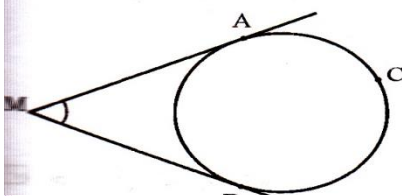
$$\widehat{M} = \frac{90^\circ - 20^\circ}{2} = \frac{70^\circ}{2} = 35^\circ$$

نکته ۲۲۴:



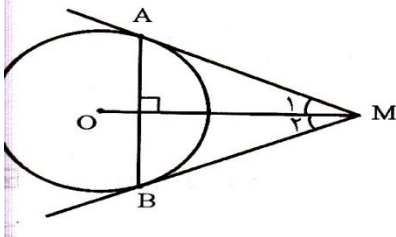
$$\widehat{M} = \frac{\widehat{AC} - \widehat{AB}}{2}$$

نکته ۲۲۵:



$$\widehat{M} = \frac{\widehat{ACB} - \widehat{AB}}{2}$$

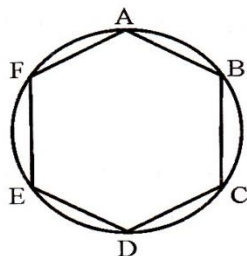
$$\widehat{M} = 180^\circ - \widehat{AB}$$



نکته ۲۲۶: در شکل روبه‌رو از نقطه‌ی M دو مماس بر دایره رسم شده است. اولاً طول دو مماس با هم برابرند.

$$MA = MB$$

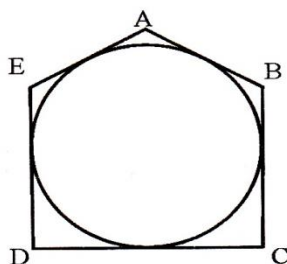
ثانیاً: OM نیمساز $\widehat{M}$ می‌باشد. ($\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$)



نکته ۲۲۷: اگر دایره‌ای از تمام رئوس یک

n ضلعی بگذرد دایره را دایره‌ی محیطی و n ضلعی را محاطی می‌نامند.

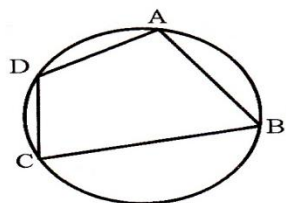
مرکز دایره‌ی محیطی هر n ضلعی محل برخورد عمودمنصف‌های اضلاع آن است.



نکته ۲۲۸: اگر دایره‌ای داخل یک n ضلعی قرار گیرد و بر همه‌ی

اضلاع آن مماس شود، دایره را دایره‌ی محاطی و n ضلعی را محیطی می‌نامند. مرکز دایره‌ی محاطی هر n ضلعی محل برخورد

نیمسازهای زاویه‌های n ضلعی می‌باشد.



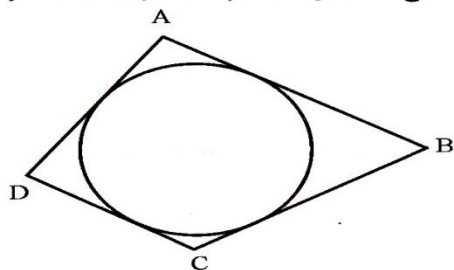
نکته ۲۲۹: در هر چهارضلعی محاطی زاویه‌های مقابل مکمل یکدیگرند و بالعکس.

$$\widehat{A} + \widehat{C} = 180^\circ$$

$$\widehat{B} + \widehat{D} = 180^\circ$$

نکته ۲۳۰: مربع، مستطیل و دوزنقه متساوی‌الساقین در یک دایره محاط می‌شوند اما متوازی‌الاضلاع و لوزی چهارضلعی محاطی نیستند.

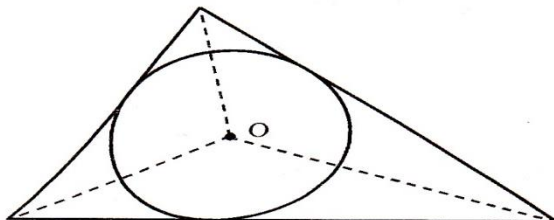
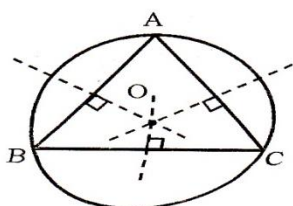
نکته ۲۳۱: در هر چهارضلعی محیطی مجموع دو ضلع مقابل با مجموع دو ضلع مقابل دیگر مساوی است و بالعکس.



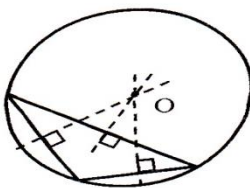
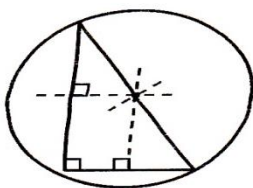
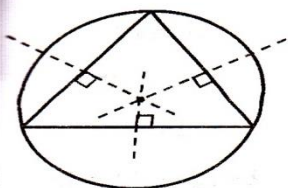
$$AB + CD = AD + BC$$

نکته ۲۳۲: مربع و لوزی را می‌توان بر یک دایره محیط کرد اما متوازی‌الاضلاع، مستطیل و دوزنقه چهارضلعی محیطی نیستند.

