کلاس کنکور

اولین
موسسه ی
کنکوری
کشور
با کادر
رتبه های تک
رقمی
و دو رقمی
کنکور

آکادمی کنکور
دانشگاه تهرانی ها

شماره تلفن : 021-88683915

آدرس:

تهران - سعادت آباد - بلوار فرهنگ - کوی فرهنگ -
شهرک نیایش - خیابان 12 متری محمدی- پلاک 7

مشاوره ی حضوری ، تلفنی و آنلاین با دانشجویان دانشگاه تهران و صنعتی شریف

جزوه آموزشی

هندسه پایه

www.mehdimath.blogfa.com

مؤلف: رضا کهنسال

ارتباط با مؤلف: ۰۹۳۵۵۷۷۳۸۲۶

انواع استدلال ها:

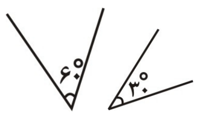
استدلال استقرایی: روش نتیجه‌گیری بر مبنای مجموعه محدودی از مشاهدات را گویند.در این روش از جزء به کل می‌رسیم.
این روش استدلال معتبر نمی‌باشد.(سراسری۸۸)

استدلال استنتاجی: روش نتیجه‌گیری بر مبنای حقایقی است که درستی آنها را از قبل پذیرفته‌ایم.

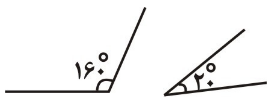
اوضاع دو زاویه نسبت به هم:

۱) دو زاویه مجاور: دو زاویه که در راس و یک ضلع مشترک بوده و ضلع مشترک بین دو ضلع دیگر باشد.

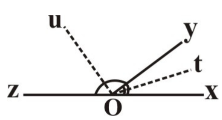
۲) دو زاویه متمم: به دو زاویه که مجموعشان ۹۰ درجه است متمم یکدیگر گویند مانند:



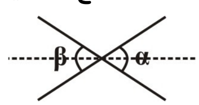
۳) دو زاویه مکمل: به دو زاویه که مجموعشان ۱۸۰ درجه است مکمل یکدیگر گویند مانند:



۴) دو زاویه مجانب: به دو زاویه که مجاور و مکمل باشند مجانب هم گویند مانند xoy و yoz
نیمساز دو زاویه مجانب بر یکدیگر عمودند. $(Ot \perp Ou)$



۵) دو زاویه متقابل به رأس: دو زاویه را که رأس مشترک داشته باشند و ضلع‌های یکی در امتداد ضلع‌های دیگری ولی در دو جهت مختلف باشند متقابل به رأس گویند مانند زاویه‌ی α و β در شکل مقابل.
این زاویه ها با هم برابرند.



۶) اگر اضلاع دو زاویه باهم موازی باشند آنگاه دو زاویه باهم برابر و یا مکملند.

۷) اگر اضلاع دو زاویه برهم عمود باشند آنگاه دو زاویه باهم برابر و یا مکملند.

☺**تست۱:** دو زاویه، به اندازه‌های 2α و 6α مجاور هم‌اند. اگر زاویه‌ی بین نیمسازهای این دو زاویه ۴۰ درجه باشد، α چند درجه است؟

۱) 10° ۲) 20° ۳) 25° ۴) 35°

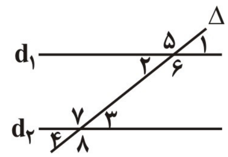
پاسخ:

☹**تست۲:** دو زاویه‌ی A و B متمم‌اند، اندازه‌ی زاویه‌ی A برابر $\frac{4}{9}$ اندازه‌ی مکمل زاویه‌ی B است. زاویه‌ی A چند درجه است؟

۱) ۲۷ ۲) ۳۶ ۳) ۶۳ ۴) ۷۲

$$\begin{cases}\hat{A}+\hat{B}=90^\circ\\ \hat{A}=\frac{4}{9}(180^\circ-\hat{B})\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\hat{A}+\hat{B}=90^\circ\\ \hat{A}=\frac{4}{9}(180^\circ-\hat{B})\end{cases} \Rightarrow 80^\circ-\frac{2}{9}\hat{B}+\hat{B}=90^\circ \Rightarrow \frac{5}{9}\hat{B}=10^\circ \Rightarrow \hat{B}=18^\circ \Rightarrow \hat{A}=90^\circ-18^\circ=72^\circ$$

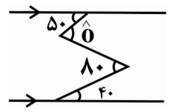
خطوط موازی و مورب: اگر دو خط موازی را خط موربی قطع کند، از تلاقی آن‌ها هشت زاویه پدید می‌آید که زاویه‌های حاده با هم و زاویه‌های منفرجه نیز با هم برابرند.



$\hat{۱}=\hat{۲}=\hat{۳}=\hat{۴}$

$\hat{۵}=\hat{۶}=\hat{۷}=\hat{۸}$

تست۳: در شکل مقابل اندازه‌ی $\hat{o}$ چند درجه است؟



۱) ۸۰ ۲) ۹۰

۳) ۱۰۰ ۴) ۷۰

پاسخ:

نکات مهم :

۱) مجموع زوایای داخلی مثلث، ۱۸۰ درجه است.

۲) جمع زوایای داخلی nضلعی محدب: اگر از یک رأس nضلعی به بقیه رئوس وصل کنیم $n-۲$ مثلث پدید می‌آید، با توجه به این‌که جمع زوایای داخلی هر مثلث ۱۸۰ درجه است جمع زوایای داخلی nضلعی $(n-۲)\times ۱۸۰^\circ$ درجه است.

۳) مجموع زوایای خارجی هر چندضلعی محدب برابر ۳۶۰ است.

مثال۴: اندازه زاویه‌های داخلی یک چندضلعی محدب، تصاعد حسابی می‌سازند اگر کوچک‌ترین زاویه ۸۰ درجه و بزرگ‌ترین زاویه ۱۶۰ درجه باشد. تعداد ضلع‌های چندضلعی چیست؟

پاسخ:

مثال۵: اگر سه زاویه خارجی مثلثی با اعداد ۳ و ۴ و ۵ متناسب باشند نوع مثلث چیست؟

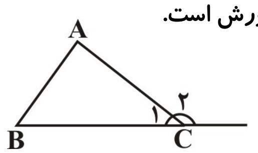
پاسخ:

تست۶: مجموع زوایای داخلی یک چندضلعی محدب بدون یکی از زاویه‌ها برابر ۲۵۷۰ درجه است. اندازه‌ی زاویه کنار گذاشته شده کدام است؟

۱) ۳۰ ۲) ۱۳۰ ۳) ۲۰۰ ۴) ۳۰۰

پاسخ:

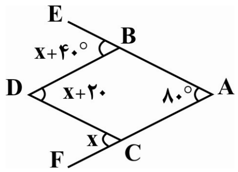
نکته: در هر مثلث، هر زاویه‌ی خارجی برابر مجموع دو زاویه‌ی داخلی غیر مجاورش است.



$\hat{C}_۲ = \hat{A} + \hat{B}$

پس هر زاویه خارجی از هر زاویه غیر مجاور داخلی بزرگتر است.

تست۷: با توجه به شکل مقابل، اندازه‌ی زاویه‌ی x چند درجه است؟



۱) ۵۰ 		۲) ۳۰ 		۳) ۶۰ 		۴) ۸۰

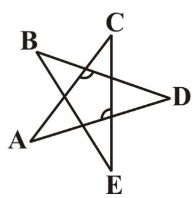
راه ۱:

$$\hat{A}+\hat{D}+\hat{C}_۱+\hat{B}_۱=۳۶۰$$

$$\Rightarrow ۸۰+x+۲۰+(۱۸۰-x)+(۱۸۰-(x+۴۰))=۳۶۰^\circ \Rightarrow ۱۰۰+۱۸۰+۱۸۰-x-۴۰=۳۶۰ \Rightarrow x=۶۰^\circ$$

راه ۲:

تست۸: در شکل مقابل مجموع زوایای E,D,C,B,A کدام است؟ (سراسری تجربی – ۷۳)



۱) ۱۸۰° 		۲) ۲۷۰°

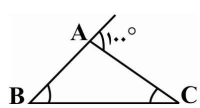
۳) کم‌تر از ۱۸۰° 		۴) بین ۱۸۰° و ۲۷۰°

پاسخ:

تست۹: در یک مثلث مجموع دو زاویه خارجی با ۳برابر زاویه غیرمجاور داخلی برابر است.نوع مثلث کدامست؟

۱)متساوی‌الساقین 		۲)متساوی‌الاضلاع 		۳)قائم‌الزاویه 		۴)نامشخص

تست۱۰: در شکل مقابل زاویه‌ی خارجی A برابر ۱۰۰° وتفاضل دو زاویه $\hat{B}$ و $\hat{C}$ برابر است با $\underline{۴۰^\circ}$.زاویه‌ی $\underline{\hat{B}}$ چند درجه می‌باشد؟$(\hat{B} > \hat{C})$



۱) ۵۰° 		۲) ۶۰°

۳) ۷۰° 		۴) ۸۰°

پاسخ:

با توجه به نکته‌ی فوق داریم:

$$\begin{cases}\hat{B}+\hat{C}=۱۰۰^\circ \\ \hat{B}-\hat{C}=۴۰^\circ\end{cases}$$ (طبق فرض)

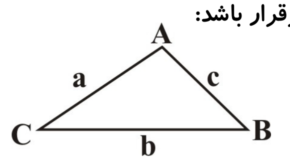
از حل دستگاه فوق زوایای $\hat{C},\hat{B}$ مشخص‌می‌شوند: $\hat{B}=۷۰^\circ \;,\hat{C}=۳۰^\circ$

اجزای مثلث: اضلاع- ارتفاع- میانه- نیمساز- عمودمنصف- زوایا.

نکته کلی: در هر مثلث هر ضلعی که بزرگتر باشد اندازه زاویه روبرو به آن نیز بزرگتر ولی اندازه ارتفاع و میانه و نیمساز آن کوچکتر است.

اضلاع:

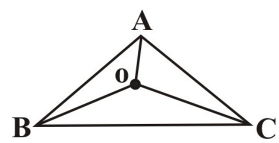
۱- نامساوی مثلث: شرط وجود یک مثلث با ۳ طول c,b,a آن است که همزمان ۳ شرط زیر برقرار باشد:



$$a<b+c$$
$$b<a+c$$
$$c<a+b$$

و یا یکی از شروط $|a-b|<c<a+b\ ,|a-c|<b<a+c\ ,|b-c|<a<b+c$ برقرار باشند.

۲- در هر مثلث اگر M نقطه‌ای دلخواه داخل مثلث باشد آنگاه:



$$۱)\begin{cases}OB+OC<AB+AC\\ OA+OB<CA+CB\\ OA+OC<BA+BC\end{cases}$$

$$۲)\frac{a+b+c}{۲}<OA+OB+OC<a+b+c$$

تست۱۱: اگر x و $x+۱$ و $۲x-۱$ اندازه‌ی اضلاع مثلثی باشند، حدود x کدام است؟

۱) $x\geq ۱$ ۲) $x\geq ۰$ ۳) $x>۰$ ۴) $x>۱$

$$\left.\begin{array}{l}x+۱+x>۲x-۱\Rightarrow x>-۱\\ x+۲x-۱>x+۱\Rightarrow x>۱\\ ۲x-۱+x+۱>x\Rightarrow x>۰\end{array}\right\}\Rightarrow x>۱$$

تست۱۲: اگر a,b,c اضلاع یک مثلث باشند آنگاه کدامیک از موارد زیر ممکن است اضلاع مثلث نباشند؟

۱) $۲a,۲b,۲c$ ۲) $\frac{a}{۳},\frac{b}{۳},\frac{c}{۳}$ ۳) $a^{۲},ab,ac$ ۴)همه موارد حتما اضلاع مثلث‌اند

تست۱۳: اگر در یک مثلث به محیط ۱۰ فاصله یک نقطه در داخل مثلث، از رئوس B,A به ترتیب ۱و۲ اباشد،آنگاه فاصله آن از راس C کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۱ ۲)۲ ۳)۴ ۴)۸

ارتفاع:

۱) در هر مثلث از آنجا که $S=\frac{a.h_a}{2}=\frac{b.h_b}{2}=\frac{c.h_c}{2}$ برقرار می‌باشد داریم:

$$\begin{cases} h_a=\frac{2s}{a} \\ h_b=\frac{2s}{b} \\ h_c=\frac{2s}{c} \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} a=\frac{2s}{h_a} \\ b=\frac{2s}{h_b} \\ c=\frac{2s}{h_c} \end{cases}$$

۲) در مثلث ABC داریم: $\frac{a}{b}=\frac{h_b}{h_a}$

۳) هر رابطه‌ای که بین اضلاع برقرار باشد می‌توان رابطه نظیر آن را برای ارتفاع ها نیز بدست آورد.

به عنوان مثال:

$$1)\ a^2=b^2+c^2 \leftrightarrow \frac{1}{h_a^2}=\frac{1}{h_b^2}+\frac{1}{h_c^2}$$

$$2)\ |b-c|<a<b+c \leftrightarrow \left|\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c}\right|<\frac{1}{h_a}<\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}$$

تست۱۴: اگر در یک مثلث مساحت برابر ۴ و محیط برابر ۸ باشد حاصل عبارت $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}$ کدامست؟

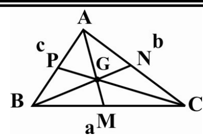
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

تست۱۵: اگر بین اضلاع یک مثلث رابطه $a^2=2bc$ برقرار باشد کدام رابطه بین ارتفاع‌های آن برقرار است؟

۱) $h_a^2=h_b.h_c$ ۲) $h_a=h_b.h_c$ ۳) $h_a^2=2h_b.h_c$ ۴) $2h_a^2=h_b.h_c$

تست۱۶: در مثلثی طول ۲ ارتفاع ۶ و ۸ است. طول ارتفاع سوم کدام مقدار نمی‌تواند باشد:

۱) ۱۰ ۲) ۱۶ ۳) ۲۰ ۴) ۲۵



میانه: میانه‌ی نظیر هر مثلث پاره‌خطی است که از آن رأس به وسط ضلع مقابل وصل شود.

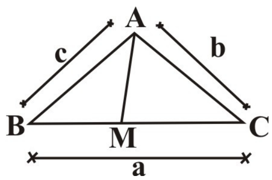
(میانه‌ها $AM = m_a\ ,\ BN = m_b\ , CP = m_c$)

۱- اگر AM میانه‌ی نظیر رأس A در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ باشد، آن گاه:

$$\frac{|b-c|}{2} < m_a < \frac{b+c}{2}$$

۲- مجموع میانه‌ها همواره از محیط کوچکتر و از $\frac{3}{4}$ محیط مثلث بزرگ‌تر است.

$$\frac{3}{4}(a+b+c) < (m_a + m_b + m_c) < (a+b+c)$$



نکته فرعی: در هر مثلث ABC، اگر m_a طول میانه وارد بر ضلع a باشد داریم:

$$b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2}$$

۳- همچنین در هر مثلث ABC داریم: $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$

۴- در هر مثلث همواره داریم: $b^2 - c^2 = 2a.MH$ (نقطه M پای میانه و نقطه H پای ارتفاع است)

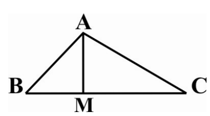
۵- می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه میانه وارد بر وتر نصف وتر است یعنی اگر $A = 90$ باشد آنگاه $m_a = \frac{a}{2}$. به همین ترتیب:

اگر $A < 90$ باشد آنگاه $m_a > \frac{a}{2}$ و

اگر $A > 90$ باشد آنگاه $m_a < \frac{a}{2}$.

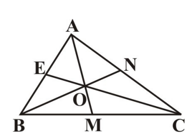
۶- هر میانه‌ی مثلث سطح مثلث را به دو بخش هم مساحت (معادل) افراز می‌کند.

AM (میانه) $\Rightarrow S_{\overset{\Delta}{ABM}} = S_{\overset{\Delta}{AMC}}$



۷- در هر مثلث با رسم میانه مثلث به شش مثلث هم‌مساحت تقسیم می‌شود. اگر O محل تلاقی میانه‌های مثلث ABC باشد آن‌گاه داریم:

$$S_{AON} = S_{NOC} = S_{MOC} = S_{BOM} = S_{BOE} = S_{AOE}$$



☺**تست۱۷:** در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ با طول اضلاع ۵ و ۷ و ۸ سانتی‌متر اگر L مجموع طول میانه‌های مثلث باشد، آن گاه در مورد L کدام صحیح است؟

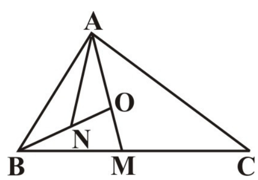
۱) $15<L<20$ ۲) $5<L<10$ ۳) $10<L\le 20$ ۴) $5<L<15$

مثال۱۸: در مثلث قائم‌الزاویه به طول اضلاع ۶ و ۸، مجموع مربعات میانه‌ها چقدر است؟

مثال۱۹: با اطاعات $a=4, b=6, m_c=6$ چند مثلث قابل رسم است؟

مثال۲۰: حدود a را چنان تعیین کنید که بتوان بااطلاعات $a, m_b=6, m_c=9$ مثلث رسم کرد.

☺**تست۲۱:** در شکل مقابل اگر O وسط میانه‌ی AM و N وسط BO باشد آن‌گاه نسبت مساحت مثلث ABN به مساحت مثلث ABC کدام است؟



۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{4}$

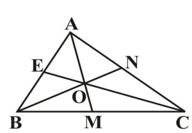
۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{8}$

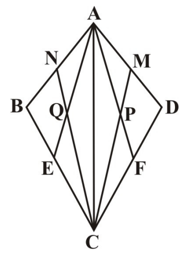
پاسخ: گزینه ی ۴

با توجه به نکته‌ی ۴ داریم:

$$\left.\begin{array}{l} ABO:\text{میانه}\ AN \Rightarrow S_{ABN}=\frac{1}{2}S_{ABO} \\ ABM:\text{میانه}\ BO \Rightarrow S_{ABO}=\frac{1}{2}S_{ABM} \\ ABC:\text{میانه}\ AM \Rightarrow S_{ABM}=\frac{1}{2}S_{ABC} \end{array}\right\} \Rightarrow S_{ABN}=\frac{1}{8}S_{ABC}$$

مثال۲۲: در شکل مقابل مساحت مثلث ABC چند برابر مساحت چهارضلعی $AEON$ می‌باشد؟





تست۲۳: اگر در چهارضلعی $ABCD$ نقاط M, N, E, F وسط اضلاع آن باشند آن‌گاه نسبت مساحت چهارضلعی $APCQ$ به مساحت $ABCD$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

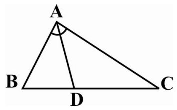
پاسخ: گزینه‌ی ۱

اگر از A به C وصل کنیم آن‌گاه P محل تلاقی میانه‌های مثلث ADC و Q محل تلاقی میانه‌های مثلث ABC است. پس با توجه به نکته‌ی فوق خواهیم داشت:

$$\left.\begin{array}{l} S_{APC}=\frac{۱}{۳}S_{ADC} \\ S_{AQC}=\frac{۱}{۳}S_{ABC} \end{array}\right\} \xrightarrow{+} S_{APCQ}=\frac{۱}{۳}S_{ABCD}$$

مثال۲۴: در یک مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع ۳و۴و۵ فاصله مرکز ثقل مثلث از وتر چقدر است؟

نیمساز:



۱) نیمساز داخلی هر زاویه ضلع مقابلش را به نسبت دو ضلع مجاورش تقسیم می‌کند.

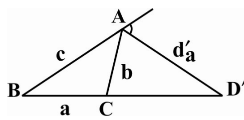
$$\boxed{AD\ (\text{نیمساز}) : \frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AC}}$$

از طرفی طول نیسماز داخلی را می‌توان به صورت زیر بدست آورد:

$$\boxed{AD^{2}=AB\times AC-DB\times DC}$$

تذکر: با داشتن اندازه های سه ضلع یک مثلث می‌توان به کمک دو رابطه فوق طول هریک از نیمسازها را محاسبه نمود.

۲) هر نیمساز زاویه‌ی برونی مثلث امتداد ضلع رو به رو را به نسبت دو ضلع دیگر مثلث تقسیم می‌کند، یعنی داریم:



$$\frac{D'C}{D'B}=\frac{AC}{AB}$$

از طرفی طول نیسماز داخلی را می‌توان به صورت زیر بدست آورد:

$$AD'^{2}=D'B.D'C-AB.AC$$

مثال۲۵: در یک مثلث به اضلاع ۴و۵و۶ طول نیمساز متوسط را بیابید.

تست۲۶: اگر محیط مثلثی ۲۶ و نیمساز داخلی یکی از زوایا بر ضلع مقابلش پاره‌خطهایی به طول ۲/۴,۳/۶ ایجاد می‌کند.اندازه کوچکترین ضلع آن چقدر است؟

۱)۸ ۲)۶ ۳)۱۰ ۴)۱۲

تست۲۷: در یک مثلث AM و BN و CP نیمساز زوایا هستند، حاصل $\frac{BM}{MC}\times\frac{CN}{AN}\times\frac{AP}{PB}$ برابر است با:

۱) $\sqrt{S}$ ۲) $\frac{S}{2}$

۳) ۲ ۴) ۱

تست۲۸: در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ ، طول اضلاع به نسبت ۲ ، ۴ ، ۵ و کوچک‌ترین ضلع <u>۱۰</u> سانتی‌متر است، اگر AD نیمساز وارد بر کوچک‌ترین ضلع باشد، طول کوچک‌ترین قطعه‌ی واقع بر BC جدا شده به وسیله‌ی D چند سانتی‌متر است؟

۱) $\frac{۳۷}{۹}$ ۲) $\frac{۳۸}{۹}$ ۳) $\frac{۴۰}{۹}$ ۴) $\frac{۴۱}{۹}$

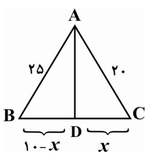
کوچک‌ترین ضلع متناسب با عدد ۲ می‌باشد، بنابراین:

$۲x = ۱۰ \rightarrow x = ۵$

طول اضلاع مثلث عبارت است از: $۲x = ۱۰ \,,\, ۴x = ۲۰ \,,\, ۵x = ۳۰$

فرض در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ طول اضلاع برابر است با:

$AB = ۲۵ \,,\, AC = ۲۰ \,,\, BC = ۱۰$



کوچک‌ترین قطعه مجاور به کوچک‌ترین ضلع می‌باشد، یعنی $DC < DB$

AD (نیمساز) $\Rightarrow \frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{۱۰ - x}{x} = \frac{۲۵}{۲۰} = \frac{۵}{۴}$

$\Rightarrow ۴۰ - ۴x = ۵x \Rightarrow \boxed{x = \frac{۴۰}{۹} = DC}$

تست۲۹: نیمساز زاویه‌ی $\hat{B}$ از مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ ضلع AC را در H قطع می‌کند، HA برابر است با:

۱) $\frac{ab}{a+b}$ ۲) $\frac{a+c}{bc}$ ۳) $\frac{bc}{a+c}$ ۴) $\frac{ac}{a+b}$

قضیه‌ی نیمسازها: $\frac{AH}{HC} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{AH}{HC+AH} = \frac{AB}{BC+AB}$

$\Rightarrow \frac{AH}{b} = \frac{C}{a+c} \Rightarrow AH = \frac{bc}{a+c}$

تست۳۰: در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ ، AD' نیمساز زاویه‌ی برونی $\hat{A}$ است، اگر $۲AB = ۳AC$ و $BC = ۱۰$ باشد، اندازه‌ی BD' چقدر است؟

۱) ۳۰ ۲) ۲۰ ۳) ۱۵ ۴) ۲۵

نکاتی دیگر در مورد نیمسازها:

۱) شکل حاصل از برخورد نیمسازهای داخلی اشکال مختلف به صورت زیر است:

چهارضلعی اولیه	متوازی‌الاضلاع	مستطیل	ذوزنقه	ذوزنقه متساوی‌الساقین
شکل حاصل از برخورد نیمسازها				

۲) نکته مهم:

الف: اگر طول اضلاع متوازی‌الاضلاع b,a باشند آنگاه طول و عرض مستطیل حاصل از برخورد نیمسازهای آن برابر است با:

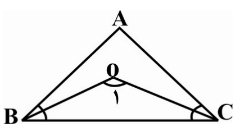
ب: اگر طول و عرض مستطیل b,a باشند آنگاه طول ضلع مربع حاصل از برخورد نیمسازهای آن برابر است با:

بدانید که: از برخورد نیمسازهای خارجی متوازی‌الاضلاع نیز یک مستطیل ایجاد می‌شود که اضلاع آن برابرند با $(a+b)\cos\frac{\alpha}{۲}$ **و** $(a+b)\sin\frac{\alpha}{۲}$.

بنابراین از برخورد نیمسازهای خارجی هر مستطیل نیز یک مربع ایجاد می‌شود که طول ضلع این مربع برابر است با: $\frac{\sqrt{۲}}{۲}(a+b)$

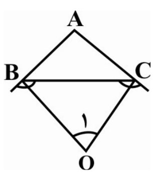
۳) زاویه بین نیمسازهای دو زاویه B,C به صورت زیر است :

الف: در هر مثلث ،زاویه‌ی بین نیمسازهای داخلی هر دو رأس برابر است با:(نصف زاویه‌ی سوم+ ۹۰°)



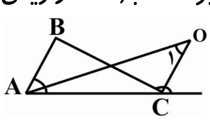
$$\hat{o}_۱ = ۹۰ + \frac{\hat{A}}{۲}$$

ب: در هر مثلث،زاویه‌ی بین نیمسازهای خارجی هررأس برابر است با:(نصف زاویه‌ی سوم− ۹۰°)



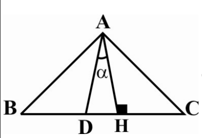
$$\hat{O}_۱ = ۹۰ - \frac{\hat{A}}{۲}$$

ج: در هر مثلث زاویه‌ی بین نیمساز خارجی یک رأس با امتداد نیمساز داخلی رأس دیگر برابر است با(نصف زاویه‌ی سوم)



$$\hat{O}_۱ = \frac{\hat{A}}{۲}$$

۴) در هر مثلث زاویه‌ی بین ارتفاع ونیمساز نظیر هر رأس برابر است با نصف تفاضل دو زاویه‌ی دیگر . $\alpha = \frac{۱}{۲}\left|\hat{B} - \hat{C}\right|$



۴)در هر مثلث قائم‌الزاویه، زاویه‌ی بین ارتفاع و میانه‌ی وارد بر وتر برابر است باتفاضل دو زاویه‌ی حاده:

$$\alpha = \left|\hat{B} - \hat{C}\right|$$

☺**تست۳۱:** در متوازی الاضلاعی که دارای یک زاویه‌ی 60° و اضلاعی با اندازه‌های ۱۴ و ۶ سانتی متر است، نیمسازهای داخلی را رسم می‌کنیم، مساحت شکل حاصل از برخورد نیمسازها چند سانتی‌متر مربع است؟

۱) ۱۲ ۲) $4\sqrt{3}$ ۳) $16\sqrt{3}$ ۴) ۸

مثال۳۲: در یک مستطیل به طول و عرض $5\sqrt{2}, 2\sqrt{2}$ مساحت مربع حاصل از برخورد نیمسازهای آن چقدر است؟

مثال۳۳: در یک مستطیل به عرض ۴ اگر دو راس مربع حاصل از برخورد نیمسازهای آن بر روی مستطیل واقع شوند،مساحت مستطیل را بیابید.

