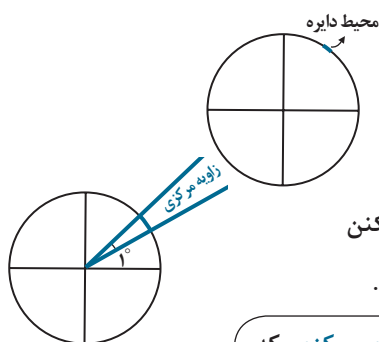


فصل ۹

مثلات

واحدهای زاویه (درجه)

درجه



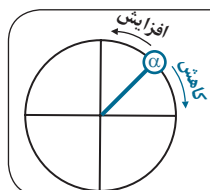
بچه‌ها! می‌خوام ۱ درجه رو براتون تعریف کنم. به همین منظور محیط یک دایره رو به ۳۶۰ قسمت مساوی تقسیم کرده و یک تیکه‌ی دلخواه رو انتخاب می‌کنم. آقا اجازه؟ اهماً می‌فوایر بگیر که هر تیکه، یک درجه هست. مگه نه؟

نه عزیزم. اصلاً نمی‌خواستیم اینو بگم! اشتباه خیلی از دانش آموزها اینه که فکر می‌کنن محیط یک دایره برابره با ۱ درجه، اما من می‌خوام این اشتباه رو تصحیح کنم.

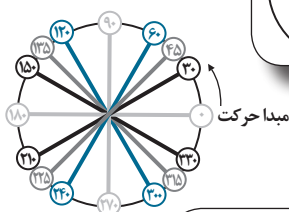
«به $\frac{1}{360}$ محیط دایره نباید بگیریم ۱ درجه، بلکه به زاویه‌ای مرکزی که $\frac{1}{360}$ محیط دایره رو در برمی‌گیره می‌گیریم ۱ درجه»



بچه‌ها! یه قرارداد: برای راحتی کار، از این به بعد هر زاویه رو روی نوک عقربه‌اش نمایش بدید. یعنی:

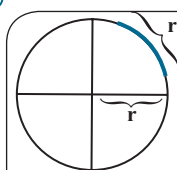


توجه: اگر زاویه‌ی α برخلاف عقربه‌ی ساعت حرکت کنه می‌گیریم α در حال افزایش (حرکت در جهت مثبت) و در غیر اینصورت در حال کاهش (حرکت در جهت منفی)



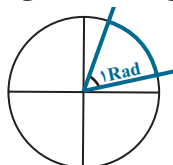
با توجه به قرارداد بالا همیشه زوایای معروف روی دایره رو به صورت روبرو نمایش داد: (بر حسب درجه)

رادیان



بچه‌ها! حالا می‌خوام یک رادیان رو براتون تعریف کنم. پس خوب دقت کنید:

(۱) قسمتی از محیط دایره رو انتخاب می‌کنم که اندازه‌اش برابر شعاع دایره باشه. یعنی:



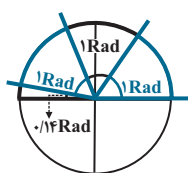
(۲) زاویه‌ای مرکزی رسم می‌کنم که از دو سر این قطعه بگذره. به این زاویه یک رادیان می‌گیریم. نگاه کنید:

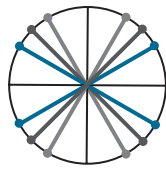
آقا اجازه؟ هر یک رادیان چند درجه میشه؟ هر رادیان تقریباً $57/3$ درجه هست.

آقا اجازه؟ هر نیم دور از دایره چند رادیانه؟

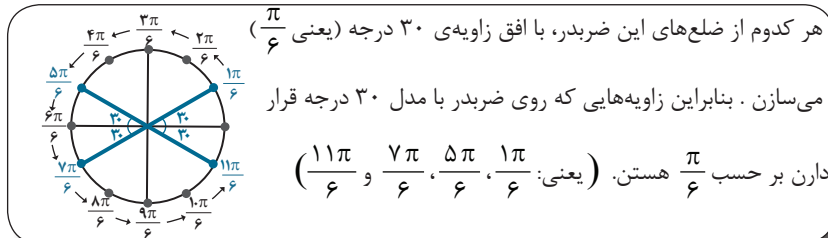
با توجه به شکل روبرو، هر نیم دور از یک دایره تقریباً $3/14$ رادیانه. یعنی هر نیم دور از دایره برابر با π رادیان. به عبارت دیگه 180 درجه معادل با π رادیانه.

دوستان من! معادل زوایای 0° ، 90° ، 180° و 270° بر حسب رادیان عبارتند از: 0 ، $\frac{\pi}{2}$ ، π ، $\frac{3\pi}{2}$

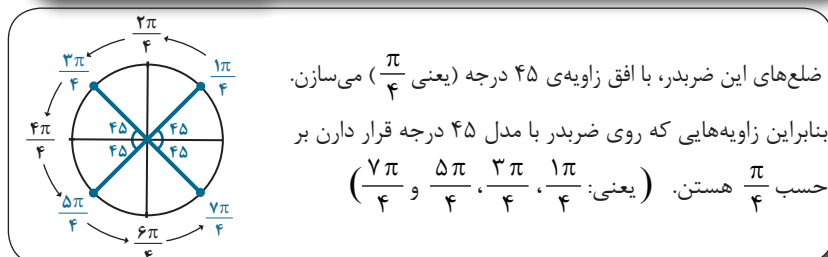




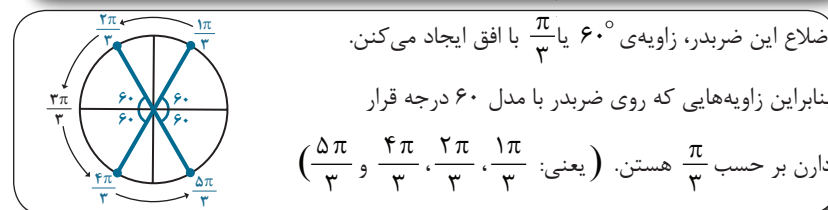
بچه‌ها! ایندفعه می‌خوام ۱۲ تا زاویه‌ای که توی ربع‌های اول تا چهارم قرار دارن رو در غالب ۳ تا ضربدر بیان کنم. (بر حسب رادیان)



(۱) ضربدر با مدل ۳۰ درجه:



(۲) ضربدر با مدل ۴۵ درجه:

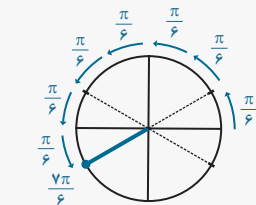


(۳) ضربدر با مدل ۶۰ درجه:

مثال زوایای زیر را روی دایره معلوم کنید.

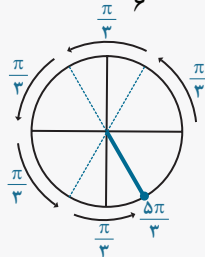
$$(1) \alpha = \frac{7\pi}{6}$$

با توجه به اینکه این زاویه بر حسب $\frac{\pi}{6}$ هست، پس روی ضربدر با مدل ۳۰ درجه قرار داره و برای معلوم کردن این زاویه روی دایره کافیست از مبدأ حرکت ۷ تا $\frac{\pi}{6}$ رو طی کنیم تا به زاویه‌ی $\frac{7\pi}{6}$ برسیم.



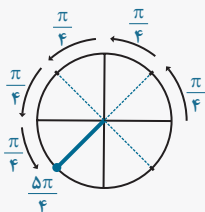
$$(2) \alpha = \frac{5\pi}{3}$$

این زاویه بر حسب $\frac{\pi}{3}$ هست پس روی ضربدر با مدل ۶۰ درجه قرار داره. اگه از مبدأ حرکت ۵ تا $\frac{\pi}{3}$ رو طی کنیم، زاویه‌ی $\frac{5\pi}{3}$ روی دایره معلوم میشه.

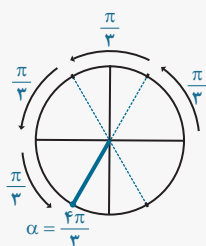


$$(3) \alpha = \frac{5\pi}{4}$$

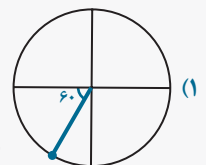
از اونجایی که این زاویه بر حسب $\frac{\pi}{4}$ هست پس روی ضربدر با مدل ۴۵ درجه قرار داره. بنابراین اگه از مبدأ حرکت ۵ تا $\frac{\pi}{4}$ رو طی کنیم، به زاویه‌ی $\frac{5\pi}{4}$ خواهیم رسید.

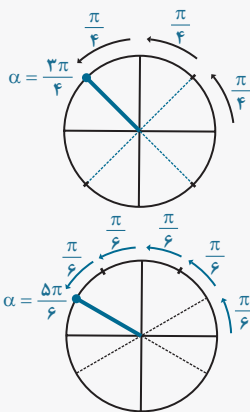


مثال در هر یک از شکل‌های زیر مقدار زاویه‌ی α را مشخص کنید.

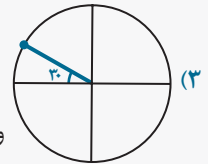
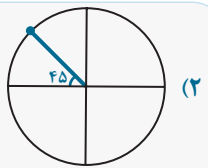


از اونجایی که α با افق زاویه‌ی 60° می‌سازه، پس روی ضربدر با مدل ۶۰ درجه قرار داره و بر حسب $\frac{\pi}{3}$ هست. لذا کافیست ببینیم α از مبدأ حرکت چند تا $\frac{\pi}{3}$ رو طی کرده.





از اونجایی که α با افق زاویه‌ی 45° می‌سازه، حتماً روی ضربدر با مدل 45° درجه قرار داره و بر حسب $\frac{\pi}{4}$ هست. بنابراین باید بفهمیم که α از مبدأ حرکت چند تا $\frac{\pi}{4}$ رو طی کرده.



از اونجایی که α با افق زاویه‌ی 30° می‌سازه، پس روی ضربدر با مدل 30° درجه قرار داره و بر حسب $\frac{\pi}{6}$ هست. لذا کافیه معلوم بشه که α از مبدأ حرکت چند تا $\frac{\pi}{6}$ رو طی کرده.

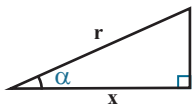
توجه توجه توجه: بچه‌ها! تا نام و مکان زوایای معروف روی دایره‌رو توپ توپ یاد نگرفتید، وارد قسمت بعدی نشید.

۲

زندگی نامه‌ی $\sin \alpha$ و $\cos \alpha$

۲

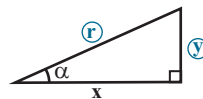
تعریف $\sin \alpha$ و $\cos \alpha$ در یک مثلث قائم الزاویه



بچه‌ها! مثلث قائم الزاویه رو برو رو در نظر بگیرید. با توجه به این مثلث می‌خوام دو تا قرارداد باهاتون ببندم.

$\sin \alpha = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}}$ یعنی:

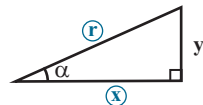
$\sin \alpha = \frac{y}{r}$ داریم:



قرارداد ۱: در مثلث قائم الزاویه ی

$\cos \alpha = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}}$ یعنی:

$\cos \alpha = \frac{x}{r}$ داریم:

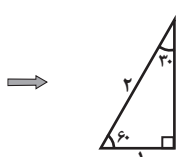
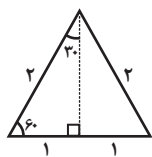


قرارداد ۲: در مثلث قائم الزاویه ی

حالا به سؤال: با توجه به قراردادی که بستیم، آیا می‌تونید مقادیر $\sin 30^\circ$ ، $\sin 45^\circ$ ، $\sin 60^\circ$ ، $\cos 30^\circ$ ، $\cos 45^\circ$ ، $\cos 60^\circ$ رو محاسبه کنید؟

آقا اجازه؟ بله می‌تونیم. باید مثلث قائم الزاویه‌ای با ضلع‌های معلوم درست کنیم که دارای زاویه‌های 30° و 60° باشه. در این صورت می‌تونیم $\sin 30^\circ$ ، $\sin 60^\circ$ ، $\cos 30^\circ$ ، $\cos 60^\circ$ رو طبق قراردادی که گفتید به دست بیاریم.

اما برای ایبار یک مثلث قائم الزاویه با شرایط بالا، همیشه یک مثلث متساوی الاضلاع به ضلع ۲ واحد رو از وسط نصف کرد. یعنی:

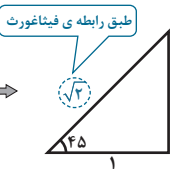
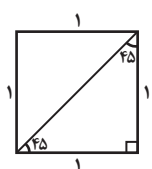


طبق رابطه‌ی فیثاغورث

$$\begin{aligned} \sin 30^\circ &= \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{1}{2} \\ \sin 60^\circ &= \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos 30^\circ &= \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos 60^\circ &= \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

آقا اجازه؟ برای ایبار مثلثی قائم الزاویه با زاویه‌ی 45° همیشه از مربعی به ضلع ۱ واحد کمک گرفت؟ یعنی:



طبق رابطه‌ی فیثاغورث

$$\begin{aligned} \sin 45^\circ &= \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos 45^\circ &= \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

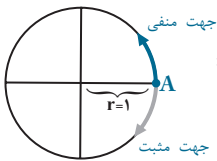
آفرین به تو دانش آموز خوش فکر!

بچه‌ها! پس فهمیدیم که $\sin$ و $\cos$ زوایای 30° ، 45° و 60° یکی از این ۳ مقدار هستن یعنی: $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\frac{1}{2}$

اگه به سه مقدار بدست اومده خوب دقت کنید می‌بینید که:

(۱) مخرج‌ها مقداری ثابت دارن یعنی: ۲

(۲) در صورت کسر، سربازهای ۳، ۲ و ۱ به ترتیب در حال رژه رفتن هستن که کلاه (رادیکال) روی سرشون قرار داره.

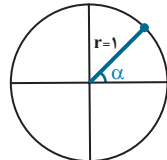
تعریف $\sin \alpha$ و $\cos \alpha$ در دایره ی مثلثاتی

تعریف دایره ی مثلثاتی: دایره ای به شعاع ۱ واحد و دایره ی مثلثاتی میگویند این دایره جهت دار و نقطه ی A مبدا حرکتش. یعنی:

بچه ها! شاعر میگه: شنیدن کی بود مانند دیدن. من هم می گم: حفظ کردن کی بود مانند فهمیدن

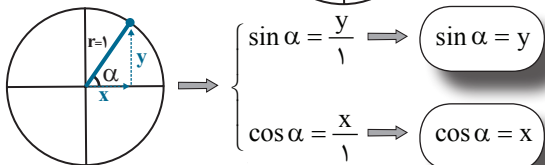
از اینجا به بعد می خوام به کمک **دایره ی معجزه گر** (یعنی دایره ی مثلثاتی) کاری بکنم که شما یکبار برای همیشه طعم شیرین مثلثات رو

بچشید. پس خوب به حرفام دقت کنید:



بچه ها! روی دایره ی مثلثاتی، عقربه ای رو که حاوی زاویه ی α هست در نظر بگیرید.

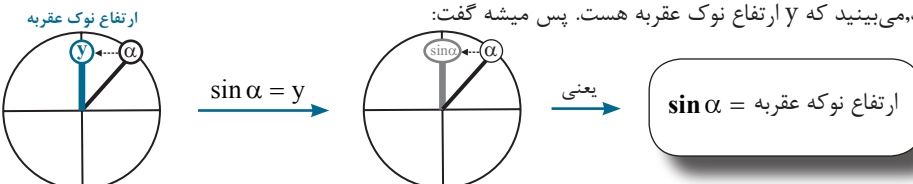
اگه این عقربه رو روی محور افق تصویر کنیم، یک مثلث قائم الزاویه به وجود می آید.



پس همیشه $\sin \alpha$ ، $\cos \alpha$ رو طبق قرارداد تعریف کرد:

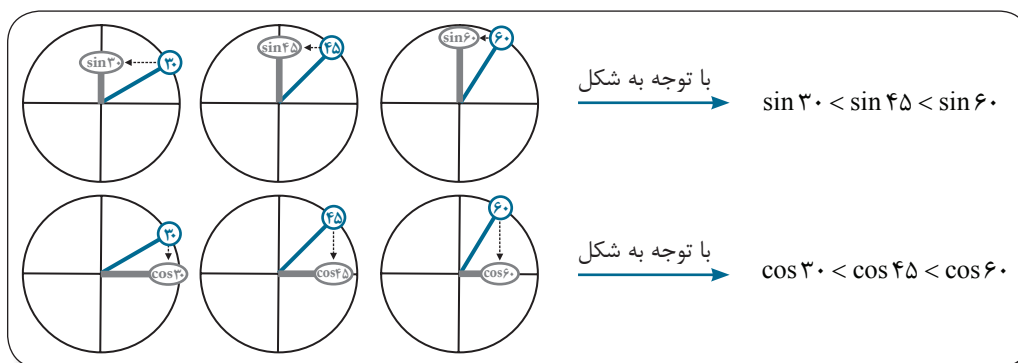
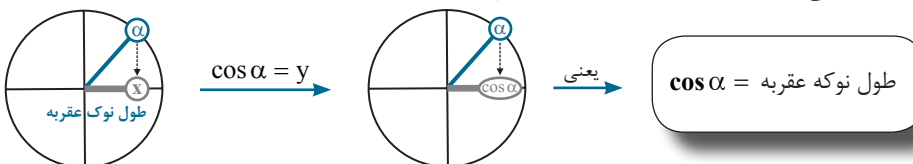
اولین معجزه ی دایره ی مثلثاتی: فقط در دایره ی مثلثاتی که $\sin \alpha = y$ همیشه. (در دایره های دیگه: $\sin \alpha = \frac{y}{r}$)

اگه به دایره ی مثلثاتی زیر نگاه کنید، می بینید که y ارتفاع نوک عقربه هست. پس همیشه گفت:



دومین معجزه ی دایره ی مثلثاتی: فقط در دایره ی مثلثاتی که $\cos \alpha = x$ همیشه. (در دایره های دیگه: $\cos \alpha = \frac{x}{r}$)

اگه باز هم به دایره ی مثلثاتی زیر دقت کنید می بینید که x طول نوک عقربه هست. پس همیشه گفت:



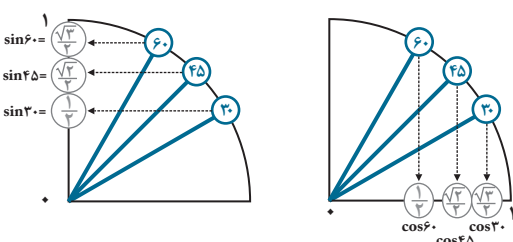
بچه ها! آیا یاد تونه که در قسمت قبل نتیجه گرفتیم که $\sin$ و $\cos$ زاویه های 30° و 45° و 60° یکی از سه مقدار $\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\frac{1}{2}$

رو اختیار می کنن؟ **آقا اجازه! بله یارمونه.**

حالا از تون می خوام این سه مقدار رو روی دایره ی مثلثاتی مشخص کنید.

آقا اجازه! با توجه به تصویر سازی هایی که برای ما کردید،

فیلی راحت میشه این کار رو انجام دار.



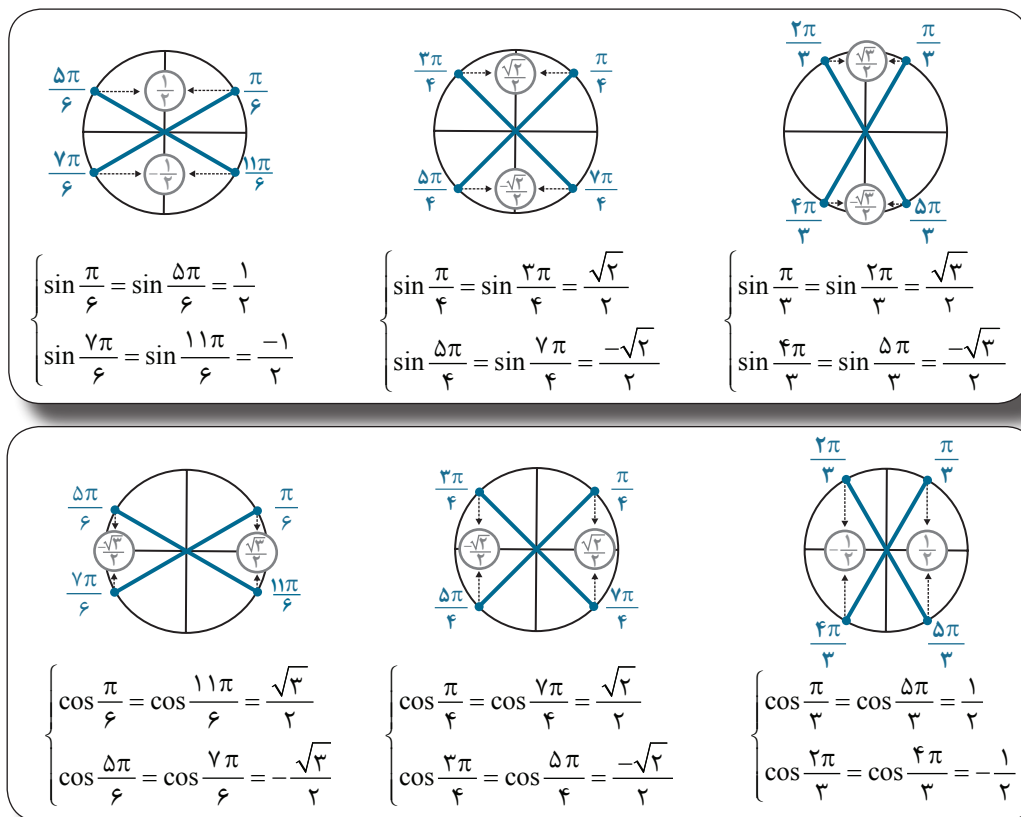
آقا اجازه؟! تا به حال ما این مقادیر رو به کمک یک جدول حفظ می‌کردیم و خیلی از اوقات اونهارو با هم قاطی می‌کردیم. اما حالا به کمک این دایره‌ی معجزه‌گر، خیلی راحت می‌تونیم بگیم که $(\sin 0 = 0, \sin 90 = 1, \cos 0 = 1, \cos 90 = 0)$:

پس عزیزم، یواش یواش دایره از مثلثات خوش می‌آید. می‌خوام بهت بگم تازه کجاشو دیدی یی ...!!!