۲۳۳: برای هر مثلثی هم می‌توان دایره‌ی محیطی رسم کرد و هم دایره‌ی محاطی، مرکز دایره محیطی برخورد عمود منصف‌های اضلاع و مرکز دایره‌ی محاطی محل تلاقی نیمساز زاویه‌های مثلث می‌باشد. دایره محیطی را با R و شعاع دایره‌ی محاطی را با r نشان می‌دهیم.



نکته ۲۳۴: اگر هر سه زاویه‌ی مثلث حاده باشند مرکز دایره‌ی محیطی مثلث درون مثلث و اگر مثلث قائم‌الزاویه باشد مرکز دایره‌ی محیطی وسط وتر، و اگر یکی از زاویه‌های مثلث منفرجه باشد مرکز دایره‌ی محیطی خارج مثلث قرار می‌گیرد.



نکته ۲۳۵: دایره‌ی محیطی و محاطی هر مثلث متساوی‌الاضلاع هم‌مرکزند و شعاع دایره‌ی محیطی دو برابر شعاع دایره‌ی محاطی است.

نکته ۲۳۶: شعاع دایره‌ی محیطی مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a برابر است با $\frac{\sqrt{3}}{3}a$.

نکته ۲۳۷: شعاع دایره‌ی محاطی مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a برابر است با $\frac{\sqrt{3}}{6}a$.

مثال ۲۳۸: ضلع مثلث متساوی‌الاضلاعی ۱۲ سانتی‌متر است. مجموع شعاع‌های دایره‌ی محیطی و محاطی آن

چقدر است؟

(۴) $8\sqrt{3}$

(۳) $6\sqrt{3}$

(۲) $4\sqrt{3}$

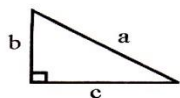
(۱) $2\sqrt{3}$

حل: گزینه‌ی «۳»

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{3} \times 12\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{6} \times 12\right) = 4\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$$

نکته ۲۳۸: شعاع دایره‌ی محیطی مثلث قائم‌الزاویه نصف وتر است.

نکته ۲۳۹: شعاع دایره‌ی محاطی مثلث قائم‌الزاویه که وتر آن a و ضلع‌های زاویه‌ی قائمه‌ی آن b و c باشد از فرمول‌های زیر به دست می‌آید:



$$r = \frac{b \cdot c}{a + b + c}$$

$$r = \frac{b + c - a}{2}$$

نکته ۲۴۰: اگر a و b و c اندازه‌ی اضلاع یک مثلث و p نصف محیط آن باشد مساحت مثلث از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \text{«رابطه‌ی هرون»}$$

مثال ۲۳۵: اگر اضلاع مثلثی ۵، ۱۲ و ۱۳ سانتی‌متر باشند مساحت مثلث چقدر است؟

(۴) ۷۸

(۳) ۵۰

(۲) ۳۰

(۱) ۶۰

ل: گزینه‌ی «۲»

$$p = \frac{5 + 12 + 13}{2} = \frac{30}{2} = 15$$

$$S = \sqrt{15(15-13)(15-12)(15-5)} = \sqrt{15 \times 2 \times 3 \times 10} = \sqrt{30 \times 30} = 30$$

نکته ۲۴۱: شعاع دایره‌ی محاطی هر مثلث از فرمول زیر به دست می‌آید که در آن S مساحت مثلث و p نصف محیط آن است.

$$r = \frac{S}{p}$$

نکته ۲۴۲: اگر a و b و c اندازه‌ی اضلاع یک مثلث و S مساحت آن باشد آن‌گاه شعاع دایره‌ی محیطی مثلث برابر است با:

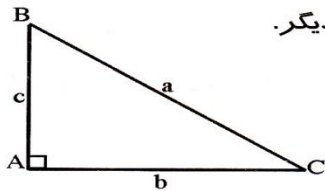
$$R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4S}$$

نکته ۲۴۳: شعاع دایره‌ی محیطی یک شش‌ضلعی منتظم به ضلع a برابر a و شعاع دایره‌ی محاطی آن برابر $\frac{\sqrt{3}}{2} a$ می‌باشد.

نکته ۲۴۴: شعاع دایره‌ی محاطی و محیطی مربعی به ضلع a برابر است با:

$$r = \frac{a}{2} \quad R = \frac{\sqrt{2}}{2} a$$

رابطه‌ی فیثاغورس



نکته ۲۴۵: در هر مثلث قائم‌الزاویه مربع وتر برابر است با مجموع مربعات دو ضلع دیگر.

$$BC^2 = AC^2 + AB^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

نکته ۲۴۶: اگر در یک مثلث مربع یک ضلع برابر مجموع مربعات دو ضلع دیگر باشند آن مثلث قائم‌الزاویه است.

نکته ۲۴۷: هر سه عدد طبیعی که بتوانند اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه باشند اعداد فیثاغورسی نامیده می‌شوند.