☺**تست۳۴:** در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$، نیمسازهای داخلی دو رأس C,B در نقطه‌ی $\underline{O}$ متقاطعند. اگر زاویه‌ی بین این دو نیمساز برابر $\underline{130^\circ}$ باشد زاویه‌ی $\underline{A}$ در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ چند درجه می‌باشد؟

۱) 100° ۲) 90° ۳) 80° ۴) 70°

پاسخ:

☺**تست۳۵:** در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$، $\hat{B}=70^\circ, \hat{A}=50^\circ$، ارتفاع AH ونیمساز داخلی AD را رسم می‌کنیم . زاویه‌ی HAD چند درجه است؟

۱) 10° ۲) 15°

۳) 20° ۴) 5°

پاسخ:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}=50^\circ\\ \hat{B}=70^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{C}=60^\circ \Rightarrow \alpha=\frac{1}{2}\left|\hat{B}-\hat{C}\right|=\frac{1}{2}\left|70^\circ-60^\circ\right|=5^\circ$$

☺**تست۳۶:** تفاضل دو زاویه C,B چند درجه باشد تا در مثلث ABC طول نیمساز داخلی و خارجی نظیر راس A برابر باشند؟

۱) ۳۰ ۲) ۶۰ ۳) ۹۰ ۴) ۱۲۰

☺**تست۳۷:** در یک مثلث زاویه بین ارتفاع و نیمساز خارجی راس A برابر ۷۰ درجه می‌باشد. تفاضل دو زاویه B,C کدامست؟

۱) ۲۰ ۲) ۳۰ ۳) ۴۰ ۴) ۵۰

پاسخ:

زوایا:

۱) قضیه کسینوسها: در هر مثلث مربع هر ضلع برابر است با مجموع مربعات دو ضلع دیگر منهای دو برابر حاصل‌ضرب این دو ضلع در کسینوس زاویه‌ی بین این دو ضلع:

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A} \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B} \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C} \end{cases}$$

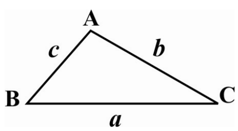
نتیجه: با داشتن سه ضلع طبق رابطه فوق می‌توان هر کدام از زوایای مثلث را محاسبه نمود.

۲) توسط رابطه فوق می‌توان با داشتن سه ضلع تعیین کرد که مثلث حادالزاویه یا قائم‌الزاویه و یا منفرجه‌الزاویه است:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \Rightarrow \begin{cases} a^2 > b^2 + c^2 \Leftrightarrow A > 90 \\ a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow A = 90 \\ a^2 < b^2 + c^2 \Leftrightarrow A < 90 \end{cases}$$

۳) قضیه سینوسها: در هر مثلث رابطه‌ی زیر بنام رابطه‌ی سینوس‌ها برقرار است:

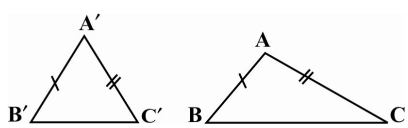
$$\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}} = 2R$$



R : شعاع دایره‌ی محیطی مثلث

۴) قضیه لولا:

$$\left.\begin{array}{l} AB = A'B' \\ AC = A'C' \\ \hat{A} > \hat{A}' \end{array}\right\} \Rightarrow BC > B'C'$$



عکس لولا:

$$\left.\begin{array}{l} AB = A'B' \\ AC = A'C' \\ Bc > B'C' \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A} > \hat{A}'$$

☺**تست۳۸:** در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$، $b=2$ و $c=1$ و $\hat{A} = 60^\circ$. طول ضلع a چقدر است؟

۱) $\sqrt{3}$ ۲) $\sqrt{5}$ ۳) $\sqrt{7}$ ۴) $2\sqrt{2}$

تست۳۹: در مثلثی به اضلاع ۳ و ۵ و ۷ ، بزرگ‌ترین زاویه چند درجه می‌باشد؟

۱) ۶۰°		۲) ۹۰°		۳) ۱۲۰°		۴) ۱۳۵°

تست۴۰: در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ اگر $b=۵$ و $c=۱۲$ و $\hat{A}<۹۰$ باشد، برای ضلع a کدام گزاره درست است؟

۱) $۱۳<a<۱۷$		۲) $۷<a<۱۳$		۳) $۷<a<۱۷$		۴) $a<۱۳$

تست۴۱: در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ ، $A=۴۵^\circ$ و $C=۷۵^\circ$ و $a=۴$. طول ضلع b چقدر است؟

۱) $۲\sqrt{۶}$		۲) $۲\sqrt{۳}$		۳) $۳\sqrt{۲}$		۴) $۶\sqrt{۲}$

تست۴۲: در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ ، $a=\sqrt{۲}$ و $b=\sqrt{۶}$ و $B=۱۲۰$ زاویه‌ی A چند درجه می‌باشد؟

۱) ۳۰°		۲) ۱۵۰°		۳) ۶۰°		۴) گزینه ۱و۲

تست۴۳: در مثلث ABC طول ضلع $BC=۸$ و $\hat{A}=۳۰^\circ$ شعاع دایره‌ی محیطی کدام است؟(آزاد ریاضی ـ عصر ۸۶)

۱) ۸		۲) ۶		۳) $۴\sqrt{۳}$		۴) $\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$

مثال۴۴: تعیین کنید با هریک از اطلاعات زیر چند مثلث رسم می‌شود؟

$$۱)\begin{cases} a=۲ \\ b=۸ \\ A=۳۰ \end{cases}$$

$$۲)\begin{cases} a=\sqrt{۶} \\ b=۲ \\ A=۶۰ \end{cases}$$

$$۳)\begin{cases} a = ۲ \\ b = ۲\sqrt{۲} \\ A = ۳۰ \end{cases}$$

تست۴۵: در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ ، $\frac{\sin(B)}{\sin(C)} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$، نسبت $\frac{c}{b}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$　　۲) $\sqrt{۳}$　　۳) ۳　　۴) $\frac{۱}{۳}$

$$\frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}} \Rightarrow \frac{\sin\hat{B}}{\sin\hat{C}} = \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow \frac{c}{b} = \frac{۳}{\sqrt{۳}} = \sqrt{۳}$$

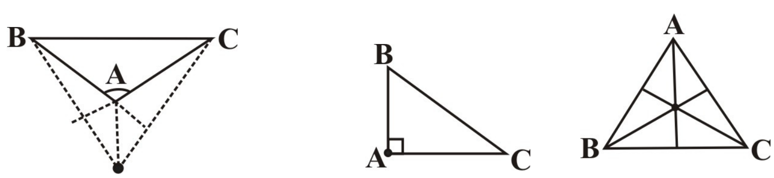
تست۴۶: در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ $(AB > AC)$ بر دو ضلع AB و AC دو پاره خط مساوی BP و CQ را جدا می‌کنیم. در این صورت کدام گزینه صحیح است؟

۱) $BQ > CP$　　۲) $AQ > AP$　　۳) $BQ = CP$　　۴) $BP + CP = ۲BC$

نقاط همرسی در مثلث:

۱- ارتفاعها: در هر مثلث هر سه ارتفاع همرسند و نقطه همرسی آنها را مرکز تعامد می‌نامند.

محل قرارگیری مرکز تعامد یک مثلث به نوع مثلث بستگی دارد.به شکل دقت کنید:



هر ۳ زاویه حاده　　قائم‌الزاویه　　یک زاویه منفرجه

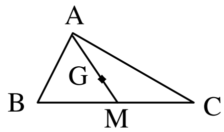
مثال۴۷: در مثلثی با اضلاع ۶و۷و۹محل تلاقی ارتفاعات در کجا قرار دارد؟

۱) داخل مثلث　　۲) روی محیط　　۳) خارج مثلث　　۴) نمی‌توان تعیین کرد.

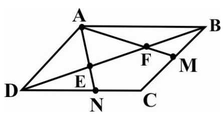
۲- میانه ها: در هر مثلث سه میانه همواره همرسند و نقطه همرسی آنها را مرکز ثقل می‌نامند.

مرکز ثقل همواره درون مثلث قرار می‌گیرد و میانه را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم می‌کند.

$$\begin{cases} AG = ۲GM \\ AG = \frac{۲}{۳}AM \\ GM = \frac{۱}{۳}AM \end{cases}$$

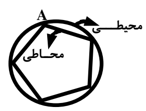


مثال۴۸: در متوازی‌الاضلاع ABCD اگر از رأس A به وسط دو ضلع BC و DC دو پاره‌خط رسم کنیم و قطر BD را نیز رسم نمائیم در صورتی که $AE = ۴$ و $AF = ۶$ باشد، آنگاه طول AN, AM را بیابید.

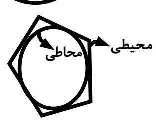


یادآوری: چندضلعی‌های محاطی و محیطی:

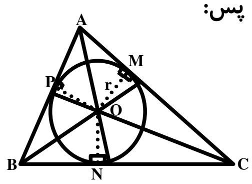
تعریف: چندضلعی محاطی، چندضلعی است که تمام رأس‌های آن بر دایره قرار دارند.



تعریف: چند ضلعی محیطی، چند ضلعی است که تمام اضلاعش بر یک دایره مماسند.



۳- نیمسازها: در هر مثلث، ۳ نیمساز داخلی همرسند و نقطه‌ی همرسی آنها همان مرکز دایره محاطی است پس:



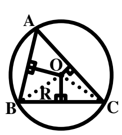
۱- هر مثلث یک دایره‌ی محاطی داخلی دارد.

۲- مرکز دایره‌ی محاطی داخلی، محل همرسی سه نیم‌ساز داخلی است.

۳- شعاع دایره‌ی محاطی داخلی مثلث $r = \frac{S}{P}$ که در آن P نصف محیط مثلث و S مساحت مثلث است.

۴- مرکز دایره محاطی همواره در داخل مثلث قرار می‌گیرد.

۴- عمودمنصف‌ها: در هر مثلث، ۳ عمودمنصف همرسند و نقطه همرسی آنها همان مرکز دایره محیطی مثلث است پس:



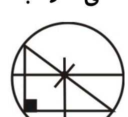
۱- هر مثلث، یک دایره‌ی محیطی دارد.

۲- مرکز دایره‌ی محیطی مثلث، محل همرسی سه عمود منصف مثلث است.

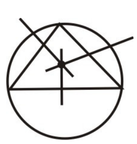
۳- شعاع دایره‌ی محیطی مثلث برابر $R = \frac{abc}{۴S}$ است که در آن S مساحت مثلث و a ،b و c اضلاع مثلث هستند.

۴- مرکز دایره‌ی محیطی مثلث قائم‌الزاویه، وسط وتر است و شعاع آن $\frac{R}{۲}$ است.

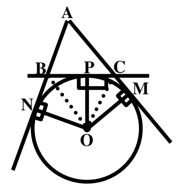
۵- جایگاه مرکز دایره محیطی مثلث به نوع مثلث بستگی دارد.به شکل دقت کنید:


قائم‌الزاویه


منفرجه الزاویه

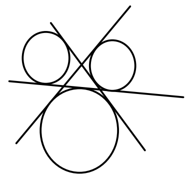

هر ۳ زاویه حاده

۵- یک نیمساز داخلی و دو نیمساز خارجی دیگر: اگر در یک مثلث، نیمساز داخلی رأس A و (۲)نیمساز خارجی رأس‌های C,B را رسم کنیم یکدیگر را در نقطه‌ای قطع می‌کنند که این نقطه همان مرکز دایره محاطی خارجی است.



به دلیل قرارگیری این نقطه روی نیمساز، این نقطه از یک ضلع و امتداد (۲) ضلع دیگر به یک فاصله است.

به دلیل وجود ۳ زاویه برای مثلث، ۳ دایره محاطی خارجی داریم :



شعاع دایره محاطی خارجی نظیر رأس A از دستور زیر تعیین می‌گردد:

$$\begin{cases} r_a = \dfrac{S}{P-a} \\ r_b = \dfrac{S}{P-b} \\ r_c = \dfrac{S}{P-c} \end{cases}$$

نتایج مهم:

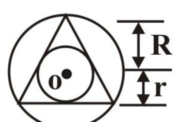
۱) یک نقطه وجود دارد که از اضلاع مثلث به یک فاصله باشد(همان مرکز دایره محاطی داخلی) ولی ۴ نقطه وجود دارد که از اضلاع و یا امتداد آنها به یک فاصله باشد(یکی مرکز دایره محاطی داخلی و ۳ تا مرکز دایره‌های محاطی خارجی)

توجه: در فضا یک خط وجود دارد که از اضلاع یک مثلث به یک فاصله است (خط عمود بر صفحه مثلث در مرکز دایره محاطی داخلی) ولی ۴ خط وجود دارد که از اضلاع و یا امتداد آنها به یک فاصله باشد(خطهای عمود بر صفحه مثلث در مراکز دایره محاطی داخلی و خارجی)

۲) فقط یک نقطه وجود دارد که که از سه راس مثلث به یک فاصله باشد.(مرکز دایره محیطی)

توجه: در فضا یک خط وجود دارد که از هر سه راس مثلث به یک فاصله باشد(خط عمود بر صفحه مثلث در مرکز دایره محیطی)

۳) در مثلث متساوی‌الاضلاع، مرکز دایره محاطی داخلی و محیطی بر هم منطبق است. (زیرا محل تلاقی نیمساز و عمودمنصف بر هم منطبق است)



$$R = \frac{۲}{۳}h ,\ r = \frac{۱}{۳}h$$

توجه: در این مثلث اندازه شعاع همه دایره‌های محاطی خارجی با هم برابر و طول آن برابر طول ارتفاع است.

تست۴۹: اندازه‌ی ضلع مقابل به زاویه‌ی ۶۰ درجه در مثلث قائم‌الزاویه‌ای $۴\sqrt{۳}$ است. شعاع دایره‌ی محیطی مثلث چقدر است؟

۱) ۲ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) ۴

در مثلث قائم‌الزاویه ضلع مقابل به زاویه‌ی ۶۰ درجه برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ وتر است.

$$۴\sqrt{۳} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}\ \text{وتر} \Rightarrow \text{وتر} = ۸ \Rightarrow R = \frac{\text{وتر}}{۲} = ۴$$

تست۵۰: اگر مساحت مثلث متساوی‌الاضلاعی برابر $۳\sqrt{۳}$ باشد. آن‌گاه شعاع دایره‌ی محیطی مثلث کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۳}$ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$

پاسخ:

$$S_{ABC}=\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^{۲} \Rightarrow ۳\sqrt{۳}=\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^{۲} \Rightarrow a^{۲}=۱۲ \Rightarrow a=۲\sqrt{۳}$$

$$R=\frac{\sqrt{۳}}{۳}a \Rightarrow R=\frac{\sqrt{۳}}{۳}\times ۲\sqrt{۳}=۲$$

بنابراین گزینه‌ی (۴) درست است.

تست۵۱: زوایای مثلث با اعداد ۱ و ۵ و ۶ متناسب است. مرکز دایره‌ی محیطی مثلث کجا قرار می‌گیرد؟

۱) خارج مثلث ۲) درون مثلث ۳) وسط ضلع بزرگ‌تر ۴) روی رأس مثلث

پاسخ:

فرض کنید A و B و C زوایای مثلث باشند، داریم:

$$\left.\begin{array}{l} A+B+C=۱۸۰ \\ \frac{A}{۱}=\frac{B}{۵}=\frac{C}{۶} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{A}{۱}=\frac{B}{۵}=\frac{C}{۶}=\frac{A+B+C}{۱+۵+۶}=\frac{۱۸۰}{۱۲}=۱۵ \Rightarrow \begin{cases} A=۱۵ \\ B=۷۵ \\ C=۹۰ \end{cases}$$

پس مثلث قائم‌الزاویه است. بنابراین مرکز دایره‌ی محیطی آن وسط وتر قرار دارد. پس گزینه‌ی (۳) درست است.

تست۵۲: در مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع $\sqrt{۳}$ واحد، طول خط‌المرکزین دو دایره‌ی محیطی و محاطی خارجی آن کدام است؟ (سراسری ریاضی ـ ۷۵)

۱) ۲ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) ۳ ۴) $\frac{۵}{۲}$

$$oo'=r+r_a=\frac{۱}{۳}h+h=\frac{۴}{۳}h$$

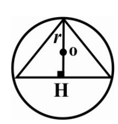
$$\frac{۴}{۳}h=\frac{۴}{۳}(\frac{\sqrt{۳}}{۲}a)=\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}a=\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}(\sqrt{۳})=۲$$

تست۵۳: در دایره‌ای به مساحت $۴\pi\sqrt{۳}$ مثلث متساوی‌الاضلاعی محاط شده است، مساحت مثلث کدام است؟(سراسری ریاضی ـ ۷۸)

۱) ۶ ۲) ۷/۵ ۳) ۸ ۴) ۹

$\frac{a\sqrt{۳}}{۲}$ است ، که a طول هر ضلع مثلث است ، داریم: $R=\frac{۲}{۳}AH$

$$\text{مساحت دایره}=\pi R^{۲} \Rightarrow \pi(\frac{a\sqrt{۳}}{۳})^{۲}=۴\pi\sqrt{۳} \Rightarrow a^{۲}=۱۲\sqrt{۳}$$



$$\Rightarrow S=\frac{a^{۲}\sqrt{۳}}{۴} \Rightarrow S=\frac{۱۲\sqrt{۳}\times\sqrt{۳}}{۴}=۹$$

نکته(فرعی): اگر شعاع‌های دوایر محاطی برونی مثلث ABC را به ترتیب r_a و r_b و r_c و شعاع دایره‌ی محاطی درونی را r اختیار کنیم و مساحت مثلث S باشد و محیط مثلث $2P$ باشد، داریم:

الف) $\boxed{\frac{1}{r}=\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}}$

$$\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{P-a}{S}+\frac{P-b}{S}+\frac{P-c}{S}=\frac{3P-(a+b+c)}{S}=\frac{P}{S}=\frac{1}{r}$$

ب) $\boxed{S^2=r.r_a.r_b.r_c}$

$$r.r_a.r_b.r_c=\frac{S}{P}\times\frac{S}{P-a}\times\frac{S}{P-b}\times\frac{S}{P-c}=\frac{S^4}{P(P-a)(P-b)(P-c)}=\frac{S^4}{S^2}=S^2$$

(دقت کنیم $\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}=S$ (دستور هرون برای محاسبه‌ی مساحت مثلث است.)

ج) $\boxed{\frac{1}{r}=\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}}$

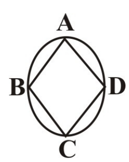
$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{a}{2S}+\frac{b}{2S}+\frac{c}{2S}=\frac{a+b+c}{2S}=\frac{2P}{2S}=\frac{1}{r}$$

چهارضلعی‌های محاطی و محیطی:

چهارضلعی محاطی: اگر در یک چهارضلعی عمودمنصف‌ها همرس باشند آنگاه فاصله نقطه همرسی آنها از همه رئوس یکسان است. بنابراین می‌توان دایره‌ای به این مرکز را طوری رسم کرد که از همه رئوس بگذرد.این چهارضلعی را محاطی و دایره را محیطی مینامند.

پس در چهار ضلعی نیز مرکز دایره محیطی محل برخورد عمودمنصف‌ها می‌باشد.

نکته: یک چهارضلعی محاطی است که در ان مجموع زوایای مقابل 180° باشد و بالعکس:

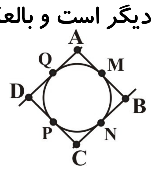


$$\hat{A}+\hat{C}=\hat{B}+\hat{D}=180^\circ$$

چهارضلعی محیطی: اگر در یک چهارضلعی نیمسازها همرس باشند آنگاه فاصله نقطه همرسی آنها از همه اضلاع یکسان است. بنابراین می‌توان دایره‌ای به این مرکز را طوری رسم کرد که بر همه اضلاع مماس باشد.این چهارضلعی را محیطی و دایره را محاطی مینامند.

پس در چهار ضلعی نیز مرکز دایره محاطی محل برخورد نیمسازها می‌باشد.

نکته: در یک چهار ضلعی محیطی، مجموع اندازه‌های هر ۲ ضلع مقابل برابر مجموع اندازه‌های ۲ ضلع مقابل دیگر است و بالعکس.



$$AB+DC=AD+BC$$

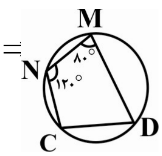
نکته: در این حالت نیز شعاع دایره محاطی نیز از رابطه $r=\frac{s}{p}$ محاسبه می‌شود.

مثال۵۴: در یک چهارضلعی سه نیمساز داخلی همرسند.اگر طول سه ضلع متوالی آن ۱۰و۲۰و۳۰ باشد،آنگاه طول ضلع دیگر کدام است؟

تست۵۵: دو زاویه‌ی مجاور یک چهارضلعی محاطی ۸۰° و ۱۲۰° است. قدر مطلق تفاضل دو زاویه‌ی دیگر چقدر است؟ (آزاد ریاضی ـ ۷۶)

۱) ۲۰°	۲) ۴۰°	۳) ۵۰°	۴) ۳۰°

$$\begin{cases}\hat{M}+\hat{C}=۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{C}=۱۰۰^\circ \\ \hat{N}+\hat{D}=۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{D}=۶۰^\circ\end{cases}$$
$$|\hat{C}-\hat{D}|=۴۰^\circ$$



مثال۵۶: تعیین کنید هریک از چهارضلعی‌های زیر محاطی‌اند و یا محیطی؟

مستطیل:

لوزی:

مربع:

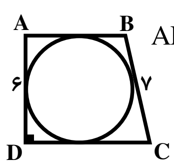
ذوزنقه:

ذوزنقه متساوی‌الساقین:

مثال۵۷: اگر $ABCD$ یک چهارضلعی محیطی باشد که $AB=۴$ و $CD=۸$ و بدانیم مساحت چهارضلعی ۴۸ است، شعاع دایره‌ی محاطی چیست؟

مثال۵۸: ذوزنقه‌ی قائم‌الزاویه‌ای بر یک دایره به شعاع ۳ محیط است. اگر طول ساق غیر قائم آن ۷ باشد، مساحت ذوزنقه چیست؟

پاسخ: اندازه‌ی ساق قائم دو برابر شعاع دایره است، پس:



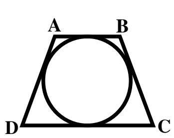
$$AD=۶ \quad \text{و} \quad BC=۷ \quad \Rightarrow \quad AB+DC=۱۳$$

زیرا اگر چهارضلعی محیطی باشد مجموع اندازه‌ی دو ضلع مقابل آن با مجموع اندازه‌ی دو ضلع مقابل دیگرش برابر است. پس:

$$S=\frac{(AB+DC)\times AD}{۲}=\frac{۱۳\times ۶}{۲}=۳۹$$

تست۵۹: یک ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین بر دایره‌ای به شعاع R محیط است. اگر مساحت ذوزنقه ۴۵ واحد مربع باشد، طول ساق کدام است؟

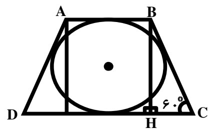
۱) ۷	۲) ۷/۵	۳) ۸	۴) ۸/۵



پاسخ:

$$r=\frac{S}{P}\Rightarrow S=P\times r\Rightarrow ۴۵=P\times ۳ \quad \Rightarrow \quad P=۱۵=AD+BC=۲AD\Rightarrow AD=۷/۵$$

☹**تست۶۰:** یک زاویه‌ی ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین که بر دایره‌ای به شعاع R محیط است، برابر 60° است، طول قاعده‌ی بزرگ‌تر چقدر است؟ (آزاد- ۷۴)



۱) $R\sqrt{3}$

۲) $2R\sqrt{3}$

۳) $2R$

۴) $\frac{3}{2}R$

مثال(مهم)۶۱: اگر در یک ذوزنقه متساوی‌الساقین با قاعده‌های ۴و۹ یک دایره محاط شده باشد.مساحت آن دایره را بیابید.

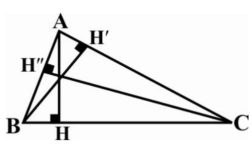
نکته:

تمرین: مساحت ذوزنقه‌ی متساوی الساقینی با ارتفاع ۴ که به دایره‌ای به شعاع $\sqrt{3}$ محیط شده است ۱۴ می‌باشد ، اندازه‌ی دو قاعده‌ی آن کدام است؟

۱) ۴ و ۴　　　۲) ۳ و ۴　　　۳) $2\sqrt{3}$ و ۳　　　۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ و ۴

گزینه (۲)

☹**تست۶۲:** در شکل زیر AH و BH' و CH'' ارتفاعات مثلث هستند، در این شکل چند چهار ضلعی محاطی وجود دارد؟ (آزاد ریاضی ـ ۷۲)



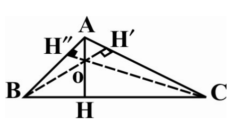
۱) ۶

۲) ۴

۳) ۳

۴) ۱

چهارضلعی‌های $HOH'C$ و $BH''OH$ و $H''OH'A$ محاطی‌اند، زیرا دو زاویه‌ی مقابل آن‌ها مکمل همدیگرند از طرفی اگر قطر دایره‌ی مورد نظر BC باشد، چون زوایای H' و H'' برابر 90° هستند، این دایره از نقطه‌های H' و H'' می‌گذرد. ← چهارضلعی $BH''H'C$ محاطی می‌باشد. از طرفی چهارضلعی‌های $AH'HB$ و $CHH''A$ هم محاطی‌اند. پس کلاً ۶ چهارضلعی محاطی در شکل می‌توان نشان داد.



چندضلعیهای منتظم: در همه چندضلعی‌های منتظم نیمسازها و عمودمنصف‌ها همرسند و نقطه همرسی آنها یکی می‌باشد.پس همه چندضلعی‌های منتظم هم محاطی‌اند و هم محیطی و مراکز این دایره ها یکی هستند.

سوال: در یک nضلعی منتظم اگر طول ضلع برابر a باشد طول r,R را بر حسب n,a بیابید.