مقدار سینوس و کسینوس زاویه‌هایی که روی ضربدرهای مدل‌سازی شده قرار دارند!

بچه‌ها! در قسمت قبل، زاویه‌هایی رو به شما معرفی کردم که روی ضربدرهایی با مدل $30^\circ, 45^\circ$ و 60° قرار داشتن. لطفاً $\sin$ و $\cos$ این زاویه‌ها رو به دست بیارید.

آقا اجازه؟! این ضربدرهای مدل‌سازی شده عجب چیز باحالی هستن. الان هر پی فواستید رو براتون به دست می‌آریم:



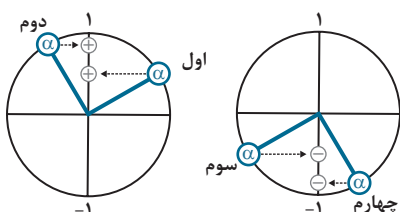
بچه‌ها! بهتون تبریک می‌گم. چون الان به مرحله‌ای رسیدید که می‌تونید $\sin$ و $\cos$ زوایای معروف رو به کمک دایره‌ی معجزه‌گر (مثلثاتی) به دست بیارید.

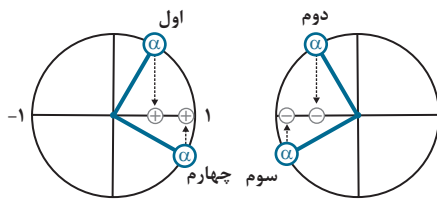
علامت $\sin \alpha$ و $\cos \alpha$ در دایره‌ی مثلثاتی

بچه‌ها! همیشه بگید که مقادیر $\sin \alpha$ و $\cos \alpha$ در هر ربع از دایره‌ی مثلثاتی چه علامتی دارن؟

آقا اجازه؟! این که خیلی آسونه.

از اون بایی که $\sin \alpha$ ارتفاع نوک عقربه هست، پس اگه α در ربع اول و دوم باشد، علامت $\sin \alpha$ مثبت و اگه در ربع سوم و چهارم باشد، علامت $\sin \alpha$ منفیه. یعنی:



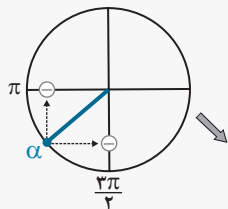


اما با توجه به این که $\cos \alpha$ طول نوک عقربه هست، پس همیشه گفت: «ربع اول و چهارم، علامت $\cos \alpha$ مثبت و در ربع دوم و سوم منفی».

مثال اگر $\sin \alpha \cos \alpha > 0$ و $\sin \alpha + \cos \alpha < 0$ باشد، محدوده α کدام است؟



بچه‌ها! از اون جایی که $\sin \alpha \cos \alpha > 0$ پس $\sin \alpha$ و $\cos \alpha$ هم علامتند. یعنی: (هر دو مثبت یا هر دو منفی) اما چون مجموع $\sin \alpha$ و $\cos \alpha$ مقداری منفی، نتیجه می‌گیریم که هر دوشون منفی هستند. یعنی α در ربع سوم قرار داره:



در ربع سوم قرار دارد $\alpha \Rightarrow \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

محدوده $\sin \alpha$ و $\cos \alpha$

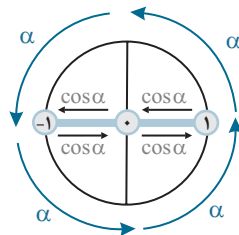
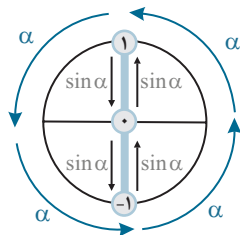


بچه‌ها! یه سؤال دیگه: همیشه بگید $\sin \alpha$ و $\cos \alpha$ در چه محدوده‌ای قرار دارن؟



آقا اجازه؟ می‌دونیم که در دایره‌ی مثلثاتی شعاع برابره با ۱

بنابراین اگر عقربه‌ی α رو هر قدر هم که بپرفونیم، $\sin \alpha$ حداکثر برابر ۱ و حداقل برابر -۱ همیشه این مطلب برای $\cos \alpha$ هم صدق می‌کنه. یعنی $\cos \alpha$ هم حداکثرش ۱ و حداقلش -۱ هست



بچه‌ها! باز هم یه سؤال: به نظر شما در هر ربع، با افزایش زاویه‌ی α ، مقادیر $\sin$ و $\cos$ این زاویه افزایش پیدا می‌کنن یا کاهش؟



آقا اجازه؟ شکل‌های بالا همه پی‌رو دارن نشون می‌دن. یعنی:



در ربع اول و دوم با افزایش α ، مقدار $\cos \alpha$ کم میشه.
در ربع سوم و چهارم با افزایش α ، مقدار $\cos \alpha$ زیاد میشه.

cos

در ربع اول و چهارم با افزایش α ، مقدار $\sin \alpha$ زیاد میشه.
اما در ربع دوم و سوم با افزایش α ، مقدار $\sin \alpha$ کم میشه.

sin

۳

زندگی نامه $\tan \alpha$ و $\cot \alpha$

۳

تعریف $\tan \alpha$ و $\cot \alpha$ در یک مثلث قائم‌الزاویه



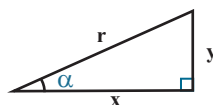
بچه‌ها! همون‌طور که قبلاً دیدید، با دو تا قرارداد، $\sin \alpha$ و $\cos \alpha$ رو براتون تعریف کردم.



حالا می‌خوام دو تا قرارداد دیگه رو باهاتون تنظیم کنم.

$$\tan \alpha = \frac{\text{ضلع مقابل } \alpha}{\text{ضلع مجاور } \alpha} \quad \text{یعنی:}$$

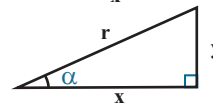
$$\tan \alpha = \frac{y}{x} \quad \text{داریم:}$$



قرارداد ۳: در مثلث قائم‌الزاویه ی

$$\cot \alpha = \frac{\text{ضلع مجاور } \alpha}{\text{ضلع مقابل } \alpha} \quad \text{یعنی:}$$

$$\cot \alpha = \frac{x}{y} \quad \text{داریم:}$$



قرارداد ۴: در مثلث قائم‌الزاویه ی

بچه‌ها! با توجه به قراردادهایی که با شما بستیم، لطفاً مقادیر $\tan 30^\circ$ ، $\tan 45^\circ$ ، $\tan 60^\circ$ ، $\cot 30^\circ$ ، $\cot 45^\circ$ ، $\cot 60^\circ$ رو محاسبه کنید.



آقا اجازه؟ به روی چشم.

از همون مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای که برای مناسبه‌ی $\sin$ و $\cos$ زوایای 30° ، 45° و 60° استفاده کردیم،

میشه برای مناسبه‌ی $\tan$ ، $\cot$ هم استفاده کرد. یعنی:

طبق قضیه فیثاغورث

$$\begin{cases} \tan 30^\circ = \frac{\text{ضلع مقابل } 30^\circ}{\text{ضلع مجاور } 30^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \tan 60^\circ = \frac{\text{ضلع مقابل } 60^\circ}{\text{ضلع مجاور } 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \end{cases} \quad \begin{cases} \cot 30^\circ = \frac{\text{ضلع مجاور } 30^\circ}{\text{ضلع مقابل } 30^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \\ \cot 60^\circ = \frac{\text{ضلع مجاور } 60^\circ}{\text{ضلع مقابل } 60^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

آفرین عزیزم.

بچه‌ها! پس فهمیدیم که $\tan$ و $\cot$ زوایای 30° و 45° و 60° یکی از این سه مقدار هستند: $\sqrt{3}$ و 1 و $\frac{\sqrt{3}}{3}$

اگر به این سه مقدار $\sqrt{3}$ ، 1 ، $\frac{\sqrt{3}}{3}$ خوب دقت کنید می‌بینید که تشکیل یک تصاعد هندسی با قدرنسبت $\sqrt{3}$ رو می‌دن.



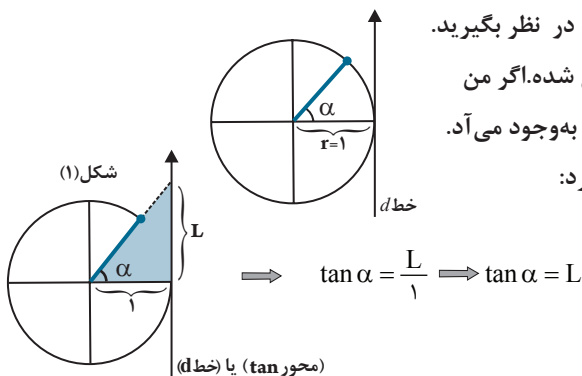
تعریف $\tan \alpha$ و $\cot \alpha$ در دایره‌ی مثلثاتی

بچه‌ها! روی دایره‌ی مثلثاتی، عقربه‌ای رو که حاوی زاویه‌ی α هست در نظر بگیرید.

همون طور که می‌بینید، خط d در سمت راست دایره، به دایره مماس شده. اگر من

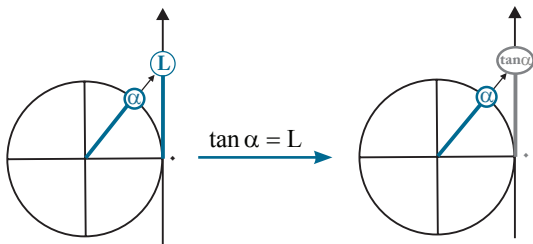
این عقربه رو امتداد بدم تا خط d رو قطع کنه، یک مثلث قائم‌الزاویه به وجود می‌آد.

پس میشه طبق قرارداد $\tan \alpha$ رو در این مثلث قائم‌الزاویه تعریف کرد:



از این به بعد، اسم (خط d) رو بذارید (محور $\tan$). چون مقدار $\tan$ یک زاویه از طریق این محور قابل محاسبه هست.

سومین معجزه‌ی دایره‌ی مثلثاتی:



فقط در دایره‌ی مثلثاتی که $\tan \alpha = L$ میشه (در دایره‌های دیگه: $\tan \alpha = \frac{L}{r}$)

اگر می‌خواید $\tan \alpha$ رو به کمک دایره‌ی مثلثاتی پیدا کنید، کافیه عقربه‌ی α رو امتداد

بدید تا محور $\tan$ رو قطع کنه. در این صورت: (ارتفاع نقطه‌ی برخورد $\tan \alpha$)

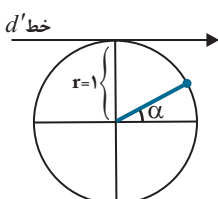
بچه‌ها!

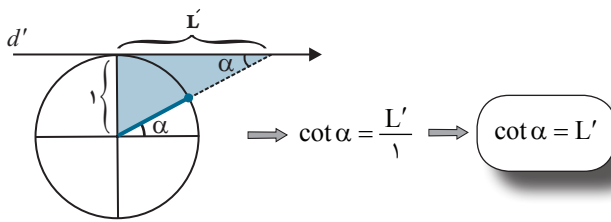
بچه‌ها یه سؤال! آیا ممکنه مقدار $\cot \alpha$ رو به کمک دایره‌ی مثلثاتی معلوم کنید؟

آقا اجازه؟ فکر کنیم باید قطعی افقی به نام d' رو که در بالای دایره قرار داره، به دایره

مماس کنیم. آگه عقربه رو امتداد ببریم تا خط d' رو قطع کنه، یک مثلث قائم‌الزاویه به

وجود می‌آد که می‌شه طبق قرارداد، مقدار $\cot \alpha$ رو به کمک این مثلث معلوم کرد. یعنی:





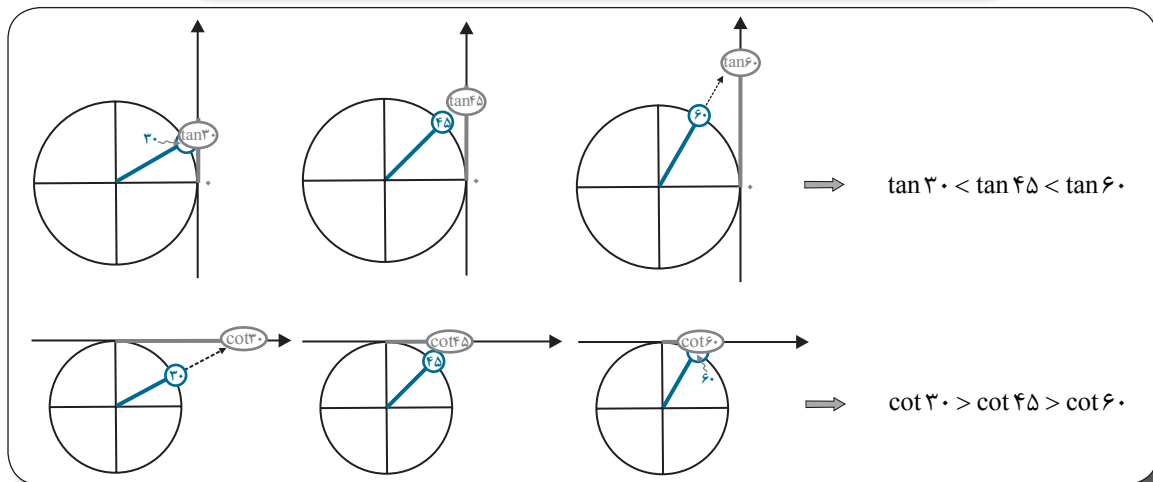
آفرین به تو دانش آموز خلاقم.

بچه‌ها! از این به بعد اسم (خط d') رو بذارید (محور $\cot$)، چون مقدار $\cot$ یک زاویه به کمک این محور قابل محاسبه هست.

چهارمین معجزه دایرهی مثلثاتی: فقط در دایرهی مثلثاتی رابطه‌ی $\cot \alpha = L'$ برقراره. (در دایره‌های دیگه: $\cot \alpha = \frac{L'}{r}$)

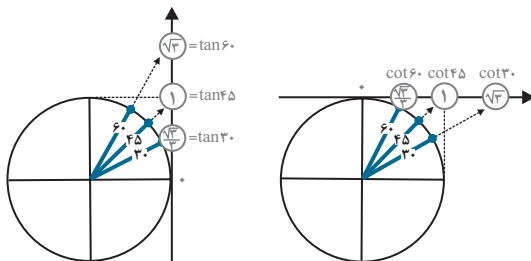
اگه می‌خواید $\cot \alpha$ رو به کمک دایرهی مثلثاتی پیدا کنید، کافی‌ه عقربه‌ی α رواتمداد بدید تا محور $\cot$ رو قطع کنه. در این صورت: (طول نقطه‌ی برخورد $\cot \alpha$)

بچه‌ها!



بچه‌ها! اگه یادتون باشه قبلاً گفتیم که: $\cot$ و $\tan$ زاویه‌های 30° و 45° و 60° یکی از سه مقدار $(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1, \sqrt{3})$ رو اختیار می‌کنن.

حالا ازتون می‌خوام این سه مقدار رو روی دایرهی مثلثاتی معلوم کنید.

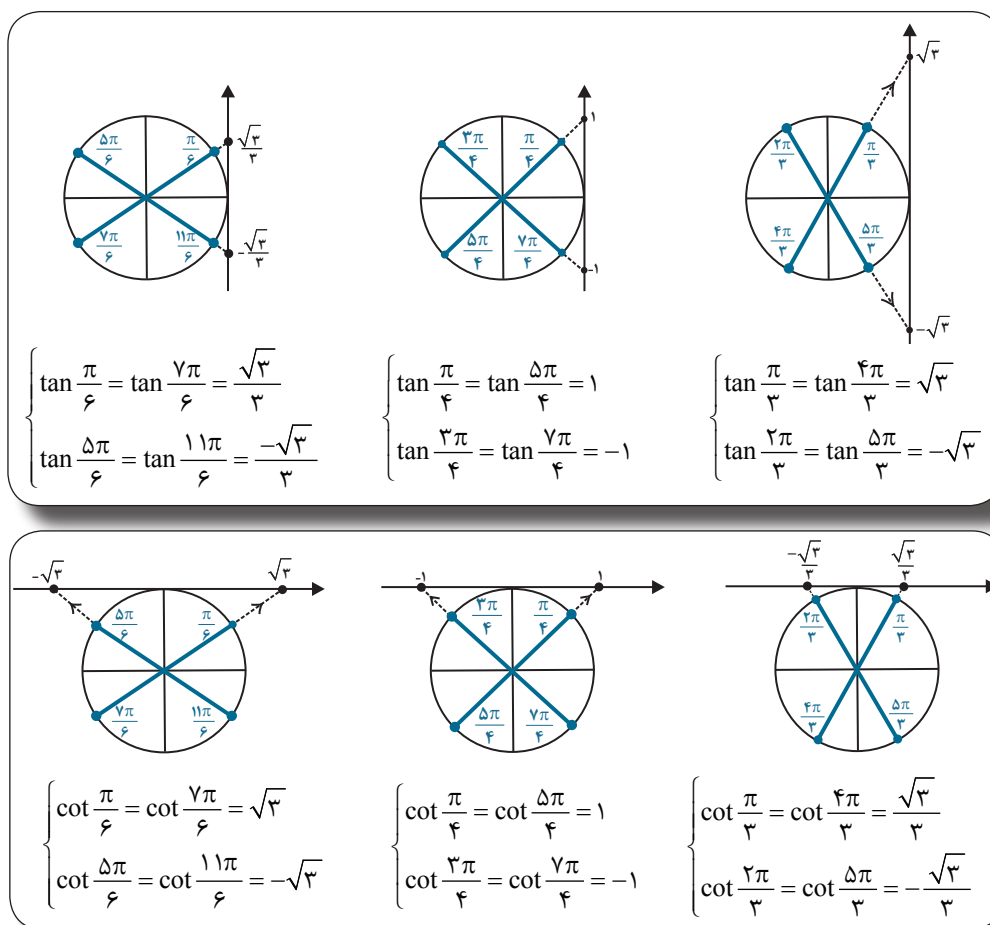


آقا اجازه؟ بغرمائید:

مقدار تانژانت و کتانژانت زاویه‌هایی که روی ضربدرهای مدل‌سازی شده قرار دارند!

بچه‌ها! لطفاً زاویه‌هایی که روی ضربدرهای 30° ، 45° و 60° قرار دارن رو مشخص کنید و بعد $\tan$ و $\cot$ این زاویه‌ها رو بدست بیارید.

آقا اجازه؟ اگه کمی فرصت بربر فواسته‌ی شمارو اجرا می‌کنیم.



آفرین به تو. دستت درد نکنه. اما اگه به این سؤال من جواب بدی معلومه که مفهوم $\tan$ و $\cot$ یک زاویه رو کاملاً درک کردی.

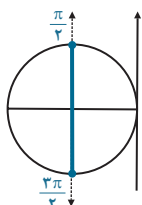


سوال: $\tan \frac{\pi}{2}$ و $\tan \frac{3\pi}{2}$ چقدره؟

آقا اجازه؟ کافیه در دایره ی مثلثاتی، عقربه هایی که روی زاویه ی



$\frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2}$ قرار دارن رو امتداد بدیم تا با محور $\tan$ برخورد کنه. نگاه کنید:



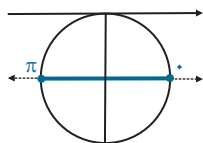
آقا ببخشید مثل اینکه مشکلی پیش اومده این عقربه ها که با محور $\tan$ موازی هستن و امتدادشون اصلاً محور $\tan$ رو قطع



نمی کنه، پس $\tan \frac{\pi}{2}$ و $\tan \frac{3\pi}{2}$ اصلاً مقدار نداره

آقا با این حساب میشه گفت که $\cot(0)$ و $\cot(\pi)$ هم مقدار

نداره. چون امتداد این دو زاویه، اصلاً با محور $\cot$ برخوردی نداره.



بسیار عالی! خیالم راحت شد که تا اینجا رو خوب درک کردی.

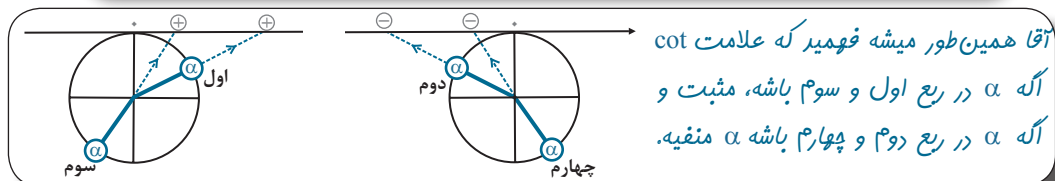
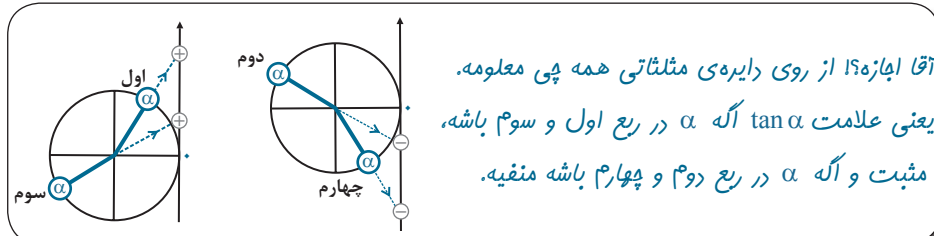


تعریف نشده $\tan \frac{\pi}{2}$, $\tan \frac{3\pi}{2}$, $\cot 0$, $\cot \pi$

نتیجه:

علامت $\tan \alpha$ و $\cot \alpha$ در دایره ی مثلثاتی

بچه‌ها! میشه بگید که $\tan \alpha$ و $\cot \alpha$ در هر ربع از دایره ی مثلثاتی چه علامتی دارن؟



آفرین به شما.