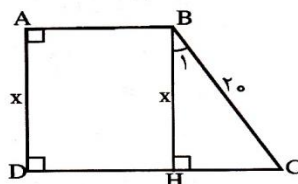
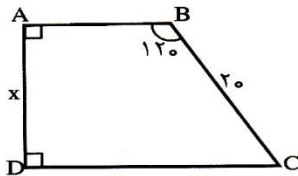
مثال ۲۴۹: کدام دسته از اعداد زیر فیثاغورسی نیستند؟

(۱) ۶ و ۸ و ۱۰ (۲) ۱۵ و ۲۰ و ۲۵ (۳) ۱۵ و ۳۶ و ۳۹ (۴) ۱۲ و ۱۶ و ۲۲

ج: گزینه‌ی «ع»

نکته ۲۴۸: اگر سه عدد a ، b و c فیثاغورسی باشند آن‌گاه اعداد ka ، kb و kc نیز فیثاغورسی‌اند. ($k \in \mathbb{Z}$).

نکته ۲۴۹: در هر مثلث قائم‌الزاویه ضلع مقابل به زاویه‌ی 30° نصف وتر است.



مثال ۲۵۱: در شکل زیر مقدار x چقدر است؟

(۱) ۱۲
(۲) $12\sqrt{3}$
(۳) ۹
(۴) $10\sqrt{3}$

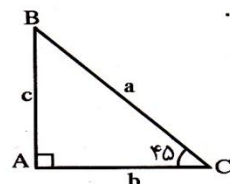
ج: گزینه‌ی «ع»

$$\widehat{B}_1 = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ \Rightarrow CH = \frac{BC}{2} = 10$$

$$x = \sqrt{20^2 - 10^2} = \sqrt{400 - 100} = \sqrt{300} = 10\sqrt{3}$$

نکته ۲۵۰: ضلع مقابل به زاویه‌ی 45° در مثلث قائم‌الزاویه برابر $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ضربدر وتر می‌باشد.

$$\widehat{C} = 45^\circ \Rightarrow c = \frac{\sqrt{2}}{2} a$$



نکته ۲۵۱: ضلع مقابل به زاویه‌ی 60° در مثلث قائم‌الزاویه برابر $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ضربدر وتر می‌باشد.

نکته ۲۵۲: قطر مربعی به ضلع a برابر است با $a\sqrt{2}$.

نکته ۲۵۳: قطر مکعبی به ضلع a برابر است با $a\sqrt{3}$.

نکته ۲۵۴: قطر مستطیلی به ابعاد a و b برابر است با: $\sqrt{a^2 + b^2}$.

نکته ۲۵۵: قطر مکعب مستطیلی به ابعاد a ، b و c برابر است با: $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

مثال ۲۵۹: طول و عرض و ارتفاع مکعب مستطیلی ۶، ۳ و ۲ سانتی متر می باشند قطر مکعب مستطیل چقدر است؟

- (۱) $\sqrt{7}$ (۲) ۷ (۳) $\sqrt{11}$ (۴) ۸

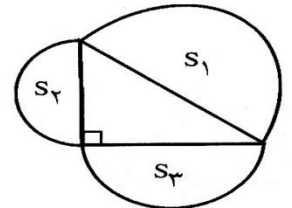
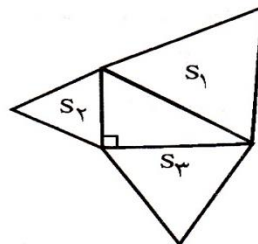
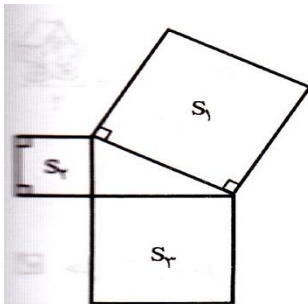
حل: گزینه ی «۲»

$$\sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{36 + 9 + 4} = \sqrt{49} = 7$$

نکته ۲۵۶: ارتفاع مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a برابر است با: $\frac{\sqrt{3}}{2}a$.

نکته ۲۵۷: مساحت مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a برابر است با: $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$.

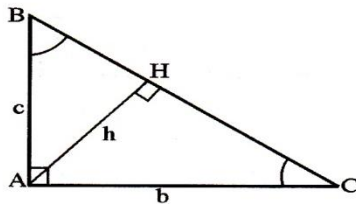
نکته ۲۵۸: مساحت یک شش ضلعی منتظم به ضلع a برابر با $\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$.



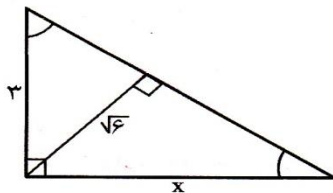
نکته ۲۵۹: در شکل های زیر $S_1 = S_2 + S_3$

نکته ۲۶۰: به طور کلی اگر روی وتر و همچنین روی اضلاع قائمه زاویه قائمه از یک مثلث قائم الزاویه شکل های متشابه رسم کنیم مساحت شکلی که روی وتر ساخته می شود برابر مجموع مساحت های دو شکل دیگر خواهد بود.