تست۶۳: n ضلعی منتظمی به طول ضلع ۲ در دایره‌ای به شعاع ۲ محاط شده است ، تعداد اضلاع این چند ضلعی کدام است؟

۱) ۳		۲) ۶		۳) ۴		۴) ۵

(۲)

تست۶۴: مساحت هشت‌ضلعی منتظمی که در دایره‌ای به شعاع ۲ محاط شده است، چقدر است؟

۱) ۱۶		۲) $۴\sqrt{۲}$		۳) $۸\sqrt{۲}$		۴) ۴

(۳)

تست۶۵: دایره‌ای به شعاع $۳\sqrt{۳}$ را درون یک شش ضلعی منتظم محاط کردیم طول هر ضلع شش ضلعی چقدر است؟

۱) ۳		۲) ۲		۳) ۶		۴) $۳\sqrt{۳}$

(۳)

تست۶۶: n ضلعی منتظم بر دایره‌ای به شعاع ۲ محیط شده است. اگر اندازه‌ی زاویه‌ی مرکزی مقابل به یک ضلع برابر ۳۰ باشد، مساحت این n ضلعی چقدر است؟

۱) $۲۴\sqrt{۳}$		۲) $۴۸\tan ۱۵$		۳) $\frac{۴۸\sqrt{۳}}{۳}$		۴) $\frac{۲۴\sqrt{۳}}{۳}$

(۲)

تست۶۷: معادله‌ی خط یکی از اضلاع یک ۶ ضلعی منتظم که محدود به دو نقطه با طول‌های ۱ و ۳ است به صورت $y = ۲x + ۱$ می‌باشد. شعاع دایره‌ی محاطی در این شش ضلعی چقدر است؟

۱) $۳\sqrt{۵}$		۲) $\sqrt{۲۴}$		۳) ۱۲		۴) $\sqrt{۱۵}$

(۴)

چند نکته:

۱) از هر راس $n-۳$ قطر میگذرد پس تعداد قطرهای nضلعی محدب $\frac{n(n-۳)}{۲}$ است.

۲) در هر n ضلعی محدب، مجموع زوایای خارجی برابر ۳۶۰ است. بنابراین در n ضلعی منتظم هر زاویه خارجی برابر $\frac{۳۶۰}{n}$ است

بنابراین هر زاویه داخلی در n ضلعی منتظم برابر $۱۸۰-\frac{۳۶۰}{n}$ است (یا به عبارت دیگر $\frac{۱۸۰(n-۲)}{n}$)

۳) n ضلعی منتظم همواره دارای n محور تقارن است و فقط بازای n زوج مرکز تقارن دارد.

۴) زاویه بین هر دو قطر متوالی در n ضلعی منتظم، موسوم از یک رأس $\frac{۱۸۰}{n}$ می‌باشد.

مثال۶۸: اندازه زاویه داخلی یک ۱۲ضلعی منتظم چقدر است؟

☺**تست۶۹:** اگر مجموع تعداد اضلاع و اقطار یک چندضلعی محدب برابر ۲۸ باشد، تعداد اضلاع آن کدام است؟

۱) ۱۳ ۲) ۱۷ ۳) ۸ ۴) ۹

پاسخ:

مثال۷۰: اگر در n ضلعی محدب، به تعداد اضلاع (۲) واحد اضافه شود به تعداد قطرها چقدر اضافه می‌شود.

☺**تست۷۱:** اگر تعداد اقطار یک nضلعی محدب ۲۷ باشد، مجموع اندازه‌های زوایای داخلی آن چند درجه است؟

۱) ۱۵۶۰ ۲) ۱۲۴۰ ۳) ۱۲۶۰ ۴) ۱۸۳۰

پاسخ:

$$\frac{n(n-۳)}{۲}=۲۷ \Rightarrow n^۲-۳n-۵۴=۰ \Rightarrow (n-۹)(n+۶)=۰ \Rightarrow n=۹$$

$$(n-۲)۱۸۰=(۹-۲)۱۸۰=۷(۱۸۰^\circ)=۱۲۶۰^\circ$$

☺**تست۷۲:** نسبت تعداد اقطار یک nضلعی محدب به تعداد اضلاع آن ۶ می‌باشد. از یک رأس آن چند قطر می‌گذرد؟

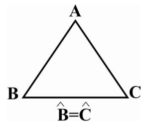
۱) ۸ ۲) ۶ ۳) ۱۲ ۴) ۱۰

پاسخ:

$$\frac{\frac{n(n-۳)}{۲}}{n}=\frac{n-۳}{۲}=۶ \Rightarrow n-۳=۱۲$$

مثلث‌های خاص:

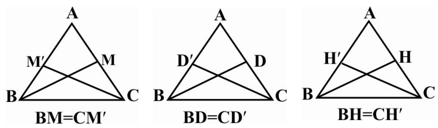
الف) مثلث متساوی‌الساقین:



۱) دو ضلع و زوایای کناری با هم برابرند. $AB = AC \Leftrightarrow \hat{B} = \hat{C}$

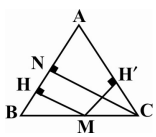
۲) ارتفاع و میانه و نیمساز و عمودمنصف وارد بر قاعده بر هم منطبقند.

۳) ارتفاع های وارد بر ساقها هم‌طولند. میانه‌های وارد بر ساقها نیز هم‌طولند. نیمساز وارد بر ساقها هم هم‌طولند.



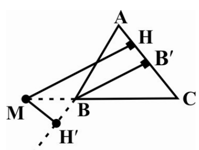
۴) نیمساز نظیر راس با قاعده موازی است.

۵) مجموع فواصل هر نقطه دلخواه بر روی قاعده از دو ساق برابر است با ارتفاع وارد بر ساق.



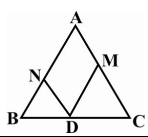
$$\boxed{MH + MH' = CN}$$

۶) تفاضل فواصل هر نقطه دلخواه بر روی امتداد قاعده از دو ساق نیز برابر است با ارتفاع وارد بر ساق.



$$\boxed{\left|MH - MH'\right| = BB'}$$

۷) اگر از یک نقطه دلخواه واقع بر قاعده دو خط به موازات دو ساق رسم کنیم مجموع پاره‌خط های ایجاد شده برابر است با یک از ساق‌ها.



$$\boxed{DN + DM = AC = AB}$$

☺**تست۷۳:** یکی از زاویه‌های مثلث متساوی‌الساقین برابر ۱۰۰ درجه است. نیمساز خارجی یکی از زاویه‌ها ضلع مقابل را با کدام زاویه قطع می‌کند؟ (سراسری ریاضی – ۷۷)

۱) ۲۰°　　۲) ۲۵°　　۳) ۳۰°　　۴) ۴۰°

پاسخ:

☺**تست۷۴:** در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ داریم $AB = AC = ۲$ و $\hat{B} = ۷۵$، آنگاه مجموع فاصله‌های نقطه‌ی M واقع بر قاعده از دو ساق کدام است؟

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) ۴

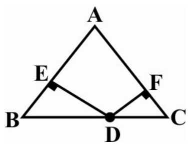
پاسخ:

تست۷۵: در مثلثی به اضلاع ۵ و ۵ و ۶ واحد نقطه‌ی M ضلع بزرگتر را به نسبت ۱ و ۳ تقسیم کرده است، مجموع فواصل M از دو ساق این مثلث کدام است؟

۱) ۳/۶　　۲) ۲/۶　　۳) ۴/۸　　۴) ۵

پاسخ:

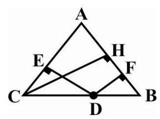
تست۷۶: مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ متساوی‌الساقین است. اگر مساحت مثلث ۶ و طول ضلع AB برابر ۴ باشد، آنگاه:



۱) $DE+DF=۳$　　۲) $DE+DF=۲$

۳) $DE+DF=\frac{۳}{۲}$　　۴) $DE+DF=۱$

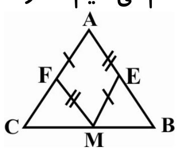
پاسخ:



$S=\frac{۱}{۲}CH\times AB \Rightarrow ۶=\frac{۱}{۲}CH\times ۴ \Rightarrow CH=۳$

بنا به نکات قبل: $CH=DF+DE=۳$

تست۷۷: از نقطه‌ی M روی قاعده‌ی مثلث متساوی‌الساقین $\overset{\Delta}{ABC}$ $(AB=AC)$ دو خط به موازات ساقها رسم می‌کنیم تا دو ساق را در E و F قطع کند اگر طول ساق این مثلث ۱۰ واحد باشد، مطلوب است محیط چهارضلعی $MEAF$؟

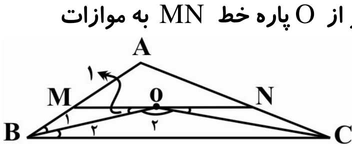


۱) ۱۰　　۲) ۲۰

۳) ۴۰　　۴) ۶۰

پاسخ:

تست۷۸: در شکل زیر OB و OC نیمسازهای زاویه‌ی C,B از مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ هستند اگر از O پاره خط MN به موازات BC رسم شده باشد. آنگاه $MB+NC$ برابر کدام است؟



۱) AB　　۲) AC

۳) BC　　۴) MN

پاسخ:

$$\left.\begin{array}{l} B_۲=O_۱ \\ B_۱=B_۲ \end{array}\right\} \Rightarrow B_۱=O_۱ \Rightarrow \overset{\Delta}{OMB}$$ متساوی‌الساقین:

و به همین روش ثابت می‌شود $\overset{\Delta}{ONC}$ هم متساوی‌الساقین است. چون مثلث‌های $\overset{\Delta}{OMB},\overset{\Delta}{ONC}$ متساوی‌الساقین هستند. داریم:

$$\left.\begin{array}{l} OM=MB \\ ON=NC \end{array}\right\} \xrightarrow{+} OM+ON=MB+NC$$

$$\Rightarrow MN=MB+NC$$

تست۷۹: از رأس A در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ عمودهای AE و AF را بر نیمسازهای خارجی زوایای B و C رسم می‌کنیم. اگر محیط $\overset{\Delta}{ABC}$ برابر ۱۸ باشد، آنگاه طول پاره خط EF کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۲۴ ۳) ۹ ۴) ۸

پاسخ:

ب) در هر مثلث متساوی‌الاضلاع:

۱) طول همه اضلاع برابر و همه زوایا برابر ۶۰ می‌باشد.

۲) همه خواص مثلث متساوی‌الساقین را دارد.

۳) ارتفاع و میانه و نیمساز و عمودمنصف وارد بر یک ضلع همگی بر هم منطبقند.

۴) اگر طول ضلع برابر a باشد آنگاه طول ارتفاع برابر است با $\frac{\sqrt{۳}}{۲}a$ و مساحت برابر است با $\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^{۲}$.

۵) مجموع فاصله‌های هر نقطه واقع در درون یک مثلث متساوی‌الاضلاع از سه ضلع آن مساوی ارتفاع مثلث است.

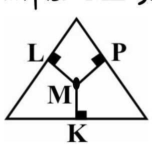
تست۸۰: اگر محیط و مساحت یک مثلث متساوی الاضلاع با هم برابر باشند ارتفاع این مثلث کدام است؟

۱) ۶ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ ۴) ۳

پاسخ:

$$\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^{۲} = ۳a \Rightarrow a\sqrt{۳} = ۱۲ \Rightarrow a = \frac{۱۲}{\sqrt{۳}} \Rightarrow h_a = \frac{\sqrt{۳}}{۲}a = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times \frac{۱۲}{\sqrt{۳}} = ۶$$

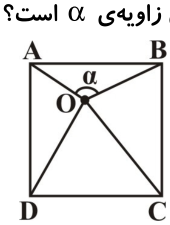
تست۸۱: نقطه‌ی M درون مثلث متساوی الاضلاعی به ضلع $۴\sqrt{۳}$ می‌باشد. اگر $MP = ۱$ و $MK = ۲$ مقدار ML کدام است؟



۱) ۳ ۲) ۲
۳) ۵ ۴) ۹

پاسخ:

تست۸۲: در شکل روبه‌رو چهارضلعی $ABCD$ مربع است و $AB = OD = OC$، اندازه‌ی زاویه‌ی α است؟

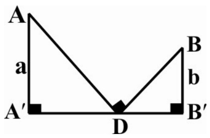


۱) ۱۲۰° ۲) ۱۵۰°
۳) ۱۳۵° ۴) ۱۶۰°

پاسخ:

همنهشتی دو مثلث: حالت‌هائی که دو مثلث هم‌نهشت می‌باشند عبارتند از برابری سه ضلع (ض ض ض)،برابری دو ضلع و زاویه‌ی بین (ض ز ض) و دو زاویه و ضلع بین(زض ز).

😐تست۸۳: در شکل روبرو، $AD = DB$ ، $A\hat{D}B =$ ۹۰ است. اندازه‌ی پاره‌خط $A'B'$ چقدر است؟

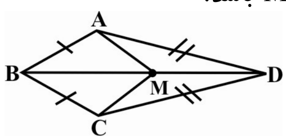


۱) $a+b$ ۲) $2a$

۳) $2b$ ۴) $b-a$

پاسخ:

😐تست۸۴: در شکل روبرو چند نقطه می‌توان روی BD اختیار کرد به طوری که $MA = MC$ باشد؟



۱) بی‌شمار ۲) سه تا

۳) هیچ نقطه‌ای نمی‌توان یافت. ۴) یکی

پاسخ:

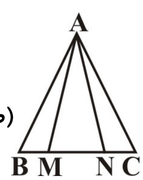
😐تست۸۵: قاعده‌ی BC از مثلث متساوی‌الساقین ABC، دو نقطه‌ی M و N را چنان اختیار می‌کنیم که $NC = BM$ ، این نقاط را به رأس A وصل می‌کنیم. مثلث AMN همواره چگونه است؟ (سراسری تجربی – ۶۲)

۱) غیرمشخص ۲) متساوی‌الاضلاع ۳) متساوی‌الساقین ۴) قائمه‌الزاویه

پاسخ:

گزینه‌ی ۳

دو مثلث ABM و ANC در حالت (ض ز ض) هم‌نهشت‌اند. زیرا:



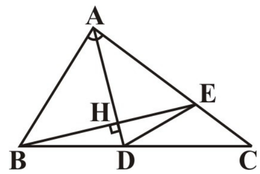
$$\left.\begin{array}{l} AB = AC \\ \hat{B} = \hat{C} \\ BM = NC \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABM} = \overset{\Delta}{ANC}$$ (ض ز ض)

پس اجزاء نظیرشان با هم برابر است. یعنی:

$AM = AN$

بنابراین مثلث AMN همواره متساوی‌الساقین است.

☹**تست۸۶:** در مثلث ABC، $\hat{A} = ۷۰^\circ$ و $\hat{C} = ۵۰^\circ$ است. از رأس B عمودی بر نیمساز AD رسم کرده، امتداد می‌دهیم تا ضلع AC را در E قطع کند. زاویه‌ی $B\hat{E}D$ چند درجه است؟



۱) ۱۰°　　۲) ۵۰°

۳) ۲۰°　　۴) ۱۵°

پاسخ:

تعریف انواع خم :

۱- خم مسطح: مجموعه‌ای از نقطه‌ها که بتوانیم بدون بلند کردن قلم از روی کاغذ آن‌ها را رسم کنیم.

۲- خم ساده: خم مسطحی که هیچ یک از نقطه‌های خود را قطع نکند، مگر در حالتی که نقطه‌های انتهایی به هم می‌رسند.

۳- خم بسته: اگر نقطه‌های انتهایی یک خم بر هم منطبق باشند، آن خم بسته نامیده می‌شود.

☺**تست۸۷:** کدام یک از خم‌های زیر، خم غیر ساده‌ی بسته است؟

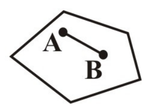
۱)  ۲)  ۳)  ۴) 

قضیه‌ی خم جردن: هر خم مسطح ساده‌ی بسته، صفحه را به سه مجموعه جدا از هم درون، بیرون و روی خم تقسیم می‌کند.

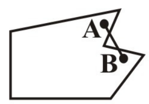
تعریف چندضلعی: یک خم ساده‌ی بسته است که از اجتماع حداقل سه پاره‌خط تشکیل شده باشد به طوری که نقطه‌های انتهایی پاره‌خط‌ها روی یک صفحه بوده و هیچ سه نقطه‌ی متوالی از آن‌ها روی یک خط قرار نگرفته باشند.

ناحیه: اجتماع یک خم ساده‌ی بسته با درون آن یک ناحیه نامیده می‌شود.

تعریف: یک ناحیه را محدب گویند هرگاه پاره‌خطی که هر دو نقطه‌ی دلخواه آن ناحیه به هم وصل می‌کند، کاملاً درون ناحیه قرار بگیرد.ناحیه‌ای که محدب نباشد مقعر است. به‌طور مثال ناحیه‌ی (الف) ناحیه‌ی محدب و ناحیه‌ی (ب) مقعر است.



الف – ناحیه‌ی محدب

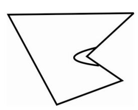


ب – ناحیه‌ی مقعر

نکته: در چند ضلعی‌های مقعر:

۱- حداقل یک زاویه‌ی بیش از 180° داشته باشد.

۲- امتداد بعضی اضلاع شکل را قطع می‌کند.



نکته: در چند ضلعی محدب:

۱- همه زوایا از ۱۸۰ کوچکترند.

۲- امتداد هیچ ضلعی شکل را قطع نمی‌کند.

نکته: متوازی‌الاضلاع و مستطیل و لوزی و مربع به صورت زیر تعریف می‌شوند:

متوازی‌الاضلاع، چهارضلعی است که زوایای روبه‌روی آن با هم برابر باشند.

متوازی‌الاضلاع، چهارضلعی است که قطرهایش منصف یکدیگرند.

متوازی‌الاضلاع، چهارضلعی است که زوایای مجاور آن مکمل یکدیگرند.

متوازی‌الاضلاع، چهارضلعی است که دو ضلع روبه‌روی آن موازی و مساوی باشند.

مستطیل از روی متوازی‌الاضلاع تعریف می‌شود:

مستطیل، متوازی‌الاضلاعی است که یک زاویه‌ی قائمه دارد.

مستطیل، متوازی‌الاضلاعی است که قطرهایش با هم برابرند.

لوزی، متوازی‌الاضلاعی است که اضلاع برابر دارد.

مربع، مستطیلی است که طول و عرض آن با هم برابر باشد.

مثال۸۸: تعیین کنید کدامیک ازجملات زیر صحیح و کدامیک غلطند؟

مستطیل متوازی‌الاضلاعی است که قطرهایش یکدیگر را نصف می‌کنند.

مستطیل متوازی‌الاضلاعی است که قطرهایش برهم عمودند.

لوزی متوازی‌الاضلاعی است که قطرهایش هم طولند.

لوزی مستطیلی است که قطرهایش برهم عمودند.

لوزی نوعی مربع است.

مستطیل نوعی متوازی‌الاضلاع است.

مربع متوازی‌الاضلاعی است که قطرهای هم‌طول و عمود برهم دارد.

☺**تست۸۹:** کدام چهار ضلعی الزاماً مربع است؟

۱) لوزی که بر یک دایره محیط می‌شود.
۲) متوازی‌الاضلاعی که قطرهایش بر هم عمودند.
۳) مستطیلی که بر یک دایره محیط می‌شود.
۴) متوازی‌الاضلاعی که قطرهایش منصف یکدیگرند.

(۳)

☺**تست۹۰:** کدام یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟

۱) لوزی با قطرهای مساوی مربع است.
۲) متوازی‌الاضلاعی که قطرهایش منصف یکدیگرند مستطیل است.
۳) چهارضلعی که قطرهایش بر هم عمود است لوزی می‌باشد.
۴) لوزی که بر یک دایره محیط می‌شود مربع است.

(۱)

☺**تست۹۱:** کدام چهارضلعی الزاماً مربع است؟

۱) لوزی که قطرهایش برهم عمودند.
۲) مستطیلی که قطرهایش بر هم عمودند.
۳) متوازی‌الاضلاعی که قطرهایش بر هم عمودند.
۴) مستطیلی که قطرهایش منصف یکدیگرند.

(۲)

☺**تست۹۲:** کدام گزینه الزاماً یک مربع نیست؟

۱) لوزی که زاویه‌های آن برابر باشند.
۲) مستطیلی که قطرهای آن نیمساز زوایای آن باشند.
۳) چهارضلعی که دو قطر مساوی و عمود بر هم داشته باشد.
۴) لوزی که قطرهای آن برابر باشند.

(۳)

☺**تست۹۳:** اگر اضلاع یک مربع را به یک اندازه و در یک جهت امتداد دهیم شکل حاصل کدام است؟

۱) لوزی ۲) مربع ۳) مستطیل ۴) ذوزنقه‌ی متساوی الساقین

(۲)

مکان هندسی:

الف) سوالات ترسیمی: مکانهای هندسی معروف:

۱) مکان هندسی نقاطی که از یک نقطه ثابت به فاصله ثابت می‌باشد
در صفحه .... و در فضا............ می‌باشد.

۲) مکان هندسی نقاطی که از دوسر یک پاره‌خط به یک فاصله‌اند
در صفحه......................... و در فضا............................... می‌باشد.

۳) مکان هندسی نقاطی که از دو خط متقاطع به یک فاصله باشند
در صفحه......................... و در فضا............................... می‌باشد.

۴) مکان هندسی نقاطی که از یک خط به فاصله مشخصی باشند
در صفحه................................ و در فضا......................... می‌باشد.

۵) مکان هندسی نقاطی که از دو خط موازی به یک فاصله باشند
در صفحه........................... و در فضا...............................می‌باشد.

مثال۹۴: مکان هندسی مرکز دوایری به شعاع r که بر روی دایره‌ای به شعاع R می‌غلتد چیست؟

مثال۹۵: مکان هندسی مرکز دوایری که در نقطه A بر خط d مماس باشد چیست؟

مثال۹۶: دایره‌ای به شعاع ۴ مفروض است و مکان هندسی نقاطی را بیابید که از آنها بتوان دو مماس با خاصیتهای زیر رسم کرد:

الف: مماس به طول۳.

ب: مماس عمود برهم.

ج: مماس با زاویه ۶۰ درجه.

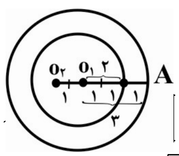
تست۹۷: دو دایره‌ی $c_۱$ به شعاع $R_۱ = ۲$ و $c_۲$ به شعاع $R_۲ = ۴$ مفروضند ، اگر فاصله‌ی مرکز دو دایره باشد چند نقطه روی محیط دایره‌ی $c_۲$ یافت می‌شود که دایره‌ی $c_۱$ به زاویه‌ی قائمه رؤیت شود؟(آزاد ریاضی ـ عصر ۸۵)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) بی‌شمار ۴) صفر

دو دایره‌ی $C_۱$ و $C_۲$ متداخل می‌باشند.

$d_۱ = ۱ , R_۲ - R_۱ = ۲ \Rightarrow d_۱ < R_۲ - R_۱$

مکان هندسی نقاطی از صفحه که از آن نقاط همواره دو مماس عمود بر هم بر دایره‌ی $C_۱$ بتوان رسم نمود ، دایره ایست به همان مرکز و به شعاع $\sqrt{۲}R_۱$



حال دایره به مرکز $O_۱$ و به شعاع $۲\sqrt{۲}$ دایره‌ی $C_۲$ را قطع نمی‌کند، زیرا: $(O_۱A = ۳ , ۲\sqrt{۲} < ۳)$

مثال۹۸: مکان هندسی نقاطی که مجموع فواصلشان از دو خط موازی برابر مقدار ثابت a باشد.(فاصله دو خط را برابر k فرض کنید)

مثال۹۹: مکان هندسی نقاطی که تفاضل فواصلشان از دو خط موازی برابر مقدار ثابت a باشد.(فاصله دو خط را برابر k فرض کنید)

مثال۱۰۰: مکان هندسی نقاطی که مجموع فواصلشان از دو خط متقاطع برابر مقدار ثابت باشد.

مثال۱۰۱: مکان هندسی نقاطی که تفاضل فواصلشان از دو خط متقاطع برابر مقدار ثابت باشد.

مثال۱۰۲: یک خط و یک صفحه موازی به فاصله k مفروضند.مکان هندسی نقاطی از صفحه را بیابید که از خط به فاصله ثابتa باشند.

مثال۱۰۳: ۲خط موازی و نقطه A بین آنها قرار دارد.مکان هندسی نقاطی از صفحه را بیابید که از دو خط به یک فاصله باشد و از نقطه به فاصله ثابت m باشد.

مثال۱۰۴: ۲خط متقاطع و یک نقطه خارج از آنها قرار دارد.چند نقطه وجود دارد که از ۲خط به یک فاصله بوده و از نقطه به فاصله ثابت m باشد.

تمرین: در مورد سوال فوق در فضا فکر کنید.

تمرین: دو صفحه متقاطع p', p وخط d خارج از آنها قرار دارد.مکان هندسی نقاطی را بیابید که از دو صفحه به یک فاصله بوده و از خط نیز به فاصله ثابتm باشد.

ب) سوالات تحلیلی:

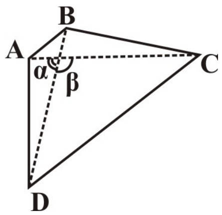
مثال۱۰۵: مکان هندسی نقاطی که فاصله آنها از نقطه $A(۱,۰)$ دو برابر فاصله‌شان از خط $x = ۱$ باشد چیست؟

مثال۱۰۶: مکان هندسی مرکز دوایری که که بر دو دایره ثابت متخارج مماس خارج باشد چیست؟

مثال۱۰۷: مکان هندسی مرکز دوایری که بر دو دایره متداخل مماس است چیست؟

فرمولهای محاسبه مساحت:

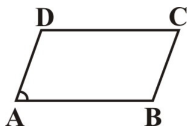
۱) در هر چهارضلعی دلخواه مساحت برابر است با نصف حاصلضرب دو قطر در سینوس زاویه بین آنها:



$$S = \frac{۱}{۲}(AC)(BD)\sin\beta$$

$$S = \frac{۱}{۲}(AC)(BD)\sin\alpha$$

۲) مساحت متوازی الاضلاع: علاوه بر روش فوق:

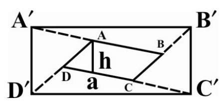


الف: ضرب دو ضلع در سینوس زاویه بین: $S = (AD)(AB)\sin A$

ب: ضرب قاعده در ارتفاع: $S = AB.DH$

نکته: اقطار متوازی‌آلاضلاع، آن را به ۴ مثلث معادل (هم‌مساحت) تقسیم می‌کنیم به طوری که هر (۲) مثلث روبه‌رو هم‌نهشت است.

نکته: اگر اضلاع متوازی‌الاضلاعی را در یک جهت و به اندازه‌ی خودش امتداد دهیم شکل حاصل متوازی‌الاضلاعی است که مساحت آن ۵ برابر مساحت متوازی‌الاضلاع اولیه است.



۳) مساحت لوزی:

الف: نصف ضرب دو قطر (چون زاویه بین قطرها ۹۰ است)

ب: مربع یک ضلع در سینوس یک زاویه.

ج: ضرب هر ضلع در ارتفاع وارد بر همان ضلع.

۴) مساحت مستطیل:

الف: ضرب دو ضلع

ب: نصف حاصلضرب دو قطر در سینوس زاویه بین.

۵) مساحت مربع:

الف: مربع یک ضلع

ب: نصف مربع قطر

۶) مساحت مثلث:

الف: نصف حاصلضرب هر ضلع در ارتفاع وارد بر همان ضلع: $S = \frac{a.h_a}{۲} = \frac{b.h_b}{۲} = \frac{c.h_c}{۲}$

ب: نصف حاصلضرب دو ضلع در سینوس زاویه بین آنها: $S = \frac{۱}{۲}AB.AC.\sin A$

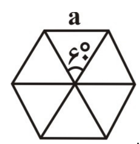
ج: همچنین مساحت هر مثلث را با ۳ طول c,b,a از دستور هِرون طبق زیر می‌توان به دست آورد:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

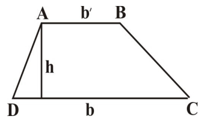
۷) مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع: $S=\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^{۲}$

همچنین مقدار ارتفاع آن از رابطه $h=\frac{\sqrt{۳}}{۲}a$ بدست می‌آید.