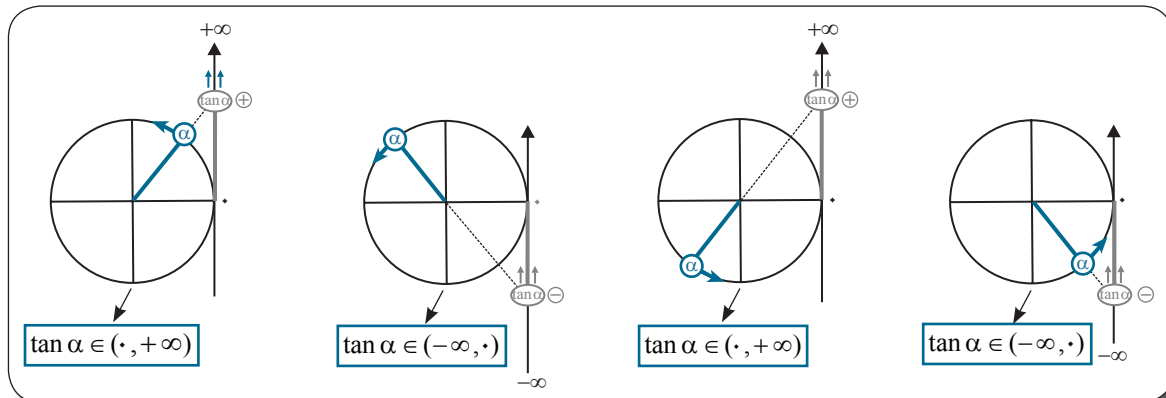
در هر ربع، $\tan \alpha$ و $\cot \alpha$ هم علامتند.

نتیجه:

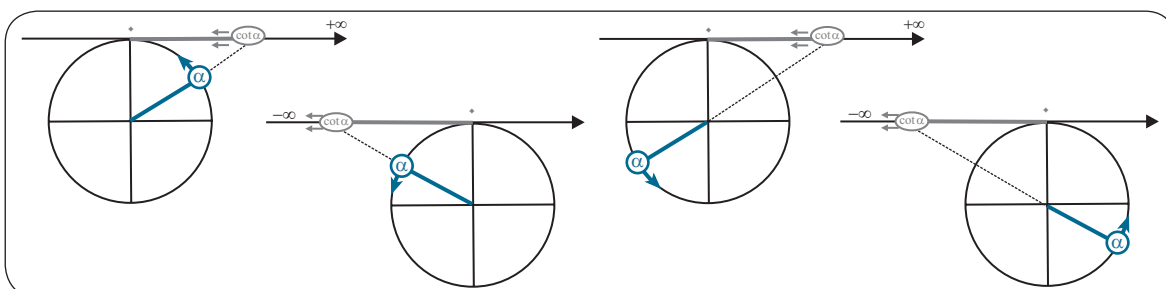
محدوده ی $\tan \alpha$ و $\cot \alpha$

بچه‌ها! به نظر شما در هر ربع، با افزایش زاویه ی α ، مقادیر $\tan \alpha$ و $\cot \alpha$ زیاد میشن یا کم؟

آقا اجازه؟ چهار شکل زیر نشون میده که در هر کدوم از ۴ ربع، با افزایش α ، مقدار $\tan \alpha$ داره زیاده میشه. از طرفی کاملاً مشغمه که با پرفیدن عقربه ی α در جهت مثبت، مقدار $\tan \alpha$ از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر می‌کنه.

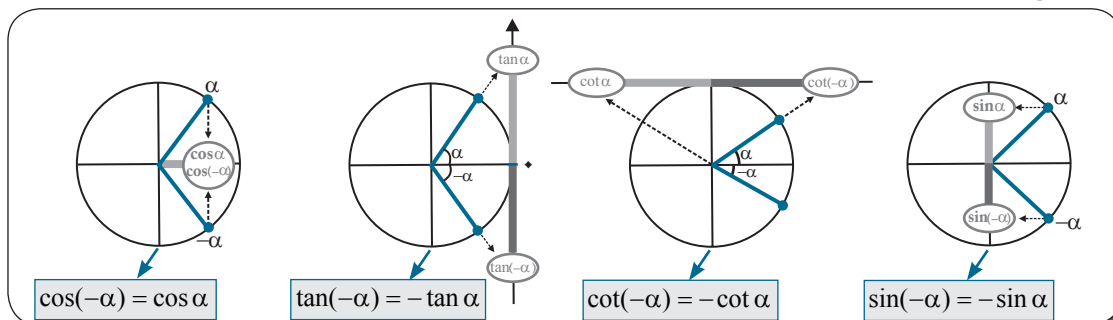


آقا اجازه؟ چهار شکل زیر هم، داره نشون می‌ده که در هر کدوم از ۴ ربع، با افزایش α ، مقدار $\cot \alpha$ داره کم میشه. همچنین کاملاً معلومه که با دور زدن عقربه ی α ، مقدار $\cot \alpha$ از $+\infty$ تا $-\infty$ تغییر می‌کنه.



دو زاویه ی قرینه

بچه‌ها! می‌خوام رابطی بین نسبت‌های مثلثاتی زاویه ی $(-\alpha)$ رو به دست بیارم. دایره ی مثلثاتی این رابطه رو خیلی واضح به ما نشون می‌ده. دقت کنید:



آقا اجازه؟ از شکل‌های بالا میشه فهمید که:

۱) $\cos$ دو زاویه ی قرینه، با هم برابرند: $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$

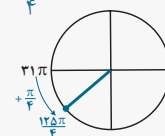
۲) $\sin$ ، $\tan$ و $\cot$ دو زاویه ی قرینه، قرینه ی هم ریگه هستن. یعنی:

$$\begin{aligned}\sin(-\alpha) &= -\sin(\alpha) \\ \tan(-\alpha) &= -\tan(\alpha) \\ \cot(-\alpha) &= -\cot(\alpha)\end{aligned}$$

معنی روابط بالا به بیان فودمونی اینه: $\left. \begin{array}{l} \text{۱) } \cos \text{ منفی خوره} \\ \text{۲) } \sin, \tan, \cot \text{ منفی انداز هستن.} \end{array} \right\}$

مثال حاصل $2\cos(-\frac{125\pi}{4}) - 3\tan(-\frac{125\pi}{4}) + 4\cot(-\frac{125\pi}{4})$ کدام است؟

$$2\cos(\frac{125\pi}{4}) + 3\tan(\frac{125\pi}{4}) - 4\cot(\frac{125\pi}{4}) = 2(\frac{-\sqrt{2}}{2}) + 3(1) - 4(1) = -\sqrt{2} - 1$$



دو زاویه ی مکمل

$$\alpha + \beta = \pi \Rightarrow \alpha \text{ و } \beta \text{ مکملند}$$

بچه‌ها! اگه مجموع دو زاویه ی α و β برابر 180° بشه می‌گیم α و β مکمل یکدیگه هستن.

مکمل زاویه ی (α) برابر $(\pi - \alpha)$ ، چون: $(\alpha) + (\pi - \alpha) = \pi$

مثال مکمل زوایای داده شده را مقابلشان بنویسید.

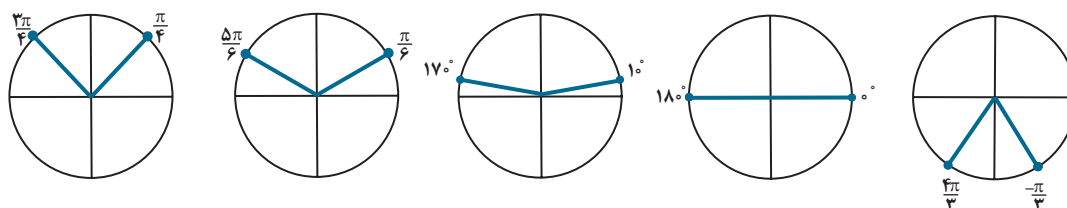
۱) $\alpha - \frac{\pi}{6} \xrightarrow{\text{مکمل}} -\alpha + \frac{7\pi}{6}$

۳) $\frac{\pi}{4} - \gamma \xrightarrow{\text{مکمل}} \frac{3\pi}{4} + \gamma$

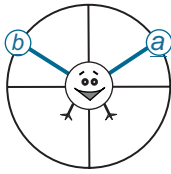
۲) $\alpha + \frac{\pi}{3} \xrightarrow{\text{مکمل}} -\alpha + \frac{2\pi}{3}$

۴) $\beta - \frac{2\pi}{5} \xrightarrow{\text{مکمل}} -\beta + \frac{7\pi}{5}$

بچه‌ها! در هر کدام از دایره‌های پایین، دو زاویه ی مکمل رسم کردم.



با توجه به این شکل‌ها، فکر می‌کنید که دو زاویه ی مکمل به چه موجودی شباهت دارن؟



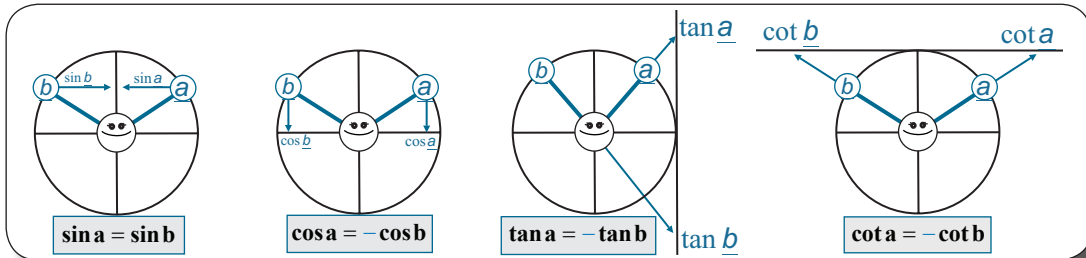
آقا اجازه؟ همیشه دو زاویه‌ی مکمل رو شبیه به دو بال یک پرنده در نظر گرفت.

از این به بعد «به دو زاویه‌ی مکمل می‌گیم دو بال پرنده»

بچه‌ها! سؤال: نسبت‌های مثلثاتی دو بال پرنده چه رابطه‌ای با هم دارن؟



آقا اجازه؟ خیلی راحت:



آقا اجازه؟ شکل قبل داره میکه که دو زاویه‌ی مکمل، sin هاشون با هم برابرن اما cos ها، tan ها و cot هاشون قرینه‌ی هم‌ریگه هستن. پس همیشه گفت:

$$\cos a + \cos b = 0$$

$$\tan a + \tan b = 0$$

$$\cot a + \cot b = 0$$

(۱) مجموع cos های دو زاویه‌ی مکمل برابره با صفر؛

(۲) مجموع tan های دو زاویه‌ی مکمل برابره با صفر (در صورت وجود)؛

(۳) مجموع cot های دو زاویه‌ی مکمل برابره با صفر (در صورت وجود)؛

مثال حاصل $\cos \frac{3\pi}{14} + \cos \frac{5\pi}{14} + \cos \frac{7\pi}{14} + \cos \frac{9\pi}{14} + \cos \frac{11\pi}{14}$ را به دست آورید.

$$\cos \frac{3\pi}{14} + \cos \frac{11\pi}{14} + \cos \frac{5\pi}{14} + \cos \frac{9\pi}{14} + \cos \frac{7\pi}{14} = 0 + 0 + \cos \frac{\pi}{2}$$

مثال اگر $\sin \frac{3\pi}{\lambda} = m$ باشد حاصل $\sin \frac{5\pi}{\lambda} + \cot(\alpha + \frac{3\pi}{\lambda}) + \sin \frac{3\pi}{\lambda} + \cot(\frac{5\pi}{\lambda} - \alpha)$ بر حسب m کدام است؟

$$\sin \frac{3\pi}{\lambda} + \sin \frac{5\pi}{\lambda} + \cot(\alpha + \frac{3\pi}{\lambda}) + \cot(\frac{5\pi}{\lambda} - \alpha) = \sin \frac{3\pi}{\lambda} + \sin \frac{3\pi}{\lambda} + 0 = 2 \sin \frac{3\pi}{\lambda} = 2m$$

۶

دو زاویه‌ی متمم

۶

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha \text{ و } \beta \text{ متممند}$$

بچه‌ها! اگه مجموع دو زاویه‌ی α و β برابر 90° بشه، می‌گیم α و β متمم یکدیگه هستن.

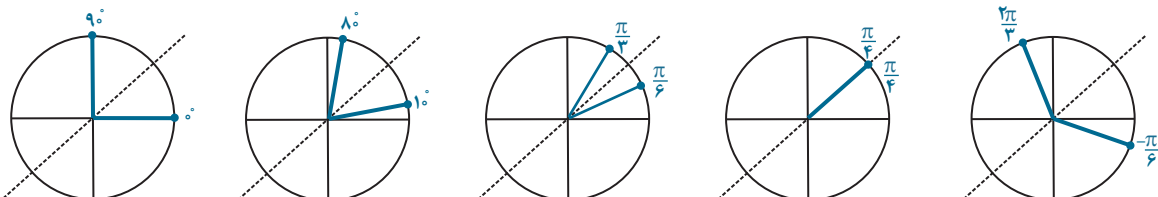


مکمل زاویه‌ی (α) برابره با $(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ ، چون: $(\alpha) + (\frac{\pi}{2} - \alpha) = \frac{\pi}{2}$

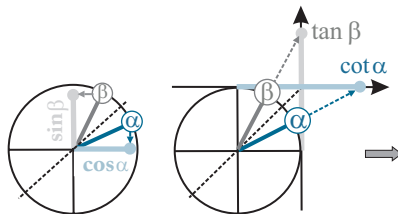
مثال متمم زوایای زیر را روبرویشان بنویسید.

$$\frac{2\pi}{3} - \alpha \longrightarrow -\frac{\pi}{6} + \alpha \quad \alpha - \frac{\pi}{6} \longrightarrow -\alpha + \frac{\pi}{6} \quad -\frac{\pi}{4} - \beta \longrightarrow \frac{3\pi}{4} + \beta \quad \alpha + \frac{\pi}{3} \longrightarrow -\alpha + \frac{\pi}{6}$$

بچه‌ها! به زاویه‌های متممی که در شکل‌های زیر رسم کردم خوب دقت کنید.



فکر می کنید این زاویه های متمم نسبت به چه خطی متقارن هستند؟
 آقا اجازه؟ فقط $y = x$ (یعنی نیمساز ربع اول و سوم)
 فکر می کنید نسبت های مثلثاتی دو زاویه ی متمم چه رابطه ای با هم دارن؟



$$\sin \beta = \cos \alpha$$

$$\tan \beta = \cot \alpha$$

آقا اجازه؟ $\sin$ یکی با $\cos$ اون یکی و $\tan$ یکی با $\cot$ اون یکی برابره.
 بنابراین میشه گفت که اگر α و β متمم یکدیگر باشند اون موقع:

مثال حاصل عبارت $\sin(\alpha + \frac{\pi}{3}) + \cos(\frac{\pi}{4} - \beta) - \cos(\frac{\pi}{6} - \alpha) - \sin(\frac{\pi}{4} + \beta)$ کدام است؟

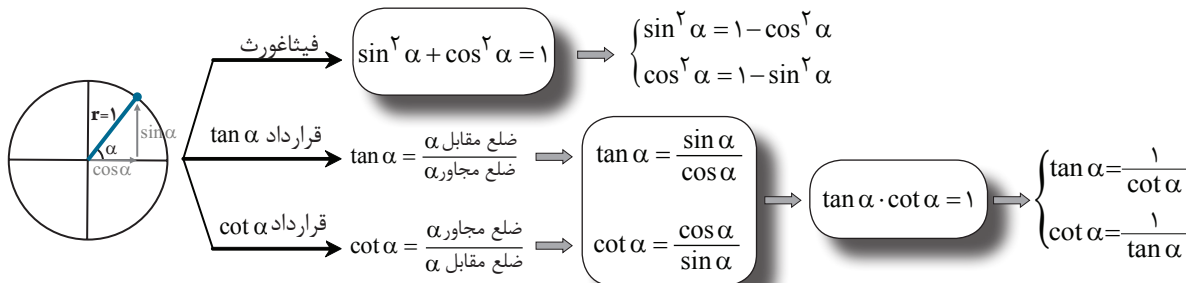
$$\underbrace{\sin(\alpha + \frac{\pi}{3}) - \cos(\frac{\pi}{6} - \alpha)}_{\text{متمم}} + \underbrace{\cos(\frac{\pi}{4} - \beta) - \sin(\frac{\pi}{4} + \beta)}_{\text{متمم}} = 0 + 0 = 0$$

روابط بین نسبت های مثلثاتی زاویه ی α (روابط پایه)

بچه ها! به $(\cot \alpha, \tan \alpha, \cos \alpha, \sin \alpha)$ میگن «نسبت های مثلثاتی زاویه ی α » و حالا من قصد دارم به کمک دایره ی مثلثاتی، بین نسبت های مثلثاتی زاویه ی α رابطه برقرار کنم.

آقا اجازه؟ مگه میشه به کمک دایره ی مثلثاتی، روابط مثلثاتی ایجاد کرد؟

فکر کنم شما هنوز به معجزات دایره ی مثلثاتی ایمان نیاوردید!!! حالا که اینطوره پس نگاه کنید:



بچه ها! با توجه به روابطی که براتون استخراج کردم، آیا می تونید برای این دو عبارت مثلثاتی که در پایین نوشتم، عبارت معادل پیدا کنید؟

$$\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = ? \quad (1) \quad \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = ? \quad (2)$$

آقا اجازه؟ فکر کنیم که بشه از رابطه ی $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ هم، ارزش های $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha$ و $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha$ رو درست آورد.

$$1) \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 = (1)^2 \Rightarrow \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha + 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$$

$$2) \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \xrightarrow{\text{به توان ۳}} (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^3 = (1)^3 \Rightarrow (\sin^2 \alpha)^3 + 3(\sin^2 \alpha)^2 (\cos^2 \alpha) + 3(\sin^2 \alpha) (\cos^2 \alpha)^2 + (\cos^2 \alpha)^3 = 1$$

$$\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha + 3\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 1 \Rightarrow \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = 1 - 3\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$$

آفرین عزیزم. کاملاً درسته.

$$\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$$

$$\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$$

اما بچه‌ها! اگر به دو رابطه‌ی به دست آمده توجه کنید می‌بینید که با هم فامیلن. یعنی

این دو رابطه فقط در ضریب ۲ و ۳ با هم اختلاف دارن و بقیه‌ی ساختارشون مثل همه:

مثال ساده شده‌ی عبارت $\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x} - \frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right) \times \cos x$ چیست؟

بچه‌ها! بهتره عبارت درون پرانتز رو به یک کسر تبدیل کنید (ساده کنید) یعنی:

$$\frac{(1+\sin x)^2 - (1-\sin x)^2}{(1-\sin x)(1+\sin x)} \times \cos x = \frac{\cancel{1} + 2\sin x + \cancel{1} - (\cancel{1} - 2\sin x + \cancel{1})}{1 - \sin^2 x} \times \cos x = \frac{4\sin x \cos x}{\cos^2 x} = 4 \frac{\sin x}{\cos x} = 4 \tan x$$

مثال عبارت $\tan x + \cot x$ با کدام گزینه برابر است؟ (۱) $\frac{2}{\sin x \cos x}$ (۲) $\frac{\sin x + \cos x}{\sin x \cdot \cos x}$ (۳) $\frac{1}{\sin x \cos x}$ (۴) ۱

$$\tan x + \cot x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\sin x \cos x}$$

تغییر علامت

$$\begin{cases} a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) \\ a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) \end{cases}$$

تغییر علامت

مثال ساده شده‌ی کسر $\frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{1 - \sin x \cos x}$ چیست؟

$$\frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{1 - \sin x \cos x} = \frac{(\sin x + \cos x)(\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x)}{1 - \sin x \cos x} = \frac{(\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x)}{(1 - \sin x \cos x)} = \sin x + \cos x$$

مثال اگر $\tan x = 2$ باشد، حاصل کسر $\frac{\sin x + \cos x}{3 \sin x - 2 \cos x}$ کدام است؟

$$\frac{\sin x + \cos x}{3 \sin x - 2 \cos x} = \frac{\frac{\sin x + \cos x}{\cos x}}{\frac{3 \sin x - 2 \cos x}{\cos x}} = \frac{\tan x + 1}{3 \tan x - 2} = \frac{2 + 1}{3(2) - 2} = \frac{3}{4}$$

$$\tan x = 2$$

خواسته‌ی مسئله رو بر حسب $\tan x$ می‌نویسم
یعنی صورت و مخرج کسر رو به $\cos x$ تقسیم میکنم

مثال ساده شده‌ی عبارت $\frac{\sin^3 x}{1 - \cos x} - \sin x \cos x$ چیست؟

بچه‌ها لطفاً گوش کنید: اگر توی یک عبارت مثلثاتی، عامل‌هایی مثل $(1 - \cos x)$ یا $(1 + \cos x)$ یا $(1 - \sin x)$ یا $(1 + \sin x)$ دیدید اون

عامل رو در مزدوجش ضرب و تقسیم کنید. معمولاً با این حرکت قفل اون عبارت مثلثاتی شکسته میشه.

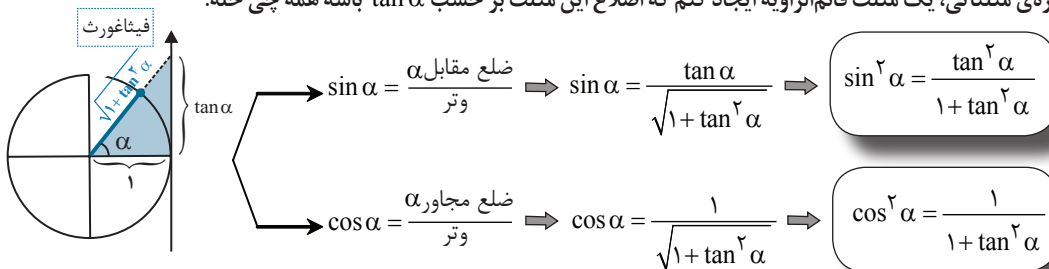
$$\frac{\sin^3 x}{1 - \cos x} - \sin x \cos x = \frac{\sin^3 x (1 + \cos x)}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)} - \sin x \cos x = \sin x (1 + \cos x) - \sin x \cos x = \sin x + \cancel{\sin x \cos x} - \cancel{\sin x \cos x} = \sin x$$

$\underbrace{(1 - \cos^2 x)}_{\sin^2 x}$



بچه‌ها! این دفعه می‌خواهم هر کدام از نسبت‌های مثلثاتی $\sin \alpha$ و $\cos \alpha$ رو فقط بر حسب $\tan \alpha$ بنویسم.