نکته ۲۶۱: اگر b و c اضلاع زاویه قائمه در یک مثلث قائم الزاویه و h ارتفاع وارد بر وتر آن باشد، آن گاه:



$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$



مثال ۲۷۲: در شکل زیر مقدار x چقدر است؟

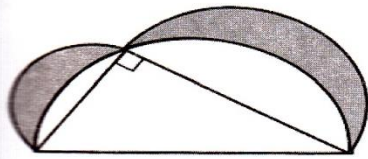
- (۱) ۴
(۲) $2\sqrt{3}$
(۳) $3\sqrt{2}$
(۴) ۵

حل: گزینه ی «۳»

$$\frac{1}{(\sqrt{6})^2} = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{x^2} \Rightarrow \frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{1}{x^2} \Rightarrow \frac{1}{18} = \frac{1}{x^2} \Rightarrow x^2 = 18 \Rightarrow x = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

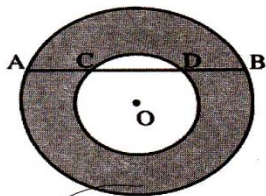
نکته ۲۷۳: اگر p نصف محیط یک مثلث قائم الزاویه و a وتر آن باشد آن گاه مساحت مثلث از رابطه ی $S = p(p - a)$ به دست می آید.

نکته ۴۳: در شکل زیر مساحت ناحیه‌ی رنگی (هلالین بقراط) که از رسم نیم‌دایره‌هایی به قطر اضلاع مثلث پدید آمده برابر مساحت مثلث قائم‌الزاویه است.



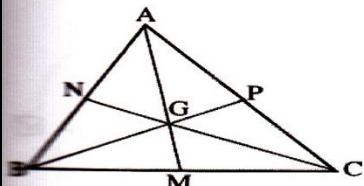
نکته ۴۴: در دو دایره هم‌مرکز اگر وتری به طول a از دایره‌ی بزرگ بر دایره‌ی کوچک مماس شود مساحت ناحیه‌ی بین دو دایره برابر است با: $\frac{\pi}{8} \times a^2$

نکته ۴۵: در شکل زیر وتر AB به طول m دایره کوچک را قطع کرده است. اگر $CD = n$ باشد آن‌گاه مساحت ناحیه‌ی رنگی برابر است با:



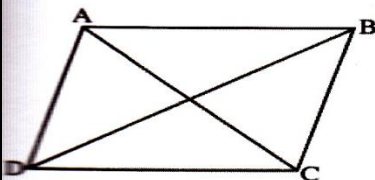
$$\frac{\pi}{8} (m^2 - n^2)$$

نکته ۴۶: نقطه‌ی برخورد میانه‌های هر مثلث (مرکز ثقل) هر میانه را به نسبت ۲ به ۱ تقسیم می‌کند.



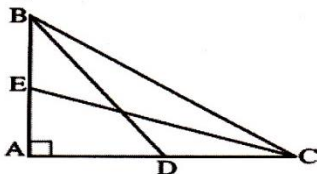
$$\frac{AG}{GM} = \frac{BG}{GP} = \frac{CG}{GN} = \frac{2}{1}$$

نکته ۴۷: در هر متوازی‌الاضلاع مجموع مربعات قطرهای با مجموع مربعات اضلاع برابر است.



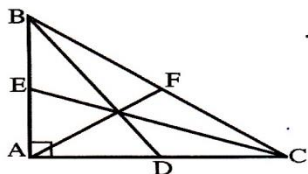
$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2$$

نکته ۴۸: در هر مثلث قائم‌الزاویه مجموع مربعات اندازه‌ی میانه‌های نظیر اضلاع قائمه برابر $\frac{\Delta}{\epsilon}$ مجذور وتر است.



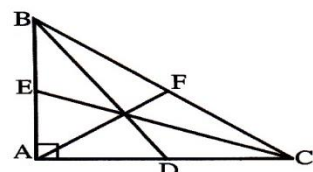
$$BD^2 + CE^2 = \frac{\Delta}{\epsilon} BC^2$$

نکته ۴۹: مجموع مربعات سه میانه‌ی هر مثلث قائم‌الزاویه برابر $\frac{3}{4}$ مجذور وتر است.



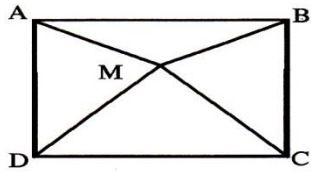
$$BD^2 + CE^2 + AF^2 = \frac{3}{4} BC^2$$

نکته ۵۰: رابطه‌ی بین سه میانه‌ی اضلاع مثلث قائم‌الزاویه به صورت زیر است:



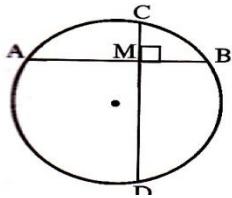
$$BD^2 + CE^2 = 5 AF^2$$

نکته ۲۷۱: چهارضلعی ABCD مستطیل و M نقطه‌ی دلخواهی داخل آن می‌باشد در این صورت:



$$MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$$

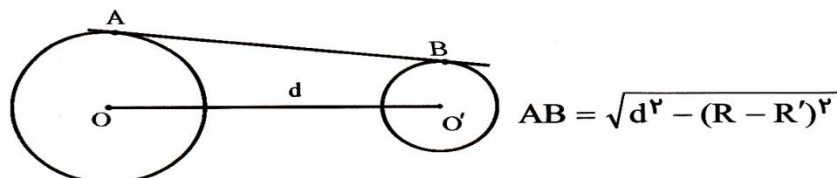
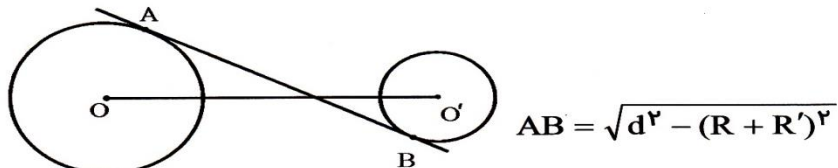
نکته ۲۷۲: در شکل زیر دو وتر AB و CD بر هم عمودند، در این صورت:



$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 4R^2$$

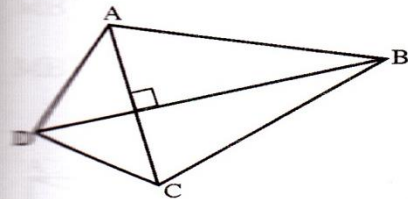
نکته ۲۷۳: اگر دو دایره به شعاع‌های R و R' مماس خارجی باشند طول مماس مشترک دو دایره برابر است با $2\sqrt{R \cdot R'}$.

نکته ۲۷۴: اگر دو دایره متخارج و طول خط‌المرکزین آن‌ها d باشد در این صورت اندازه‌ی مماس مشترک داخلی دو دایره برابر است با:



نکته ۲۷۵:

نکته ۲۷۶: اگر در یک چهارضلعی قطرهای بر هم عمود باشند مجموع مربعات دو ضلع مقابل با مجموع مربعات دو ضلع مقابل دیگر مساوی است.



$$AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$$

نکته ۲۷۷: اگر زاویه‌ی بین قطرهای یک چهارضلعی 30° باشد مساحت آن برابر است با:

حاصل ضرب دو قطر $\times \frac{1}{4}$

نکته ۲۷۸: اگر زاویه‌ی بین قطرهای یک چهارضلعی 45° باشد مساحت آن برابر است با:

حاصل ضرب دو قطر $\times \frac{\sqrt{2}}{4}$

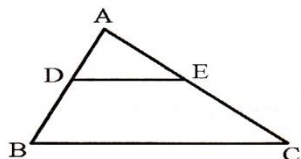
نکته ۲۷۹: اگر زاویه‌ی بین قطرهای یک چهارضلعی 60° باشد مساحت آن برابر است با:

حاصل ضرب دو قطر $\times \frac{\sqrt{3}}{4}$

نکته ۲۸۰: اگر قطرهای یک چهارضلعی بر هم عمود باشند مساحت آن برابر نصف حاصل ضرب دو قطر می‌باشد.

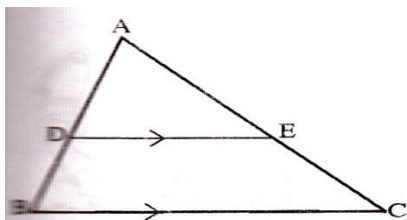
رابطه‌ی تالس - تشابه

نکته ۲۸۱: اگر چند خط موازی روی یک خط پاره‌خط‌های مساوی بسازند روی هر خط دیگری که آن‌ها را قطع کند نیز پاره‌خط‌های مساوی می‌سازند.

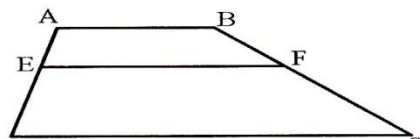


نکته ۲۸۲: در شکل زیر اگر $DE \parallel BC$ باشد آن‌گاه:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}, \quad \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}, \quad \frac{BD}{AB} = \frac{CE}{AC}$$

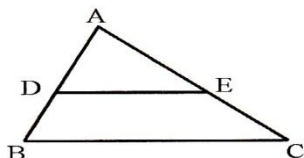


نکته ۲۸۳: در شکل زیر $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \neq \frac{DE}{BC}$

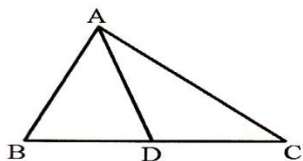


نکته ۲۸۴: در ذوزنقه‌ی ABCD اگر $EF \parallel AB \parallel CD$ باشد، آن‌گاه:

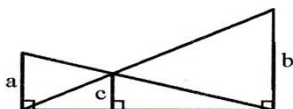
$$\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}, \quad \frac{AE}{AD} = \frac{BF}{BC}$$



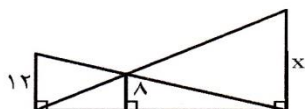
نکته ۲۸۵: در شکل زیر اگر $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ یا $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ آن‌گاه $DE \parallel BC$.



نکته ۲۸۶: اگر AD نیمساز $\hat{A}$ باشند آن‌گاه: $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$



نکته ۲۸۷: در شکل زیر رابطه‌ی $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$ برقرار است.



مثال ۳۲۲: در شکل زیر مقدار x چقدر است؟

۱۸ (۲)

۱۶ (۱)

۲۶ (۴)

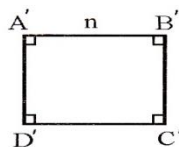
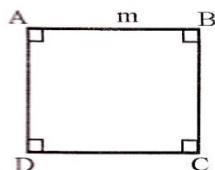
۲۴ (۳)

حل: گزینه‌ی «۳»

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{x} = \frac{1}{18} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{18} - \frac{1}{12} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{24} \Rightarrow x = 24$$

نکته ۲۸۸: دو n ضلعی را متشابه گویند در صورتی که زاویه‌هایشان دوه‌دو مساوی و اضلاعشان متناسب باشند.