۸) شش‌ضلعی منتظم از شش مثلث متساوی‌الاضلاع هم‌نهشت تشکیل شده است. پس مساحت آن برابر است با:



$$S=۶\times(\frac{a^{۲}\sqrt{۳}}{۴})=\frac{۳a^{۲}\sqrt{۳}}{۲}$$



۹) مساحت ذوزنقه: نصف مجموع دو قاعده ضربدر ارتفاع: $S=\frac{۱}{۲}h(b+b')$

نکته: اگر در یک ذوزنقه قطرها را رسم کنیم فقط دو مثلث چپی و راستی هم مساحت اند.(قضیه شبه پروانه)

۱۰) دایره: $s=\pi r^{۲}$

۱۱) قطاع با زاویه α رادیان: $s=\frac{۱}{۲}\alpha r^{۲}$

تست۱: طول قاعده‌ی مستطیلی که مساحت آن ۸۰ و محیطش ۳۶ می‌باشد، کدام است؟

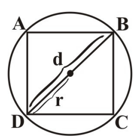
۱) ۶ یا ۹ ۲) ۷ یا ۶ ۳) ۵ یا ۹ ۴) ۸ یا ۱۰

پاسخ:

تست۲: مساحت مربعی که در دایره‌ای به شعاع ۱۲ محاط است کدام است؟

۱) ۳۰۰ ۲) ۲۶۰ ۳) ۲۴۰ ۴) ۲۸۸

پاسخ: گزینه‌ی ۴



$$r=۱۰\Rightarrow d=۲(۱۲)=۲۴$$
$$S=\frac{۱}{۲}d^{۲}=\frac{۱}{۲}(۲۴)^{۲}=۲۸۸$$

تست۳: اگر محیط مستطیلی ۱۶ و طول قطر آن ۶ باشد، مساحت آن کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۱۶ ۳) ۱۴ ۴) ۱۸

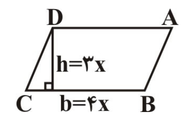
پاسخ:

تست۴: اگر مساحت یک متوازی‌الاضلاع ۷۲ و نسبت طول ارتفاع به طول قاعده‌ی آن $\frac{۳}{۴}$ باشد، طول ارتفاع آن کدام است؟

۱) $\sqrt{۶}$ ۲) $۲\sqrt{۶}$ ۳) $۳\sqrt{۶}$ ۴) $۴\sqrt{۶}$

پاسخ:

فرض کنیم طول ارتفاع برابر ۲x و طول قاعده برابر ۳x باشد.



$$S = b.h$$

$$۷۲ = (۳x)(۴x) = ۱۲x^{۲} \Rightarrow x^{۲} = \frac{۷۲}{۱۲} = ۶ \Rightarrow x = \sqrt{۶}$$

$$h = ۳x = ۳\sqrt{۶}$$

تست۵: مساحت چهارضلعی محدبی که قطرهای آن برابر ۸ و ۵ است و زاویه‌ی بین اقطار آن ۶۰° است ، کدام گزینه می‌باشد؟

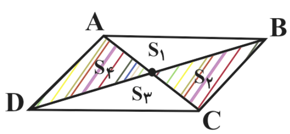
۱) $۱۰\sqrt{۳}$ ۲) ۱۰ ۳) $۱۰\sqrt{۲}$ ۴) $۲۰\sqrt{۳}$

$$S = \frac{۱}{۲} \times ۸ \times ۵ \times \sin ۶۰ = ۲۰ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۱۰\sqrt{۳}$$

تست۶: زاویه‌ی بین اقطار متوازی‌الاضلاع شکل رو به رو که اندازه‌ی قطرهای آن ۱۲ و ۹ می‌باشد ، ۴۵° است، حاصل $S_{۲} + S_{۴}$ کدام است؟

۱) $\frac{۲۷}{۲}$ ۲) $۲۷\sqrt{۲}$

۳) ۲۷ ۴) $\frac{۲۷\sqrt{۲}}{۲}$

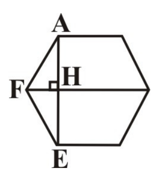


مثال۷: اگر در مثلث ABC داشته باشیم، $AB = ۸$ و $AC = ۶$ و مساحت مثلث ماکزیمم باشد آنگاه طول میانه وارد بر ضلع دیگر را بیابید.

تست۸: در شش‌ضلعی منتظم به ضلع a حاصل $AE \times FH$ چقدر است؟ (آزاد پزشکی – ۷۹)

۱) $\frac{a^{۲}\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $a^{۲}\sqrt{۳}$

۳) $\frac{a^{۲}\sqrt{۳}}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۲}a^{۲}\sqrt{۳}$

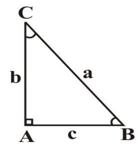


پاسخ:

تست۹: یک زاویه‌ی ذوزنقه‌ی قائم‌الزاویه‌ای ۴۵° است. اگر ارتفاع آن برابر ۸ و قاعده‌ی کوچک آن ۴ باشد، مساحت ذوزنقه چقدر است؟

۱) ۶۴ ۲) ۳۲ ۳) ۴۸ ۴) ۵۲

نکات مثلث قائم الزاویه:



۱) قضیه فیثاغورس: در هر مثلث قائم‌الزاویه، مربع وتر برابر با مجموع مربعات دو ضلع دیگر است. $a^۲ = b^۲ + c^۲$

۲) در مثلث قائم‌الزاویه،ارتفاع وارد بر وتر واسطه‌ی هندسی است بین دو قطعه‌ای که ارتفاع بر وتر پدید می‌آورد.

$AH^۲ = BH \times CH$

۳) در هر مثلث قائم‌الزاویه،مربع هر ضلع زاویه‌ی قاعده برابر است با حاصلضرب وتر در طول تصویر آن ضلع بر وتر.

$AB^۲ = BC \times BH$

$AC^۲ = BC \times CH$

۴) حاصلضرب ارتفاع وارد بر وتر در وتر برابر است با حاصلضرب دو ضلع قائمه.

۵) در هر مثلث قائم‌الزاویه ،میانه‌ی وارد بر وتر نصف وتر باشدوبالعکس.

$AM = \frac{BC}{۲}$

۶) در مثلث قائم‌الزاویه،ضلع مقابل به زاویه‌ی ۳۰° برابر است با نصف وتر و ضلع مقابل به زاویه‌ی ۴۵° برابر $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ وتر وضلع مقابل به زاویه‌ی ۶۰° برابر است با $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ وتر.

۸) در مثلث قائم‌الزاویه ،اگر یک زاویه‌ی حاده‌ی آن ۱۵° باشد،ارتفاع وارد بر وتر $\frac{۱}{۴}$ وتر می‌باشد. $h = \frac{a}{۴}$

تست۱۰: طول اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای $۲x+۱$ و $۲x-۱$ و x است $(x>۱)$. طول ضلع متوسط کدام است؟ (سراسری تجربی)

۱) ۱۳ ۲) ۱۵ ۳) ۱۷ ۴) ۱۹

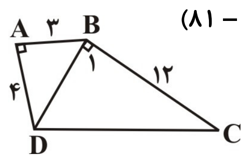
پاسخ: گزینه‌ی ۲

چون x مقداری مثبت است، پس $۲x+۱$ بزرگ‌ترین ضلع مثلث و در نتیجه وتر است.

$$(۲x+۱)^۲ = x^۲ + (۲x-۱)^۲ \Rightarrow ۴x^۲+۴x+۱ = x^۲+۴x^۲-۴x+۱ \Rightarrow x^۲-۸x=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ & \text{غیر قابل قبول} \\ x=۸ \end{cases}$$

بنابراین طول ضلع‌های مثلث برابر است با: ۱۷، ۱۵ و ۸ که طول ضلع متوسط ۱۵ است.

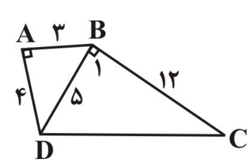
تست۱۱: مساحت چهارضلعی مقابل چقدر است؟ $(\hat{A}=\hat{B}_۱=۹۰^\circ)$ (آزاد پزشکی – ۸۱)



۱) ۶۴ ۲) ۷۲

۳) ۳۶ ۴) ۳۲

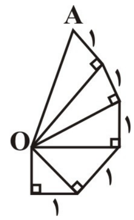
مساحت چهارضلعی $ABCD$ از جمع مساحت‌های دو مثلث ABD و BDC به‌دست می‌آید:



$S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BDC}$

$= (\frac{۱}{۲} \times ۳ \times ۴) + (\frac{۱}{۲} \times ۵ \times ۱۲) = ۶ + ۳۰ = ۳۶$

تست۱۲: در شکل زیر طول پاره‌خط OA کدام است؟ (سراسری ریاضی – ۷۰)

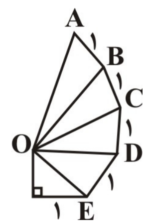


۱) ۳ ۲) $\sqrt{۵}$

۳) $\sqrt{۶}$ ۴) $\sqrt{۷}$

پاسخ: گزینه‌ی ۳

با نوشتن رابطه‌ی فیثاغورس به سادگی طول OA به‌دست می‌آید:

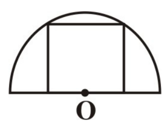


$$OE^۲ = ۱+۱ = ۲ \Rightarrow OE = \sqrt{۲}$$
$$OD^۲ = ۲+۱ = ۳ \Rightarrow OD = \sqrt{۳}$$

با همین روش طول اضلاع OC، OB و OA به دست می‌آید:

$$OC = \sqrt{۴} = ۲\ ,\ OB = \sqrt{۵}\ ,\ OA = \sqrt{۶}$$

تست۱۳: در شکل زیر شعاع نیم‌دایره برابر ۷/۵ سانتی‌متر است. مساحت مربع چند سانتی‌متر مربع است؟ (سراسری ریاضی – ۷۲)



۱) ۳۰ ۲) ۳۶

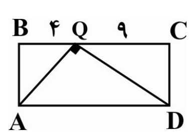
۳) ۴۵ ۴) ۵۴

پاسخ:

مثال۱۴: طول ضلع ۸ضلعی که در یک مربع به ضلع ۲ محاط شده است را بیابید.

مثال۱۵: مساحت یک ۸ضلعی به ضلع ۱ را بیابید که درون یک مربع محاط شده است.

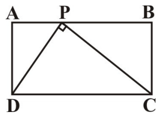
تست۱۶: در مستطیل $ABCD$ نقطه‌ی Q را بر طول BC طوری انتخاب می‌کنیم که $QC=۹, BQ=۴$ بوده و مثلث $\overset{\Delta}{AQD}$ در رأس Q قائمه باشد عرض مستطیل کدام است؟



۱) ۴ ۲) ۶

۳) ۹ ۴) ۵

☺**تست۱۷:** در مستطیل شکل زیر $\hat{P} = ۹۰^\circ$ ، $۳AP = BP = ۹$. طول DP کدام است؟ (سراسری تجربی – ۸۱)



۱) ۵		۲) $۳\sqrt{۳}$

۳) $۴\sqrt{۲}$		۴) ۶

پاسخ:

☺**تست۱۸:** طول ساق یک مثلث متساوی‌الساقین $\sqrt{۸۵}$ سانتی‌متر و طول قاعده‌ی آن ۱۲ سانتی‌متر است. مساحت مثلث چند سانتی‌متر مربع است؟ (سراسری تجربی – ۸۰)

۱) $۲۴\sqrt{۳}$		۲) ۴۲		۳) $۳۰\sqrt{۲}$		۴) ۴۸

پاسخ:

😐**تست۱۹:** اگر طول یکی از قطرهای لوزی ۲۰ و طول ضلع لوزی ۱۵ باشد، مقدار مساحت لوزی کدام است؟

۱) $۱۰\sqrt{۲}$		۲) $۱۰۰\sqrt{۲}$		۳) $۱۰۰\sqrt{۵}$		۴) $۱۰\sqrt{۵}$

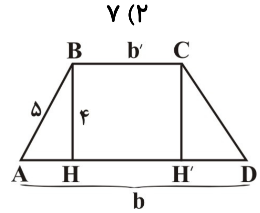
پاسخ:

😐**تست۲۰:** در یک ذوزنقه متساوی‌الساقین اگر طول قاعده‌ها ۲۴ و ۱۲ و طول ساق ۱۰ باشد، مقدار مساحت ذوزنقه کدام است؟

۱) ۱۳۰		۲) ۱۳۲		۳) ۱۴۴		۴) ۱۲۶

😐**تست۲۱:** اگر در یک ذوزنقه متساوی‌الساقین طول هر ساق ۵ و طول ارتفاع ۴ باشد و مساحت ذوزنقه برابر ۴۰ باشد، طول قاعده‌ی کوچک‌تر کدام است؟

۱) ۸		۲) ۷		۳) ۱۰		۴) ۹



$$S = \frac{۱}{۲}h(b+b') \Rightarrow ۴۰ = \frac{۱}{۲}(۴)(b+b') \Rightarrow b+b' = ۲۰ \quad (۱)$$

$$AH = DH' = ۳ \quad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow b+b' = ۲b' + ۲AH = ۲۰ \Rightarrow ۲b' + ۶ = ۲۰ \Rightarrow b' = ۷$$

😐**تست۲۲:** در ذوزنقه‌ی متساوی الساقینی قاعده‌ی کوچک ۶ و قاعده‌ی بزرگ ۱۰ می‌باشد و اندازه‌ی قطر آن ۱۰ می‌باشد، مساحت ذوزنقه چقدر است؟

۱) ۳۶		۲) ۶۴		۳) ۴۸		۴) ۵۸

مثال۲۳: در یک مثلث قائم‌الزاویه ارتفاع وارد بر وتر بر روی آن قطعه هایی به طول ۴و۹ ایجاد می‌کند.مساحت این مثلث چقدر است؟

مثال۲۴: در مثلث ABC اگر $A=۹۰$ باشد و ارتفاع AH و میانه AM رسم شوند،مقادیر HB,HC به ترتیب ۹و۴ می‌شود.مساحت مثلث AMH چقدر است؟(سراسری ۸۲)

مثال۲۵: در مثلث قائم‌الزاویه‌ای، اندازه‌های میانه و ارتفاع وارد بر وتر به ترتیب ۳ و $۲\sqrt{۲}$ می‌باشد، اندازه ضلع متوسط این مثلث برابر چند است؟ (سراسری ۸۳)

تست۲۶: در مثلث ABC، $\hat{A}=۴۵^\circ$، اندازه‌ی ارتفاع BH برابر با ۳ متر و مساحت مثلث برابر $\frac{۹}{۲}(۱+\sqrt{۳})$ متر مربع است. ضلع a چند متر است؟ (سراسری ریاضی – ۶۴)

۱) ۳　　۲) ۴/۵　　۳) ۵　　۴) ۶

تست۲۷: در یک ذوزنقه اگر امتداد ساقها برهم عمود باشند و مجموع مجذورات قاعده‌ها برابر ۵ باشد،آنگاه مجموع مجذورات اقطار کدامست؟

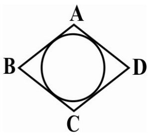
۱)۲　　۲)۵　　۳)۱۰　　۴)غیر قابل محاسبه

تست۲۸: لوزی را بر دایره‌ای به شعاع r محیط کردیم، اگر $a=۶$ و $b=۴$ اقطار لوزی باشد r کدام است؟

۱) $\frac{۶\sqrt{۱۳}}{۱۳}$　　۲) $۶\sqrt{۱۳}$　　۳) ۳　　۴) ۴

تمرین۲۹: در لوزی $ABCD$ $\hat{D}=۶۰$ و $\hat{A}=۱۲۰$ اگر طول ضلع لوزی ۶ باشد و این لوزی را بر دایره‌ای محیط کنیم، شعاع آن دایره کدام است؟

۱) $\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $\sqrt{۳}$



تمرین۳۰: در لوزی $ABCD$ به ضلع a، $\hat{A}=۱۲۰^\circ$ است، مقدار AE کدام است؟

۱) $\frac{(۲-\sqrt{۳})}{۲}a$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}a$ ۳) $(\frac{۲-\sqrt{۳}}{۴})a$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}a$

تمرین۳۱: مساحت یک مربع به ضلع X دو برابر مساحت یک لوزی به ضلع X است. $\tan$ زاویه‌ی کوچک‌تر لوزی چقدر است؟

۱) $۲-\sqrt{۳}$ ۲) $۲\sqrt{۳}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۴) ۱

خواص تناسب :

اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ باشد آنگاه موارد زیر نتیجه می‌شود:

الف) طرفین- وسطین: $ad=bc$

ب) ترکیب در صورت و ترکیب در مخرج: $\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}$, $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$

ج) تفضیل در صورت و تفضیل در مخرج: $\frac{a}{a-b}=\frac{c}{c-d}$, $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$

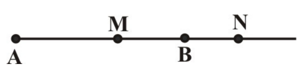
د) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$

مثال۱: پاره خط AB به طول ۱۰ مفروض است. نقاط M, N را بر روی آن طوری در نظر می‌گیریم که $\frac{AM}{BM}=\frac{BN}{AN}=\frac{۲}{۳}$ برقرار است.طول پاره خط MN چقدر است؟

تست۲: بر پاره‌خط مفروض AB به طول ۱۲ سانتی‌متر و بر امتداد آن دو نقطه‌ی M و N را چنان اختیار می‌کنیم که نسبت فاصله‌های هریک از آن‌ها از نقاط A و B مساوی ۴ باشد. فاصله‌ی این دو نقطه کدام است؟

۱) ۴/۶　　۲) ۷/۲　　۳) ۶/۴　　۴) ۱۰

پاسخ: گزینه‌ی (۳)



$$\frac{MA}{MB}=\frac{NA}{NB}=۴ \Rightarrow \frac{MA}{MB}=\frac{۴}{۱} \Rightarrow \frac{MA}{MA+MB}=\frac{۴}{۴+۱} \Rightarrow \frac{MA}{۱۲}=\frac{۴}{۵} \Rightarrow MA=\frac{۴۸}{۵}$$

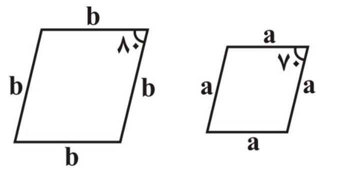
$$\frac{NA}{NB}=۴ \Rightarrow \frac{NA}{NA-NB}=\frac{۴}{۴-۱} \Rightarrow \frac{NA}{NB}=\frac{۴}{۳} \Rightarrow NA=۱۶$$

$$MN=NA-MA=۱۶-\frac{۴۸}{۵}=\frac{۳۲}{۵}=۶/۴$$

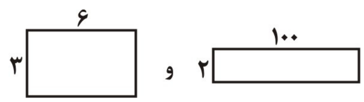
تعریف دو چندضلعی متشابه: دو nضلعی $A_1A_2A_3\ldots A_n$ و $B_1B_2B_3\ldots B_n$ متشابه هستند، اگر و فقط اگر زوایای نظیر به نظیر برابر و اضلاع متناسب داشته باشند.

$$1)\hat{A}_1=\hat{B}_1,\hat{A}_2=\hat{B}_2,\ldots,\hat{A}_n=\hat{B}_n \quad \text{و} \quad 2)\frac{A_1A_2}{B_1B_2}=\frac{A_2A_3}{B_2B_3}=\ldots=\frac{A_{n-1}A_n}{B_{n-1}B_n}$$

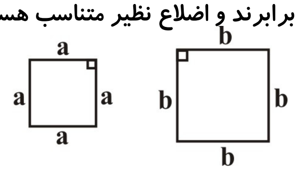
مثال: هر دو لوزی دلخواه متشابه نیستند. زیرا ممکن است زوایای نظیر مساوی نداشته باشند (با توجه به این‌که نسبت اضلاع همواره $\frac{a}{b}$ است)



مثال: هر دو مستطیل دلخواه متشابه نیستند زیرا ممکن است اضلاع نظیر متناسب نداشته باشند (با توجه به این‌که زوایای هر دو مستطیل همواره برابرند).



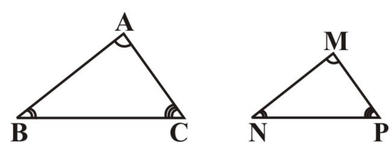
مثال: هر دو مربع دلخواه همواره متشابه‌اند زیرا زوایا برابرند و اضلاع نظیر متناسب هستند.



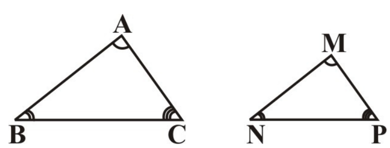
به‌طور کلی: هر دو nضلعی منتظم همواره متشابه‌اند.

نکته: دو مثلث را نیز زمانی متشابه گویند، اگر زاویه‌های نظیر در آن‌ها برابر و ضلع‌های متناظر متناسب باشند. تشابه دو مثلث را با نماد « ~ » نشان می‌دهند. بنابراین:

$$\overset{\Delta}{ABC}\sim\overset{\Delta}{MNP}\Leftrightarrow\begin{cases}1)\ \hat{A}=\hat{M},\hat{B}=\hat{N},\hat{C}=\hat{P}\\ 2)\ \dfrac{AB}{MN}=\dfrac{AC}{MP}=\dfrac{BC}{NP}\end{cases}$$



حالات خاص تشابه در مثلث:



۱) تشابه دو مثلث در حالت تساوی دو زاویه (زز): اگر دو زاویه از یک مثلث با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند، آن‌گاه دو مثلث متشابه هستند.

$$\overset{\Delta}{ABC}\sim\overset{\Delta}{MNP}\Leftrightarrow\hat{A}=\hat{M}\ ,\ \hat{B}=\hat{N}$$

۲) تشابه دو مثلث در حالت متناسب بودن دو ضلع و تساوی زاویه‌ی بین آن‌ها (ض ز ض)

$$\overset{\Delta}{ABC}\sim\overset{\Delta}{MNP}\Leftrightarrow\frac{AB}{MN}=\frac{AC}{MP}=\hat{A}=\hat{M}$$

۳) تشابه دو مثلث در حالت متناسب بودن سه ضلع. (ض ض ض)

$$\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{MNP} \Leftrightarrow \frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NP} = \frac{CA}{PM}$$

نکته: فرض کنید دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابه باشند و نسبت تشابه برابر k باشد، یعنی $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = k$ آن‌گاه:

۱) اگر AM و $A'M'$ میانه‌های دو رأس A و A' باشند، آن‌گاه $\frac{AM}{A'M'} = k$.

۲) اگر AH و $A'H'$ ارتفاع‌های دو رأس A و A' باشند، آن‌گاه $\frac{AH}{A'H'} = k$.

۳) اگر AD و $A'D'$ نیمسازهای داخلی دو رأس A و A' باشند، آن‌گاه $\frac{AD}{A'D'} = k$.

۴) اگر AE و $A'E'$ نیمسازهای خارجی دو رأس A و A' باشند، آن‌گاه $\frac{AE}{A'E'} = k$.

۵) $\frac{\text{محیط مثلث } ABC}{\text{محیط مثلث } A'B'C'} = k$

۶) $\frac{\text{مساحت مثلث } ABC}{\text{مساحت مثلث } A'B'C'} = k^{۲}$

$$\boxed{\frac{AB}{A'B'} = \frac{۲P}{۲P'} = \frac{h}{h'} = \frac{m}{m'} = \frac{d}{d'} = \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{S'}}}$$

تست۳: مثلث با دو زاویه‌ی ۷۵° و ۳۵° با کدام یک از مثلث‌های زیر که دو زاویه‌اش داده شده‌اند متشابهند؟

۱) ۷۰ و ۷۵	۲) ۷۵ و ۷۵	۳) ۶۵ و ۴۵	۴) ۸۵ و ۲۵

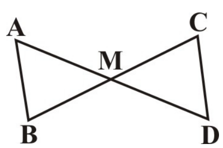
تست۴: مثلثی که طول اضلاع آن ۹ و ۱۲ و ۱۸ می‌باشد، با کدام یک از مثلث‌های زیر متشابه است؟

۱) ۶ و ۴ و۳	۲) ۶ و ۸ و ۱۱	۳) ۶ و ۱۲ و ۹	۴) ۱۲ و ۶ و ۱۰

تست۵: مثلثی با اضلاع ۶ و ۸ و ۱۲ با مثلث دیگری با محیط ۷۸ متشابه است. بزرگترین ضلع مثلث دوم چه اندازه است؟

۱) ۱۸	۲) ۳۶	۳) ۲۴	۴) ۴۸

تست۶: در شکل مقابل $AB \parallel CD$ و $\frac{AM}{AD} = \frac{۳}{۵}$. نسبت مساحت‌های دو مثلث در شکل کدام است؟ (سراسری – ۸۱)



۱) $\frac{۲}{۳}$	۲) $\frac{۲}{۵}$

۳) $\frac{۴}{۹}$	۴) $\frac{۹}{۲۵}$

پاسخ:

تست۷: اندازه محیط‌های دو مثلث مشابه به ترتیب ۱۵ و ۸ واحد است. اگر مساحت مثلث بزرگ‌تر ۲۵ واحد مربع باشد مساحت مثلث کوچک‌تر کدام است؟ (سراسری – ۷۸)

۱) $۷\frac{۱}{۹}$ ۲) $۶\frac{۱}{۹}$ ۳) $۷\frac{۲}{۹}$ ۴) $۶\frac{۲}{۹}$

پاسخ: گزینه‌ی ۱

(نسبت تشابه) $\frac{۱۵}{۸}=$ نسبت محیط‌ها

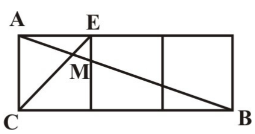
$$\text{نسبت مساحت‌ها}=\left(\frac{۱۵}{۸}\right)^۲\Rightarrow\frac{۲۵}{S}=\left(\frac{۱۵}{۸}\right)^۲\Rightarrow\frac{۲۵}{S}=\frac{۲۲۵}{۶۴}\Rightarrow S=۷\frac{۱}{۹}$$

تست۸: در دو مثلث متشابه ،نسبت ارتفاعهای نظیر برابر $\frac{۲}{۳}$ می‌باشد.نسبت مساحت‌های این دو مثلث چقدر است؟

۱) $\frac{۴}{۹}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۴}{۵}$ ۴) $\frac{۶}{۷}$

پاسخ: گزینه ۱

تست۹: در شکل مقابل سه مربع به اضلاع واحد کنار هم قرار دارند، اندازه‌ی MA چند برابر $\sqrt{۱۰}$ است؟ (ریاضی ۱۳۸۳)

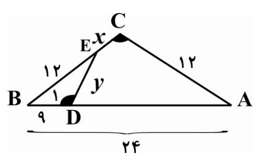


۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱۰}{۴}$

۳) $\frac{۲}{۹}$ ۴) $\frac{۱}{۵}$

پاسخ:

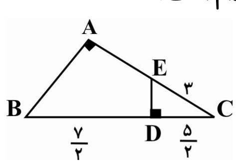
تست۱۰: در شکل $\hat{C}=\hat{D}_۱$ است اندازه‌ی $x+y$ کدام است؟



۱) ۱۲ ۲) ۲۴

۳) ۶ ۴) ۱۸

تست۱۱: با توجه به شکل مقابل نسبت مساحت‌های دو مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ و $\overset{\Delta}{DEC}$ کدام است؟

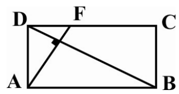


۱) ۶
۲) ۲
۳) ۴
۴) ۸

تست۱۲: اگر از نقطه‌ی تلاقی میانه‌های یک مثلث خطی به موازات یک ضلع مثلث رسم کنیم آنگاه مثلث به دو قسمت تقسیم می‌شود. نسبت مساحت‌های این دو قسمت کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۴}{۶}$ ۴) $\frac{۴}{۹}$

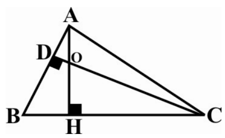
تست۱۳: در شکل زیر چهارضلعی $ABCD$ یک مستطیل است. F نقطه‌ای روی ضلع DC به طوری که $AF \perp BD$، اگر $AB = 3DA$، DC چند برابر DF است؟ (سراسری تجربی ـ ۶۹)



۱) ۸
۲) ۹
۳) ۴
۴) ۶

تست۱۴: در شکل مقابل AH و CD دو ارتفاع مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ هستند. اگر $OD = 5$، $AD = \frac{1}{3}OH = 12$ باشد، طول HC کدام است؟

(سراسری ریاضی ـ ۸۲)

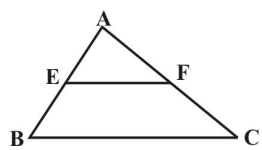


۱) ۱۶۵ ۲) ۱۷۰
۳) ۱۷۵ ۴) ۱۸۰

قضیه تالس (حالت خاصی از تشابه دو مثلث) : اگر خطی موازی یکی از اضلاع مثلث رسم شود و دو ضلع دیگر را قطع کند آنگاه:

۱) $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC}$

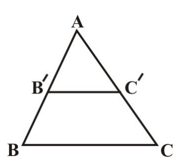
۲) $\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC}$



عکس قضیه تالس:

اگرخطی دو ضلع یک مثلث یا امتداد آن‌ها را قطع کند و روی آنها پاره‌خط‌های متناظر متناسب جدا کند، با ضلع سوم موازی است.