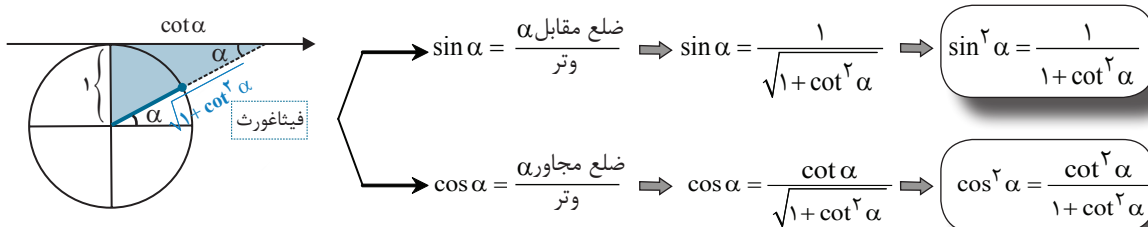
اگر من بتوانم در دایره‌ی مثلثاتی، یک مثلث قائم‌الزاویه ایجاد کنم که اضلاع این مثلث بر حسب $\tan \alpha$ باشد همه چی حله:



بچه‌ها! فکر کنم الان شما بتوانید تک‌تک نسبت‌های مثلثاتی $\sin \alpha$ و $\cos \alpha$ رو بر حسب $\cot \alpha$ بنویسید. مگه نه؟



آقا اجازه؟ باید در دایره‌ی مثلثاتی، یک مثلث قائم‌الزاویه ایجاد کنیم که اضلاعش بر حسب $\cot \alpha$ باشد. یعنی:



بچه‌ها! حالا می‌خواهم ۴ رابطه‌ی بالارو توی ذهنتون حک کنم. (در دو مرحله)

(۱) مخرج‌های این ۴ رابطه، یا $1 + \tan^2 \alpha$ هستن و یا $1 + \cot^2 \alpha$.

(۲) اما یکی از دو جمله‌ی مخرج‌رو، شما در صورت کسر می‌بینید. حالا سؤال اینه که کدام جمله‌ی مخرج، در صورت کسر قرار می‌گیره؟ یعنی:

$$\frac{?}{1 + \cot^2 \alpha} \quad \text{و} \quad \frac{?}{1 + \tan^2 \alpha}$$

اما قبلاًش لازمه که یک مطلب مهم‌رو بهتون بگم: $\sin \alpha$ با $\tan \alpha$ فامیله، $\cos \alpha$ هم با $\cot \alpha$. به همین دلیل:

در رابطه‌ای که بین $\sin^2 \alpha$ و $\tan^2 \alpha$ برقراره، عبارت $\sin^2 \alpha$ پارتی بازی میکنه و فامیش (یعنی $\tan^2 \alpha$) رو میاره بالا.

$$\sin^2 \alpha = \frac{\tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$$

اما $\sin^2 \alpha$ از $\cot^2 \alpha$ استفاده نمی‌کنه، چون باهاش غریبس.

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{1 + \cot^2 \alpha}$$

در رابطه‌ای که بین $\cos^2 \alpha$ و $\cot^2 \alpha$ برقراره، عبارت $\cos^2 \alpha$ پارتی بازی میکنه و فامیش (یعنی $\cot^2 \alpha$) رو میاره بالا.

$$\cos^2 \alpha = \frac{\cot^2 \alpha}{1 + \cot^2 \alpha}$$

اما $\cos^2 \alpha$ از $\tan^2 \alpha$ استفاده نمی‌کنه، چون باهاش غریبس.

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha}$$



بچه‌ها! اسم این ۴ رابطه‌ی مهم رو می‌ذارم «روابط دوست و دشمن»، لازمه که بگم این روابط، توی پیدایش روابط مثلثاتی دیگه خیلی دخالت دارن.

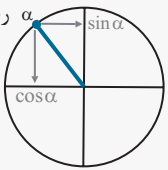
دشمن

دوست

روابط دوست و دشمن:

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha &= \frac{\tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1}{1 + \cot^2 \alpha} \\ \cos^2 \alpha &= \frac{\cot^2 \alpha}{1 + \cot^2 \alpha} = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} \end{aligned}$$

مثال اگر α در ربع دوم دایرهی مثلثاتی باشد. ساده شدهی عبارت $\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2 \alpha}} + \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 \alpha}}$ کدام است؟



$$\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2 \alpha}} + \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 \alpha}} = \sqrt{\sin^2 \alpha} + \sqrt{\cos^2 \alpha} = |\sin \alpha| + |\cos \alpha| = \sin \alpha - \cos \alpha$$

نکته: در ربع دوم، $\sin \alpha$ مثبت و $\cos \alpha$ منفی است.

روابط $\tan(\alpha \pm \beta)$ ، $\cos(\alpha \pm \beta)$ ، $\sin(\alpha \pm \beta)$ 

بچه‌ها! همیشه مقدار $\sin(75^\circ)$ رو محاسبه کنید.



آقا! اجازه! این که کاری نداره. کافیه زاویه‌ی 75° رو به صورت $45^\circ + 30^\circ$ بنویسیم و $\sin$ رو روی این دو زاویه پخش کنیم.



$$\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ + \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}+1}{2}$$

آیا فکر نمی‌کنی جوابی‌رو که بدست آوردی، غلطه؟



آقا! ببخشید مثل اینکه اشتباه کردم. چون، $\sin$ یک زاویه امکان نداره از ۱ بیشتر بشه، ولی در اینجا این اتفاق افتاده!

$$\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{2}+1}{2} = \frac{1/\sqrt{2}+1}{2} = \frac{2/\sqrt{2}}{2} = 1/\sqrt{2} \quad (\text{غلط})$$

بین عزیزم، در راه حل شما یک اشتباه بزرگ نهفته. اشتباه اینه که شما فکر می‌کنی: $\sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin \times (45^\circ + 30^\circ)$



در صورتیکه شما نمی‌تونید یک نسبت مثلثاتی رو در زاویه‌های درونش پخش کنی. (ضرب کنی)

$$\sin(\alpha + \beta) \neq \sin \alpha + \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) \neq \cos \alpha + \cos \beta \quad \text{چون یک نسبت مثلثاتی اصلاً در زاویه‌ی درون خودش ضرب نمی‌شه. یعنی:}$$

$$\tan(\alpha + \beta) \neq \tan \alpha + \tan \beta$$

در واقع نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی $(\alpha + \beta)$ به صورت مقابل محاسبه می‌شن: (اگه اثبات روابط زیر رو می‌خواهید، انتهای همین فصل رو ببینید.)

$$\begin{cases} \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \\ \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \end{cases}$$

مثال در مثلثی رابطه‌ی $\sin B \cos A (\cot B - \tan A) = 0$ برقرار است. نوع مثلث کدام است؟

$$\sin B \cos A \left(\frac{\cos B}{\sin B} - \frac{\sin A}{\cos A} \right) = 0 \Rightarrow \sin B \cos A \left(\frac{\cos A \cos B - \sin A \sin B}{\sin B \cos A} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\cos A \cos B - \sin A \sin B = 0 \Rightarrow \cos(A + B) = 0 \Rightarrow A + B = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \hat{C} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{قائم‌الزاویه}$$

مثال حاصل کسر $\frac{\tan(x+y) + \tan(x-y)}{1 - \tan(x+y) \cdot \tan(x-y)}$ کدام است؟

بچه‌ها! اگه کمی دقت کنید می‌بینید که ساختار رابطه‌ی بالا مربوط به $\tan(\alpha + \beta)$ هست. بنابراین میشه نوشت:

$$\frac{\tan(x+y) + \tan(x-y)}{1 - \tan(x+y) \cdot \tan(x-y)} = \tan((x+y) + (x-y)) = \tan 2x$$

مثال بیش‌ترین مقدار عبارت $(\sin x + \sin 2x)^2 + (\cos x + \cos 2x)^2$ را به‌دست آورید.

$$\sin^2 x + \sin^2 2x + 2 \sin x \sin 2x + \cos^2 x + \cos^2 2x + 2 \cos x \cos 2x =$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x + \sin^2 2x + \cos^2 2x + 2(\sin 2x \sin x + \cos 2x \cos x) = 1 + 1 + 2 \cos(2x - x) = 2 + 2 \cos x$$

$$\cos x \in [-1, 1] \xrightarrow{\times 2} 2 \cos x \in [-2, 2] \xrightarrow{+2} 2 + 2 \cos x \in [0, 4] \quad \text{Max}(2 + 2 \cos x) = 4$$

روابط ناقله

بچه‌ها! یه روزی من از $\frac{1+\tan \alpha}{1-\tan \alpha}$ پرسیدم، تو اولش چی بودی که حالا بعد از ساده شدن به شکل $\frac{1+\tan \alpha}{1-\tan \alpha}$ درآومدی؟



اون جواب درستی به من نداد و گفت: من از همون اول همین شکلی بودم!!! (در واقع اون خواست منو بیچونه) اما وقتی که فکر کردم

دیدم اون از اول $\frac{\tan 45^\circ + \tan \alpha}{1 - \tan 45^\circ \tan \alpha}$ بوده و بهش گفتم ای ناقله تو از اول این شکلی بودی:

$$\frac{1+\tan \alpha}{1-\tan \alpha} = \frac{\tan 45^\circ + \tan \alpha}{1 - \tan 45^\circ \tan \alpha} \Rightarrow \frac{1+\tan \alpha}{1-\tan \alpha} = \tan(45^\circ + \alpha)$$

از اون جا بود که من اسم این رابطه رو گذاشتم: رابطه‌ی ناقله

$$\frac{1-\tan \alpha}{1+\tan \alpha} = \frac{\tan 45^\circ - \tan \alpha}{1 + \tan 45^\circ \tan \alpha} \Rightarrow \frac{1-\tan \alpha}{1+\tan \alpha} = \tan(45^\circ - \alpha)$$

البته این ناقله یه داداش هم داره:

تازه یه مطلبی رو یادم رفت بهتون بگم. روابط ناقلای بالا گاهی اوقات خودشون رو طوری مخفی می‌کنن که اصلاً نمی‌تونید بفهمید که این‌ها ناقله هستن.

من اسمشون رو گذاشتم روابط ناقلای مخفی. اگه صورت و مخرج این روابط رو به $\cos \alpha$ تقسیم کنید دستشون رو میشه خوند. نگاه کنید:

$$\frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \frac{\frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha}}{\frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha} \Rightarrow \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \tan(45^\circ + \alpha)$$

$$\frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha} = \frac{\frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha}}{\frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha} \Rightarrow \frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha} = \tan(45^\circ - \alpha)$$

مثال حاصل $\frac{1-\tan 25^\circ}{1+\tan 25^\circ}$ با کدام برابر است؟

$$\frac{1-\tan 25^\circ}{1+\tan 25^\circ} = \tan(45^\circ - 25^\circ) = \tan 20^\circ$$

مثال حاصل $\frac{\sin 15^\circ + \cos 15^\circ}{\sin 15^\circ - \cos 15^\circ}$ کدام است؟

$$\frac{\cos 15^\circ + \sin 15^\circ}{-(\cos 15^\circ - \sin 15^\circ)} = -\frac{1 + \tan 15^\circ}{1 - \tan 15^\circ} = -\tan(45^\circ + 15^\circ) = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$$

۹

روابط 2α

۹

روابط اصلی $(\tan 2\alpha, \cos 2\alpha, \sin 2\alpha)$

بچه‌ها ایندفعه بریم سراغ نسبت‌های مثلثاتی زاویه ی 2α .



فکر می‌کنید برای $\sin 2\alpha$ چه رابطه‌ای رو می‌شه نوشت؟

آقا اجازه؟ آگه $\sin 2\alpha$ رو به صورت $\sin(\alpha + \alpha)$ بنویسیم اون موقع:



رابطه ی مادر

$$\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = \sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \Rightarrow \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

فکر می‌کنید می‌شه $\sin 2\alpha$ رو بر حسب $\tan \alpha$ نوشت؟



آقا اجازه؟ این که کاری نداره، کافیه رابطه ی مادر رو بر حسب $\tan \alpha$ بازنویسی کنیم.



$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha = 2 \tan \alpha \times \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$$

$$\sin \odot = \begin{cases} \frac{2 \sin \frac{\odot}{2} \cos \frac{\odot}{2}}{2 \tan \frac{\odot}{2}} \\ \frac{2 \tan \frac{\odot}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\odot}{2}} \end{cases}$$

مثال $\sin 10^\circ = 2 \sin 5^\circ \cos 5^\circ = \frac{2 \tan 5^\circ}{1 + \tan^2 5^\circ}$

مثال $\sin 4\alpha = 2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha = \frac{2 \tan 2\alpha}{1 + \tan^2 2\alpha}$

مثال $\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}}$

مثال حاصل عبارات زیر را بیابید؟

$$\sin 15^\circ \cos 15^\circ = \frac{1}{2} (2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ) = \frac{1}{2} \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

این رابطه به ضریب ۲ کم دارد

$$\frac{\tan 7.5^\circ}{1 + \tan^2 7.5^\circ} \times \cos 15^\circ = \frac{1}{2} \times \frac{2 \tan 7.5^\circ}{1 + \tan^2 7.5^\circ} \times \cos 15^\circ = \frac{1}{2} \sin 15^\circ \cos 15^\circ = \frac{1}{4} \times 2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ = \frac{1}{4} \sin 30^\circ = \frac{1}{8}$$

این رابطه به ضریب ۲ کم دارد

مثال اگر $\sin 2x - \cos 2x = \frac{1}{5}$ باشد حاصل $\sin 4x$ کدام است؟

$$(\sin 2x - \cos 2x)^2 = \left(\frac{1}{5}\right)^2 \Rightarrow \overbrace{\sin^2 2x + \cos^2 2x}^{\sin^2 4x} - 2 \sin 2x \cos 2x = \frac{1}{25} \Rightarrow \sin 4x = 1 - \frac{1}{25} \Rightarrow \sin 4x = \frac{24}{25}$$

بچه‌ها! حالا که به خوبی از پس رابطه‌های $\sin 2\alpha$ برآمدید برید سراغ $\cos 2\alpha$.آقا اجازه؟ اولین حرکت باز کردن زاویه‌ی 2α به شکل $(\alpha + \alpha)$ هست یعنی: رابطه‌ی مادر

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha \Rightarrow \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

آقا آکه بفوایم $\cos 2\alpha$ رو فقط بر حسب $\cos \alpha$ بنویسیم کافیه در رابطه‌ی مادر همه پی‌رو به $\cos \alpha$ تبدیل کنیم.

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) = 2\cos^2 \alpha - 1 \Rightarrow \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$$

آقا آکه بفوایم $\cos 2\alpha$ رو فقط بر حسب $\sin \alpha$ بنویسیم کافیه در رابطه‌ی مادر همه پی‌رو به $\sin \alpha$ تبدیل کنیم.

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha \Rightarrow \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$$

آقا آکه بفوایم $\cos 2\alpha$ رو فقط بر حسب $\tan \alpha$ بنویسیم کافیه در رابطه‌ی مادر همه پی‌رو به $\tan \alpha$ تبدیل کنیم.

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} - \frac{\tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \Rightarrow \cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$$

رابطه‌ی دشمن

رابطه‌ی دوست

$$\cos \odot = \cos^2 \frac{\odot}{2} - \sin^2 \frac{\odot}{2} = 2\cos^2 \frac{\odot}{2} - 1 = 1 - 2\sin^2 \frac{\odot}{2} = \frac{1 - \tan^2 \frac{\odot}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\odot}{2}}$$

بچه‌ها! فکر می‌کنید یک دانش‌آموز حواس پرت، ممکنه رابطه‌ی $\frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \cos 2\alpha$ رو با کدوم رابطه اشتباه کنه؟



$\frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$ یعنی *آقا اجازه؟! با رابطه‌ی ناقلا: یعنی!*



بچه‌ها! حالا نوبت به $\tan 2\alpha$ می‌رسه.



آقا اجازه؟! روش پیدا کردن این رابطه هم مثل قبلی هاست یعنی!



$$\tan 2\alpha = \tan(\alpha + \alpha) = \frac{\tan \alpha + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha \tan \alpha} \Rightarrow \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

بچه‌ها! فکر می‌کنید به دانش‌آموز ممکنه رابطه‌ی $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$ رو با چه رابطه‌ای اشتباه بگیره؟



$\sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$ *آقا اجازه؟! با رابطه‌ی*



آفرین عزیزم. حالا رابطه‌ای رو که به دست آوردی، من به صورت تعمیم یافته می‌نویسم.



$\tan \odot = \frac{2 \tan \odot}{1 - \tan^2 \odot}$

مثال $\tan 20^\circ = \frac{2 \tan 10^\circ}{1 - \tan^2 10^\circ}$

مثال $\tan \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}$

مثال حاصل $\frac{\tan \alpha \cot 2\alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$ کدام است؟

$$\frac{1}{2} \times \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \times \cot 2\alpha = \frac{1}{2} \tan 2\alpha \cot 2\alpha = \frac{1}{2} (1) = \frac{1}{2}$$

مثال اگر $\frac{\sin x}{\sin x + \cos x} = 3$ باشد مقدار $\tan 2x$ کدام است؟

$$\frac{\sin x}{\sin x + \cos x} = 3 \Rightarrow 3 \sin x + 3 \cos x = \sin x \Rightarrow 2 \sin x = -3 \cos x \xrightarrow{\div \cos x} 2 \tan x = -3 \Rightarrow \tan x = -\frac{3}{2}$$

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{2 \times \left(-\frac{3}{2}\right)}{1 - \left(-\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{-3}{1 - \frac{9}{4}} = \frac{-3}{\left(-\frac{5}{4}\right)} = \frac{12}{5}$$

روابط فرعی 2α

علت $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha$

بچه‌ها! چرا $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + \sin 2\alpha$ ؟



علت $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha$

بچه‌ها! چرا $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 1 - \sin 2\alpha$ ؟



علت $\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{1}{\frac{1}{2} \sin 2\alpha}$

بچه‌ها! چرا $\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}$ ؟



علت $\tan \alpha - \cot \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{-\cos 2\alpha}{\frac{1}{2} \sin 2\alpha}$

بچه‌ها! چرا $\tan \alpha - \cot \alpha = -2 \cot 2\alpha$ ؟



بچه ها! چرا $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha$ ؟

علت $\rightarrow \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{2} (2 \sin \alpha \cos \alpha) (2 \sin \alpha \cos \alpha)$

بچه ها! چرا $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2\alpha$ ؟

علت $\rightarrow \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = 1 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - \frac{3}{4} (2 \sin \alpha \cos \alpha) (2 \sin \alpha \cos \alpha)$

این طور که معلومه سافتار دو رابطه‌ی بالا مثل هم هستن و فقط ضریب $\frac{3}{4}$ و $\frac{1}{2}$ اون‌هارو از هم متمایز کرده.

بچه ها! چرا $\sin^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\alpha)$ ؟

علت $\rightarrow \cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \Rightarrow 2 \sin^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha$

بچه ها! چرا $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\alpha)$ ؟

علت $\rightarrow \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \Rightarrow 1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha$

$$\tan^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$$

آقا ابازه! از تقسیم دو رابطه‌ی قبل به هم‌ریگه می‌شه به رابطه‌ی روبرو رسید:

۱۰

روابط (۳α)

۱۰

بچه‌ها! فکر می‌کنید برای $\sin 3\alpha$ چه رابطه‌ای میشه نوشت؟

آقا ابازه! آگه بفوایم رابطه‌ی بر حسب زاویه‌ی α بنویسیم باید 3α رو فوراً کنیم. یعنی:

$$\begin{aligned} \sin(3\alpha) &= \sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha \sin \alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \cdot \cos \alpha + (1 - 2 \sin^2 \alpha) \cdot \sin \alpha \\ &= 2 \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha + \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha = 2 \sin \alpha (1 - \sin^2 \alpha) + \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha = 2 \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha + \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha \end{aligned}$$

نتیجه

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$

درضمن

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

۲۱

تبدیل ضرب به جمع

۲۱

بچه‌ها! ازتون خواهش می‌کنم که ۴ رابطه‌ی پایین رو با دقت نگاه کنید و با دوربین ذهنتون یک عکس یادگاری از این ۴ رابطه بگیرید.

	قسمت اول	قسمت دوم		قسمت اول	قسمت دوم
الف	$\sin(\alpha + \beta)$	$= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$	ب	$\cos(\alpha + \beta)$	$= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$
	$\sin(\alpha - \beta)$	$= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$		$\cos(\alpha - \beta)$	$= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$

بچه‌ها! آگه به دو رابطه‌ی قسمت الف دقت کنید می‌بینید که بسط $\sin(\alpha \pm \beta)$ از دو قسمت تشکیل شد که قسمت اولش $\sin \alpha \cdot \cos \beta$ و قسمت دومش $\cos \alpha \cdot \sin \beta$ هست.

سوال (۱) به نظر شما چه عملی بین $\sin(\alpha + \beta)$ و $\sin(\alpha - \beta)$ باید صورت بگیرد تا $\sin \alpha \cos \beta$ ایجاد بشه؟

آقا اجازه؟! برای اینکه قسمت اول بسط $\sin(\alpha \pm \beta)$ رو به وجود بیاریم، باید $\sin(\alpha + \beta)$ رو با $\sin(\alpha - \beta)$ جمع کنیم. یعنی:

$$\begin{cases} \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع دو تساوی}} 2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$$

سوال (۲) چه عملی بین $\sin(\alpha + \beta)$ و $\sin(\alpha - \beta)$ باید صورت بگیرد تا $\cos \alpha \sin \beta$ ایجاد بشه؟

آقا اجازه؟! برای اینکه قسمت دوم بسط $\sin(\alpha \pm \beta)$ رو به وجود بیاریم، باید $\sin(\alpha + \beta)$ رو منهای $\sin(\alpha - \beta)$ کنیم. یعنی:

$$\begin{cases} \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل دو تساوی}} 2 \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)$$

اما دوستان من! اگر به دو رابطه ی قسمت ب توجه کنید مشاهده می کنید که بسط $\cos(\alpha \pm \beta)$ هم از دو قسمت تشکیل شده که قسمت اولش $\cos \alpha \cos \beta$ قسمت دومش $\sin \alpha \sin \beta$ هست.