نکته ۲۸۹: دو مربع همواره متشابهند زیرا زاویه‌هایشان دوه‌دو مساوی و اضلاعشان متناسبند.



$$\begin{aligned} \widehat{A} &= \widehat{A'} & \widehat{B} &= \widehat{B'} & \widehat{C} &= \widehat{C'} & \widehat{D} &= \widehat{D'} \\ \frac{AB}{A'B'} &= \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{AD}{A'D'} = \frac{m}{n} \end{aligned}$$

نکته ۲۹۰: دو n ضلعی منتظم همواره متشابهند.

نکته ۲۹۱: دو مستطیل متشابه نیستند زیرا ممکن است اضلاعشان متناسب نباشند.

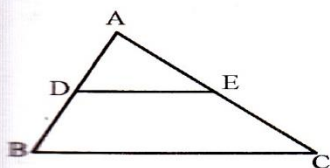
نکته ۲۹۲: دو لوزی متشابه نیستند زیرا ممکن است زاویه‌هایشان دوه‌دو مساوی نباشد.

نکته ۲۹۳: دو لوزی که یک زاویه‌ی برابر داشته باشند متشابهند.

نکته ۲۹۴: در دو n ضلعی متشابه نسبت قطرهای متناظر با نسبت اضلاع مساوی است.

نکته ۲۹۵: در دو n ضلعی متشابه نسبت محیط‌ها با نسبت تشابه و نسبت مساحت‌ها با مجذور نسبت تشابه برابر است.

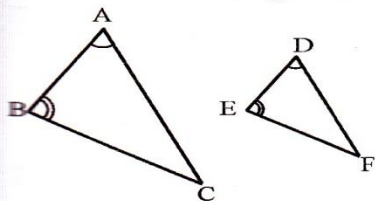
نکته ۲۹۶: اگر خطی به موازات یک ضلع مثلثی رسم شود و دو ضلع دیگر آن را قطع کند با آن دو ضلع مثلثی می‌سازد که با مثلث اصلی متشابه است.



$$\triangle ADE \sim \triangle ABC$$

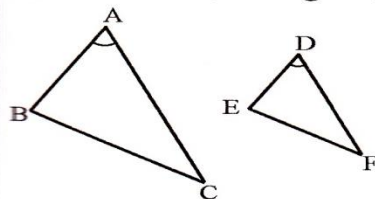
نکته ۲۹۷: به طور کلی دو مثلث در سه حالت زیر با هم متشابهند.

۱- اگر دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر دو به دو مساوی باشند آن دو مثلث متشابهند.



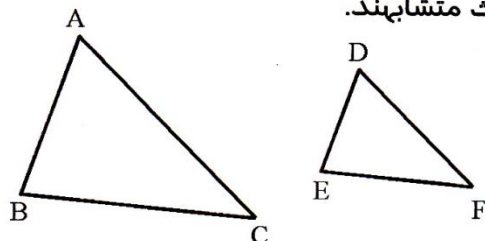
$$\left. \begin{aligned} \widehat{A} &= \widehat{D} \\ \widehat{B} &= \widehat{E} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle DEF$$

۲- اگر دو ضلع از مثلثی با دو ضلع از مثلث دیگر متناسب بوده، و زاویه‌ی بین این دو ضلع در دو مثلث مساوی باشند آن دو مثلث متشابهند.



$$\left. \begin{aligned} \frac{DE}{AB} &= \frac{DF}{AC} \\ \widehat{A} &= \widehat{D} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle DEF$$

۳- اگر سه ضلع از مثلثی با سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند آن دو مثلث متشابهند.



$$\frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC} = \frac{EF}{BC} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle DEF$$



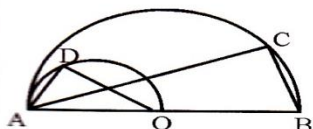
نکته ۲۹۸: دو مثلث متساوی الساقین که زاویه ی رأسشان مساوی باشند متشابهند.

نکته ۲۹۹: اگر دو زاویه ی مجاور به قاعده ی دو مثلث متساوی الساقین مساوی باشند آن دو مثلث متشابهند.

نکته ۳۰۰: اگر دو مثلث متساوی الساقین یک زاویه ی برابر داشته باشند لزوماً متشابه نیستند.

نکته ۳۰۱: اگر وتر و یک ضلع از مثلث قائم الزاویه ای با وتر و یک ضلع از مثلث قائم الزاویه ی دیگر متناسب باشند آن دو مثلث متشابهند.