تست۱۵: در شکل مقابل $BC \parallel B'C'$ و $AB = 10\,cm$ و $AB' = 3cm$، AC' چند برابر CC' است؟ (تجربی ۱۳۶۸)

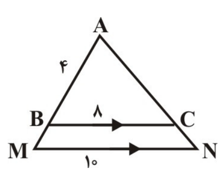


۱) $\frac{3}{10}$ ۲) $\frac{4}{10}$
۳) $\frac{7}{10}$ ۴) $\frac{3}{7}$

پاسخ: گزینه‌ی (۴)

$$B'C' \parallel BC \Rightarrow \frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} \Rightarrow \frac{3}{10} = \frac{AC'}{AC} \Rightarrow \frac{3}{10-3} = \frac{AC'}{AC - AC'} \Rightarrow \frac{3}{7} = \frac{AC'}{CC'} \Rightarrow AC' = \frac{3}{7}CC'$$

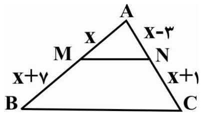
تست۱۶: در شکل مقابل اندازه‌ی پاره‌خط BM کدام است؟



۱) ۱ ۲) ۲
۳) $\frac{4}{5}$ ۴) ۳

پاسخ:

تست۱۷: در شکل مقابل $MN \parallel BC$.مقدار x کدام است؟

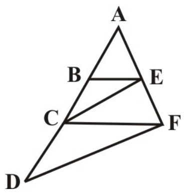


۱) ۵ ۲) ۶

۳) ۷ ۴) ۸

پاسخ:

تست۱۸: در شکل مقابل $BE \parallel CF$ و $CE \parallel DF$. اگر $AB = ۵$ و $BC = ۳$ ، آن‌گاه اندازه‌ی CD کدام است؟ (تجربی ۱۳۸۱)



۱) ۲/۵ ۲) ۴/۸

۳) ۵/۴ ۴) ۶

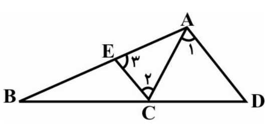
پاسخ:

تست۱۹: در یک مثلث به اضلاع $AB = ۶, AC = ۱۴, BC = ۱۲$ نقاط M, N, K بر روی اضلاع چنان قرار دارد که چهارضلعی $AMNK$ یک لوزی است.اندازه ضلع لوزی کدامست؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

پاسخ:

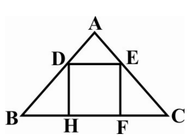
تمرین: در شکل زیر زوایای $\hat{۳} = \hat{۲} = \hat{۱}$ اگر $AB = ۱۸$ ، $AC = ۸$ باشد، $\frac{BD}{CD}$ چقدر است؟



۱) $\frac{۹}{۲}$ ۲) $\frac{۹}{۴}$

۳) ۶ ۴) ۴

تمرین: مربع $DEFH$ مطابق شکل در مثلثی به اضلاع a و b و c محاط شده است. طول ضلع مربع کدام است؟ (h_a : ارتفاع مثلث)



۱) $\frac{a + h_a}{a.h_a}$ ۲) $\frac{a.h_a}{a + h_a}$

۳) $\frac{h_a - a}{a.h_a}$ ۴) $\frac{a - h_a}{a.h_a}$

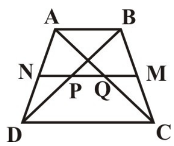
نکته: خطی که وسطهای دو ضلع مثلثی را به هم وصل می‌کند با ضلع سوم موازی و نصف آن می‌باشد.

$$MN=\frac{BC}{۲}$$

نکته: در هر ذوزنقه خطی که وسطهای دو ساق را به هم وصل می‌کند با قاعده‌ها موازی و طول آن برابر است با نصف مجموع دو قاعده:

$$MN=\frac{AB+DC}{۲}$$

نکته: طول پاره خطی که بین دو قطر و خطی که وسط ساقهای ذوزنقه را به هم وصل می‌کند قرار می‌گیرد برابر است با نصف تفاضل دو قاعده.



$$PQ=\frac{DC-AB}{۲}$$

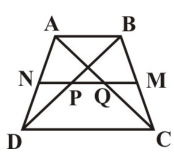
تست۲۰: نقاط P,N,M وسطهای سه ضلع مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ را به هم وصل می‌کنیم .اگر محیط مثلث MNP برابر ۶باشد،محیط مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ چقدر است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

پاسخ:

مثال۲۱: در یک ذوزنقه قاعده بزرگ سه برابر قاعده کوچک است. اگر خطی که وسط ساقها را به هم وصل می‌کند را رسم کنیم، نسبت مساحتهای ذوزنقه های ایجاد شده چقدر است؟

تست۲۲: در ذوزنقه‌ی شکل مقابل $BM=MC$ و $AN=ND$ ، اگر $CD=۳AB$ باشد، آن‌گاه PQ کدام است؟ (آزاد ریاضی)



۱) $\frac{۲CD}{۳}$ ۲) $\frac{CD}{۶}$

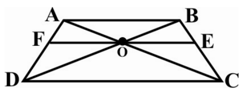
۳) $\frac{۴CD}{۹}$ ۴) $\frac{CD}{۳}$

پاسخ: گزینه‌ی (۴)

$$PQ=\frac{CD-AB}{۲}=\frac{۳AB-AB}{۲}=\frac{۲AB}{۲}=AB \quad , \quad AB=\frac{CD}{۳} \quad \Rightarrow PQ=\frac{CD}{۳}$$

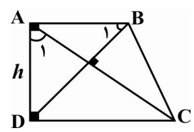
مثال۲۳: ثابت کنید در ذوزنقه اگر از نقطه O محل برخورد قطرها خطی به موازات دو قاعده رسم کنیم و برخورد آن را با ساقها E,F بنامیم آنگاه اولا $OF=OE$ و ثانیا $\frac{۱}{CD}+\frac{۱}{AB}=\frac{۱}{OE}=\frac{۱}{OF}$.

☺**تست۲۴:** از محل برخورد دو قطر ذوزنقه $ABCD$ خطی موازی دو قاعده رسم می‌کنیم تا ساق‌ها را در E و F قطع کند. اگر $AB=\frac{۳}{۵}$ و $DC=\frac{۳}{۴}$، طول پاره خط EF کدام است؟



۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۴}{۵}$

مثال۲۵: اگر دو قطر ذوزنقه‌ی قائم الزاویه برهم عمود باشند، ارتفاع ذوزنقه واسطه‌ی هندسی است بین دو قاعده.



$\boxed{AD^{۲}=AB\times DC}$

☺**تست۲۶:** اگر در یک ذوزنقه قائم‌الزاویه قطرها برهم عمود باشند و قاعده‌ها برابر ۳و۱۲ باشند مساحت آن کدامست؟

۱)۳۹ ۲)۴۵ ۳) ۳۰ ۴)قابل تعیین نیست

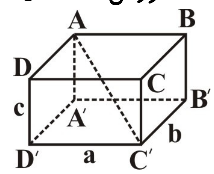
سوال۲۷: از وصل کردن اوساط اضلاع یک چهارضلعی چه شکلی به وجود می‌آید؟

چندوجهی:

قسمتی از فضا که از هر طرف به قسمتی از صفحه محدود باشد، چندوجهی می‌گویند. مانند هرم، مکعب، مکعب مستطیل و . . .

۱) مکعب مستطیل: مکعب مستطیل، یک شش‌وجهی است که همه‌ی وجه‌های آن مستطیل هستند. هر مکعب مستطیل دارای ۶ وجه، ۱۲ یال و ۸ رأس است. هر دو وجه مقابل موازی و هم‌نهشت هستند.

مکعب مستطیلی که اندازه‌ی سه یال هم‌رأس آن a، b و c باشند، مفروض است. آن‌گاه:



مساحت کل $= ۲(ab+bc+ac)$

حجم $= abc$

AC' اندازه‌ی قطر $= \sqrt{a^۲+b^۲+c^۲}$

طول قطر صفحات جانبی $\begin{cases} \sqrt{b^۲+c^۲} : \text{بالا و پایین} \\ \sqrt{a^۲+b^۲} : \text{چپ و راست} \\ \sqrt{a^۲+c^۲} : \text{عقب و جلو} \end{cases}$

۲) مکعب: حالت خاص مکعب مستطیل که طول یال‌های آن با هم برابر باشند مکعب گویند. یا مکعب شش‌وجهی است که وجوه آن شش مربع هم‌اندازه است. اگر طول یال مکعبی a باشد.

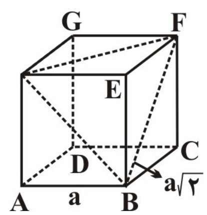
الف) اندازه قطر مکعب $a\sqrt{۳}$ است.

ب) اندازه قطر هر یک از وجوه آن $a\sqrt{۲}$ است.

ج) حجم مکعب $= V = a^۳$

و) سطح جانبی مکعب $S = ۴a^۲$

ز) سطح کل مکعب $S = ۶a^۲$



مثال۱: طول قطر مکعبی $\sqrt{۱۲}$ است مساحت کل آن چیست؟

تست۲: ابعاد مکعب مستطیلی متناسب با اعداد ۱ و ۲ و ۳ می‌باشند. اگر مساحت کل آن <u>۳۵۲</u> سانتی‌متر باشد، حجم آن چقدر است؟

۱) ۴۸ ۲) ۱۰۵ ۳) ۳۸۴ ۴) ۴۲۸

مثال۳: طول اقطار وجوه مکعب مستطیلی ۶ و $\sqrt{۱۰}$ و ۲ است قطر مکعب مستطیل چیست؟

تست۴: اگر طول یال‌های مکعب مستطیلی را چهار برابر کنیم، حجم آن چند برابر می‌شود؟

۱) ۴۸ ۲) ۶۴ ۳) ۲۷ ۴) ۵۴

پاسخ: گزینه‌ی ۲

$$V_۱ = abc\ ,\ V_۲ = (۴a)(۴b)(۴c) = ۶۴abc \Rightarrow V_۲ = ۶۴V_۱$$

تست۵: حجم مکعب مستطیلی ۲۷۰ سانتی‌متر مکعب و یکی از ابعاد آن ۵ سانتی‌متر می‌باشد. اگر نسبت دو ضلع دیگر $\frac{۲}{۳}$ باشد، طول قطر مکعب مستطیل چقدر است؟

۱) $\sqrt{۱۴۲}$ ۲) $\sqrt{۳۸}$ ۳) $\sqrt{۷۷}$ ۴) $\sqrt{۱۲۵}$

اگر ابعاد این مکعب مستطیل را a و b و c فرض کنیم آن گاه داریم:

$$a = ۵\ ,\ \frac{b}{c} = \frac{۲}{۳} \rightarrow b = \frac{۲}{۳}c$$

$$\text{حجم} = a\,.\,b\,.\,c \Rightarrow ۲۷۰ = ۵\times(\frac{۲}{۳}c)\times c = \frac{۱۰}{۳}c^۲ \Rightarrow c^۲ = \frac{۳\times ۲۷۰}{۱۰} \Rightarrow \boxed{c = ۹}$$

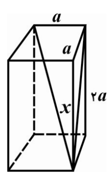
$$b = \frac{۲}{۳}c = \frac{۲}{۳}\times ۹ = ۶ \Rightarrow a = ۵\ ,\ b = ۶,\ c = ۹$$

$$\text{قطر}: d = \sqrt{a^۲ + b^۲ + c^۲} = \sqrt{۲۵ + ۳۶ + ۸۱} = \sqrt{۱۴۲}$$

تست۶: در یک مکعب مستطیل اندازه قطر اصلی برابر $\sqrt{۱۱}$ می‌باشد.اگر مساحت جانبی آن ۱۴ باشد،مجموع یالهای آن چقدر است؟

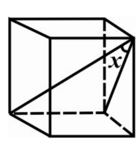
۱)۵ ۲)۱۰ ۳)۱۵ ۴)۲۰

تست۷: در شکل مقابل، مکعب مستطیلی به ابعاد a و a و ۲a است، تانژانت زاویه‌ی x کدام است؟ (سراسری ریاضی ـ ۷۴)



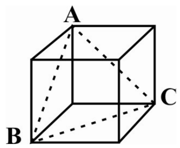
۱) $\frac{\sqrt{۵}}{۵}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ ۳) $\frac{\sqrt{۵}}{۴}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۵}$

تست۸: در مکعب شکل زیر زاویه‌ی x کدام است؟(سراسری ریاضی ـ ۷۶)



۱) $\operatorname{Arc}\sin\frac{\sqrt{۵}}{۳}$ ۲) $\operatorname{Arc}\sin\frac{\sqrt{۶}}{۳}$ ۳) $\operatorname{Arc}\cos\frac{\sqrt{۶}}{۳}$ ۴) $\operatorname{Arc}\cos\frac{\sqrt{۵}}{۳}$

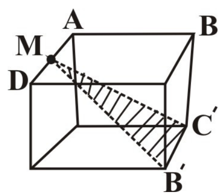
☺تست۹: در مکعب شکل مقابل طول هر یال برابر ۲ می‌باشد. مساحت مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ چقدر است؟



۱) $۲\sqrt{۳}$ ۲) $۴\sqrt{۳}$

۳) $۶\sqrt{۳}$ ۴) $۸\sqrt{۳}$

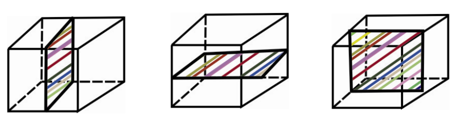
مثال۱۰: طبق شکل مقابل، مکعب به طول یال ۳ و نقطه M وسط یال AD است. مساحت مثلث هاشورخورده چیست؟



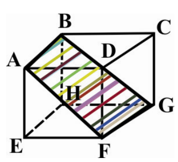
☺تست۱۱: هر مکعب چند صفحه‌ی تقارن دارد؟ (سراسری ریاضی ـ ۷۴)

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

صفحاتی که با هر دو وجه مقابل موازی و به یک فاصله از آنهاست، صفحه‌ی تقارن می‌باشد که در این حالت (۳) صفحه‌ی تقارن وجود دارد.



صفحاتی که شامل دو یال موازی مقابل به هم می‌باشد نیز صفحه‌ی تقارن می‌باشد که مکعب دارای ۶ جفت یال موازی و مقابل به هم می‌باشد. که عبارتند از:



(BC , EF) , (AD, GH) , (EH , CD) ,(AB,GF) (BH , DF) , (AE , CG)

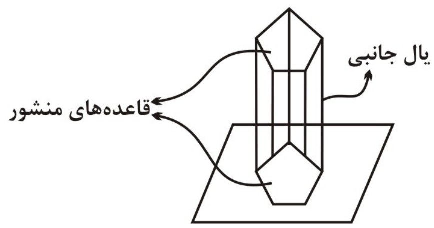
بنابراین ۶ صفحه‌ی تقارن هم در این حالت وجود دارد که جمعاً ۹ صفحه‌ی تقارن در مکعب وجود دارد.

منشور:

منشور یک چندوجهی است که دو وجه آن هم‌نهشت بوده و در دو صفحه موازی قرار گیرند و وجوه جانبی آن متوازی‌الاضلاع باشند.

دو وجه همنهشت را قاعده گویند یال‌های جانبی با هم موازیند و در منشور قائم همگی بر قاعده عمود هستند.

چنان‌چه یال‌های جانبی بر قاعده عمود نباشند منشور را منشور مایل گوییم.



حجم منشور: حجم منشور برابر است با مساحت قاعده در ارتفاع.

مساحت جانبی: مجموع مساحت‌های وجه‌های جانبی یک منشور را مساحت جانبی گویند که برای محاسبه آن کافیست محیط قاعده را در ارتفاع ضرب کنیم.

مساحت کل: مساحت کل منشور برابر است با مجموع مساحت جانبی به علاوه مساحت دو قاعده .

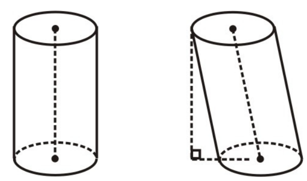
استوانه:

استوانه در فضا به دو شکل قائم یا مایل ممکن است ظاهر شود در استوانه اگر محور استوانه یعنی پاره‌خطی که مرکزهای دو قاعده را به هم وصل می‌کند بر قاعده عمود باشد، استوانه قائم است در غیر این‌صورت آن‌را مایل گویند.

$V = sh = \pi r^{۲} h$

۲πrh = محیط قاعده در ارتفاع = مساحت جانبی استوانه قائم

کل $S = \pi r^{۲} h + ۲\pi r^{۲}$



استوانه مایل　　　　استوانه قائم

بدیهی است مساحت کل استوانه برابر است با مساحت جانبی به‌علاوه مساحت دو قاعده.

تست۱۲: قاعده منشور قائمی لوزی است با طول اقطار ۸ و ۶ سانتی‌متر که ارتفاع آن ۳ برابر ضلع قاعده است. حجم و مساحت کل منشور را به دست آورید.

تست۱۳: قاعده‌ی یک منشور قائم به ارتفاع ۶، مثلث متساوی الاضلاع به ضلع $۲\sqrt{۳}$ می‌باشد. حجم منشور چقدر است؟

۱) $۱۸\sqrt{۳}$　　۲) $۱۲\sqrt{۳}$　　۳) $۱۶\sqrt{۳}$　　۴) $۲۴\sqrt{۳}$

$$\text{مساحت قاعده} = S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{\sqrt{۳}}{۴} a^{۲} = \frac{\sqrt{۳}}{۴} (۲\sqrt{۳})^{۲} = ۳\sqrt{۳}$$

$$\text{حجم منشور} = \text{مساحت قاعده} \times \text{ارتفاع} = ۳\sqrt{۳} \times ۶ = ۱۸\sqrt{۳}$$

تست۱۴: مساحت جانبی منشور منتظمی که قاعده‌ی آن شش ضلعی منتظم بوده و بزرگ‌ترین قطر قاعده‌ی آن ۱۳ سانتی‌متر و یال جانبی منشور ۵ سانتی‌متر باشد، چقدر است؟

۱) ۱۲۰　　۲) ۱۵۰　　۳) ۱۶۰　　۴) ۱۹۵

قاعده یک شش ضلعی منتظم می‌باشد. همان طور که می‌دانیم در شش ضلعی منتظم به ضلع a، بزرگ‌ترین قطر $2a$ و کوچک‌ترین قطر $a\sqrt{3}$ می‌باشد. در این تست داریم: $2a = 13 \rightarrow a = \frac{13}{2}$

$$\text{محیط شش ضلعی منتظم} = 6a = 6 \times \frac{13}{2} = 39$$

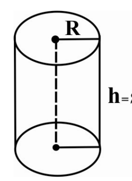
$$\text{مساحت جانبی} = (\text{محیط قاعده}) \times \text{ارتفاع} = 39 \times 5 = 195$$

مثال۱۵: مستطیلی به ابعاد ۲ و ۴ سانتی‌متر را حول طولش در فضا دوران می‌دهیم حجم و مساحت جانبی و مساحت کل شکل پدید آمده چیست؟

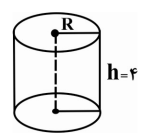
تست۱۶: مستطیلی به ابعاد ۶ و ۴ مفروض است. بیش‌ترین حجم استوانه‌ای که با آن می‌توان ساخت چقدر است؟

۱) $\frac{12}{\pi}$　　۲) $\frac{24}{\pi}$　　۳) $\frac{36}{\pi}$　　۴) $\frac{42}{\pi}$

با این مستطیل دو استوانه می‌توان ساخت. یکی به ارتفاع ۶ و محیط قاعده‌ی ۴ و یکی هم به ارتفاع ۴ و محیط قاعده‌ی ۶.



$$\begin{cases} 2\pi R = 4 \rightarrow R = \frac{2}{\pi} \\ V_1 = \pi R^2 h = \pi(\frac{2}{\pi})^2 \times 6 = \frac{24}{\pi} \end{cases}$$

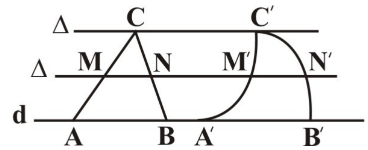


$$\begin{cases} 2\pi R = 6 \rightarrow R = \frac{3}{\pi} \\ V_2 = \pi R^2 h = \pi(\frac{3}{\pi})^2 \times 4 = \frac{36}{\pi} \end{cases}$$

تذکر: در این تست نسبت حجم‌های بدست آمده با نسبت اضلاع مستطیل برابر است.

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{24}{\pi}}{\frac{36}{\pi}} = \frac{2}{3}$$

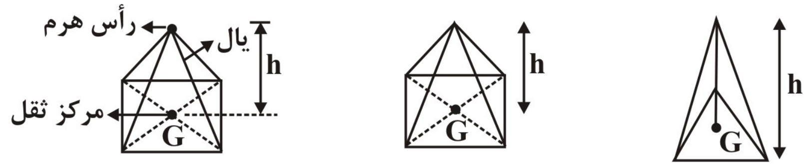
اصل کاوالیری در مورد مساحت: اگر قاعده‌های دو شکل بر روی یک خط قرار گرفته باشند و هر خط موازی با قاعده‌ها هر دو شکل Δ یک خط دلخواه و موازی با خط d است.



$$d \parallel \Delta \parallel \Delta' ,\ AB = A'B' ,\ MN = M'N' \Rightarrow S_{(ABC)} = S_{(A'B'C')}$$

اصل کاوالیری درباره‌ی حجم‌ها:
دو شکل فضایی و صفحه‌ای که قاعده‌های دو شکل در آن قرار گرفته باشند را در نظر بگیرید. اگر هر صفحه‌ای موازی با این صفحه که یکی از این دو شکل را قطع می‌کند و دیگری را نیز قطع کند و سطح مقطع‌های حاصل دارای مساحت‌های برابر باشند آن‌گاه حجم این دو شکل برابر است.

هرم:
هرم یک چندوجهی است که همه وجوه آن به‌جز یکی در یک رأس مشترکند.
پاره‌خطی که از رأس بر قاعده هرم عمود است ارتفاع هرم گویند.



هرم مستطیل القاعده   هرم مربع‌القاعده   هرم مثلث‌القاعده

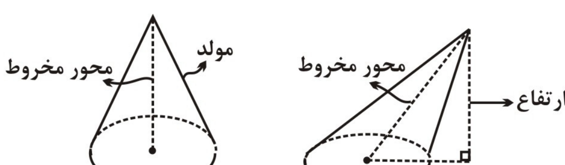
$S_{\text{جانبی}} =$ مجموع مساحت‌های دور تا دور

$S_{\text{کل}} = S_{\text{جانبی}} +$ سطح قاعده

$V_{\text{حجم}} = \frac{۱}{۳} S_{\text{قاعده}} \times$ ارتفاع

هرم منتظم:
اگر قاعده یک هرم، چندضلعی منتظم باشد و پای ارتفاع آن بر مرکز قاعده(گرانیگاه) منطبق باشد هرم را منتظم گویند.

مخروط:
مخروط شکلی است فضایی شبیه هرم که قاعده آن به جای چندضلعی دایره است. مخروط نیز مانند هرم یا قائم است یا مایل. در مخروط قائم تصویر رأس روی مرکز قاعده قرار می‌گیرد.



مخروط قائم   مخروط مایل

حجم مخروط $= \frac{۱}{۳}\pi r^{۲} h$ (r شعاع قاعده و h ارتفاع مخروط)،

سطح جانبی : $S = \pi R L$ (L طول مولد است)

مثال۱۷: اگر در یک مخروط شعاع قاعده را دو برابر و ارتفاع را نصف کنیم،حجم چند برابر می‌شود؟

مثال۱۸: در یک هرم مربع القاعده به ضلع قاعده ۶ که طول ارتفاع وارد بر مثلث های کناری برابر ۵ میباشد، مقدار حجم چقدر است؟

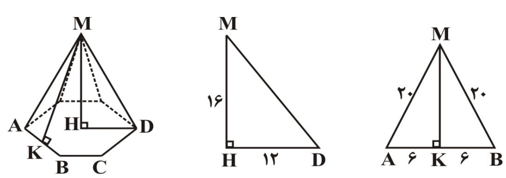
مثال۱۹: در هرم منتظم مربع‌القاعده به ضلع قاعده $۲\sqrt{۳}$ ، ارتفاع هرم (۳) واحد است. سطح جانبی هرم چیست؟

☹**تست۲۰:** در یک هرم منتظم مربع القاعده ، ضلع قاعده به طول $۳\sqrt{۲}$ و طول یال جانبی آن برابر <u>۵</u> می‌باشد. حجم هرم چقدر است؟

۱) ۳۶ ۲) ۲۴ ۳) ۳۲ ۴) ۲۰

مثال۲۱: هرم منتظم، که ارتفاعش برابر ۱۶ و قاعده‌اش شش‌ضلعی منتظم به ضلع ۱۲ می‌باشد، مفروض است. حجم و سطح کل آن‌را به‌دست آورید.