سوال (۳) چه عملی بین $\cos(\alpha + \beta)$ و $\cos(\alpha - \beta)$ باید صورت بگیرد تا $\cos \alpha \cos \beta$ ایجاد بشه؟

آقا اجازه؟! برای اینکه قسمت اول بسط $\cos(\alpha \pm \beta)$ رو به وجود بیاریم، باید $\cos(\alpha + \beta)$ رو با $\cos(\alpha - \beta)$ جمع کنیم. یعنی:

$$\begin{cases} \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع دو تساوی}} 2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$$

سوال (۴) چه عملی بین $\cos(\alpha + \beta)$ و $\cos(\alpha - \beta)$ باید صورت بگیرد تا $\sin \alpha \sin \beta$ ایجاد بشه؟

آقا اجازه؟! برای اینکه قسمت دوم بسط $\cos(\alpha \pm \beta)$ رو به وجود بیاریم، باید $\cos(\alpha + \beta)$ رو منهای $\cos(\alpha - \beta)$ کنیم. یعنی:

$$\begin{cases} \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل دو تساوی}} -2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)$$

بچه ها! به چهار رابطه ای که تولید کردید میگوین روابط ضرب به جمع. چون سمت چپ تساوی به صورت ضرب و سمت راست



تساوی به صورت جمع یا منهایست.

مثال حاصل عبارت $2 \sin 2x \cos x - 2 \sin 5x \cos 2x + \sin 7x$ کدام است؟

$$\begin{aligned} 2 \sin 2x \cos x - 2 \sin 5x \cos 2x + \sin 7x &= [\sin(2x+x) + \sin(2x-x)] - [\sin(5x+2x) + \sin(5x-2x)] + \sin 7x \\ &= \sin 3x + \sin x - \sin 7x - \sin 3x + \sin 7x = \sin x \end{aligned}$$

مثال مقدار عددی $\sin 75^\circ \sin 15^\circ$ کدام است؟

عبارت $\sin 75^\circ \sin 15^\circ$ به ضرب -2 کم داره. اگر کنارش این ضرب رو بذاریم اون موقع میشه براش تبدیل ضرب به جمع رو نوشت:

$$\sin 75^\circ \sin 15^\circ = \frac{-1}{2} (-2 \sin 75^\circ \sin 15^\circ) = \frac{-1}{2} (\cos(75^\circ + 15^\circ) - \cos(75^\circ - 15^\circ)) = \frac{-1}{2} (\cos 90^\circ - \cos 60^\circ) = \frac{-1}{2} (0 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$$

بخش دوم $\cos(\alpha \pm \beta)$

۱۱

تبدیل جمع به ضرب

۱۱

بچه‌ها! در قسمت قبل دیدید که اگر روابط

$$\begin{cases} \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \end{cases}$$

رو به صورت ستونی یکبار با هم جمع و یکبار از هم کم کنیم به چهار رابطه ی مهم میرسیم. نگاه کنید:

۱) $\begin{cases} \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \end{cases} \Rightarrow \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$

قسمت اول $\sin(\alpha \pm \beta)$

۲) $\begin{cases} \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \end{cases} \Rightarrow \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \sin \beta$

قسمت دوم $\sin(\alpha \pm \beta)$

۳) $\begin{cases} \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \end{cases} \Rightarrow \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$

قسمت اول $\cos(\alpha \pm \beta)$

۴) $\begin{cases} \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \end{cases} \Rightarrow \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \sin \alpha \sin \beta$

قسمت دوم $\cos(\alpha \pm \beta)$

به روابط نتیجه شده، می‌گیریم تبدیل جمع به ضرب. چون سمت چپ این روابط به صورت جمع و سمت راستشون به شکل ضربه.

آقا اجازه؟ معمولاً در روابط مثلثاتی، زاویه‌هایی که در سمت چپ تساوی قرار دارن یک جمله‌ای هستن نه دو جمله‌ای در حالی



که روابط برست اومره این خاصیت رو ندارن!!

دو جمله‌ای دو جمله‌ای

۱) $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$

۲) $\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \sin \beta$

۳) $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$

۴) $\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \sin \alpha \sin \beta$

خب عزیزم. این که غصه نداره. اگر در سمت چپ این تساوی‌ها به جای $(\alpha + \beta)$ بذاری x و به جای $(\alpha - \beta)$ بذاری y ، به آرزوت

میرسی. اما حواست باشه که در سمت راست این تساوی‌ها، زاویه‌ها رو حتماً بر حسب x و y بنویسی. یعنی:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = x \\ \alpha - \beta = y \end{cases} \begin{cases} \oplus \\ \ominus \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha = x + y \\ 2\beta = x - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{x+y}{2} \\ \beta = \frac{x-y}{2} \end{cases} \xrightarrow{\text{در اصطلاح خودمونی}} \begin{cases} \alpha = \frac{\text{جمع}}{2} \\ \beta = \frac{\text{کم}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \sin \alpha + \sin \beta &= \sin \frac{x+y}{2} + \sin \frac{x-y}{2} = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{y}{2} \\ \sin \alpha - \sin \beta &= \sin \frac{x+y}{2} - \sin \frac{x-y}{2} = 2 \cos \frac{x}{2} \sin \frac{y}{2} \\ \cos \alpha + \cos \beta &= \cos \frac{x+y}{2} + \cos \frac{x-y}{2} = 2 \cos \frac{x}{2} \cos \frac{y}{2} \\ \cos \alpha - \cos \beta &= \cos \frac{x+y}{2} - \cos \frac{x-y}{2} = -2 \sin \frac{x}{2} \sin \frac{y}{2} \end{aligned}$$



بچه‌ها! برای این که ۴ رابطه‌ی بالارو خوب به ذهنتون بسپريد و هيچ وقت فراموش نکنيد، بهتون توصيه مي‌کنم که اين روابط رو حتماً در دو مرحله تکميل کنيد:

مرحله ۱: ساختار نويسي

مرحله ۲: زاويه‌گذاري

برای این که درک کنيد چي ميگم مثالي براتون مي‌زنم. مي‌خوام رابطه‌ی $\sin x + \sin y$ رو در دو مرحله تکميل کنم:

مرحله ۱: فرض ميکنم $\sin x + \sin y$ همون $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$ هست که جوابش ميشه قسمت اول $\sin(\alpha \pm \beta)$ (يعني ساختار $2\sin \cos$)

$$\begin{array}{c} \text{جمع} \\ \frac{x+y}{2} \\ \downarrow \\ 2\sin \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{کم} \\ \frac{x-y}{2} \\ \downarrow \\ \cos \end{array}$$

مرحله ۲: جمع (يعني $\frac{x+y}{2}$) رو به جای اولين زاويه و کم (يعني $\frac{x-y}{2}$) رو درون دومين زاويه قرار مي‌دم:

$\frac{\alpha+\beta}{2}$	$\frac{\alpha-\beta}{2}$	قسمت اول $\sin(\alpha \pm \beta)$	$\frac{x+y}{2}$	$\frac{x-y}{2}$
$\sin x + \sin y$		$\sin(\alpha \pm \beta)$	$2\sin$	$\cos$
$\sin x - \sin y$		قسمت دوم $\sin(\alpha \pm \beta)$	$2\cos$	$\sin$
$\cos x + \cos y$		قسمت اول $\cos(\alpha \pm \beta)$	$2\cos$	$\cos$
$\cos x - \cos y$		قسمت دوم $\cos(\alpha \pm \beta)$	$-2\sin$	$\sin$

مثال حاصل $\frac{\sin 80^\circ + \sin 40^\circ}{\cos 20^\circ}$ چيست؟

$$\frac{\sin 80^\circ + \sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} = \frac{2\sin \frac{80^\circ+20^\circ}{2} \cos \frac{80^\circ-20^\circ}{2}}{\cos 20^\circ} = \frac{2\sin 50^\circ \cos 30^\circ}{\cos 30^\circ} = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

مثال حاصل کسر $\frac{\cos 6x + \cos 2x}{\sin 6x + \sin 2x}$ به ازاي $x = \frac{\pi}{24}$ چيست؟

$$\frac{\cos 6x + \cos 2x}{\sin 6x + \sin 2x} = \frac{2\cos \frac{6x+2x}{2} \cos \frac{6x-2x}{2}}{2\sin \frac{6x+2x}{2} \cos \frac{6x-2x}{2}} = \frac{\cos 4x \cos 2x}{\sin 4x \cos 2x} = \cot 4x \Big|_{x=\frac{\pi}{24}} = \cot \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$$

۱۲

رابطه‌ی معرکه (نوع ديگري از تبديل جمع به ضرب)

۱۲

بچه‌ها! مي‌خوام برای هر کدوم از عبارت‌های

$$\begin{array}{l} \cos x \pm \sin x \\ \cos x \pm \sqrt{3} \sin x \\ \cos x \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \sin x \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \sin x \pm \cos x \\ \sin x \pm \sqrt{3} \cos x \\ \sin x \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \cos x \end{array}$$

معادلي پيدا کنم.



اگه خوب به عبارت‌های بالا نگاه کنيد مي‌بينيد که جمله‌ی دوم اين عبارت‌ها ضرايب $(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1, \sqrt{3})$ دارن. اين ضرايب همون $\tan 60^\circ$ ،

$\tan 45^\circ$ و $\tan 30^\circ$ هستن. حالا دو رابطه‌ی کلي درست مي‌کنم تا همه‌ی روابط بالارو در بربرگيره، يعني:

$$1) \sin x \pm \tan \theta \cos x = \sin x \pm \frac{\cos x \sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\sin x \cos \theta \pm \cos x \sin \theta}{\cos \theta} = \frac{1}{\cos \theta} \sin(x \pm \theta)$$

$$2) \cos x \pm \tan \theta \sin x = \cos x \pm \frac{\sin x \sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\cos x \cos \theta \pm \sin x \sin \theta}{\cos \theta} = \frac{1}{\cos \theta} \cos(x \mp \theta)$$

نتيجه

$$\sin x \pm \tan \theta \cos x = \frac{1}{\cos \theta} \sin(x \pm \theta)$$

نتيجه

$$\cos x \pm \tan \theta \sin x = \frac{1}{\cos \theta} \cos(x \mp \theta)$$

حالا مي‌خوام کاری کنم که شما توي سه مرحله اين دو تا رابطه‌ی معرکه رو راحت به ذهنتون بسپاريد.

(۱) ضريب $\frac{1}{\cos \theta}$ رو برای هر دو رابطه بنويسيد. علت: اگه در سمت چپ تساوي، $\tan \theta$

رو باز کنيم، در سمت راست تساوي، ضريب $\frac{1}{\cos \theta}$ به‌وجود مي‌آد (به اثبات نگاه کنيد)

$$\begin{array}{l} \sin x \pm \tan \theta \cos x = \frac{1}{\cos \theta} \dots \\ \cos x \pm \tan \theta \sin x = \frac{1}{\cos \theta} \dots \end{array}$$

(۲) اگر در سمت چپ دیدید که $\sin$ تنهاست اون موقع سمت راست رو بر حسب $\sin$ بنویسید. $\sin x \pm \tan \theta \cos x = \frac{1}{\cos \theta} \sin(x \pm \theta)$ تنها

و اگر در سمت چپ دیدید که $\cos$ تنهاست اون موقع سمت راست رو بر حسب $\cos$ بنویسید. $\cos x \pm \tan \theta \sin x = \frac{1}{\cos \theta} \cos(x \pm \theta)$ تنها

(۳) اگر جواب رو بر حسب $\sin$ نوشتید علامت سمت چپ رو بدون تغییر در سمت راست بنویسید $\sin x \pm \tan \theta \cos x = \frac{1}{\cos \theta} \sin(x \pm \theta)$

و اگر جواب رو بر حسب $\cos$ نوشتید علامت سمت چپ رو تغییر بدید و در سمت راست بنویسید. $\cos x \pm \tan \theta \sin x = \frac{1}{\cos \theta} \cos(x \mp \theta)$

نتیجه

$$\sin x \pm \frac{1}{2} \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(x \pm 45^\circ)$$

$$\frac{1}{\cos 45^\circ} = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \sqrt{2}$$

$$\sin x \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = \frac{1}{\cos 60^\circ} \sin(x \pm 60^\circ)$$

$$\frac{1}{\cos 60^\circ} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)} = 2$$

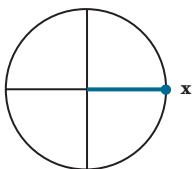
$$\sin x \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \cos x = \frac{1}{\cos 30^\circ} \sin(x \pm 30^\circ)$$

$$\frac{1}{\cos 30^\circ} = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

۱۳

حل معادلات مثلثاتی

۱۳

عقربه های n سر

آقا اجازه! یه سؤال راحتی! معلومه که مقدار x برابر با صفره.

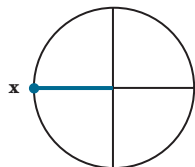
بچه ها! یه سؤال: همیشه بگید در شکل روبرو مقدار زاویه x چنده؟

به نظر شما $x = 2\pi$ نمی تونه باشه؟ آقا $x = 2\pi$ هم می تونه باشه.

نظرتون راجع به $x = 4\pi$ چیه؟

آقا اجازه! فهمیدم. شما می فواید بگید که مقدار x فقط صفر نیست بلکه می تونه مضرب زوجی از π باشه. یعنی:

$$x = \{ \dots, 0(\pi), 2(\pi), 4(\pi), 6(\pi), \dots \} \xrightarrow{\text{فرمول عمومی}} x = (2k) \pi \Rightarrow x = 2k\pi$$



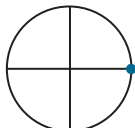
حالا یه سؤال دیگه: در شکل روبرو مقدار زاویه x چنده؟

آقا اجازه! این دفعه دیگه اشتباه نمی کنم. x می تونه بی شمار زاویه باشه که همشون مضرب فردی از π هستن. یعنی:

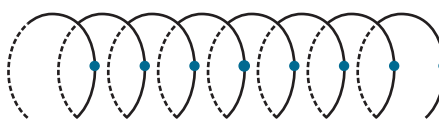
$$x = \{ \dots, 1(\pi), 3(\pi), 5(\pi), 7(\pi), \dots \} \xrightarrow{\text{فرمول عمومی}} x = (2k+1)\pi$$

بچه ها! می خوام یه موضوع مهمی رو باهاتون در میون بزارم. پس خوب گوش کنید:

«دایره ی مثلثاتی اصلاً دایره نیست، بلکه یک فنره که از دو سر نامتناهیه»



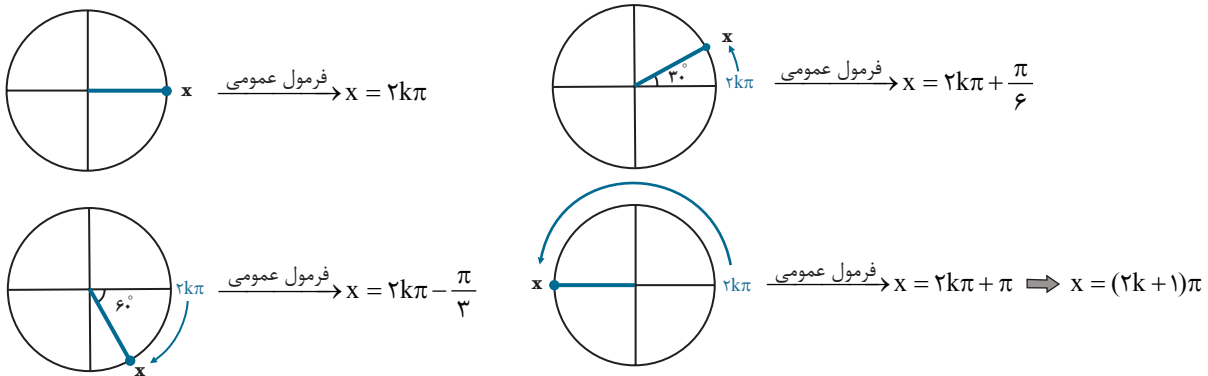
(نگاه از مقابل)



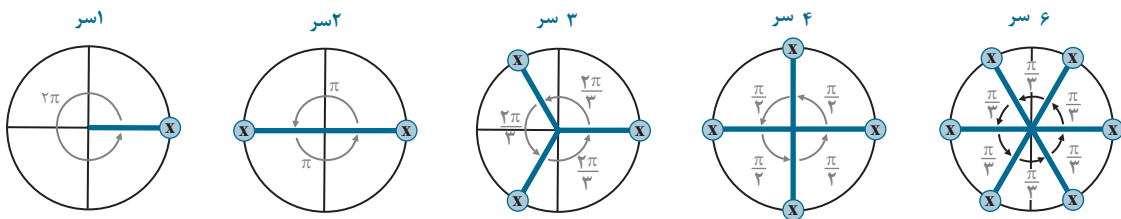
(نگاه از کنار)

اگر به این فنر از روبرو نگاه کنید مثل یک دایره هست. اما اگر از کنار بهش نگاه کنید فنر بودنش رو کاملاً حس می کنید.

از اونجایی که این نقاط در امتداد هم قرار دارن، ما این نقاط رو از روبرو فقط یک نقطه می بینیم. پس وقتی ازتون پرسیدن، زاویه ی عقربه ای که روی دایره ی مثلثاتی قرار داره، چنده، بهتره به جای گفتن زاویه ی اختصاصی، فرمول عمومی اون زاویه رو بگید تا همه ی زوایای مربوطه رو در برگیره. یعنی:



بچه‌ها! به عقربه‌هایی که در ۵ دایره زیر رسم شده خوب نگاه کنید.



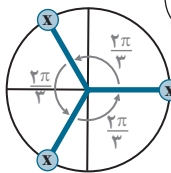
سؤال ۱: آیا در هر دایره، یکی از عقربه‌ها، روی مبدا حرکت، قرار داده یا نه؟ بله آقا قرار داده.

سؤال ۲: آیا در دایره‌های بالا، زاویه‌ی بین هر عقربه تا عقربه‌ی بعدی، یکسان هست یا نه؟ بله آقا یکسانه.

تعریف: به n تا عقربه که روی یک دایره قرار بگیرن و دو شرط زیر رو داشته باشن، عقربه‌های n سر می‌گیم:

(۱) یکی از عقربه‌های روی مبدا حرکت باشه.

(۲) زاویه‌ی بین هر عقربه تا عقربه‌ی بعدی مقداری ثابت باشه.



مثلاً x های شکل روبرو یک عقربه‌ی ۳ سر رو ایجاد کردند.



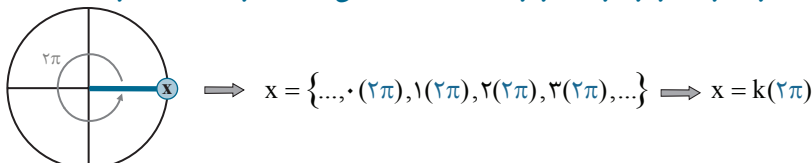
چون یکی از عقربه‌ها روی مبدا حرکت قرار داده و زاویه‌ی بین هر عقربه تا عقربه‌ی بعدی مقدار ثابت $\frac{2\pi}{3}$ هست.

بچه‌ها! حالا از تون می‌خوام فرمول عمومی x رو در هر یک از شکل‌های زیر بدست بیارید. آقا اجازه؟ به روی چشم.



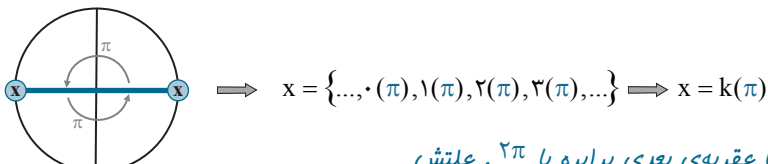
عقربه‌های ۱ سر: در این حالت، زاویه‌ی هر عقربه تا عقربه‌ی بعدی برابر با 2π . بنابراین فرمول عمومی x در عقربه‌ی یک سر به صورت

زیر مناسبه میشه:



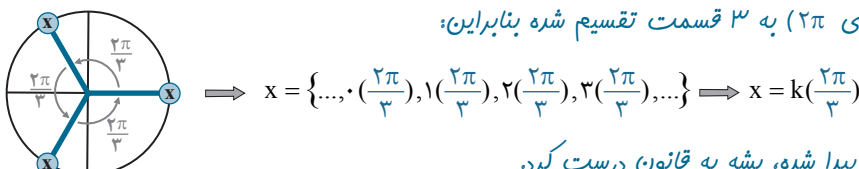
عقربه‌های ۲ سر: در این حالت، زاویه‌ی هر عقربه تا عقربه‌ی بعدی برابر با π . بنابراین فرمول عمومی x در عقربه‌ی دو سر به صورت

زیر مناسبه میشه:



عقربه‌های ۳ سر: در این حالت، زاویه‌ی هر عقربه تا عقربه‌ی بعدی برابر با $\frac{2\pi}{3}$. علتش

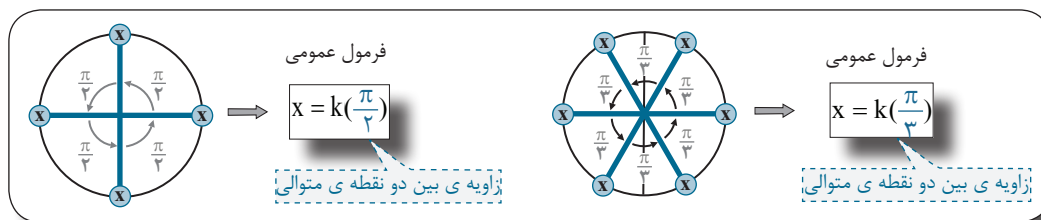
هم اینه که یک دور کامل از دایره (یعنی زاویه‌ی 2π) به ۳ قسمت تقسیم شده بنابراین:



آقا اجازه؟ فکر کنم از سه فرمولی که پیدا شده، بشه یه قانون درست کرد.