مثال ۳۴۱: در شکل زیر O مرکز نیمدایره ی بزرگ و AD = ۵ و BC = ۱۰ و AC = ۲۲ می باشد اندازه ی OD چقدر است؟



۱۱ (۲)

۱۰ (۱)

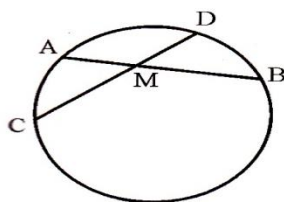
۱۴ (۴)

۱۲ (۳)

حل: گزینه ی «۲»

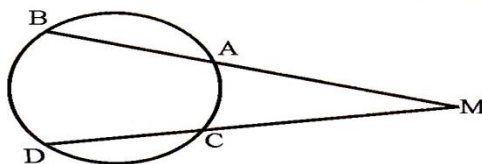
$$\left. \begin{aligned} \frac{OA}{AB} &= \frac{R}{2R} = \frac{1}{2} \\ \frac{AD}{BC} &= \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{OA}{AB} = \frac{AD}{BC} \Rightarrow \triangle OAD \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{OD}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{OD}{22} = \frac{1}{2} \Rightarrow OD = 11$$

نکته ۳۰۲: اگر دو وتر AB و CD یک دیگر را در نقطه ی M قطع کنند آن گاه:



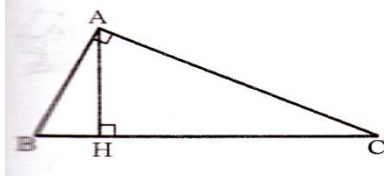
$$MA \times MB = MC \times MD$$

نکته ۳۰۳: اگر امتدادهای دو وتر AB و CD همدیگر را در M قطع کنند آن گاه:



$$MA \times MB = MC \times MD$$

نکته ۳۰۴: اگر AH ارتفاع وارد بر وتر مثلث قائم الزاویه ی ABC باشد آن گاه:

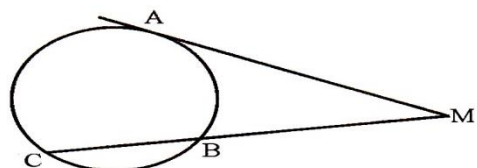


$$AH^2 = BH \times CH$$

$$AB^2 = BC \times BH$$

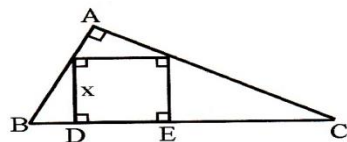
$$AC^2 = BC \times CH$$

نکته ۳۰۵: اگر MA بر دایره مماس باشد آن گاه:



$$MA^2 = MB \times MC$$

نکته ۳-۶: اگر مربعی به صورت زیر در یک مثلث قائم‌الزاویه محاط شود آن‌گاه:



$$x^2 = DB \times EC$$

نکته ۳-۷: در دو مثلث متشابه نسبت ارتفاع‌های متناظر با نسبت اضلاع برابر است.

نکته ۳-۸: در دو مثلث متشابه نسبت میانه‌های متناظر با نسبت اضلاع برابر است.

نکته ۳-۹: در دو مثلث متشابه نسبت نیمسازهای متناظر با نسبت اضلاع برابر است.

نکته ۳-۱۰: در دو مثلث متشابه نسبت محیط‌ها با نسبت اضلاع برابر است.

نکته ۳-۱۱: در دو مثلث متشابه نسبت مساحت‌ها با مجذور نسبت اضلاع برابر است.



نکته ۳۱۲: حجم مکعبی به ضلع a برابر است با a^3 .

مثال ۳۱۴: ضلع مکعبی ۵ سانتی‌متر است. حجم آن چقدر است؟

- ۲۵ (۱) ۱۲۵ (۲) ۷۵ (۳) ۱۵ (۴)

حل: گزینه‌ی «۲»

$$5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$$

مثال ۳۱۵: حجم مکعبی ۱۷۲۸ سانتی‌متر مکعب است. ضلع مکعب چقدر است؟

- ۱۶ (۱) ۹ (۲) ۱۸ (۳) ۱۲ (۴)

حل: گزینه‌ی «۴»

$$1728 = 12^3 = 12 \times 12 \times 12 = 1728$$

ضلع مکعب ۱۲ سانتی‌متر است.

نکته ۳۱۳: اگر ضلع مکعبی را m برابر کنیم حجم آن m^3 برابر می‌شود.

نکته ۳۱۴: مساحت جانبی مکعبی به ضلع a برابر با $4a^2$ و مساحت کل آن برابر $6a^2$ است.

نکته ۳۱۵: حجم مکعب مستطیل به ابعاد a ، b و c برابر است با $a \times b \times c$.

نکته ۳۱۶: اگر a و b ابعاد قاعده و c ارتفاع یک مکعب مستطیل باشد آن‌گاه:

$$\text{مساحت جانبی} = 2(a + b)c = 2(ac + bc)$$

$$\text{مساحت کل} = 2(ab + ac + bc)$$

نکته ۳۱۷: اگر ابعاد یک مکعب مستطیل را m برابر کنیم حجم آن m^3 برابر و مساحت جانبی و مساحت کل آن m^2 برابر می‌شود.

نکته ۳۱۸: حجم منشور برابر است با مساحت قاعده ضربدر ارتفاع.

نکته ۳۱۹: مساحت جانبی منشور برابر است با محیط قاعده ضربدر ارتفاع. هم‌چنین مساحت کل منشور برابر مجموع مساحت جانبی و مساحت دو قاعده می‌باشد.

نکته ۳۲۰: حجم استوانه برابر است با مساحت قاعده ضربدر ارتفاع.