پاسخ:



$HD = DC = ۱۲$ (چرا؟)

$\overset{\Delta}{MHD}: MD = ۲۰ \Rightarrow MB = MC = MD = ۲۰$

$\overset{\Delta}{MBK}: MK = \sqrt{MB^{۲} - KB^{۲}} = \sqrt{۴۰۰ - ۳۶} = \sqrt{۳۶۴} = ۲\sqrt{۹۱}\ ,\ S_{(MBA)} = ۱۲\sqrt{۹۱}$

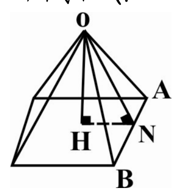
$\text{حجم هرم} = \frac{۱}{۳}\,(\text{مساحت قاعده}) \times \text{ارتفاع} = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}AB^۲ \times MH = \frac{۱}{۳}(۲۱۶\sqrt{۳}) \times ۱۶ = ۱۱۵۲\sqrt{۳}$

$\text{مساحت جانبی} = ۶ \times (\text{مساحت } MBA) = ۷۲\sqrt{۹۱}$

$\text{مساحت کل} = \text{مساحت جانبی} + \text{مساحت قاعده} = ۷۲\sqrt{۹۱} + ۲۱۶\sqrt{۳}$

تست۲۲: در یک هرم منتظم مربع القاعده طول یال جانبی آن برابر <u>۱۰</u> و طول ارتفاع یک وجه آن برابر <u>۸</u> می‌باشد. حجم هرم چقدر است؟

۱) $۴۸\sqrt{۷}$ ۲) $۶۴\sqrt{۷}$ ۳) $۹۶\sqrt{۷}$ ۴) $۱۴۴\sqrt{۷}$



$$\begin{cases} OA = OB = \ldots = ۱۰ \\ ON = ۸ \end{cases}$$

$$\overset{\Delta}{OAN}: (OA)^۲ = (ON)^۲ + (NA)^۲$$

$$۱۰۰ = ۶۴ + (NA)^۲ \Rightarrow NA = ۶$$

طول ضلع قاعده: $a = ۲\,(NA) = ۱۲$

$$HN = \frac{a}{۲} = \frac{۱۲}{۲} = ۶$$

$$\overset{\Delta}{OHN}: (ON)^۲ = (OH)^۲ + (NH)^۲$$

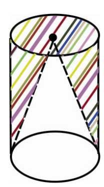
$$۶۴ = (OH)^۲ + ۳۶ \Rightarrow OH = \sqrt{۲۸} = ۲\sqrt{۷}$$

$$\text{حجم} = \frac{۱}{۳}\,(\text{مساحت قاعده}) \times \text{ارتفاع} = \frac{۱}{۳}(۱۲)^۲(۲\sqrt{۷}) = ۹۶\sqrt{۷}$$

تست۲۳: در شکل مقابل نسبت حجم مخروط به حجم باقی‌مانده چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$

۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$



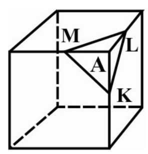
تست۲۴: ظرفی به شکل مخروط به ارتفاع ۱۲ سانتی‌متر را پر از آب کرده و آن را در استوانه‌ای با همان سطح قاعده و ارتفاع ۶ سانتی‌متر خالی می‌کنیم. فاصله‌ی سطح آب تا بالای استوانه چند سانتی‌متر است؟

۱) ۱ cm ۲) ۱/۵ cm ۳) ۲ cm ۴) ۲/۵ cm

مثال۲۵: یک مثلث قائم الزاویه به اضلاع ۳و۴و۵ را یکبار حول ضلع کوچک و یکبار حول وتر دوران می‌دهیم. نسبت این حجم ها چقدر است؟

مثال۲۶: یک شش‌ضلعی منتظم به ضلع ۲ را حول قطر بزرگش دوران می‌دهیم. مساحت شکل حاصل را بیابید.

تست۲۷: در مکعب شکل مقابل k و L و M وسط‌های سه یال هستند حجم هرم $AMLK$ چه کسری از حجم مکعب است؟ (آزاد ـ ۷۴)



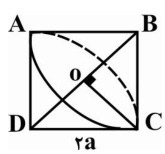
۱) $\frac{۱}{۴۸}$ ۲) $\frac{۱}{۱۲}$

۳) $\frac{۱}{۲۴}$ ۴) $\frac{۱}{۱۶}$

تست۲۸: حجم حادث از دوران مربع به ضلع $۲a$ حول یکی از قطرهایش برابر است با:

۱) $\frac{۴\sqrt{۲}}{۳}\pi a^۳$ ۲) $\frac{۳}{۸}\pi a^۳$ ۳) $\frac{۳}{۴}\pi a^۳$ ۴) $(۱)-۲۸۴\sqrt{۲}\,\pi a^۳$

حجم حادث از دوران مربع حول یکی از قطرهایش دو مخروط هم قاعده و با ارتفاع مساوی می‌باشد. ابتدا حجم یکی از مخروط‌ها را بدست می‌آوریم:



قطر مربع $AC = BD = \sqrt{۲}\,(۲a) = ۲\sqrt{۲}\,a$

ارتفاع مخروط $OB = \frac{۱}{۲}DB = \frac{۱}{۲}(۲\sqrt{۲}a) = \sqrt{۲}\,a$

شعاع قاعده $OC = \frac{۱}{۲}AC = \frac{۱}{۲}(۲\sqrt{۲}a) = \sqrt{۲}a$

حجم یک مخروط: $V = \frac{۱}{۳}\pi(OC)^۲\,(OB)$

$$V = \frac{۱}{۳}\pi(\sqrt{۲}a)^۲\,(\sqrt{۲}a) = \frac{۲\sqrt{۲}}{۳}\pi a^۳$$

حجم کل: $۲V = \frac{۴\sqrt{۲}}{۳}\pi a^۳$

کره:

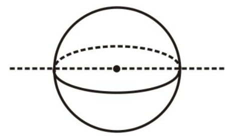
تعریف: کره مجموعه‌ی نقاطی از فضا است که از یک نقطه‌ی ثابت به نام مرکز به یک فاصله باشند. این فاصله ثابت را شعاع کره می‌نامیم. کره‌ای به شعاع R مفروض است، آن‌گاه:

$۴\pi R^۲ =$ مساحت کره و $\frac{۴}{۳}\pi R^۳ =$ حجم کره

مثال۲۹: کره‌ای به مرکز O و شعاع $R=۵$ مفروض است. یک صفحه با فاصله‌ی ۳ از مرکز را قطع می‌کند. مساحت مقطع حاصل را به دست آورید.

مثال۳۰: دایره‌ای به قطر ۸ سانتی‌متر را حول قطرش دوران داده حجم و مساحت شکل فضایی ایجاد شده چیست؟

حل: از دوران یک دایره حول قطرش یک کره به‌دست می‌آید که شعاع کره با شعاع دایره برابر است.



$$\text{حجم} = V = \frac{۴}{۳}\pi R^{۳} = \frac{۴}{۳}\pi(۴)^{۳} = \frac{۲۵۶}{۳}\pi\, cm^{۳}$$

$$\text{سطح کره} = S = ۴\pi R^{۲} = ۴\pi(۴)^{۲} = ۶۴\pi\, cm^{۲}$$

مثال۳۱: اگر مساحت کل یک نیمکره ۴۸π باشد.مقدارشعاع آن را بیابید.

مثال۳۲: مکعبی به ضلع ۲ مفروض است.نسبت حجم کره محاط و محیط بر این مکعب را بیابید.

مثال۳۳: حجم مخروطی را بیابید که در یک کره به شعاع ۵ محاط شده و فاصله قاعده آن تا مرکز کره ۳ واحد باشد.

☺**تست۱:** کدام گزاره‌ی زیر نادرست است؟ (در صفحه)

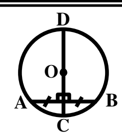
۱) از دو نقطه‌ی متمایز بی‌شمار دایره می‌گذرد.

۲) از سه نقطه‌ی متمایز و ناهم‌خط، فقط و فقط یک دایره می‌گذرد.

۳) از یک نقطه‌ی ثابت از صفحه بی‌شمار دایره می‌گذرد.

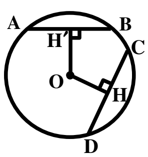
۴) بر دو نقطه‌ی متمایز و مشخص فقط یک دایره به شعاع معلوم l می‌گذرد. (l از نصف فاصله‌ی بین دو نقطه بیش‌تر است.)

قضیه: قطر عمود بر وتر آن را نصف می‌کند و بلعکس.



قضیه: دو وتر هم طول داخل دایره از مرکز به یک فاصله‌اند و بالعکس.

$$OH=OH' \iff AB=DC$$



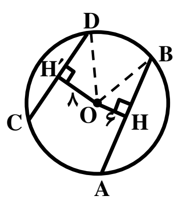
قضیه: در یک دایره از دو وتر نامساوی آن‌که بزرگ‌تر است به مرکز نزدیک‌تر است و برعکس.

$$OH<OH' \iff AB<DC$$

☺**تست۲:** در دایره‌ی $C(O,۱۰)$ فاصله‌ی مرکز دایره تا وترهای $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ به ترتیب برابر با ۶ و ۸ است. حاصل‌ضرب طول‌های دو وتر $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ کدام است؟

۱) ۱۸۸ ۲) ۱۸۶ ۳) ۱۹۲ ۴) ۱۹۰

پاسخ: گزینه‌ی ۳)؛

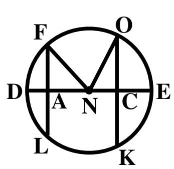


$$\overset{\triangle}{OBH}: HB=\sqrt{OB^{۲}-OH^{۲}}=\sqrt{۱۰۰-۳۶}=\sqrt{۶۴}=۸$$

$$\overset{\triangle}{OH'D}: H'D=\sqrt{OD^{۲}-OH'^{۲}}=\sqrt{۱۰۰-۶۴}=\sqrt{۳۶}=۶$$

$$AB=۲(۸)=۱۶ \qquad CD=۲(۶)=۱۲ \qquad AB.CD=(۱۲)(۱۶)=۱۹۲$$

☹**تست۳:** در شکل زیر $\overline{DE}\perp\overline{FL}$ و $\overline{DE}\perp\overline{OK}$، $DE=۵۰$، $FL=۴۰$ و $OK=۴۸$، مقدار AC کدام است؟(N مرکز دایره است)



۱) ۲۰

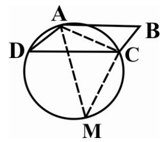
۲) ۲۴

۳) ۲۲

۴) ۲۱

تست۴: در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ دایره‌ی محیطی مثلث $\overset{\Delta}{ACD}$ امتداد ضلع BC را در نقطه‌ی M قطع کرده است. مثلث $\overset{\Delta}{ABM}$ کدام نوع است؟ (سراسری ریاضی ـ ۸۴)

۱) متشابه ACD ۲) متساوی‌الساقین ۳) متساوی‌الاضلاع ۴) قائم‌الزاویه



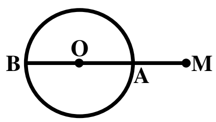
$\hat{D} = \hat{B}$ $\hat{D} = \frac{۱}{۲}\overset{\frown}{AC}\ ,\ \hat{M} = \frac{۱}{۲}\overset{\frown}{AC}$

یادآوری: نزدیک‌ترین و دورترین فاصله‌ی یک نقطه تا دایره:

اگر نقطه‌ی M در صفحه‌ی دایره باشد و فاصله‌ی نقطه‌ی M تا مرکز دایره را d بنامیم، داریم:

$MA =$ نزدیک‌ترین فاصله‌ی M تا دایره $= |MO - R| = |d - R|$

دورترین فاصله‌ی M تا دایره $= MB = MO + R = d + R$

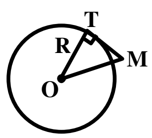


تست۵: از نقطه‌ی خارج یک دایره مماسی بر دایره رسم کرده‌ایم. طول قطعه‌ی مماس $\frac{۴}{۳}$ طول شعاع دایره است. نزدیک‌ترین فاصله‌ی نقطه‌ی M تا دایره کدام است؟ R شعاع دایره است.

۱) $\frac{۲}{۳}R$ ۲) $\frac{۱}{۳}R$ ۳) $\frac{۳}{۵}R$ ۴) $\frac{۴}{۳}R$

پاسخ:

گزینه‌ی ۱)؛



$$OMT : OM = \sqrt{OT^۲ + MT^۲} = \sqrt{R^۲ + (\frac{۴}{۳}R)^۲} = \sqrt{R^۲ + \frac{۱۶}{۹}R^۲} = \sqrt{\frac{۲۵}{۹}R^۲} \Rightarrow \quad OM = \frac{۵}{۳}R$$

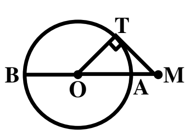
نزدیک‌ترین فاصله‌ی نقطه‌ی M تا دایره برابر MA است. داریم:

$$MA = OM - OA = \frac{۵}{۳}R - R = \frac{۲}{۳}R$$

تست۶: نقطه‌ی M در صفحه‌ی دایره و در بیرون آن می‌باشد. اگر دورترین و نزدیک‌ترین فاصله‌ی نقطه‌ی M تا دایره به ترتیب ۱۶ و ۴ باشد، اندازه‌ی قطعه‌ی مماسی که از M بر دایره ترسیم می‌شود، کدام است؟

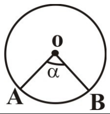
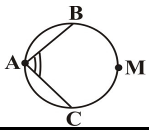
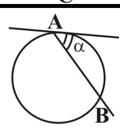
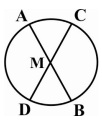
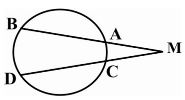
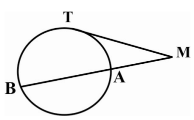
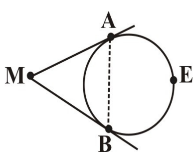
۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۴

پاسخ: چون نقطه‌ی M خارج دایره است، داریم:

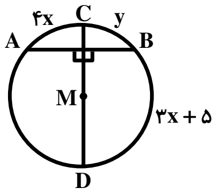


$$\begin{cases} d - r = ۴ \\ d + r = ۱۶ \end{cases} \Rightarrow r = ۶, d = ۱۰$$

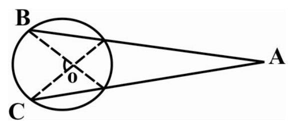
$$\overset{\Delta}{MOT} : MO^۲ = OT^۲ + MT^۲ \Rightarrow ۱۰^۲ = ۶^۲ + MT^۲ \Rightarrow ۱۰۰ - ۳۶ + MT^۲ \Rightarrow MT^۲ = ۶۴ \Rightarrow MT = ۸$$

رابطه طولی	مقدار زاویه	شکل
–	$O=\widehat{AB}$	
–	$\hat{A}=\frac{\widehat{BMC}}{\text{۲}}$	
–	$A=\frac{\widehat{AB}}{\text{۲}}$	
$MA\times MB=MC\times MD$	$M=\frac{\widehat{BD}+\widehat{AC}}{\text{۲}}$	
$MA\times MB=MC\times MD$	$M=\frac{\widehat{BD}-\widehat{AC}}{\text{۲}}$	
$MT^{\text{۲}}=MA\times MB$	$M=\frac{\widehat{BT}+\widehat{AT}}{\text{۲}}$	
$MA=MB$	$\hat{M}=\frac{\widehat{AEB}-\widehat{AB}}{\text{۲}}$	

مثال۷: قطر CD و وتر AB در M بر یکدیگر عمودند اگر $\widehat{AC}=۴x$ و $\widehat{BC}=y$، $\widehat{BD}=(۳x+۵)$ باشد، مقدار x و y چیست؟

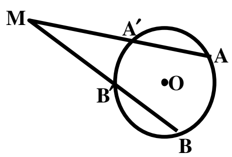


تست۸: در شکل مقابل $\hat{A}=۲۷^\circ$ و $\hat{o}=۷۱^\circ$ کمان $\widehat{BC}$ چند درجه است؟(سراسری ریاضی ـ ۸۶)



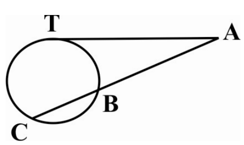
۱) ۹۸
۲) ۱۰۰
۳) ۱۰۲
۴) ۱۰۴

تست۹: در شکل زیر اگر $\frac{\widehat{AA'}}{۲}=\frac{\widehat{BA}}{۳}=\frac{\widehat{B'B}}{۵}=\frac{\widehat{A'B'}}{۲}$ در این صورت اندازه‌ی زاویه‌ی $\hat{M}$ کدام است؟



۱) ۳۰° ۲) ۱۲°
۳) ۱۵° ۴) ۲۰°

تست۱۰: در شکل AT مماس و $\widehat{BC}=\widehat{CT}=۲\widehat{BT}$ زاویه‌ی A چند درجه است؟(آزاد ریاضی ـ عصر ۸۶)



۱) ۱۸°
۲) ۷۲°
۳) ۳۶°
۴) ۱۴۴°

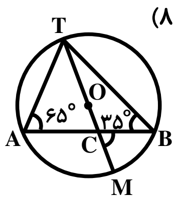
اگر $\widehat{BT}=x \Rightarrow \widehat{BC}=\widehat{CT}=۲x$

کل دایره: $\widehat{BT}+\widehat{CT}+\widehat{BC}=x+۲x+۲x=۵x$

$$۵x=۳۶۰^\circ \rightarrow x=\frac{۳۶۰}{۵}=۷۲^\circ$$

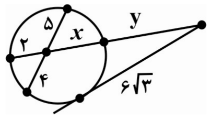
$$\hat{A}=\frac{\widehat{CT}-\widehat{BT}}{۲}=\frac{۲x-x}{۲}=\frac{x}{۲}=\frac{۷۲^\circ}{۲}=۳۶^\circ$$

تست۱۱: در شکل مقابل O مرکز دایره و $\hat{A}=۶۵^\circ$ و $\hat{B}=۳۵^\circ$، زاویه‌ی C چند درجه است؟ (سراسری ـ ۸۱)



۱) ۶۰ ۲) ۶۱
۳) ۶۲ ۴) ۶۳

تست۱۲: در شکل مقابل مقدار y کدام است؟(سراسری ریاضی ـ ۸۵)



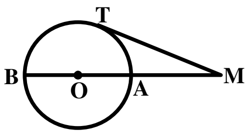
۱) ۶

۲) ۷/۵

۳) ۸

۴) ۹

تست۱۳: در شکل مقابل $MA=۴$ و $MT=۸$ می‌باشد. در صورتی‌که O مرکز دایره باشد، شعاع دایره کدام است؟



۱) ۴/۵

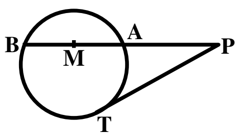
۲) ۹

۳) ۳

۴) ۶

پاسخ:

تست۱۴: در شکل مقابل $PA=۴$ و طول مماس PT برابر ۶ است، اگر M وسط AB باشد، آن‌گاه کدام درست است؟ (آزاد-۷۲)



۱) $MA.MB=\frac{۹}{۴}$

۲) $MA.MB=\frac{۲۵}{۴}$

۳) $MA.MB=\frac{۴}{۹}$

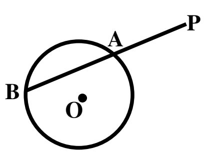
۴) $MA.MB=\frac{۴}{۲۵}$

پاسخ:

$$PT^{۲}=PA.PB \Rightarrow ۶=۴(۴+AB) \Rightarrow AB=۵ \Rightarrow MA=MB=\frac{۵}{۲}$$

$$MA.MB=\frac{۵}{۲}\times\frac{۵}{۲}=\frac{۲۵}{۴}$$

تست۱۵: در شکل مقابل $AB=۳$ ، $PA=۵$ و شعاع دایره برابر ۴ واحد است. فاصله‌ی نقطه‌ی P تا مرکز دایره کدام است؟



۱) $۲\sqrt{۲۱}$

۲) $۲\sqrt{۱۴}$

۳) $۴\sqrt{۷}$

۴) $۳\sqrt{۷}$

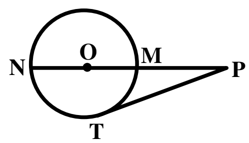
تست۱۶: فاصله‌ی دورترین نقطه‌ی دایره‌ی C از نقطه‌ی P برابر ۹ سانتی‌متر و فاصله‌ی P تا مرکز دایره $\frac{۱۵}{۲}$ سانتی‌متر است.

طول مماس مرسوم از نقطه‌ی P بر دایره چقدر است؟

۱) $۴\sqrt{۶}$ ۲) $۳\sqrt{۶}$ ۳) $۲\sqrt{۶}$ ۴) ۴

پاسخ:

راه حل: اگر از نقطه‌ی P به مرکز دایره وصل کنیم تا دایره را در نقاط M و N قطع کند. با توجه به نکته‌ی بالا در صورتی‌که PT بر دایره مماس باشد، داریم:



$$P \text{ فاصله‌ی دورترین نقطه‌ی دایره تا } = PN = OP + R = ۹ \Rightarrow \frac{۱۵}{۲} + R = ۹ \Rightarrow R = \frac{۳}{۲}$$

$$P \text{ فاصله‌ی نزدیک‌ترین نقطه‌ی دایره تا } = PM = |OP - R| = \left|\frac{۱۵}{۲} - \frac{۳}{۲}\right| = ۶$$

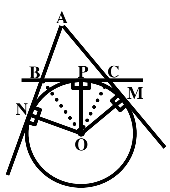
$$PT^{۲} = PM.PN = ۹ \times ۶ = ۵۴ \Rightarrow PT = ۳\sqrt{۶}$$

پس گزینه‌ی (۲) درست است.

تست۱۷: نقطه‌ی C به روی وتر AB به طول ۹ واحد از دایره‌ای چنان قرار دارد که آن وتر را به نسبت ۱ و ۲ تقسیم کرده است. طول کوتاه‌ترین وتر از دایره گذرنده بر نقطه‌ی C کدام است؟ (سراسری ریاضی ـ ۸۲)

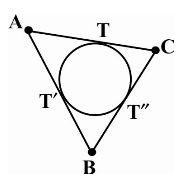
۱) ۸ ۲) $۵\sqrt{۳}$ ۳) $۶\sqrt{۲}$ ۴) $۴\sqrt{۵}$

مثال۱۸: در شکل زیر اگر محیط مثلث ۵ باشد حاصل $AN + AM$ را بیابید.



تست۱۹: از نقاط B, A و C بر دایره‌ای به شعاع ۲، سه مماس $B'T', AT$ و CT'' به طول‌های $۲\sqrt{۳}$ رسم شده است. اگر مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ متساوی‌الاضلاع باشد، مساحت مثلث چقدر است؟ (آزاد ریاضی ـ ۸۰)

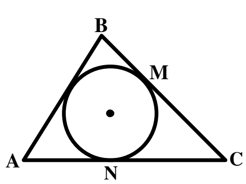
۱) $۳۶\sqrt{۳}$ ۲) $۲۴\sqrt{۳}$ ۳) $۱۸\sqrt{۳}$ ۴) $۱۲\sqrt{۳}$



$$AC = AB = BC \Rightarrow AT = TC\,,$$
$$AT' = T'B, BT'' = T''C$$
$$\Rightarrow \text{طول هر ضلع} = ۲\ AT = ۲ \times ۲\sqrt{۳} = ۴\sqrt{۳}$$
$$\text{مثلث } S = \frac{a^{۲}\sqrt{۳}}{۴} = \frac{(۴\sqrt{۳})^{۲}\sqrt{۳}}{۴} = ۱۲\sqrt{۳}$$

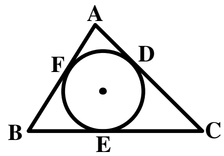
مثال۲۰: اگر اندازه‌ی اضلاع مثلثی مطابق شکل $AB = ۶$ و $BC = ۷$ و $AC = ۸$ باشند، اندازه‌ی قطعه مماس BM چیست؟

پاسخ:



دوستداران فرمول: محاسبه‌ی قطعه‌های مماس دایره‌ی محاطی مثلث:

چنان‌چه دایره‌ی محاطی مثلث ABC را رسم کرده باشیم و نقاط D، E و F نقاط تماس باشند و محیط مثلث $2P$ باشد، داریم:

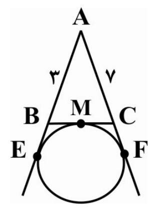


$$AD = AF = P - BC$$
$$CE = CD = P - AB$$
$$BE = BF = P - AC$$

تست۲۱: در مثلثی به طول اضلاع ۷ و ۵ و ۳ واحد، دایره‌ی محاطی خارجی بر ضلع متوسط و امتداد دو ضلع دیگر مماس است، نقطه‌ی مماس، ضلع متوسط را به کدام نسبت تقسیم می‌کند؟

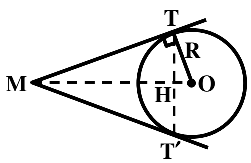
(سراسری ریاضی ـ ۸۳)

۱) $\frac{۱}{۹}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۱}{۵}$ ۴) $\frac{۲}{۹}$



$$BM = \frac{۹}{۲}\ ,\ CM = ۵ - \frac{۹}{۲} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{CM}{BM} = \frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۹}{۲}} = \frac{۱}{۹}$$

مثال(مهم)۲۲: اگر در شکل زیر شعاع دایره برابر ۳ و فاصله نقطه M تا مرکز دایره ۵ می‌باشد.طولهای OH, MH, TT', MT و زاویه بین دو مماس را بیابید.



دوستداران فرمول: اگر از نقطه‌ی M دو مماس MT و MT' بر دایره‌ی $C(O,R)$ رسم کنیم:

الف) MO نیم‌ساز زاویه‌ی بین دو مماس است.