منظورم اینه که: اگر زاویه بین دو عقربه‌ی متوالی رو در k ضرب کنیم، فرمول عمومی x پیدا میشه. یعنی:



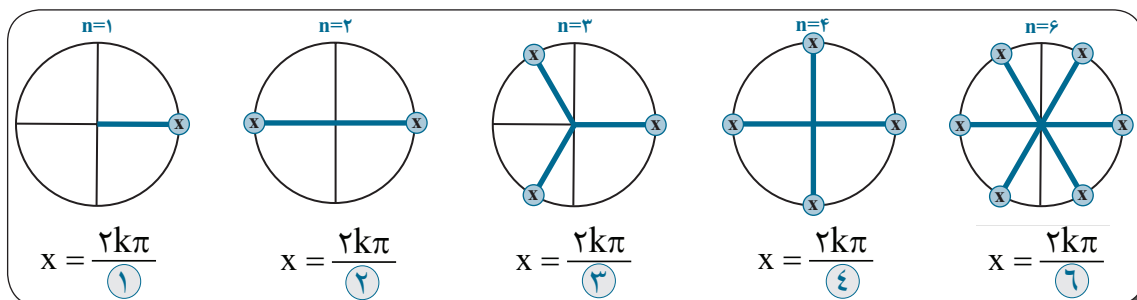
آقا اجازه؟ اگر اشتباه نکنم به رابطه‌ی کلی کشف کردم. در عقربه های n سر، یک دور کامل از دایره (یعنی 2π) به n قسمت تقسیم میشه، پس زاویه ی دو عقربه‌ی متوالی برابر با $\frac{2\pi}{n}$. بنابراین اگر این زاویه رو در k ضرب کنیم فرمول عمومی x در عقربه های n سر ایبار میشه. یعنی:

فرمول عمومی x برای عقربه های n سر

$$x = k \left(\frac{2\pi}{n} \right) \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{n}$$

آفرین به تو دانش آموز کاشفم. با رابطه‌ای که ایجاد کردی، روش جدیدی در حل معادلات مثلثاتی بوجود اومد. پس الان همه با هم می‌تونیم بگیریم: مثلثات سنتی خداحافظ، مثلثات نوین سلام.

بچه‌ها! اگر موافق باشید فرمول عمومی x رو برای عقربه های ۱ سر، ۲ سر، ۳ سر، ۴ سر و ۶ سر به کمک رابطه ی جدید به دست بیاریم.



عقربه های n سر دوران یافته

بچه‌ها! عقربه های n سر، ممکنه به اندازه ی α

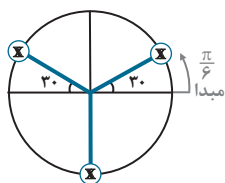
رادیان دوران کنن. در این صورت فرمول عمومی x رو برای

عقربه های n سر دوران یافته، میشه اینطوری نوشت:

$$\frac{2k\pi}{n} \begin{cases} \xrightarrow{\text{رادیان چرخش در جهت مثبت } \alpha} \frac{2k\pi}{n} + \alpha \\ \xrightarrow{\text{رادیان چرخش در جهت منفی } \alpha} \frac{2k\pi}{n} - \alpha \end{cases}$$

آقا اجازه؟ از کجا بفهمیم که عقربه های n سر چه قدر دوران پیدا کرده؟

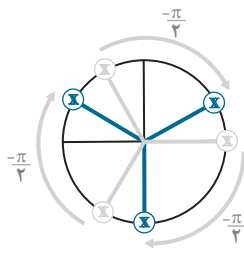
از اونجایی که در عقربه های n سر، همیشه یکی از عقربه ها روی مبدأ حرکت قرار داره، در صورت دوران، این عقربه از مبدأ جدا میشه. بنابراین کافیه شما نزدیک‌ترین نقطه به مبدأ رو شناسایی کنید. در نتیجه زاویه ی بین این عقربه تا مبدأ حرکت، همون مقدار دورانه.



مثلاً: در شکل روبه رو شما یک عقربه ی ۳ سر رو می‌بینید. (یعنی $\frac{2k\pi}{3}$) همونطور که می‌بینید

این عقربه ی ۳ سر، مقداری چرخیده. (چون هیچ کدوم از نقاطش روی مبدأ حرکت قرار ندارن) کاملاً واضحه که نزدیک‌ترین عقربه به مبدأ، زاویه ای 30° درجه در جهت مثبت ایجاد کرده: $x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$

آقا اجازه؟ آیا در این مثال میشه فرمول عمومی رو به صورت $x = \frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{6}$ هم نوشت؟



بله عزیزم. در واقع شما داری میگی که زاویه‌ی ۳ سر (یعنی: $\frac{2k\pi}{3}$) به اندازه‌ی $\frac{\pi}{3}$ در جهت منفی چرخیده. اما بچه‌ها! یه چیزی یادتون باشه: معمولاً مقدار چرخش رو با نزدیک‌ترین عقربه به مبدأ می‌سنجند.

مثال

فرمول عمومی زاویه‌ی x رو در هر یک از شکل‌ها به‌دست بیارید.
(A) آقا اجازه؟ در هر سه شکل زاویه‌ای یک سر (یعنی: $\frac{2k\pi}{3}$) داریم که هر کدومشون، مقداری دوران پیدا کردن پس:

$$\text{مقدار دوران} = \frac{2k\pi}{3} + \text{فرمول عمومی}$$

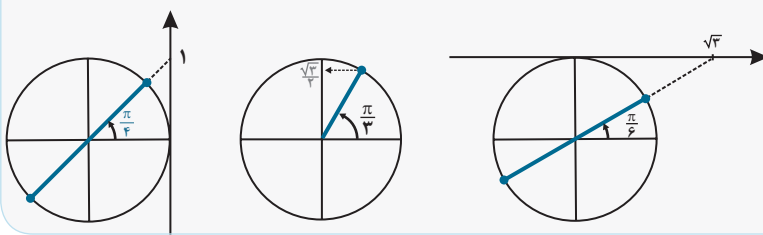
(B) آقا اجازه؟ در هر سه شکل، زاویه‌ی دو سر (یعنی: $\frac{2k\pi}{3}$) داریم که همشون مقداری دوران پیدا کردن. بنابراین:

$$\text{مقدار دوران} = \frac{2k\pi}{3} + \text{فرمول عمومی}$$

(C) آقا اجازه؟ در هر سه شکل روبه‌رو زاویه‌ی ۳ سر (یعنی: $\frac{2k\pi}{3}$) هستن که مقداری پرفیدن. در نتیجه:

$$\text{مقدار چرخش} + \frac{2k\pi}{3} = \text{فرمول عمومی}$$

مثال مقدار $\frac{\tan(k\pi + \frac{\pi}{4}) \times \sin(2k\pi + \frac{\pi}{3})}{\cot(k\pi + \frac{\pi}{6})}$ کدام است؟



$$\frac{\tan(k\pi + \frac{\pi}{4}) \times \sin(2k\pi + \frac{\pi}{3})}{\cot(k\pi + \frac{\pi}{6})} = \frac{1 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{2}$$



حل معادله‌ی $\sin x = a$ به روش شهودی

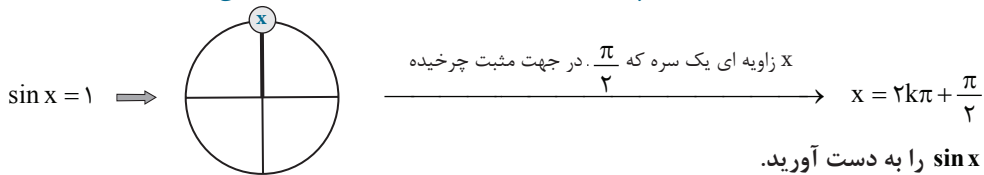
بچه‌ها! تا الان هر چی مقدمه‌چینی کردیم بخاطر این بود که شما بتونید معادلات مثلثاتی رو به روش شهودی حل کنید. برای



اینکه منظورم رو بهتر بفهمید چند تا سؤال ازتون می‌پرسم.

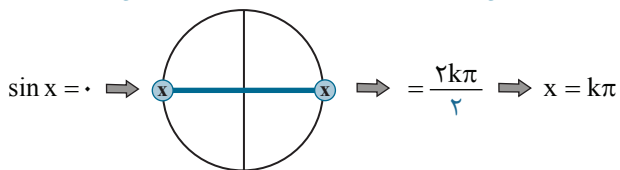
سؤال ۱: از معادله $\sin x = 1$ مقدار x رو بیابید.

آقا اجازه؟ منظور سؤال اینه که x ای رو روی دایره ی مثلثاتی پیدا کنید که سینوسش برابر ۱ بشه (یعنی ارتفاع اون x برابر ۱ بشه):



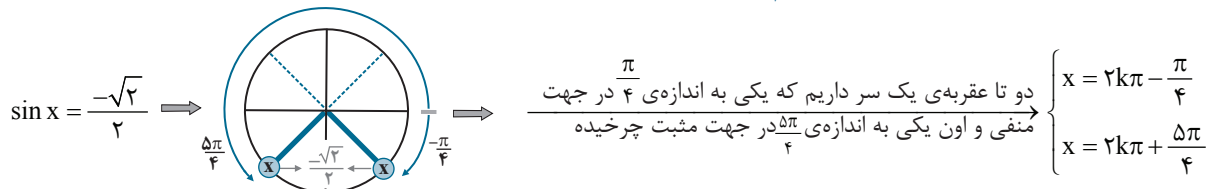
سؤال ۲: جواب کلی معادله $\sin x = 0$ را به دست آورید.

آقا اجازه؟ x هایی که ارتفاعشون صفره فقط در π و 0 قرار دارن و عقربه ی دو سر ایستاده می کنن:



سؤال ۳: مجموعه جواب معادله $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ کدوم است؟

آقا اجازه؟ x هایی که ارتفاعشون برابر با $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ روی ضربدر با مدل 45° قرار دارن (البته دو زاویه ی پایینی):

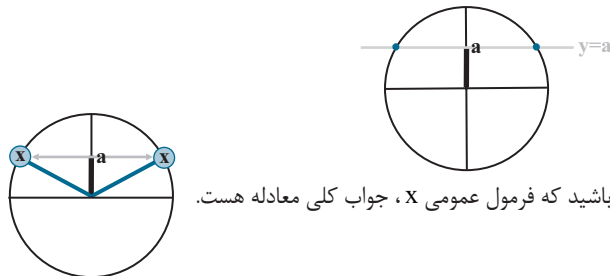


بچه ها! چرا x هایی که روی این دایره هستن رو عقربه ی دو سر در نظر نگرفتید؟



آقا اجازه؟ چون زاویه ی هر عقربه تا عقربه ی بعدی مقدار ثابتی نداره.

هر وقت خواستید جواب معادله $\sin x = a$ رو پیدا کنید باید دو مرحله رو طی کنید:



(۱) روی محور $\sin$ مقدار a رو انتخاب و از این نقطه خطی بر محور $\sin$ عمود کنید تا دایره ی مثلثاتی رو قطع کنه.

(۲) نقطه ی برخورد، همون x یا جواب مورد نظره. البته توجه داشته باشید که فرمول عمومی x ، جواب کلی معادله هست.

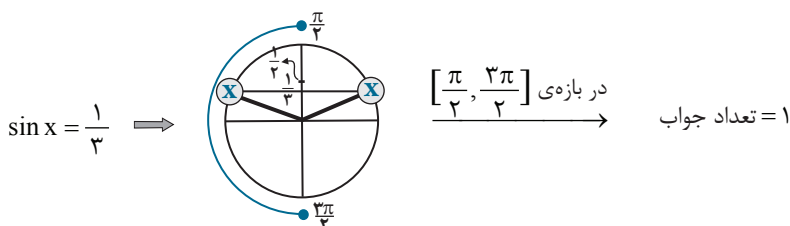
سؤال ۴: معادله $\sin x = \frac{1}{3}$ در بازه $[\frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}]$ چند جواب داره؟



آقا اجازه؟ من چه می دونم کدوم زاویه ارتفاعش برابر $\frac{1}{3}$ هست!!!

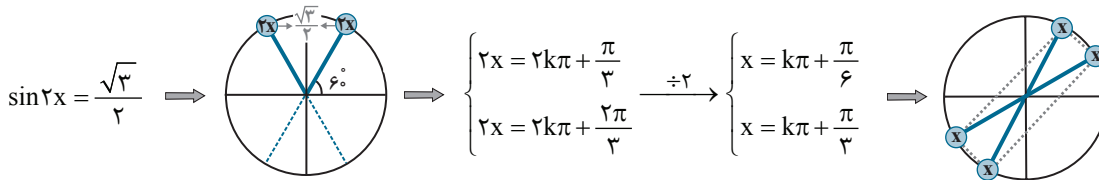
دانش آموز عزیزم! اگه به سؤال دقت کنی می بینی که مسئله مقدار x رو ازت نخواستنه بلکه تعداد x رو خواسته (اون هم تو بازه $[\frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}]$).

آهان فهمیدم آقا! در این مسئله کافیه که روی محور $\sin$ مقدار $\frac{1}{3}$ رو انتخاب کرده و از این نقطه، خطی افقی رسم کنیم تا دایره رو دو نقطه قطع کنه. این دو مکان، جواب کلی معادله $\sin x = \frac{1}{3}$ هستن. اما به دنبال تعداد جوابهای این معادله در بازه $[\frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}]$ هستیم. پس:



سؤال ۵: از وصل کردن جواب‌های معادله‌ی $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ روی دایره‌ی مثلثاتی کدام چند ضلعی حاصل می‌شود؟

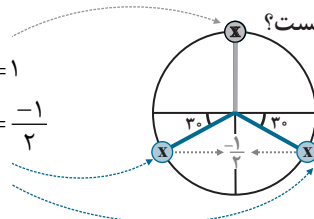
آقا اجازه؟ فکر کنم که این معادله رو باید در دو مرحله حل کنیم. اول باید مقدار $2x$ رو به دست بیاریم و بعد مقدار x رو بیابیم.



شکل حاصل از وصل کردن x ها، مستطیل.

سؤال ۶: جواب کلی معادله‌ی $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$ چیست؟

$$2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} \sin x = 1 \\ \sin x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$



توجه؟ با توجه به شکل، اجتماع جواب‌ها زاویه‌ی ۳ سری رو تشکیل میدن که $\frac{\pi}{6}$ در جهت منفی دوران پیدا کرده. یعنی جواب این معادله به صورت $x = \frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{6}$ هست.

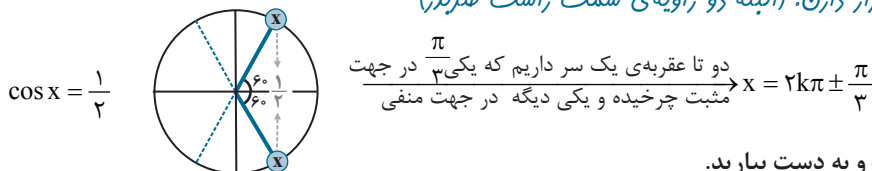
حل معادله‌ی $\cos x = a$ به روش شهودی

بچه‌ها! وقتی معادلات سینوسی رو به این زیبایی جواب دادید فکر کنم به راحتی از پس معادلات کسینوسی هم بریاید.

سؤال ۱: جواب کلی معادله‌ی $\cos x = \frac{1}{2}$ رو به دست بیارید.

آقا اجازه؟ باید x هایی رو روی دایره‌ی مثلثاتی پیدا کنیم که کسینوس اون x ها برابر $\frac{1}{2}$ بشه. (یعنی طول اون x ها برابر $\frac{1}{2}$ بشه).

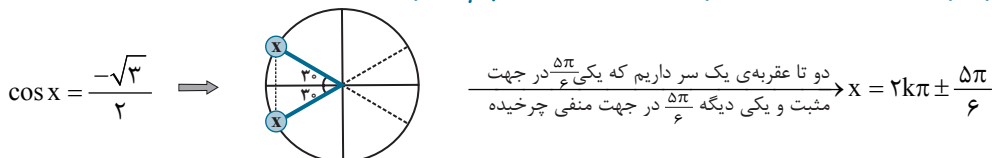
این x ها روی ضریب با مدل 60° قرار دارن. (البته دو زاویه‌ی سمت راست ضریب)



سؤال ۲: جواب کلی معادله‌ی $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ رو به دست بیارید.

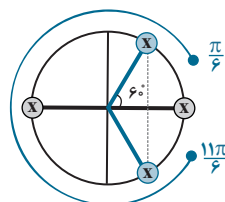
آقا اجازه؟ روی محور $\cos$ ، مقدار $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ رو انتقاب کرده و از این نقطه فطی عمود رسم می‌کنیم تا دایره رو در دو نقطه قطع

کنه. این x ها روی ضریب با مدل 30° قرار دارن. (البته دو زاویه‌ی سمت چپ ضریب)



سؤال ۳: جواب‌های معادله‌ی $\sin x - 2\sin x \cos x = 0$ روی بازه‌ی $[\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}]$ در کدام یک از فرمول‌های زیر صدق می‌کند؟

$$\sin x - 2\sin x \cos x = 0 \Rightarrow \sin x(1 - 2\cos x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases}$$



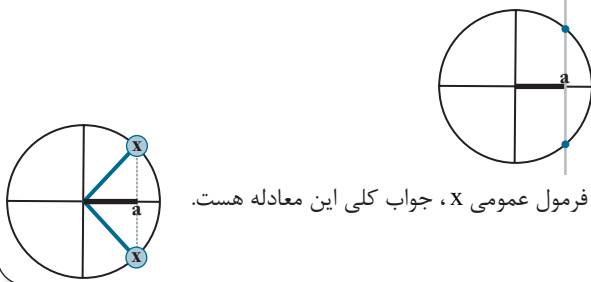
در بازه‌ی $[\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}]$ زاویه‌ی ۳ سری رو مشاهده می‌کنیم که به اندازه‌ی $\frac{\pi}{3}$ در جهت مثبت چرخیده. بنابراین x های درون این بازه در فرمول $\frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{3}$ صدق می‌کنن.

هر وقت خواستید جواب معادله ی $\cos x = a$ رو پیدا کنید می تونید:

(۱) روی محور $\cos$ مقدار a رو انتخاب و از این نقطه خطی بر

محور $\cos$ عمود می کنیم تا دایره ی مثلثاتی رو قطع کنه.

(۲) نقطه ی برخورد، همون x یا جواب مورد نظره. البته توجه داشته باشید که فرمول عمومی x ، جواب کلی این معادله هست.

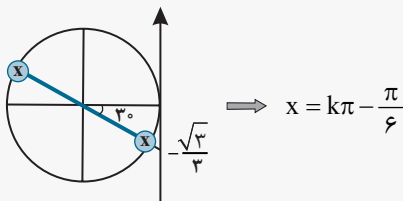


حل معادله ی $\tan x = a$ به روش شهودی

مثال جواب کلی معادله ی $\tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ رو پیدا کنید.

آقا اجازه؟ باید روی محور $\tan$ مقدار $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ رو مشخص کنیم. x هایی

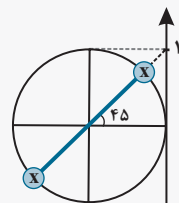
که امتداد عقربشون به $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ برافورد کنه جواب معادله هست.



مثال تمام مجموعه جواب معادله ی $\sqrt{\sin x} = \sqrt{\cos x}$ کدام است؟

آقا اجازه؟ خیلی آسونه. کافیه معادله رو به توان ۲ برسونیم و بعد طرفین رو به $\cos x$ تقسیم کنیم تا معادله ی تانژانتی به وجود بیاد.

$$\sqrt{\sin x} = \sqrt{\cos x} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} \sin x = \cos x \xrightarrow{\div \cos x} \tan x = 1 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}$$

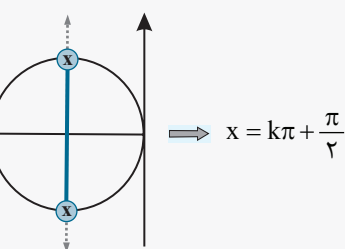


دانش آموز کنجکاوم! خوب جلو رفتی اما بد تمومش کردی. مگه من در فصل (۱) نگفته بودم که اگه یک معادله رو به توان زوج برسونی ممکنه جواب زائد بهت بده؟

آقا اجازه؟ فوهمیدم اشکال کارم کجاست. x ای که در ربع سوم قرار داره جواب معادله نیست، چون $\sin x$ و $\cos x$ رو منفی

می کنه در نتیجه معادله ی $\sqrt{\sin x} = \sqrt{\cos x}$ به ازای x های واقع در ربع سوم تعریف نمی شه. بنابراین:

$$x = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$$



مثال فرمول عمومی x هایی رو که تانژانتشون تعریف نمیشه، بنویسید؟

آقا اجازه؟ این x ها در بالا و پایین دایره قرار دارن،

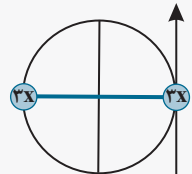
چون امتداد عقربشون با محور $\tan$ برافوردی نداره. (شکل روبرو)



آقا اجازه؟ آگه یه طرفین وسطین کنیم همه پی مله.

مثال جواب کلی معادله ی $\frac{\tan 3x + \tan x}{\tan x} = 1$ رو به دست بیارید.

$$\frac{\tan 3x + \tan x}{\tan x} = 1 \Rightarrow \tan 3x + \tan x = \tan x \Rightarrow \tan 3x = 0 \Rightarrow 3x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3}$$



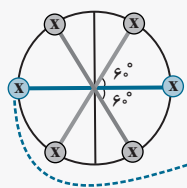
دانش آموز عزیزم باز هم گول خوردی. آیا اصلاً به این موضوع فکر کردی که بعضی از جواب‌های به دست اومده ممکنه مخرج



آقا اجازه؟ نمی‌دونیم پرا هواسمون به این مسائل نیست. الان بررسی می‌کنم.

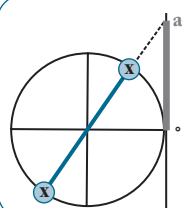
معادله رو صفر کنن؟

$$x = \frac{k\pi}{3} \quad \text{یا} \quad x = \frac{2k\pi}{6} \xrightarrow{\text{زاویه ی } 6^\circ \text{ سر}} \rightarrow \frac{\tan 3x + \tan x}{\tan x} = 1$$



از اونجایی که x های واقع در چپ و راست دایره ی مثلثاتی باعث صفر شدن مخرج این معادله می‌شن، نمی‌تونن جواب معادله باشن پس جواب معادله $x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

بچه‌ها! خطر خطر خطر: در حل معادلات مثلثاتی (خصوصاً کسری و رادیکالی که محدودیت دامنه دارن) جواب‌های به دست اومده رو حتماً تو معادله ی اولیه چک کنید. چون ممکنه بعضی از جواب‌ها در دامنه ی معادله ی اولیه نباشند.



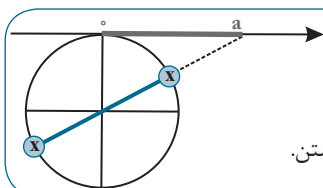
هر وقت خواستید جواب معادله ی $\tan x = a$ رو پیدا کنید:

(۱) روی محور $\tan$ مقدار a رو مشخص کنید.

(۲) x هایی که امتداد عقربشون به a برخورد کنه جواب معادله ی $\tan x = a$ هستن.