نکته ۳۲۱: مساحت جانبی استوانه برابر محیط قاعده ضربدر ارتفاع و مساحت کل آن برابر مجموع مساحت جانبی و مساحت دو قاعده‌ی آن است.

$$\text{حجم هرم} = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{مساحت قاعده}}{3}$$

نکته ۳۲۲:

نکته ۳۳۳: مساحت جانبی هرم برابر است با مجموع مساحت‌های وجوه جانبی آن و مساحت کل هرم برابر است با مساحت جانبی به علاوه مساحت قاعده.

نکته ۳۳۴: حجم مخروط برابر است با مساحت قاعده ضربدر ارتفاع تقسیم بر سه.

$$\text{حجم مخروط} = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{مساحت قاعده}}{3}$$

نکته ۳۳۵: اگر a اندازه‌ی وتر یک مثلث قائم‌الزاویه و b و c اضلاع زاویه‌ی قائمه مثلث باشند:

۱- اگر مثلث را حول ضلع b دوران دهیم حجم شکل حاصل برابر است با: $\frac{\pi c^2 b}{3}$

۲- اگر مثلث را حول ضلع c دوران دهیم حجم شکل حاصل برابر است با: $\frac{\pi b^2 c}{3}$

۳- اگر مثلث را حول ضلع a (وتر) دوران دهیم حجم شکل حاصل برابر است با: $\frac{\pi b^2 c^2}{3a}$

مثال ۴۱۴: مثلثی به اضلاع ۲، ۶ و $2\sqrt{10}$ را حول ضلع بزرگ‌تر دوران می‌دهیم حجم شکل حاصل چقدر است؟

$$(1) \frac{24\pi}{10} \quad (2) \frac{12\sqrt{2}\pi}{10} \quad (3) \frac{12\sqrt{3}\pi}{10} \quad (4) \frac{24\pi}{\sqrt{10}}$$

حل: گزینه‌ی «۴»

$$2^2 + 6^2 = 4 + 36 = 40 = (2\sqrt{10})^2$$

اعداد ۲، ۶ و $2\sqrt{10}$ در رابطه‌ی فیثاغورس صدق می‌کنند بنابراین مثلث قائم‌الزاویه است که می‌خواهیم آن را حول وتر دوران دهیم.

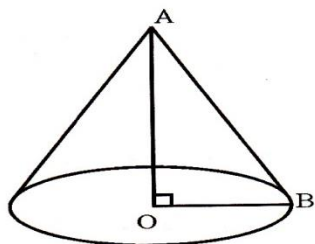
$$\text{حجم شکل} = \frac{\pi \times 2^2 \times 6^2}{3 \times 2\sqrt{10}} = \frac{\pi \times 4 \times 36}{3 \times 2\sqrt{10}} = \frac{24\pi}{\sqrt{10}}$$

نکته ۳۳۶: اگر مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع a را حول ارتفاعش دوران دهیم حجم مخروط حاصل برابر است

$$\text{با: } \frac{\sqrt{3}}{24} \pi a^3$$

نکته ۳۳۷: اگر مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع a را حول یکی از اضلاعش دوران دهیم حجم شکل حاصل برابر

$$\text{است با: } \frac{\pi}{8} a^3$$



$$(مولد)^2 = (\text{ارتفاع})^2 + (\text{شعاع قاعده})^2$$

$$AB^2 = OA^2 + OB^2$$

نکته ۳۳۸: اگر مثلث قائم‌الزاویه‌ای را حول یکی از اضلاع زاویه‌ی قائمه دوران دهیم مخروطی حاصل می‌شود که آن ضلع ارتفاع مخروط و ضلع دیگر زاویه‌ی قائمه شعاع قاعده‌ی مخروط می‌باشد همچنین وتر مثلث قائم‌الزاویه مولد مخروط نامیده می‌شود.

نکته ۳۳۹: اگر l مولد مخروط و r شعاع قاعده‌ی آن باشد، آن‌گاه:

$$\text{مساحت جانبی مخروط} = \pi r l$$

$$\text{مساحت کل مخروط} = \pi r l + \pi r^2$$

نکته ۳۳۳: اگر یک مثلث قائم الزاویه را هر بار حول یکی از اضلاعش دوران دهیم شکل‌های حاصل به هنگامی که حول کوچک‌ترین ضلع دوران می‌دهیم بیش‌ترین مقدار و به هنگامی که حول وتر دوران می‌دهیم کم‌ترین مقدار می‌شود.

نکته ۳۳۴: حجم کره‌ای به شعاع R برابر است با: $\frac{4}{3}\pi R^3$.

نکته ۳۳۵: مساحت کره‌ای به شعاع R برابر است با: $4\pi R^2$.

نکته ۳۳۶: اگر شعاع کره‌ای را m برابر کنیم مساحت آن m^2 برابر و حجم آن m^3 برابر می‌شود.

نکته ۳۳۷: مساحت یک کره چهار برابر مساحت دایره‌ی عظیمه‌ی کره است.

نکته ۳۳۸: اگر مکعبی داخل یک کره محاط شود، قطر کره با قطر مکعب برابر است.

نکته ۳۳۹: اگر کره‌ای داخل یک مکعب محاط شود، قطر کره با ضلع مکعب برابر است.

نکته ۳۴۰: اگر شعاع‌های قاعده‌های یک مخروط ناقص R و R' و ارتفاع آن برابر h باشد حجم مخروط ناقص برابر است با:

$$\frac{\pi h}{3} (R^2 + R'^2 - RR')$$