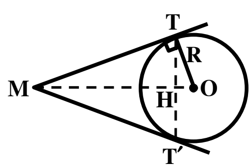
ب) $MT^۲ = MO^۲ - R^۲$

ج) $R^۲ = OH \times OM$

د) $TT'^۲ = ۴MH \times HO$

و) $TT' \,.\, OM = ۲R \,.\, MT$

ز) $\sin\frac{M}{۲} = \frac{R}{OM}\ ,\ tg\frac{M}{۲} = \frac{R}{MT}$



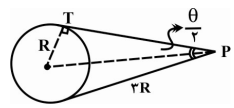
تمرین: از نقطه‌ی P واقع در خارج دایره‌ی $C(O,۳)$ دو مماس $\overline{PA}$ و $\overline{PB}$ را بر دایره رسم کرده‌ایم. در صورتی که فاصله‌ی نقطه‌ی P تا مرکز دایره برابر ۵ باشد. طول وتر $\overline{AB}$ کدام است؟

۱) ۴/۴ ۲) ۴/۶ ۳) ۴/۸ ۴) ۵

پاسخ:

☺تست۲۳: از نقطه‌ی P به فاصله‌ی $۳R$ از مرکز دایره‌ای دو مماس بر آن رسم شده است. زاویه‌ی بین دو مماس چقدر است؟ (آزاد ریاضی ـ ۷۳)

۱) $\operatorname{Arc}\sin\frac{۲}{۳}$ ۲) $۲\operatorname{Arc}\tan\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{\pi}{۳}$ ۴) $۲\operatorname{Arc}\sin\frac{۱}{۳}$



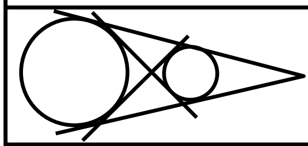
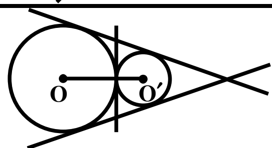
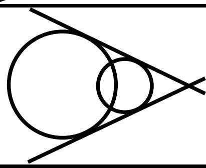
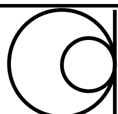
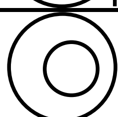
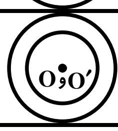
$$\sin\frac{\theta}{۲}=\frac{R}{۳R}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow$$
$$\frac{\theta}{۲}=\operatorname{Arc}\sin\frac{۱}{۳}\Rightarrow\theta=۲\operatorname{Arc}\sin\frac{۱}{۳}$$

☺تست۲۴: دایره‌ی (C) به شعاع ۲ از نقطه‌ی A به زاویه‌ی ۶۰° رؤیت می‌شود، اگر O مرکز دایره و T نقطه‌ی تماس خطی که از A می‌گذرد با دایره باشد، مساحت مثلث $\overset{\Delta}{AOT}$ کدام است؟ (آزاد ریاضی ـ صبح ۸۵)

۱) $۴\sqrt{۳}$ ۲) $۲\sqrt{۳}$ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) $۸\sqrt{۳}$

اوضاع نسبی دو دایره نسبت به هم:

وضعیت دو دایره و تعداد مماس مشترک‌ها و روابط بین مراکز و شعاع دایره‌ها در (شش حالت):

حالت	تعداد مماس مشترک خارجی	تعداد مماس مشترک داخلی	روابط بین مراکز و شعاع دایره‌ها	وضعیت دو دایره نسبت به هم	شکل
۱	۲	۲	$d > R + R'$	متخارج	
۲	۲	۱ (عمود بر خط‌المرکزین)	$d = R + R'$	مماس خارج (برون)	
۳	۲	صفر	$\lvert R - R'\rvert < d < R + R'$	متقاطع	
۴	۱	صفر	$d = \lvert R - R'\rvert$	مماس داخل (درون)	
۵	صفر	صفر	$d < \lvert R - R'\rvert$	متداخل	
۶	صفر	صفر	$d = 0$	هم‌مرکز	

☺**تست۲۵:** دو دایره‌ی C و C' به شعاع‌های ۴ و ۵ و خط‌المرکزین ۸ مفروضند. این دو دایره چند مماس مشترک دارند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ:

راه حل: از آن‌جایی‌که ۹ > ۸ > ۱ پس $R - R' < OO' < R + R'$ بنابراین دو دایره متقاطع هستند. در نتیجه دارای دو مماس مشترک می‌باشند. پس گزینه‌ی (۲) درست است.

☺**تست۲۶:** شعاع‌های دو دایره‌ی هم‌مرکز ۱۰ و ۶ سانتی‌متر می‌باشند. اندازه‌ی وتری از دایره‌ی بزرگ‌تر که بر دایره‌ی کوچک‌تر مماس است، برابر با کدام است؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۶ ۳) ۱۸ ۴) ۱۲

مثال۲۷: مکان هندسی وسط وترهایی به طول ۸ در دایره‌ای به شعاع ۵ چیست؟

مثال۲۸: دو دایره به شعاع‌های ۱۰cm و ۶cm متخارجند چند خط می‌توان رسم کرد که در دو دایره وترهای به طول مساوی ۸ سانتی‌متر جدا کند؟

مثال۲۹: دو دایره به شعاع های ۳و۴ و خط‌المرکزین ۵ مفروضند.چند خط وجود دارد که در دایره کوچک وتر به طول $2\sqrt{5}$ و در دایره بزرگ وتر به طول $2\sqrt{7}$ تشکیل دهد؟

تمرین: دو دایره‌ی C_1 و C_2 به شعاع ۵ مماس خارج‌اند. چند خط می‌توان رسم کرد که بر دایره‌ی C_1 مماس باشد و در دایره‌ی C_2 وتری به طول ۶ جدا کند؟ (سراسری ـ ۸۱)

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) بی‌شمار

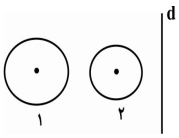
(۳)

☹**تست۳۰:** پاره‌خطی که مراکز دو دایره به شعاع‌های ۵ و ۱۲ را به هم وصل می‌کند، به طول ۱۳ می‌باشد. طول وتر مشترک این دو دایره کدام است؟

۱) ۸/۶ ۲) ۹/۲ ۳) ۸/۲ ۴) ۹/۶

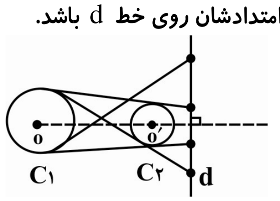
پاسخ:

☺**تست۳۱:** دو دایره‌ی متخارج C_1 و C_2 و خط d خارج آنها که بر خط‌المرکزین عمود است. مفروض می‌باشد، چند نقطه روی خط می‌توان یافت که از آن نقاط بتوان بر هر دو دایره مماس رسم کرد؟ (آزاد ریاضی ـ ۸۴)

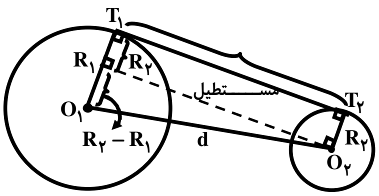


۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) بی‌شمار

از آن جا که دو دایره‌ی متخارج دارای ۴ مماس مشترک هستند، پس ۴ مماس می‌توان بر دو دایره رسم کرد که امتدادشان روی خط d باشد.

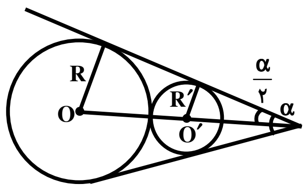


طول مماس مشترک داخلی و خارجی و زاویه‌ی بین دو مماس مشترک:

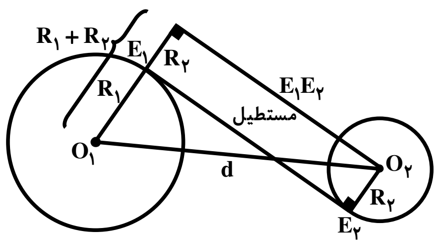


$$d^۲=(T_۱T_۲)^۲+(R_۱-R_۲)^۲ \Rightarrow T_۱T_۲=\sqrt{d^۲-(R_۱-R_۲)^۲}$$

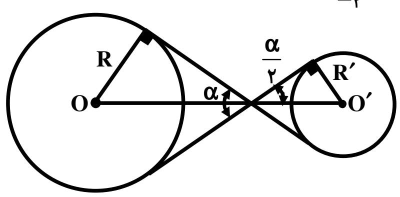
$(OO'=d)$



$\sin\frac{\alpha}{۲}=\frac{|R-R'|}{d}$ (α زاویه‌ی بین دو مماس مشترک خارجی)



$$d^۲=(E_۱E_۲)^۲+(R_۱+R_۲)^۲ \Rightarrow E_۱E_۲=\sqrt{d^۲-(R_۱+R_۲)^۲}$$



$\sin\frac{\alpha}{۲}=\frac{R+R'}{d}$ (α زاویه‌ی بین دو مماس مشترک داخلی)

☺**تست۳۲:** دو دایره‌ی مساوی به شعاع ۵ مفروضند. اگر طول مماس مشترک داخلی آن‌ها $۵\sqrt{۵}$ باشد، اندازه‌ی خط‌المرکزین آن‌ها کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۱۴ ۴) ۱۶

پاسخ:

راه حل: با توجه به رابطه‌ی طول مماس مشترک داخلی دو دایره داریم:

$$TT'=\sqrt{d^۲-(R+R')^۲} \Rightarrow ۵\sqrt{۵}=\sqrt{d^۲-(۵+۵)^۲} \Rightarrow ۱۲۵=d^۲-۱۰۰$$

$$d^۲=۲۲۵ \Rightarrow d=۱۵$$

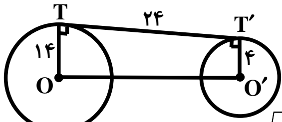
پس: گزینه‌ی (۲) درست است.

☺**تست۳۳:** تسمه‌ای دور دو قرقره به شعاع‌های ۱۴ و ۴ سانتی‌متر به طول کشیده جا افتاده است. اگر فاصله‌ی بین نقطه‌های تماس تسمه با قرقره‌ها ۲۴ سانتی‌متر باشد، آن‌گاه فاصله‌ی بین مرکزهای قرقره‌ها بر حسب سانتی‌متر برابر است با: (المپیاد ریاضی- ۱۹۷۱)

۱) ۲۴ ۲) $۲\sqrt{۱۱۹}$ ۳) ۲۵ ۴) ۲۶

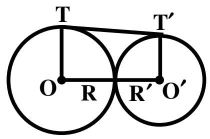
پاسخ:

با توجه به مفهوم مسئله شکل روبه‌رو را برای آن رسم می‌کنیم:



$$TT'=\sqrt{d^۲-(R-R')^۲} \Rightarrow ۲۴=\sqrt{d^۲-(۱۴-۴)^۲} \Rightarrow d=۲۶$$

تست۳۴: طول مماس مشترک خارجی دو دایره‌ی مماس، $\sqrt{۲}$ برابر شعاع دایره‌ی بزرگ‌تر است. شعاع دایره‌ی بزرگ‌تر چند برابر شعاع دایره‌ی کوچک‌تر است؟ (سراسری - ۸۱)



۱) $\sqrt{۲}$

۲) ۱/۵

۳) $\sqrt{۳}$

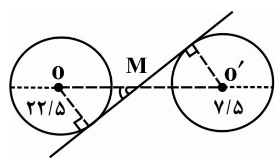
۴) ۲

تست۳۵: در دو دایره‌ی متقاطع زاویه‌ی بین دو مماس مشترک ۶۰° است، طول خط‌المرکزین چقدر است؟ (آزاد ریاضی ـ۷۶)

۱) $۲(R-R')$ ۲) $\sqrt{۲}(R-R')$ ۳) $\sqrt{R^۲+R'^۲}$ ۴) $\sqrt{R^۲+R'^۲}$

تست۳۶: شعاع دو دایره‌ی خارج از هم به ترتیب ۲۲/۵ و ۷/۵ سانتی‌متر است. اگر زاویه‌ی بین مماس داخل و خط‌المرکزین دو دایره ۳۰ درجه باشد، طول خط‌المرکزین دو دایره چند سانتی‌متر است؟ (سراسری ریاضی ـ ۸۴)

۱) ۵۵ ۲) ۵۷/۵ ۳) ۶۰ ۴) ۶۲/۵



$oo'=?\qquad \sin ۳۰^\circ=\dfrac{R'}{Mo'}$

$\Rightarrow \dfrac{۱}{۲}=\dfrac{۷/۵}{O'M}\Rightarrow O'M=۱۵\ \Rightarrow oo'=۱۵+۴۵=۶۰$

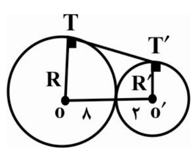
$\sin ۳۰^\circ=\dfrac{۱}{۲}=\dfrac{R}{MO}\Rightarrow\dfrac{۱}{۲}=\dfrac{۲۲/۵}{MO}\Rightarrow MO=۴۵$

تست۳۷: دو دایره مماس خارج به شعاع‌های $R_۱=۸$ و $R_۲=۲$ اگر TT' مماس مشترک و O و O' مراکز دو دایره باشد، مساحت چهار ضلعی $OO'T'T$ چقدر است؟ (آزاد ریاضی ـ عصر ۸۵)

۱) ۵۰ ۲) ۴۰ ۳) ۳۰ ۴) ۲۰

چهارضلعی $OO'T'T$ یک ذوزنقه‌ی قائم‌الزاویه می‌باشد که مساحت آن برابر است با :

$\dfrac{۱}{۲}(R+R')\,(TT')$



$d=oo'=۸+۲=۱۰$

$TT'=\sqrt{d^۲-(R-R')^۲}=\sqrt{۱۰۰-(۸-۲)^۲}=۸$

$\text{مساحت}=\dfrac{۱}{۲}(۸+۲)\,(۸)=۴۰$

تست۳۸: دو دایره به شعاع‌های ۲ و ۳ بر هم مماس خارجند. فاصله‌ی نقطه‌ی تلاقی دو مماس مشترک خارجی آن‌ها تا نقطه‌ی تماس دو دایره چقدر است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۴ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

پاسخ:

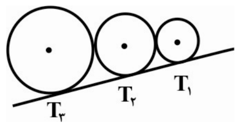
☹**تست۳۹:** سه دایره مطابق شکل بر هم مماسند و مراکز آن‌ها روی یک خط راست است، اگر $r_۱ = ۱$ و $r_۲ = ۲$ باشد، شعاع دایره‌ی بزرگ‌تر چقدر است؟ (آزاد ریاضی ـ صبح ۸۵)

۱) ۳

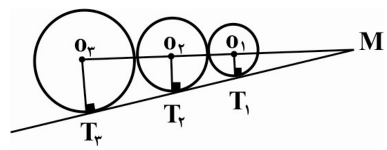
۲) ۴

۳) ۶

۴) $\frac{۵}{۲}$



مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی $\overset{\Delta}{MO_۱T_۱}$ و $\overset{\Delta}{MO_۲T_۲}$ و $\overset{\Delta}{MO_۳T_۳}$ متشابه می‌باشند، زیرا دارای یک زاویه‌ی حاده‌ی مساوی (زاویه‌ی رأس M) می‌باشند.



$MO_۱ = x \ , \ MO_۲ = x + O_۱O_۲ = x + ۳ \ ,$

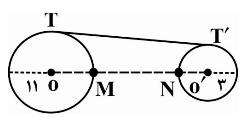
$MO_۳ = x + O_۱O_۲ + O_۲O_۳ = x + ۳ + ۲ + r_۳ = x + ۵ + r_۳$

$$\overset{\Delta}{MO_۱T_۱} \cong \overset{\Delta}{MO_۲T_۲} \Rightarrow \frac{MO_۱}{MO_۲} = \frac{r_۱}{r_۲} \Rightarrow \frac{x}{x+۳} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \underline{x = ۳}$$

$$\overset{\Delta}{MO_۲T_۲} \cong \overset{\Delta}{MO_۳T_۳} \Rightarrow \frac{MO_۲}{MO_۳} = \frac{r_۲}{r_۳} \Rightarrow \frac{۶}{۸+r_۳} = \frac{۲}{r_۳} \Rightarrow \underline{r_۳ = ۴}$$

😐**تست۴۰:** طول مماس مشترک خارجی دو دایره به شعاع‌های ۱۱ و ۳ سانتی‌متر برابر $۳\sqrt{۳۳}$ سانتی‌متر است. کم‌ترین فاصله‌ی نقاط این دو دایره از یک‌دیگر چند سانتی‌متر است؟ (سراسری ریاضی ـ ۸۲)

۱) ۳		۲) ۴		۳) ۵		۴) ۶



$TT' = ۳\sqrt{۳۳}$

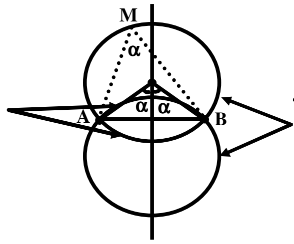
$۳\sqrt{۳۳} = \sqrt{d^۲ - (R - R')^۲} \Rightarrow$

$d^۲ - ۶۴ = ۹ \times ۳۳ \Rightarrow d^۲ \times ۳۳ \Rightarrow d^۲ = ۳۶۱ \Rightarrow d = ۱۹$

$MN = d - (R + R') = ۵$

کمان درخور:

مکان هندسی نقاطی که پاره‌خط مفروض AB از آن نقاط به زاویه‌ی α دیده می‌شود. (کمان درخورد α وابسته به AB) قسمت‌هایی از دو دایره‌ی مساوی هستند به طوری‌که مراکز این دو دایره AB را با زاویه‌ی 2α می‌بینند.



اگر کمان AMB کمان درخور α وابسته به پاره‌خط AB باشد، آن‌گاه کمان کوچک‌تر AB کمان درخور $180-\alpha$ وابسته به پاره‌خط AB خواهد بود.

نکته: اگر کمان درخور α وابسته به AB قسمتی از دایره‌ی C باشد، آن‌گاه شعاع دایره‌ی C از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید.

$$R=\frac{AB}{2\sin\alpha}$$

در ضمن فاصله‌ی مرکز این دایره از وتر AB از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید.

$$\text{فاصله}\ OH=\frac{AB}{2|\tan\alpha|}$$

تست۴۱: کمان درخور زاویه‌ی 30° روبه‌رو به پاره‌خط $AB=4$ قسمتی از دایره به شعاع R است. آن‌گاه: (آزاد ریاضی ۷۸)

۱) $R=2$ ۲) $R=1$ ۳) $R=4$ ۴) $R=8$

پاسخ:

$$R=\frac{a}{2\sin\alpha}=\frac{4}{2\sin 30^\circ}=4$$

تست۴۲: اگر نقطه‌ی A روی دایره‌ی محیطی مثلث ABC قرار داشته باشد، به طوری‌که زاویه‌ی A برابر ۶۰ درجه و ضلع BC برابر ۶ باشد. آن‌گاه فاصله‌ی مرکز دایره‌ی محیطی مثلث تا BC کدام است؟

۱) $\sqrt{3}$ ۲) $2\sqrt{3}$ ۳) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ ۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

پاسخ:

نقطه‌ی A روی کمان درخور زاویه‌ی ۳۰ درجه وابسته به پاره‌خط BC قرار دارد، داریم:

$$\text{فاصله}=\frac{6}{2\tan 60}=\frac{6}{2\times\sqrt{3}}=\sqrt{3}$$

مثال(مهم)۴۳: اگر در یک مثلث $BC=4$, $A=30$ باشد آنگاه حداکثر مقدار h_a را بیابید.

مثال(مهم)۴۴: با اطلاعات زیر چند مثلث رسم می‌شود؟

۱) $\begin{cases} a = ۴ \\ A = ۶۰ \\ h_a = ۴ \end{cases}$

۲) $\begin{cases} a = ۴ \\ A = ۶۰ \\ h_a = ۲ \end{cases}$

۳) $\begin{cases} a = ۴ \\ A = ۶۰ \\ h_a = ۲\sqrt{۳} \end{cases}$

تست۴۵: در مثلث ABC طول $BC = ۶$ و $\hat{A} = ۶۰^\circ$ است. اگر رأس A روی دایره‌ی محیطی مثلث تغییر مکان دهد، آن‌گاه ماکزیمم مساحت مثلث ABC کدام است؟

۱) $۹\sqrt{۳}$　۲) $۸\sqrt{۳}$　۳) $۱۰\sqrt{۳}$　۴) $۶\sqrt{۳}$

تمرین: در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ طول $BC = ۸$ و $\hat{A} = ۶۰^\circ$ طول میانه‌ی AM کدام یک از مقادیر زیر می‌تواند باشد؟ (آزاد ریاضی ـ ۸۱)

۱) ۳　۲) ۸　۳) ۷　۴) ۶

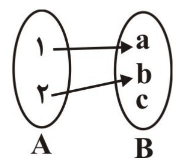
(۴)

تعریف: نگاشت از مجموعه‌ی D به مجموعه‌ی R تناظری است از D به R که به هر عضوی از D، یک و تنها یک عضو از مجموعه‌ی R نظیر می‌شود و تبدیل یک نگاشت یک به یک است از صفحه به روی خودش.

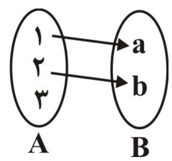
به بیان ساده تر:

نگاشت: همان تابع است به شرطی که عضوهای مجموعه‌ی A همگی به کار روند.

تبدیل: همان تابع یک به یک است به شرطی که عضوهای مجموعه‌ی A همگی به کار روند.



تابع است (نگاشت است) – یک به یک است (تبدیل است)



تابع است (نگاشت نیست) – یک به یک است (تبدیل نیست)

مثال۱: کدامیک از نگاشتهای زیر تبدیل است؟

۱) $M(x,y)=(x^{۲},y)$

۲) $M(x,y)=(x,|y|)$

۳) $M(x,y)=(x,۲)$

مثال۲: آیا نگاشت $M(x,y)=(x,۰)$ یک تبدیل است؟

☺**تست۳:** کدام نگاشت زیر یک تبدیل است؟ (همه‌ی نگاشت‌ها از $\mathbb{R}^{۲}$ به $\mathbb{R}^{۲}$ تعریف شده)

۱) $f(x,y)=(x,۰)$ ۲) $f(x,y)=(y,y)$

۳) $f(x,y)=(۲x+y,۴x+۲y)$ ۴) $f(x,y)=(۳x+۲y)$

راه اول: گزینه‌ی ۱): نگاشت است اما یک‌به‌یک نیست زیرا $f(۲,۵)=(۲,۰)$ و $f(۲,۷)=(۲,۰)$ پس تبدیل نیست.

گزینه‌ی ۲): نگاشت است اما یک‌به‌یک نیست زیرا $f(۴,۵)=(۵,۵)$ و $f(۳,۵)=(۵,۵)$ پس تبدیل نیست.

گزینه‌ی ۳): نگاشت است اما یک‌به‌یک نیست زیرا $f(۱,۲)=(۴,۸)$ و $f(۰,۴)=(۴,۸)$ پس f تبدیل نیست.

بنابراین در بین ۴ مورد بالا تنها مورد ۴ را تبدیل می‌دانیم.

راه دوم:

نکته: نگاشت $T(x,y)=(ax+by,cx+dy)$ وقتی تبدیل است که $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq ۰$

مثال۴: اگر $T(x,y)=(x+۲,۴y)$ آن‌گاه تصویر $(۳,۴)$ تحت اثر T چیست؟ ثانیاً تحت اثر T نقطه‌ی $(۳,۱۶)$ تصویر کدام نقطه است؟

☺**تست۵:** مختصات نقطه‌ای که تصویر آن تحت تبدیل $T(x,y)=(x-۲y,۲x-y)$ به صورت $(-۲,۲)$ باشد، کدام است؟

۱) $(\frac{۸}{۳},\frac{۱۰}{۳})$ ۲) $(\frac{۱۰}{۳},\frac{۸}{۳})$ ۳) $(-\frac{۸}{۳},\frac{۱۰}{۳})$ ۴) $(-\frac{۱۰}{۳},\frac{۸}{۳})$

پاسخ: گزینه‌ی ۲)؛

فرض کنیم تصویر نقطه‌ی $(x_۱,y_۱)$ تحت تبدیل T نقطه‌ی $(-۲,۲)$ باشد، یعنی:

$$T(x_۱,y_۱)=(-۲,۲)$$
$$T(x_۱,y_۱)=(x_۱-۲y_۱,۲x_۱-y_۱)$$
$$(-۲,۲)=(x_۱-۲y,۲x_۱-y_۱) \quad \text{در نتیجه}$$

از تساوی زوج‌های مرتب داریم:

$$\begin{cases} x_۱-۲y_۱=-۲ \\ ۲x_۱-y_۱=۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -۲x_۱+۴y_۱=۴ \\ ۲x_۱-y_۱=۴ \end{cases} \Rightarrow ۳y_۱=۸ \Rightarrow y_۱=\frac{۸}{۳}$$
$$x_۱=-۲+۲(\frac{۸}{۳})=-۲+\frac{۱۶}{۳}=\frac{۱۰}{۳} \qquad (\frac{۱۰}{۳},\frac{۸}{۳})$$

> **تبدیل ایزومتری (طولپا):** تبدیلی است که فاصله بین نقاط را حفظ می‌کند.
>
> اگر شکلی توسط یک تبدیل ایزومتری نگاشته شود، تصویر شکل با شکل اصلی هم‌نهشت خواهد بود.

مثال۶: مقدار k را چنان تعیین کنید که تبدیل $T(x,y)=(kx+k,y-k)$ یک تبدیل ایزومتری باشد؟

> **نکته:** برای یافتن معادله تبدیل یافته یک منحنی تحت یک تبدیل کافی است حاصل نبدیل را برابر (x',y') فرض می‌کنیم و y,x را برحسب y',x' یافته و در معادله جایگذاری می‌کنیم.

مثال۷: تبدیل یافته خط $y=۲x+۱$ تحت تبدیل $T(x,y)=(۳x+۱,۲y-۱)$ را بیابید.

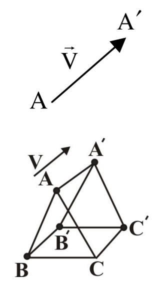
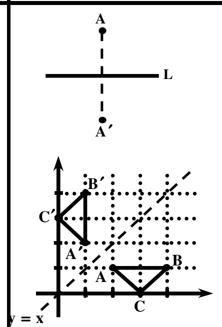
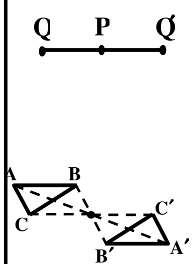
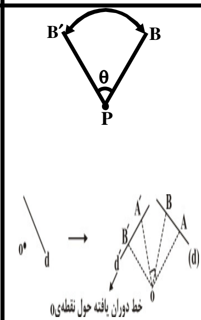
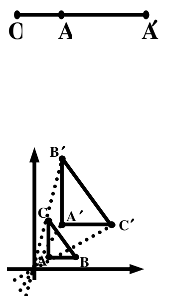
☺**تست۸:** شیب خط $y=mx$ پس از تبدیل $T(x,y)=(ax,by)$ کدام است؟ $(a,b\neq ۰)$ (آزاد ریاضی ـ ۸۱)

۱) $\frac{bm}{a}$ ۲) $\frac{am}{b}$ ۳) m ۴) $\frac{m}{a}$

تست۹: اگر فاصله‌ی خط $y = ax + b$ تا مبدأ مختصات k باشد، فاصله‌ی تبدیل یافته‌ی خط فوق تحت تبدیل $T(x, y) = (ax + b, ay + b)$ تا مبدأ کدام است؟ (آزاد ریاضی ـ ۸۱)

۱) $\frac{k+b}{\sqrt{a}}$　　۲) k　　۳) $k+b$　　۴) $\frac{k}{\sqrt{a}}$

انواع تبدیلات:

تبدیلات	انتقال	بازتاب محوری	بازتاب مرکزی	دوران	تجانس
تغییر شکل					
حفظ شیب خط					
ایزومتری					

تست۱۰: کدام تبدیل طول پاره خط را تغییر نمی‌دهد. ولی ممکن است زوایای آن‌ها را با محورها تغییر دهد؟ (آزاد ریاضی ـ ۷۹)

۱) دوران　　۲) تجانس　　۳) انتقال　　۴) هیچ‌کدام

تست۱۱: کدام تبدیل ایزومتری است و شیب خط را حفظ نمی‌کند؟ (سراسری ریاضی ـ ۸۴)

۱) دوران　　۲) تجانس　　۳) انتقال　　۴) بازتاب نسبت به یک نقطه

نکات:

۱- انتقال:

نکته: ضابطه انتقال به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\vec{V}\Big|\begin{matrix}a\\b\end{matrix} \to T(x,y)=(x+a,y+b)$$

که بردار $\vec{V}\Big|\begin{matrix}a\\b\end{matrix}$ را بردار انتقال می‌نامند.