حل معادله ی $\cot x = a$ به روش شهودی



اگه خواستید جواب معادله ی $\cot x = a$ رو پیدا کنید میتونید:

(۱) روی محور $\cot$ مقدار a رو مشخص کنید.

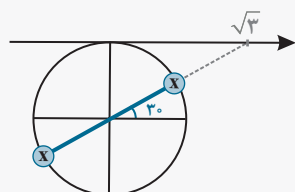
(۲) x هایی که امتداد عقربشون به a برخورد کنه جواب معادله ی $\cot x = a$ هستن.

مثال: جواب کلی معادله ی $\cot x = \sqrt{3}$ کدام است؟

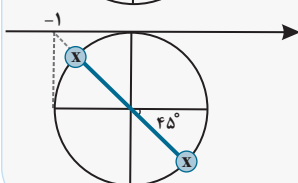


آقا اجازه؟ باید مقدار $\sqrt{3}$ رو روی محور $\cot$ مشخص کنیم.

x هایی که امتداد عقربشون به این نقطه می‌فوره جواب این سؤاله.



$$x = k\pi + \frac{\pi}{6}$$



$$x = k\pi - \frac{\pi}{4}$$

مثال: جواب کلی معادله ی $\cot x = -1$ را به دست آورید؟

مثال: تعداد جواب‌های معادله‌ی $\tan x - \cot x = 2$ در بازه‌ی $[0, \pi]$ را به دست آورید؟

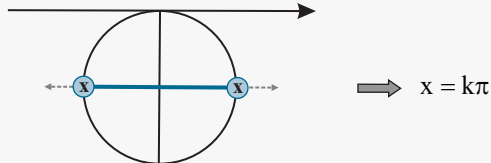
آقا اجازه؟ آگه بتونیم به کمک روابط مثلثاتی معادله‌ی بالا رو که از دو نسبت مثلثاتی تشکیل شده به یک نسبت مثلثاتی تبدیل کنیم همه می‌فله.

$$\tan x - \cot x = 2 \xrightarrow{\text{روابط فرعی } 2\alpha} -2 \cot 2x = 2 \xrightarrow{\div (-2)} \cot 2x = -1 \Rightarrow 2x = k\pi - \frac{\pi}{4}$$

$$\xrightarrow{\div 2} x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8} \xrightarrow{\text{۴ سری که } -\frac{\pi}{8} \text{ چرخیده}} \Rightarrow \text{تعداد جواب‌ها در بازه } [0, \pi] \text{ ۲ تاست.}$$

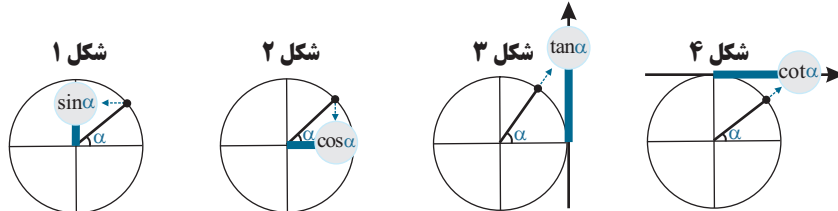
مثال: فرمول عمومی x هایی رو بیابید که کتانژانتشون تعریف نشده؟

آقا اجازه؟ این x ها در پپ و راست دایره قرار دارن، چون امتداد عقربشون با محور $\cot$ نباید برافورد کنه.



حل معادلات ($\cot x = \cot \alpha$, $\tan x = \tan \alpha$, $\cos x = \cos \alpha$, $\sin x = \sin \alpha$)

(۱) فرض می‌کنیم α زاویه‌ای معلومه. در نتیجه مقادیر $\sin \alpha$, $\tan \alpha$, $\cos \alpha$, $\cot \alpha$ هم مشخص.



با توجه به شکل (۱)

برای حل معادله‌ی $\sin x = \sin \alpha$ باید x هایی رو پیدا کنیم که سینوسشون با $\sin \alpha$ برابر شه.
 همونطور که می‌بینید این x ها (جواب کلی معادله)، دو تا عقربه‌ی یک سره (یکی $x = 2k\pi + \alpha$ و دیگری $x = 2k\pi + (\pi - \alpha)$)

$$x = 2k\pi + (\pi - \alpha) \quad x = 2k\pi + \alpha \quad \Rightarrow \quad \sin x = \sin \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases}$$

با توجه به شکل (۲)

برای حل معادله‌ی $\cos x = \cos \alpha$ باید x هایی رو پیدا کنیم که کسینوسشون با $\cos \alpha$ برابر شه.
 همونطور که می‌بینید این x ها (جواب کلی معادله)، دو تا عقربه‌ی یک سره (یکی $x = 2k\pi + \alpha$ و دیگری $x = 2k\pi - \alpha$)

$$x = 2k\pi + \alpha \quad x = 2k\pi - \alpha \quad \Rightarrow \quad \cos x = \cos \alpha \Rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha$$

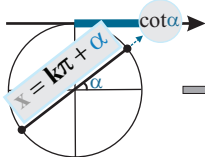
با توجه به شکل (۳)

برای حل معادله‌ی $\tan x = \tan \alpha$ باید x هایی رو پیدا کنیم که تانژانتشون با $\tan \alpha$ برابر شه.
 همونطور که می‌بینید این x ها (جواب کلی معادله)، یک عقربه‌ی دو سره (یعنی $x = k\pi + \alpha$)

$$\tan x = \tan \alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha$$

با توجه به شکل (۴)

برای حل معادله $\cot x = \cot \alpha$ باید x ‌هایی رو پیدا کنیم که کتانژانتشون با $\cot \alpha$ برابر شه.
همونطور که می‌بینید این x ‌ها (جواب کلی معادله)، یک عقربه‌ی دو سره (یعنی $x = k\pi + \alpha$)



$$\cot x = \cot \alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha$$

مثال جواب کلی معادله $\sin 3x = \sin 2x$ را به دست آورید.

$$\sin 3x = \sin 2x \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + 2x \\ 3x = 2k\pi + \pi - 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi \\ \Delta x = 2k\pi + \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi \\ x = \frac{2k\pi}{\Delta} + \frac{\pi}{\Delta} \end{cases}$$

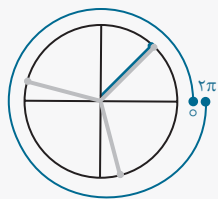
مثال معادله $\sin 2x = \sin(x + \frac{\pi}{4})$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟



آقا اجازه؟ به کمک رابطه‌ی قبل، مسئله به راحتی حل میشه. یعنی:

$$\sin 2x = \sin(x + \frac{\pi}{4}) \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + x + \frac{\pi}{4} \\ 2x = 2k\pi + \pi - (x + \frac{\pi}{4}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ 3x = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

آقا اجازه؟ از اون بایی که $x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$ زاویه‌ی یک سربره و $x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$ زاویه‌ی ۳ سر هستش. پس در بازه $[0, 2\pi]$ ۴ جواب داریم.



دانش آموز عزیزم، اشتباه گفتم. آیا به این موضوع توجه کردی که $x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$ در دل

$x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$ قرار داره؟ در واقع $x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$ زیرمجموعه‌ی $x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$ هست.

پس جواب کلی $x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$ خواهد بود و تعداد جواب‌ها در بازه $[0, 2\pi]$ برابر ۳ تا.

مثال یکی از ریشه‌های معادله $1 + \cos \Delta x = 2 \cos^2 x$ کدام است؟ (۱) $\frac{3\pi}{4}$ (۲) $\frac{\pi}{3}$ (۳) $\frac{\pi}{4}$ (۴) $\frac{4\pi}{3}$

$$\cos \Delta x = 2 \cos^2 x - 1 \Rightarrow \cos \Delta x = \cos 2x \Rightarrow \Delta x = 2k\pi \pm 2x \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi \\ 7x = 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2k\pi}{3} \\ x = \frac{2k\pi}{7} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{7} \mid k=2 \Rightarrow x = \frac{4\pi}{7}$$

مثال مجموعه جواب معادله $\tan 4x = \tan 2x$ را به دست آورید

$$\tan 4x = \tan 2x \Rightarrow 4x = k\pi + 2x \Rightarrow 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}$$

آقا اجازه؟ اعلام فطر شما ریگه برای همیشه تو ذهنمون می‌مونه. از اونبایی که این معادله مفروضیت دامنه داره (پون در بعضی نقاط تعریف نمی‌شه) باید جواب به دست اومده رو توی معادله‌ی اولیه چک کنیم.

معادله‌ی اولیه

$$\tan 4x = \tan 2x \mid x = \frac{k\pi}{2} \Rightarrow \tan(2k\pi) = \tan(k\pi) \Rightarrow 0 = 0 \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}$$

مثال مجموعه جواب معادله $\tan 4x \cdot \cot 2x = 1$ کدام است؟

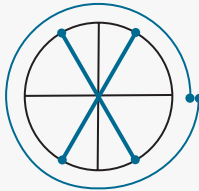
$$\tan 4x = \frac{1}{\cot 2x} \Rightarrow \tan 4x = \tan 2x \Rightarrow 4x = k\pi + 2x \Rightarrow 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}$$

$$\tan 4x \cdot \cot 2x = 1 \mid x = \frac{k\pi}{2} \Rightarrow \tan(2k\pi) \times \cot(k\pi) = 1$$

آقا اجازه؟ $x = \frac{k\pi}{2}$ مجموعه جواب پوشالیه پون اصلاً در معادله‌ی اولیه صق نمی‌کنه. بنابراین معادله‌ی بالا اصلاً جواب نداره.

مثال معادله $\cot 4x = \cot x$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

$$\cot 4x = \cot x \Rightarrow 4x = k\pi + x \Rightarrow 3x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{6} \Rightarrow$$



$\Rightarrow$ تعداد جواب = ۴

آقا اجازه؟ نقاط سمت چپ و راست دایره در معادله $\cot 4x = \cot x$ صدق نمی‌کنن. (پون باعث تعریف نشدگی $\cot$ می‌شن)



۱۴

نسبت‌های مثلثاتی $(k\pi \pm \alpha)$

۱۴

بچه‌ها می‌خوام قانونی رو براتون بازگو کنم که خیلی سریع بتونید نسبت‌های مثلثاتی زوایای $(k\pi \pm \alpha)$ رو به نسبت‌های مثلثاتی زاویه α تبدیل کنید



$$\begin{aligned} \sin(\cancel{2k\pi} \pm \alpha) &= \sin(\pm \alpha) \\ \cos(\cancel{2k\pi} \pm \alpha) &= \cos(\pm \alpha) \end{aligned}$$

۱) اگر ضرب π عددی زوج باشه اونو از کمان‌های $\sin$ و $\cos$ حذف کنید

راهنمایی: زوایای $\pm \alpha$ رو در یک دایره ی مثلثاتی و دسته زوایای $2k\pi \pm \alpha$ رو در دایره ی مثلثاتی دیگه ای رسم کنید و $\sin$ و $\cos$ این کمانها رو با هم مقایسه کنید.



$$\begin{aligned} \sin((\cancel{2k+1}\pi) \pm \alpha) &= -\sin(\pm \alpha) \\ \cos((\cancel{2k+1}\pi) \pm \alpha) &= -\cos(\pm \alpha) \end{aligned}$$

۲) اگر ضرب π عددی فرد باشه اونو از کمان‌های $\sin$ و $\cos$ حذف کرده، اما نسبت مثلثاتی رو قرینه کنید

راهنمایی: زوایای $\pm \alpha$ رو در یک دایره ی مثلثاتی و دسته زوایای رو در $(2k+1)\pi \pm \alpha$ رو در دایره ی مثلثاتی دیگه ای رسم کنید و $\sin$ و $\cos$ این کمانها رو با هم مقایسه کنید.

$$\begin{aligned} \tan(\cancel{k\pi} \pm \alpha) &= \tan(\pm \alpha) \\ \cot(\cancel{k\pi} \pm \alpha) &= \cot(\pm \alpha) \end{aligned}$$

۳) ضرب π چه زوج و چه فرد باشه اونو از کمان‌های $\tan$ و $\cot$ حذف کنید

راهنمایی: زوایای $\pm \alpha$ رو در یک دایره ی مثلثاتی و دسته زوایای رو در $k\pi \pm \alpha$ رو در دایره ی مثلثاتی دیگه ای رسم کنید و $\tan$ و $\cot$ این کمانها رو با هم مقایسه کنید.

مثال نسبت‌های مثلثاتی زیر را بر حسب α بنویسید.

۱) $\sin(285\pi - \alpha) = -\sin(-\alpha) = \sin \alpha$

۹) $\tan(96\pi - \alpha) = \tan(-\alpha) = -\tan \alpha$

۲) $\sin(324\pi - \alpha) = \sin(-\alpha) = -\sin \alpha$

۱۰) $\tan(97\pi - \alpha) = \tan(-\alpha) = -\tan \alpha$

۳) $\sin(59\pi + \alpha) = -\sin \alpha$

۱۱) $\tan(99\pi + \alpha) = \tan \alpha$

۴) $\sin(78\pi + \alpha) = \sin \alpha$

۱۲) $\tan(10\pi + \alpha) = \tan \alpha$

۵) $\cos(175\pi - \alpha) = -\cos(-\alpha) = -\cos \alpha$

۱۳) $\cot(23\pi - \alpha) = \cot(-\alpha) = -\cot \alpha$

۶) $\cos(24\pi - \alpha) = \cos(-\alpha) = \cos \alpha$

۱۴) $\cot(24\pi - \alpha) = \cot(-\alpha) = -\cot \alpha$

۷) $\cos(33\pi + \alpha) = -\cos \alpha$

۱۵) $\cot(27\pi + \alpha) = \cot \alpha$

۸) $\cos(46\pi + \alpha) = \cos \alpha$

۱۶) $\cot(28\pi + \alpha) = \cot \alpha$

۱۵

نسبت‌های مثلثاتی $(2k+1)\frac{\pi}{2} \pm \alpha$

۱۵

حالا می‌خواهیم قانونی رو بگیم که نسبت‌های مثلثاتی زوایای $(2k+1)\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ رو به نسبت‌های مثلثاتی زاویه α تبدیل می‌کنه:

$$\sin((2k+1)\frac{\pi}{2} \pm \alpha) = \textcircled{\pm} \cos \alpha$$

$$\cos((2k+1)\frac{\pi}{2} \pm \alpha) = \textcircled{\pm} \sin \alpha$$

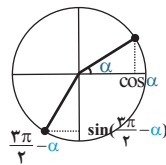
$$\tan((2k+1)\frac{\pi}{2} \pm \alpha) = \textcircled{\pm} \cot \alpha$$

$$\cot((2k+1)\frac{\pi}{2} \pm \alpha) = \textcircled{\pm} \tan \alpha$$

آقا اجازه؟ این طور که معلومه شما مقبره‌های $\frac{\pi}{2}$ رو از کمان‌های درون $\sin$ ، $\cos$ ، $\tan$ ، $\cot$ حذف کردید و بعرض، نسبت‌های مثلثاتی رو عوض کردید. اولاً چرا؟ ثانیاً به جای $\textcircled{\pm}$ چه علامتی رو بذاریم؟ مثبت یا منفی؟



عزیزم! برای اینکه جواب سوال رو بگیری به این مثال توجه کن.



می‌خواهیم ببینیم $\sin(\frac{3\pi}{2} - \alpha)$ با چی برابره. فرض می‌کنم α زاویه‌ای حاده هست. پس زاویه‌ی $(\frac{3\pi}{2} - \alpha)$ در ربع سوم قرار می‌گیره.

همونطور که می‌بینید $\sin(\frac{3\pi}{2} - \alpha)$ با $\cos \alpha$ هم اندازه هست، نه با $\sin \alpha$

به همین دلیل که نسبت‌های مثلثاتی سمت چپ و راست با هم فرق دارن. $\sin(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = \textcircled{\pm} \cos \alpha$

از اونجایی که α در ربع اوله پس $\cos \alpha$ مثبت‌ه. از طرفی $(\frac{3\pi}{2} - \alpha)$ در ربع سومه پس $\sin(\frac{3\pi}{2} - \alpha)$ منفیه و برای اینکه

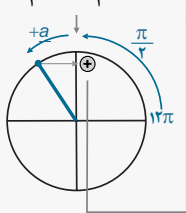
تساوی $\sin(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = \textcircled{\pm} \cos \alpha$ برقرار بشه باید به جای $\textcircled{\pm}$ علامت منفی بذاریم.

دوستان عزیزم! نتیجه اینکه برای تشخیص علامت $\textcircled{\pm}$ کافیه علامت سمت چپ معادله‌ی بالا رو به دست بیارید و در طرف راست معادله قرار بدید.

مثال نسبت‌های مثلثاتی زیر را بر حسب α بنویسید.

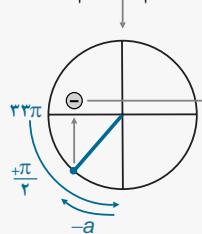
$$\sin(\frac{25\pi}{6} + \alpha) = + \cos \alpha$$

$$(\frac{24}{6}\pi + \frac{\pi}{6} + \alpha)$$



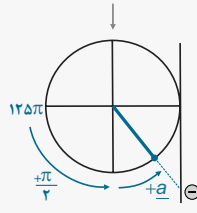
$$\cos(\frac{67}{6}\pi - \alpha) = - \sin \alpha$$

$$(\frac{66}{6}\pi + \frac{\pi}{6} - \alpha)$$



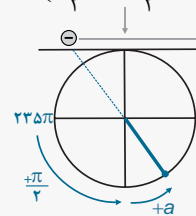
$$\tan(\frac{251}{6}\pi + \alpha) = - \cot \alpha$$

$$(\frac{250}{6}\pi + \frac{\pi}{6} + \alpha)$$



$$\cot(\frac{471}{6}\pi + \alpha) = - \tan \alpha$$

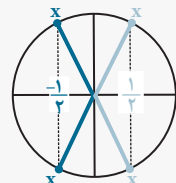
$$(\frac{470}{6}\pi + \frac{\pi}{6} + \alpha)$$



مثال جواب کلی معادله‌ی $\sin(\frac{3\pi}{2} - x) \cos(\pi - x) = \sin(\frac{7\pi}{6})$ کدام است؟

$$\sin(\frac{3\pi}{2} - x) \times \cos(\pi - x) = (\sin \frac{7\pi}{6})^2 \Rightarrow (-\cos x)(-\cos(-x)) = (\frac{-1}{2})^2 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{4}$$

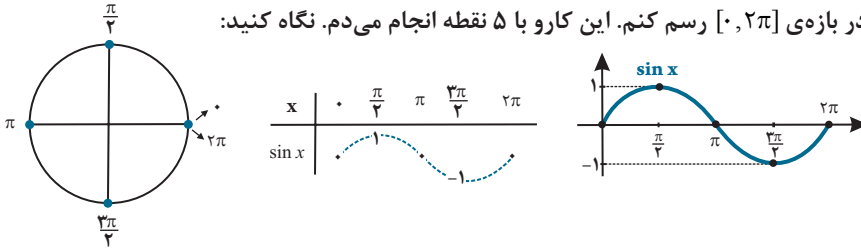
$$\Rightarrow \cos x = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow$$



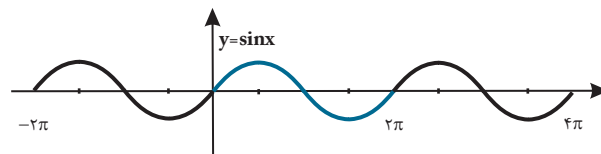
$$\Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

رسم نمودار تابع $y = \sin x$ 

بچه‌ها! می‌خواهم نمودار $y = \sin x$ رو در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ رسم کنم. این کارو با ۵ نقطه انجام می‌دم. نگاه کنید:



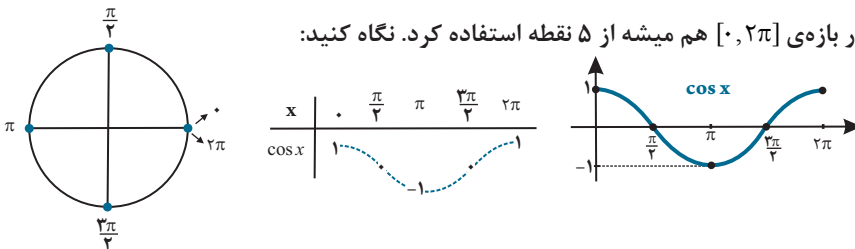
از اونجایی که در هر دور از دایره‌ی مثلثاتی، تغییرات $\sin x$ مثل دور اولشه، پس نمودار $y = \sin x$ در بازه‌های $(\dots, [-2\pi, 0], [0, 2\pi], [2\pi, 4\pi], \dots)$



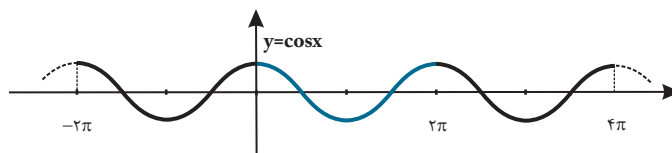
کاملاً به همدیگه شبیه هستن. یعنی:

رسم نمودار تابع $y = \cos x$ 

بچه‌ها! برای رسم نمودار $y = \cos x$ در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ هم همیشه از ۵ نقطه استفاده کرد. نگاه کنید:



با توجه به اینکه در هر دور از دایره‌ی مثلثاتی، تغییرات $\cos x$ دور اولش هست. پس نمودار $y = \cos x$ در بازه‌های $(\dots, [-2\pi, 0], [0, 2\pi], [2\pi, 4\pi], \dots)$



مثل همدیگه هستن. یعنی:

رسم نمودار تابع $y = \tan x$ 

بچه‌ها! حالا نوبت به رسم نمودار $y = \tan x$ رسیده.