تست۱۲: کدام‌یک از تبدیل‌های زیر یک انتقال است؟

۱) $T(x,y)=(x+۳۲,۲-y)$ ۲) $T(x,y)=(y+۴,x-۳)$

۳) $T(x,y)=(۴x+۳,۲+y)$ ۴) $T(x,y)=(\frac{۴x+۳}{۴},\frac{۵y+۶}{۵})$

راه حل: گزینه‌ی (۱) غلط است زیرا ضریب y غیر از یک است. (در ضابطه‌ی انتقال ضرایب x و y یک هستند.

گزینه‌ی (۲) غلط است، زیرا جای x و y با هم عوض شده‌اند.

گزینه‌ی (۳) غلط است، زیرا ضریب x غیر از یک است.

گزینه‌ی (۴) درست است زیرا مطابق با ضابطه‌ی کلی یک انتقال است.

مثال۱۳: تصویر خط $۳x+۴y=۵$ تحت انتقال $T(x,y)=(x-۲,y+a)$ از نقطه‌ی $A\Big|\begin{matrix}۵\\۲\end{matrix}$ گذشته است پارامتر a را بیابید.

مثال۱۴: خط $y=x+۴$ را در امتداد چه برداری انتقال دهیم تا معادله‌ی خط تغییر نکند؟

فرض کنیم بردار انتقال (h,k) پس:

$$T(x,y)=(x',y')$$

پاسخ: فرض کنیم بردار انتقال (h,k) باشد، پس:

$$(x+h,y+k)=(x',y') \Rightarrow \begin{cases}x=x'-h\\y=y'-k\end{cases}$$

(در معادله‌ی خط جایگزین کرده) داریم:

$$y'-k=x'-h+۴ \Rightarrow y'=x'-h+۴+k \Rightarrow k-h=۰ \Rightarrow k=h$$

یعنی اگر خط را در امتداد بردار (h,h) انتقال دهیم معادله‌ی خط تغییر نمی‌کند.

تست۱۵: اگر مثلث ABC با رئوس $C\Big|\begin{matrix}۲\\۱\end{matrix}$، $B\Big|\begin{matrix}۱\\۱\end{matrix}$ و $A\Big|\begin{matrix}۱\\۳\end{matrix}$ و تبدیل $T(x,y)=(\frac{۳x+۱}{۳},\frac{۲y-۴}{۲})$ مفروض باشند. آن‌گاه مساحت تصویر این مثلث تحت تبدیل T کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۱ ۴) ۴

راه حل: تبدیل T یک انتقال است، پس مثلث ABC و تصویر آن برابرند. از طرفی مثلث ABC قائم‌الزاویه است و مساحت آن برابر ۱ می‌باشد پس مساحت تصویر آن نیز ۱ است. بنابراین گزینه‌ی (۳) درست است.

۲- بازتاب محوری:

نکته: ضابطه‌ها:

ضابطه‌ی بازتاب نسبت به محور x ها: $f(x\,,\,y)=(x\,,-y)$

ضابطه‌ی بازتاب نسبت به محور y ها: $f(x\,,\,y)=(-x\,,y)$

ضابطه‌ی بازتاب نسبت به خط $y=x$: $f(x\,,\,y)=(y\,,x)$

ضابطه‌ی بازتاب نسبت به خط $y=-x$: $f(x\,,\,y)=(-y\,,-x)$

ضابطه‌ی بازتاب نسبت به: خط $x=\alpha$: $f(x\,,\,y)=(۲\alpha-x\,,\,y)$

ضابطه‌ی بازتاب نسبت به: خط $y=\beta$: $f(x\,,\,y)=(x\,,۲\beta-y)$

مثال۱۶: بازتاب دایره $(x-۲)^۲+y^۲=۱$ نسبت به خط $x=۴$ چیست؟

تست۱۷: اگر $A(۲,۶)$ و بازتاب نقطه‌ی A نسبت به خط $y=۴$ نقطه‌ی $A'(k,l)$ باشد، مقدار $k.l$ کدام است؟

۱) ۸　　۲) -۲　　۳) ۵　　۴) -۴

پاسخ:

$$A(۲,۶)\ \rightarrow\ A'(۲,۴(۲)-۶)=(۲,-۲)$$

$$(۲,-۲)=(k,l)\ \Rightarrow\ \begin{cases}k=۲\\ l=-۲\end{cases}\ \Rightarrow\ k.l=۲(-۲)=-۴$$

تست۱۸: تصویر بازتاب خط $۳x-۲y=۴$ نسبت به خط $y=-x$ کدام است؟

۱) $۳x-۲y+۴=۰$　　۲) $۳x-۲y-۴=۰$　　۳) $۲x+۳y-۴=۰$　　۴) $۲x-۳y-۴=۰$

پاسخ:

راه حل: ضابطه‌ی بازتاب نسبت به خط $y=-x$ عبارتست از: $T(x,y)=(-y,-x)$ داریم:

$$\left.\begin{array}{l}x'=-y\ \Rightarrow\ y=-x'\\ y'=-x\ \Rightarrow\ x=-y'\end{array}\right\}\ \Rightarrow\ ۳(-y')-۲(-x')=۴\ \Rightarrow\ ۲x'-۳y'=۴$$

پس گزینه‌ی (۴) درست است.

تست۱۹: d' انتقال یافته ی خط $d:۲x+y=۳$ تحت تبدیل $T(x\,,\,y)=(x+۲\,,\,y-۱)$ می باشد و d'' بازتاب خط d' نسبت به خط $y=-x$ می‌باشد. معادله‌ی خط d'' کدام است؟

۱) $x+۲y=۶$　　۲) $x+۲y+۶=۰$　　۳) $x-۲y+۶=۰$　　۴) $x-۲y=۶$

$$T(x\,,y)=(x+۲\,,\ y-۱)=(X\,,\,Y)\Rightarrow\begin{cases}x=X-۲\\ y=Y+۱\end{cases}$$

$$d:۲x+y=۳$$

$d':۲(X-۲)+(Y+۱)=۳ \Rightarrow d'=۲X+Y=۶$

ضابطه‌ی بازتاب نسبت به خط $y=-x$:

$f(x,y)=(-y,-x)$

$(-y,-x)=(X,Y) \Rightarrow \begin{cases} y=-X \\ x=-Y \end{cases}$

$d':۲x+y=۶$

$d'':۲(-Y)+(-X)=۶ \Rightarrow d''=۲Y+X+۶=۰$

۳- بازتاب مرکزی:

نکته: ضابطه بازتاب نسبت به نقطه‌ای مانند $O(\alpha,\beta)$ به صورت زیر است:

$T(x,y)=(۲\alpha-x,۲\beta-y)$

تذکر: در حالت خاص که $o(۰,۰)$ باشد آنگاه ضابطه به صورت زیر است:

$T(x,y)=(-x,-y)$

مثال۲۰: قرینه سهمی $y^۲=۸x$ را نسبت به نقطه $o(۱,۲)$ بیابید.

تست۲۱: بازتاب نقطه‌ی $A(-k+۲,۴-k)$ نسبت به مبدأ مختصات روی خط به معادله‌ی $۳x+۴y+۲=۰$ می‌باشد. مقدار k کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۰ ۳) ۸ ۴) ۱۴

پاسخ:

بازتاب نقطه‌ی A نسبت به مبدأ مختصات $A'(k-۲,۴+k)$ می‌باشد، اکنون مختصات نقطه‌ی A' را در معادله‌ی خط قرار داده و k را حساب می‌کنیم.

$۳(k-۲)-۴(k-۴)+۲=۰ \quad \Rightarrow \quad k=۱۲$

تست۲۲: قرینه‌ی نقطه‌ی $M(۲,-۳)$ نسبت به مرکز ثقل مثلثی با رأس‌های $A(۱,۱)$ و $B(۳,۴)$ و $C(۲,۴)$ کدام است؟

۱) $M'(+۲,۹)$ ۲) $M'(-۲,۹)$ ۳) $M'(-۲,-۹)$ ۴) $M'(۲,-۹)$

پاسخ:

مرکز ثقل مثلث $G\begin{cases} x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{۳}=\dfrac{۱+۳+۲}{۳}=۲ \\ y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{۳}=\dfrac{۱+۴+۴}{۳}=۳ \end{cases} \Rightarrow G\begin{vmatrix} ۲ \\ ۳ \end{vmatrix} \Rightarrow M'\begin{cases} ۲\alpha-x=۲(۲)-۲=۲ \\ ۲\beta-y=۲(۳)-(-۳)=۹ \end{cases}$

☺**تست۲۳:** اگر $O_1(۶,-۴)$ مرکز تقارن باشد و تبدیل یافته‌ی خط به معادله‌ی $(k-۴)x+y-k=۰$ نسبت به نقطه‌ی O_1 بی‌تغییر باشد، مقدار k کدام است؟

۱) $\frac{۲۸}{۵}$ ۲) $\frac{۲۶}{۵}$ ۳) $\frac{۲۷}{۵}$ ۴) $\frac{۲۴}{۵}$

پاسخ:

در صورتی که خط از مرکز تقارن بگذرد تبدیل یافته‌ی آن نسبت به مرکز تقارن خود خط است و هیچ تغییری نمی‌کند. بنابراین مختصات نقطه‌ی O_1 را در خط قرار داده و k را حساب می‌کنیم:

$$(k-۴)۶+(-۴)-k=۰ \quad\Rightarrow\quad ۵k=۲۸ \quad\Rightarrow\quad k=\frac{۲۸}{۵}$$

۴- ضابطه دوران:

ضابطه دوران حول مبدأ مختصات، به اندازه‌ی زاویه‌ی α در جهت مثلثاتی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}\to T(x,y)=(x\cos\alpha-y\sin\alpha, x\sin\alpha+y\cos\alpha)$$

در چند حالت خاص:

$$\begin{cases}\alpha=۹۰\Rightarrow T(x,y)=(-y,x)\\ \alpha=۱۸۰\Rightarrow T(x,y)=(-x,-y)\\ \alpha=۲۷۰\Rightarrow T(x,y)=(y,-x)\end{cases}$$

مثال۲۴: دوران یافته بیضی $۲x^۲+۳y^۲=۵$ را نسبت به مبدا به اندازه ۴۵ درجه بیابید.

☺**تست۲۵:** تصویر خط به معادله‌ی $۴x+۲y=۱$ را تحت دوران حول مبدأ و زاویه‌ی ۹۰° به‌دست می‌آوریم. مجموع طول و عرض نقطه‌ی تلاقی خط با تصویرش کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۵}$ ۲) $\frac{۲}{۵}$ ۳) $\frac{۵}{۱۱}$ ۴) $\frac{۱}{۵}$

پاسخ:

$$T(x,y)=(-y,x)=(X,Y) \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}x=Y\\ y=-X\end{cases} \quad\Rightarrow\quad ۴Y-۲X=۱ \text{ معادله‌ی تصویر خط}$$

$$۲\times\begin{cases}-۲x+۴y=۱\\ ۴x+۲y=۱\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}-۴x+۸y=۲\\ ۴x+۲y=۱\end{cases} \quad\Rightarrow\quad y=\frac{۳}{۱۰}\ ,\ x=\frac{۱}{۱۰} \quad\Rightarrow\quad \frac{۱}{۱۰}+\frac{۳}{۱۰}=\frac{۴}{۱۰}=\frac{۲}{۵}$$

تست۲۶: خط به معادله‌ی $۴x+۶y=۸$ را حول مبدأ، تحت زاویه‌ی $\theta=۹۰^\circ$ دوران می‌دهیم. عرض از مبدأ تصویر کدام است؟

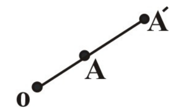
۱) ۲۳ ۲) -۲ ۳) ۲ ۴) -۳

پاسخ: گزینه‌ی ۳)؛

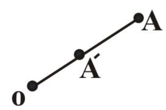
$$T(x,y)=(-y,x)=(X,Y) \Rightarrow \begin{cases} x=Y \\ y=-X \end{cases} \Rightarrow ۴Y-۶X=۸ \xrightarrow{X=۰} Y=۲$$ معادله‌ی تصویر خط

۵- تجانس: اگر A, A' تجانس یافته یکدیگر نسبت به نقطه O با نسبت تجانس k باشند آنگاه: $\rightarrow oA'=k(oA)$

نکته: در هر ۲ شکل، A',A در یک طرف مرکز تجانس است و یعنی تجانس مستقیم است. $(k>۰)$

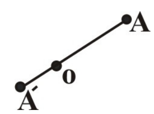


تجانس انبسط است $k>۱$



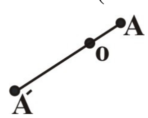
$۰<k<۱$ تجانس انقباض است.

در هر ۲ شکل، A',A در طرفین مرکز تجانس است و یعنی تجانس معکوس است. $(k<۰)$.



$-۱<k<۰$

تجانس انقباض وارون است.



$k<-۱$

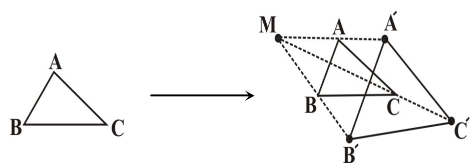
تجانس انبساط وارون است.

اگر $k=۱$ تجانس تبدیل همانی است.

اگر $k=-۱$ تجانس معادل تقارن مرکزی یا دوران ۱۸۰° است.

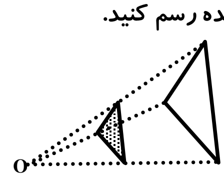
نکته: تجانس با نسبت k طول را با ضریب $|k|$ و مساحت را با ضریب $k^۲$ تغییر می‌دهد.

مثال۲۷: اگر درشکل زیر $AB=۳, A'B'=۶$ باشد نسبت تجانس را بیابید.

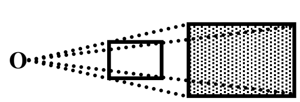


مثال۲۸: مجانس هر یک از شکل‌های هاشورخورده‌ی زیر را به مرکز O با نسبت داده شده رسم کنید.

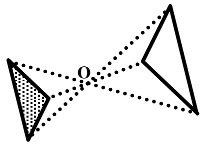
الف) $(k=۳)$



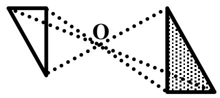
ب) $(k=\frac{۴}{۵})$



ج) $(k=-۳)$



د) $(k=-\frac{۱}{۲})$



☺**تست۲۹:** مجانس شکل F به معادله‌ی $x^۲+y^۲=۴$ با مرکز تجانس مبدأ و نسبت تجانس $k=۲\sqrt{۲}$، دارای کدام مساحت است؟

۱) ۲۴π ۲) ۱۸π ۳) ۱۶π ۴) ۳۲π

پاسخ:

توجه شود که معادله‌ی $x^۲+y^۲=۴$، معادله‌ی دایره‌ای به مرکز مبدأ و به شعاع ۲ است.

$$S=\pi R^۲=\pi(۴)=۴\pi \quad \Rightarrow \quad S'=k^۲.S=(۲\sqrt{۲})^۲(۴\pi)=۳۲$$

نکته: ضابطه تجانس وقتی مرکز تجانس مبدأ مختصات‌اش به صورت: $T(x,y)=(kx,ky)$ است.

مثال۳۰: تجانس یافته خط $y=۲x+۱$ نسبت به مبدا و با نسبت تجانس ۳ چه معادله‌ای دارد؟

مثال۳۱: تجانس یافته نقطه $A(۱,۲)$ با نسبت تجانس ۳ نسبت به نقطه $O(۲,۳)$ چه نقطه‌ای می‌باشد؟

نتیجه: ضابطه تجانس وقتی مرکز تجانس نقطه $W\Big|\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}$ است به صورت $T(x,y)=(k(x-\alpha)+\alpha,k(y-\beta)+\beta)$ است.

مثال۳۲: اگر هذلولی $\frac{y^۲}{۲}-\frac{x^۲}{۸}=۱$ را با نسبت تجانس ۲ نسبت به نقطه $o(۲,۳)$ تبدیل کنیم،شیب مجانبهای جدید را بیابید.

نکته: هر ۲ دایره در صفحه، مجانس یکدیگرند و مرکز تجانس روی خط‌المرکزین است.

محل برخورد مماس مشترک‌های خارجی ۲ دایره مرکز تجانس مستقیم (S) و محل برخورد مماس مشترک‌های داخلی، مرکز تجانس معکوس (S') می‌باشد.

$$k=\frac{R'\rightarrow \text{شعاع مجانس یافته}}{R\rightarrow \text{شعاع دایره اولیه}}$$

$$\frac{So'}{So}=k,\frac{S'o'}{S'o}=k$$

تست۳۳: O و O' مرکز دو دایره به شعاع‌های ۳ و ۵ می‌باشند. اگر $OO'=۱۲$ باشد، فاصله‌ی مرکز تجانس معکوس این دو دایره از مرکز دایره به شعاع بزرگ‌تر چند است؟

۱) ۷ ۲) ۷/۵ ۳) ۸ ۴) ۸/۵

پاسخ:

$$\frac{SO}{SO'}=\frac{R}{R'}=\frac{۵}{۳}$$
$$\frac{SO}{OO'}=\frac{۵}{۸} \Rightarrow SO=۷/۵$$

تست۳۴: در دو دایره به شعاع‌های ۴ و ۶ و خط‌المرکزین ۱۰ فاصله‌ی مرکز تجانس مستقیم دو دایره تا مرکز دایره‌ی بزرگ‌تر کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) ۳۰ ۳) ۱۸ ۴) ۲۰

پاسخ:

راه حل: با توجه به این‌که مجموع دو شعاع برابر طول خط‌المرکزین است نتیجه می‌گیریم دو دایره مماس خارجی هستند. اگر P محل تلاقی مماس مشترک‌های خارجی دو دایر باشد، آن‌گاه P مرکز تجانس دو دایره خواهد بود، داریم:

$$OT \parallel O'T' \Rightarrow \frac{PO'}{PO}=\frac{O'T'}{OT} \xrightarrow[\text{صورت}]{\text{تفضـــــیل از}} \frac{PO-PO'}{PO}=\frac{OT-O'T'}{OT}$$
$$\Rightarrow \frac{۱۰}{PO}=\frac{۶-۴}{۶} \Rightarrow PO=۳۰$$

مثال(مهم)۳۵: اگر نقاط $A(۱,۲), A'(۳,۶)$:

الف: انتقال یافته یکدیگر باشند بردار انتقال را بیابید.

ب: قرینه یکدیگر نسبت به خط L باشند آنگاه معادله محور بازتاب را بیابید.

ج: قرینه یکدیگرنسبت به نقطه O باشند آنگاه مرکز تقارن را بیابید.

مثال۳۶: بازتاب نقطه‌ی $A(۲,+۲)$ را نسبت به خط $\Delta: x+y+۸=۰$ به‌دست آورید.

روش ۱:

روش ۲:

نکته: بازتاب نقطه‌ی $A(x_۱,y_۱)$ نسبت به خط $l: ax+by+c=۰$ نقطه‌ی $A'(x_۱-۲ak, y_۱-۲bk)$ است. به‌طوری‌که $k=\dfrac{ax_۱+by_۱+c}{a^۲+b^۲}$.

$$k=\frac{ax_۱+by_۱+c}{a^۲+b^۲}=\frac{۱(۲)+۱(+۲)+۸}{(۱)^۲+(۱)^۲}=\frac{۱۲}{۲}=۶$$

$$A'=(x_۱-۲ak, y_۱-۲bk)=(۲-۲(۱)(۶), +۲-۲(۱)(۶))=(-۱۰,-۱۰)$$

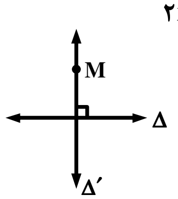
بازتاب A نسبت به خط $\Delta: (-۱۰,-۱۰)=A'$

مثال۳۷: تحت یک بازتاب محوری نقطه‌ی $A(-۳,-۱)$ روی نقطه‌ی $A'(۳,۵)$ تصویر شده تصویر نقطه‌ی $B(۱,۵)$ تحت این بازتاب چه نقطه‌ای است؟

تست۳۸: معادله‌ی خطی که از نقطه‌ی $M(۲,۳)$ عبور کرده و بازتابش نسبت به خط $\Delta: ۳x+۲y-۴=۰$ بر خودش منطبق شود، کدام است؟

۱) $۲x+۳y-۵=۰$ ۲) $۳x-۲y+۵=۰$ ۳) $۲x-۳y+۵=۰$ ۴) $۲x-۳y-۵=۰$

پاسخ: خطی که از M بگذرد و بر Δ عمود باشد بازتابش نسبت به Δ بر خودش منطبق است.



$$m_{\Delta}=-\frac{۳}{۲} \quad و \quad m_{\Delta'}=\frac{۲}{۳}$$

$$y-۳=\frac{۲}{۳}(x-۲) \Rightarrow ۳y-۹=۲x-۴ \Rightarrow ۲x-۳y+۵=۰$$

مثال مهم۳۹: اگر دو نقطه $A(۱,۱), A'(۳,۳)$ و همچنین $B(۲,۳), B'(۴,-۱)$:

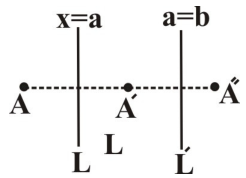
الف: دوران یافته یکدیگرنسبت به نقطه O باشند آنگاه مرکز دوران را بیابید.

ب: تجانس یافته یکدیگرنسبت به نقطه O باشند آنگاه مرکز تجانس را بیابید.

نکته: ترکیب تبدیلات:

* ترکیب دو یا چند انتقال، یک انتقال است.

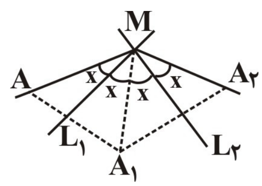
* نتیجه ترکیب ۲ بازتاب نسبت به ۲ خط موازی، یک انتقال است.



* نتیجه ترکیب ۲ بازتاب نسبت به ۲ خط متقاطع که با هم زاویه‌ی α می‌سازند، دورانی است به اندازه‌ی زاویه‌ی 2α.

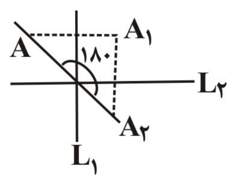
$$2x=\alpha \to x=\frac{\alpha}{2}$$

$$A\hat{M}A_2 = 4x = 2\alpha$$

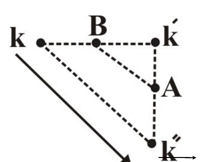


* در حالت خاص:

اگر $\alpha = 90^\circ$ باشد ترکیب ۲ بازتاب نسبت به دو خط متعامد، یک تقارن مرکزی یا یک تجانس با نسبت -1 یا دوران 180° است.



* نتیجه ترکیب ۲ تقارن مرکزی، ابتدا نسبت به نقطه‌ی B، پس نسبت به نقطه‌ی A، انتقالی است به اندازه‌ی بُردار $2\overrightarrow{BA}$.



انتقال به اندازه بردار $2\overrightarrow{BA}$

ترکیب دو دوران با زاویه های α,β و با یک مرکز، یک دوران است به زاویه $\alpha+\beta$ و همان مرکز.

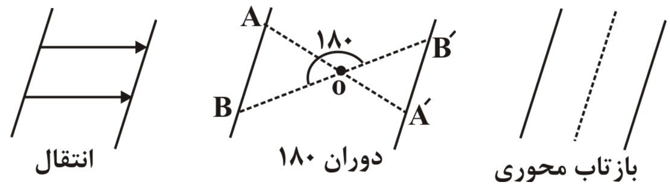
*ترکیب دو تجانس متوالی با نسبت‌های k_2, k_1 نسبت به مرکز o تجاسن با همان مرکز و نسبت تجانس k_1k_2 است.

☺**تست۴۰:** ترکیب دو دوران هم مرکز به زوایای 50° و 130° کدام است؟

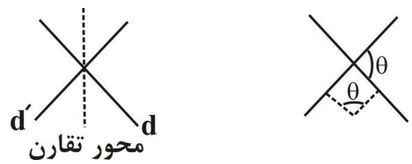
۱) تقارن مرکزی ۲) انتقال ۳) تجانس ۴) گزینه‌ی (۱) و (۳)

نکته:

اگر ۲خط موازی باشند، ۲ خط می‌توانند تحت یک انتقال یا دوران ۱۸۰° یا بازتاب محوری بر هم منطبق می‌باشد.



همچنین اگر ۲ خط متقاطع باشند، ۲ خط می‌توانند تحت یک دوران با یک بازتاب محوری بر هم منطبق شوند.



مثال۱۴۱: دو خط $\Delta: ۳x+۴y-۱=۰$ و $۴x+۳y+۲=۰$ بازتاب یک‌دیگرند. معادله‌ی محور تقارن را بیابید.

پاسخ: نیم‌سازهای بین دو خط می‌توانند محور تقارن باشند. (دو خط ناموازی‌اند.)

$$\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\pm\frac{a'x+b'y+c'}{\sqrt{a'^۲+b'^۲}} \Rightarrow \frac{۳x+۴y-۱}{\sqrt{۳^۲+۴^۲}}=\pm\frac{۴x+۳y+۲}{\sqrt{۴^۲+۳^۲}} \Rightarrow ۳x+۴y-۱=\pm(۴x+۳y+۲)$$

$+ \Rightarrow ۳x+۴y-۱=۴x+۳y+۲ \Rightarrow -x+y-۳=۰$ معادله‌ی محور تقارن

$- \Rightarrow ۳x+۴y-۱=-۴x-۳y-۲ \Rightarrow ۷x+۷y+۱=۰$ معادله‌ی محور تقارن دیگر

☹**تست۱۴۲:** تحت یک بازتاب تصویر خط $x+y-۳=۰$ خط $x+y+۳=۰$ می‌باشد. کدام خط محور تقارن آن می‌باشد؟

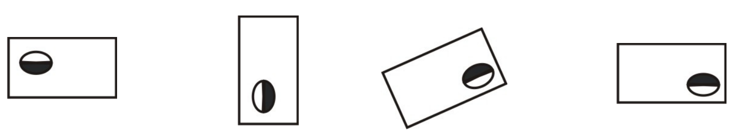
۱) $x+y=۰$ ۲) $x-y=۰$ ۳) $x+y=۶$ ۴) $x-y=۶$

$$\begin{cases} x+y-۳=۰ \\ x+y+۳=۰ \end{cases} \Rightarrow \Delta: x+y+\frac{۳-۳}{۲}=۰ \Rightarrow \boxed{\Delta = x+y=۰}$$

نکته:

لغزش: ترکیبی از یک انتقال و یک دوران است و یک شکل بدون جدا شدنی از صفحه،تحت این تبدیل، ابتدا دوران یافته و پس تحت برداری دلخواه انتقال می‌یابد.

در زیر، هر شکل، لغزش یافته شکل‌های دیگر است.



نکته: یک پاره‌خط دو محور تقارن دارد، یکی عمودمنصف پاره‌خط و دیگری خطی که پاره‌خط بر آن منطبق است.

* هر n ضلعی منتظم n محور تقارن دارد.
* هر خط بی‌نهایت محور تقارن دارد.
* پاره‌خط یک مرکز تقارن دارد.
* هر n ضلعی منتظم در صورتی که n زوج باشد یک مرکز تقارن و در صورتی که n فرد باشد، مرکز تقارن ندارد.