آقا اجازه؟! با توجه به اینکه $x = \frac{\pi}{2}$ و $x = \frac{3\pi}{2}$ در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ قرار دارن و در این نقطه مقداری برای $\tan x$ وجود نداره، چه

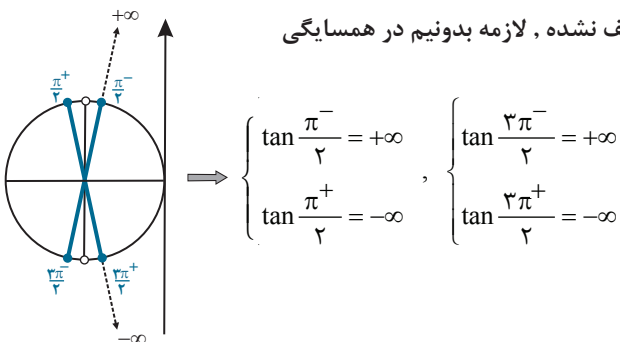


پوری میشه نمودار $y = \tan x$ رو در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ رسم کرد؟



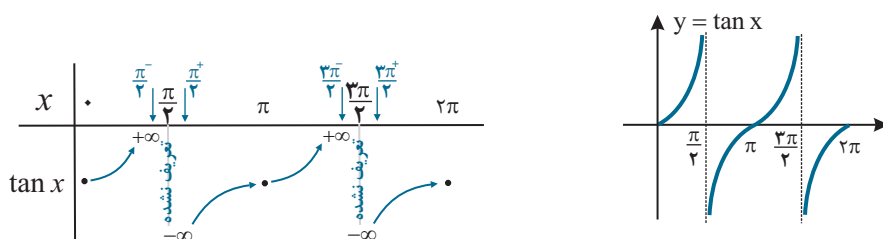
سؤال خوبی پرسیدی. با توجه به این که $\tan \frac{\pi}{2}$ و $\tan \frac{3\pi}{2}$ تعریف نشده، لازمه بدونیم در همسایگی

بسیار نزدیک $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2}$ مقدار به چه سمتی میره. یعنی:



پس برای رسم نمودار $y = \tan x$ علاوه بر این که از ۵ نقطه‌ی $(0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ استفاده می‌کنیم از همسایگی بسیار نزدیک $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2}$

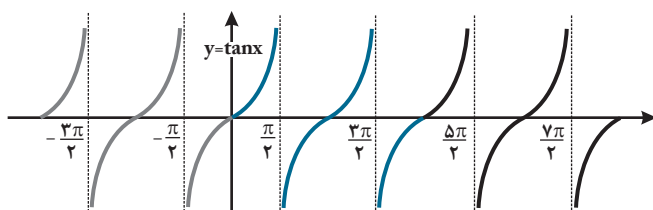
هم کمک می‌گیریم. یعنی: $(\frac{\pi}{2}^-, \frac{\pi}{2}^+, \frac{3\pi}{2}^-, \frac{3\pi}{2}^+)$



همونطور که می‌دونید در هر دور از دایره‌ی مثلثاتی، تغییرات $\tan x$ مثل دور اولش هست. لذا نمودار $y = \tan x$ در بازه‌های



($\dots, [-2\pi, 0], [0, 2\pi], [2\pi, 4\pi], \dots$) کاملاً شبیه همدیگه هستن یعنی:

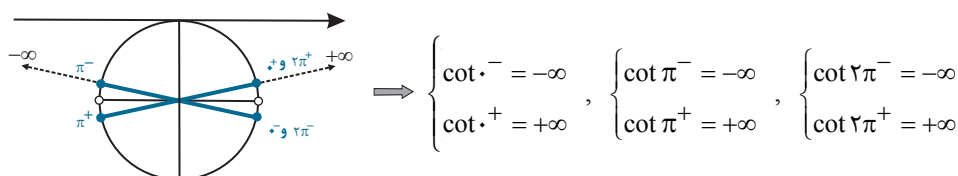


رسم نمودار $y = \cot x$

بچه‌ها! با توجه به صحبت‌هایی که در رسم نمودار $y = \tan x$ مطرح شد فکر کنیم خودتون بتونید نمودار $y = \cot x$ رو رسم کنید.

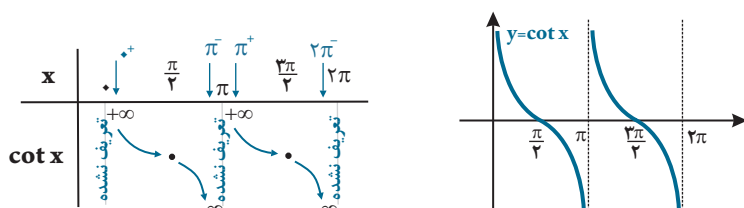


آقا اجازه؟ در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ نقاطی که $\cot$ شون تعریف نشده هست $x = 0, x = \pi, x = 2\pi$ هستن. یعنی:



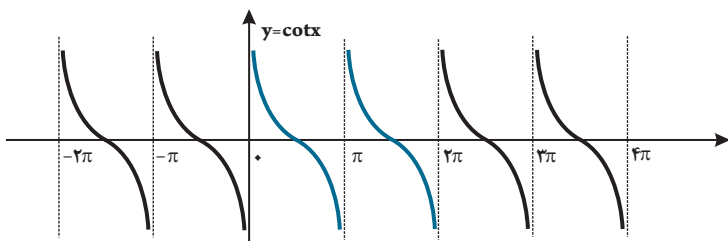
برای رسم نمودار $y = \cot x$ علاوه بر این که از ۵ نقطه‌ی $(0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ استفاده می‌کنیم. از همسایگی راست 0 ، همسایگی چپ و

راست π و همسایگی چپ 2π نیز کمک می‌گیریم. یعنی: $(0^+, \pi^-, \pi^+, 2\pi^-)$



از اونجایی که در هر دور از دایره‌ی مثلثاتی، تغییرات $\cot x$ مثل دور اولش هست. پس نمودار $y = \cot x$ در بازه‌های $(\dots, [-2\pi, 0], [0, 2\pi], [2\pi, 4\pi], \dots)$

مثل همدیگه هستن. یعنی:



۱۷

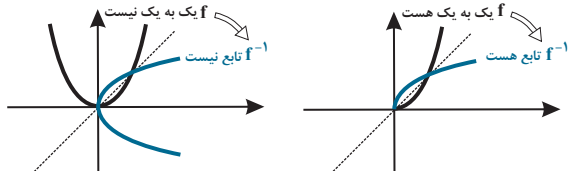
توابع معکوس مثلثاتی ($y = \sin^{-1} x$) یا ($y = \text{Arcsin } x$)

۱۷

نمودار و دامنه ی تابع $y = \sin^{-1} x$

بچه‌ها! می‌دونید که معکوس یک تابع یعنی قرینه‌ی اون تابع نسبت به خط $y = x$. حالا فکر می‌کنید معکوس تابع f (یعنی f^{-1})

در چه صورتی تابع خواهد بود؟



آقا اجازه؟ در صورتی که f تابعی یک به یک باشد، معکوسش (یعنی f^{-1}) تابع میشه و در غیراین صورت فایده (شکل های روبرو)

آفرین به تو دانش آموز خوبم. بچه‌ها! حالا می‌خواهم تابع $y = \sin^{-1} x$ رو که معکوس تابع $y = \sin x$ هست بهترتون معرفی کنم.

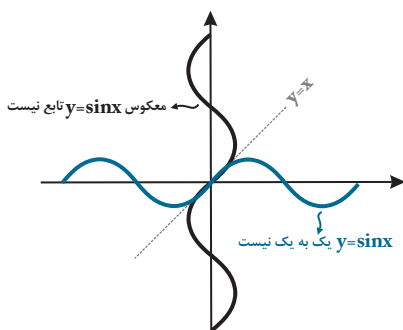
آقا اجازه؟ شما گفتید تابع $y = \sin^{-1} x$

بله عزیزم. مگه عیبی داره؟

آقا اجازه؟ بله که عیب داره. همونطور که فوتون می‌دونید تابع $y = \sin x$ ،

یک به یک نیست، پس بطور به معکوسش یعنی $y = \sin^{-1} x$ لقب

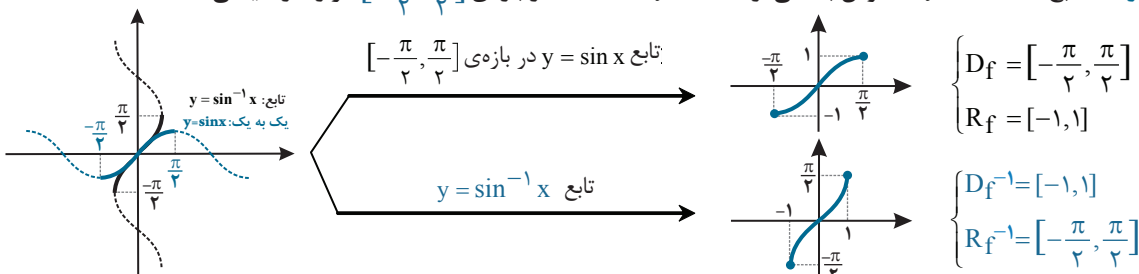
تابع رو می‌دیر؟ آقا اجازه؟ شکل روبرو حرف‌های منو تأثیر می‌کنه، نگاه کنید:



عزیزم، چرا عصبانی می‌شی؟ الان بهت میگم جریان چیه. منظور من، معکوس کل

تابع $y = \sin x$ نیست بلکه معکوس قسمتی از $y = \sin x$ هست که یک به یک.

طبق قرارداد: تابع $y = \sin^{-1} x$ معکوس بخشی از $y = \sin x$ هست که در بازه‌ی $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ قرار داره. یعنی:

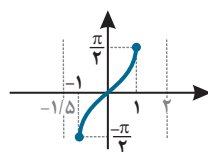


خب: حالا فهمیدی که چرا لقب تابع رو به $y = \sin^{-1} x$ دادیم؟

آقا اجازه؟ بله فهمیدم. اما کاشکی از اول این موضوع رو می‌گفتید.

خواستم ذهنت رو کمی به چالش بکشم تا این مفهوم رو خوب درک کنی.

خب بچه‌ها! با توجه به نمودار $y = \sin^{-1} x$ مقدار $\sin^{-1}(2)$ و $\sin^{-1}(-1/5)$ رو به دست بیارید.



آقا اجازه؟ این که کاری نداره. کافیه نمودار $y = \sin^{-1} x$ رو رسم کنیم

و $x = 2$ و $x = -1/5$ رو به این نمودار تصویر کنیم. در این صورت

ارتفاع های به دست اومده همون $\sin^{-1}(2)$ و $\sin^{-1}(-1/5)$ خواهند بود:

آقا اجازه؟ ازیت می‌کنی؟ تصویر $x = 2$ و $x = -1/5$ اصلاً با نمودار $y = \sin^{-1} x$ برافروزی نداره یعنی $\sin^{-1}(2)$ و $\sin^{-1}(-1/5)$ اصلاً

وجود نداره



بچه‌ها! اذیتتون نکردم. فقط خواستم بگم تابع $y = \sin^{-1}(x)$ ، x های رو جذب می‌کنه که در بازه‌ی $[-1, 1]$ قرار داشته باشن. یعنی ورودی به $\sin^{-1}$ حق نداره خارج از بازه‌ی $[-1, 1]$ باشه.

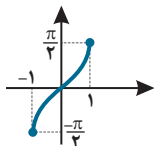
$$\begin{cases} y = \sin^{-1}(x) & \Rightarrow D = \{x \mid -1 \leq x \leq 1\} \\ y = \sin^{-1}(g(x)) & \Rightarrow D = \{x \mid -1 \leq g(x) \leq 1\} \end{cases}$$



بچه‌ها! با توجه به نمودار $y = \sin^{-1} x$ مقدار هر کدوم از عبارتهای زیر رو مقابلشون بنویسید.



آقا اجازه؟! به روی چشم.



۱) $\sin^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{2}$

۴) $\sin^{-1}(1/2) =$ تعریف نشده

۲) $\sin^{-1}(0) = 0$

۵) $\sin^{-1}(1^+) =$ تعریف نشده

۳) $\sin^{-1}(1) = \frac{\pi}{2}$

۶) $\sin^{-1}(-1^-) =$ تعریف نشده

مثال دامنه‌ی توابع زیر را بیابید. (توجه: برای حل این دو مثال، بهتره اعمال روی بازه‌ها (فصل ۲) رو بلد باشید)

۱) $y = \sin^{-1}\left(\frac{1}{x-2}\right)$ $\frac{1}{x-2} \in [-1, 1] \xrightarrow{\text{وارون}} x-2 \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \xrightarrow{+2} x \in (-\infty, 1] \cup [3, +\infty)$ دامنه

۲) $y = \sin^{-1}(\sqrt{4-x^2})$ $\sqrt{4-x^2} \in [-1, 1] \xrightarrow{\text{منفی باشد}} \sqrt{4-x^2} \in [0, 1] \xrightarrow{(\cdot)^2} 4-x^2 \in [0, 1]$

$-4 \rightarrow -x^2 \in [-4, -3] \xrightarrow{\times(-1)} x^2 \in [3, 4] \xrightarrow{\sqrt{\cdot}} |x| \in [\sqrt{3}, 2] \xrightarrow{\text{حذف قدر مطلق}} x \in [-2, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, 2]$

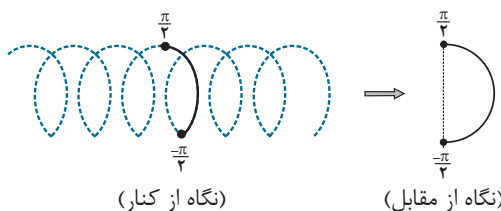


یافتن مقدار $\sin^{-1} x$ به کمک نیم‌دایره‌ی مثلثاتی

شما می‌دونید برای رسیدن به تابع $y = \sin^{-1} x$ اول باید قسمت یک به یک تابع $y = \sin x$ رو که در بازه‌ی $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ هست انتخاب

کرده و بعد معکوسش کنید. پس اگه قصد محاسبه‌ی $\sin^{-1}$ رو دارید (اون هم به کمک دایره‌ی مثلثاتی)، فقط بخشی از فنر مثلثاتی رو انتخاب

کنید که در بازه‌ی $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ قرار داره. یعنی:



بنابراین برای محاسبه‌ی $\sin^{-1} x$ نیاز به نیمه‌ی راست دایره‌ی

مثلثاتی داریم، اما سؤال اینه که نیم‌دایره‌ی مثلثاتی سمت راست چه

کمکی در به دست آوردن $\sin^{-1}$ می‌کنه؟ پس خوب نگاه کنید تا بفهمید.

$\sin^{-1}(1) = \frac{\pi}{2}$

$\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$

$\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$

$\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$

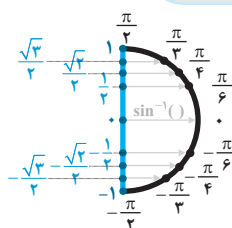
$\sin^{-1}(0) = 0$

$\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$

$\sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$

$\sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$

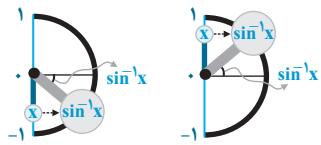
$\sin^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{2}$



نمایش زاویه $\sin^{-1} x$ روی نیم دایره ی مثلثاتی

همونطور که دیدید $\sin^{-1} x$ از جنس زاویه است. برای نمایش زاویه ی $\sin^{-1} x$ شما به دو چیز نیاز دارید:

(۱) محور $\sin$ (۲) نیمه ی سمت راست دایره ی مثلثاتی



یعنی روی محور $\sin$ ، مقدار x رو انتخاب می کنید و بعد اون x رو به کمان سمت راست دایره ی مثلثاتی تصویر می کنید تا زاویه ی $\sin^{-1} x$ معلوم بشه.

اگر مقدار x از -1 به سمت 1 افزایش پیدا کنه، زاویه ی $\sin^{-1} x$ از $-\frac{\pi}{2}$ به سمت $\frac{\pi}{2}$ افزایش پیدا می کنه.

۱۸

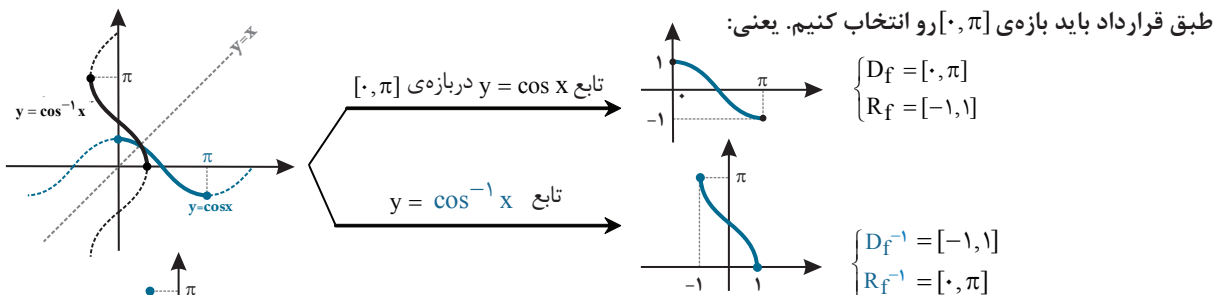
توابع معکوس مثلثاتی ($y = \cos^{-1} x$) یا ($y = \arccos x$)

۱۸

نمودار و دامنه ی تابع $y = \cos^{-1} x$

بچه ها! تابع $y = \cos^{-1} x$ معکوس تابع $y = \cos x$ هست، اما معکوس بخشی از $y = \cos x$ نه همش.

آقا اجازه؟ اون بخشی از $y = \cos x$ که می توانید معکوس کنید باید یک به یک باشه تا $y = \cos^{-1} x$ لیاقت تابع بودن رو پیدا کنه. اما سوال اینه که شما قصد دارید چه بازه ای از $y = \cos x$ رو انتخاب کنید؟



طبق قرارداد باید بازه ی $[0, \pi]$ رو انتخاب کنیم. یعنی:

بچه ها! با توجه به شکل روبه رو، فکر می کنید تابع $y = \cos^{-1} x$ چه x هایی رو می تونه جذب کنه؟

آقا اجازه؟ فقط x هایی رو که در بازه ی $[-1, 1]$ قرار دارند.

نتیجه

$$\begin{cases} y = \cos^{-1}(x) & \Rightarrow D = \{x \mid -1 \leq x \leq 1\} \\ y = \cos^{-1}(g(x)) & \Rightarrow D = \{x \mid -1 \leq g(x) \leq 1\} \end{cases}$$

۱) $\cos^{-1}(-1) = \pi$

۲) $\cos^{-1}(0) = \frac{\pi}{2}$

۳) $\cos^{-1}(1) = 0$

۴) $\cos^{-1}(-3/5) =$ تعریف نشده

۵) $\cos^{-1}(1^+) =$ تعریف نشده

۶) $\cos^{-1}(-1^-) =$ تعریف نشده

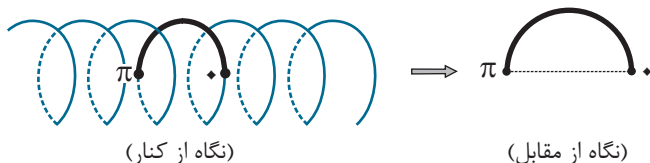
بچه ها! در شکل بالا با توجه به نمودار $y = \cos^{-1} x$ ، مقدار هر کدام از عبارات زیر رو مقابلشون بنویسید.

مثال دامنه ی تابع $y = \cos^{-1}(2|x| - 3)$ کدام است؟

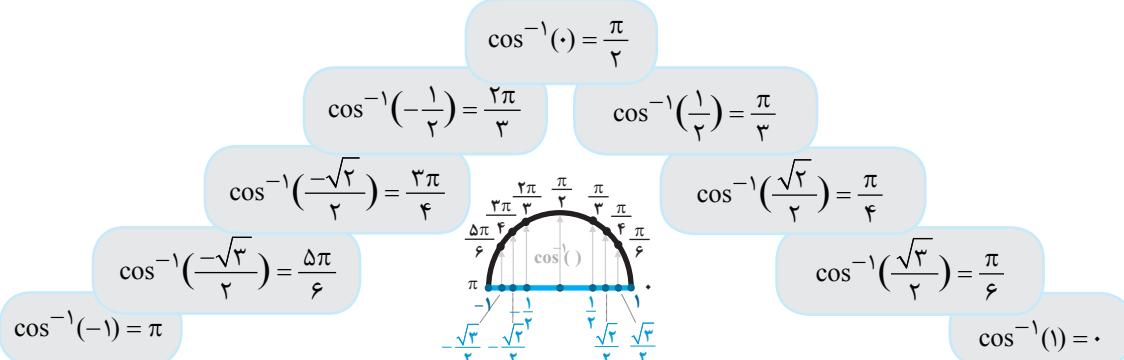
$$2|x| - 3 \in [-1, 1] \xrightarrow{+3} 2|x| \in [2, 4] \xrightarrow{\div 2} |x| \in [1, 2] \Rightarrow \underbrace{x \in [-2, -1] \cup [1, 2]}_{\text{دامنه}}$$

یافتن مقدار $\cos^{-1}(x)$ به کمک نیم دایره ی مثلثاتی

همون طور که می دونید برای این که به تابع $y = \cos^{-1} x$ برسید باید قسمت یک به یک تابع $y = \cos x$ رو که در بازه ی $[0, \pi]$ قرار داره انتخاب کرده و بعد معکوسش کنید. بنابراین اگه قصد محاسبه ی مقدار $\cos^{-1} x$ رو دارید (اون هم به کمک دایره ی مثلثاتی)، کافیه بخشی از فنر مثلثاتی رو انتخاب کنید که در بازه ی $[0, \pi]$ قرار داره. یعنی:



بنابراین $y = \cos^{-1} x$ رو به کمک نیم دایره ی مثلثاتی به راحتی می شه حساب کرد. نگاه کنید:

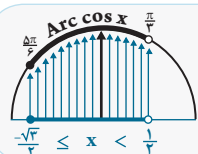


نمایش زاویه ی $\cos^{-1}(x)$ روی نیم دایره ی مثلثاتی

برای نمایش زاویه ی $\cos^{-1} x$ شما به دو چیز نیاز دارید:

- محور $\cos x$ (نیمه ی بالایی دایره ی مثلثاتی)
- مقدار x رو انتخاب می کنید و بعدش x انتخاب شده رو به کمان بالا تصویر می کنید تا زاویه ی $\cos^{-1} x$ معلوم بشه.

اگه مقدار x از -1 به سمت 1 افزایش پیدا کنه، زاویه ی $\cos^{-1} x$ از π به سمت 0 کاهش پیدا می کنه.



$$\frac{\pi}{3} < \cos^{-1} x \leq \frac{5\pi}{6}$$

مثال برد تابع $y = \cos^{-1} x$ وقتی $-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq x < \frac{1}{2}$ می باشد کدام است؟

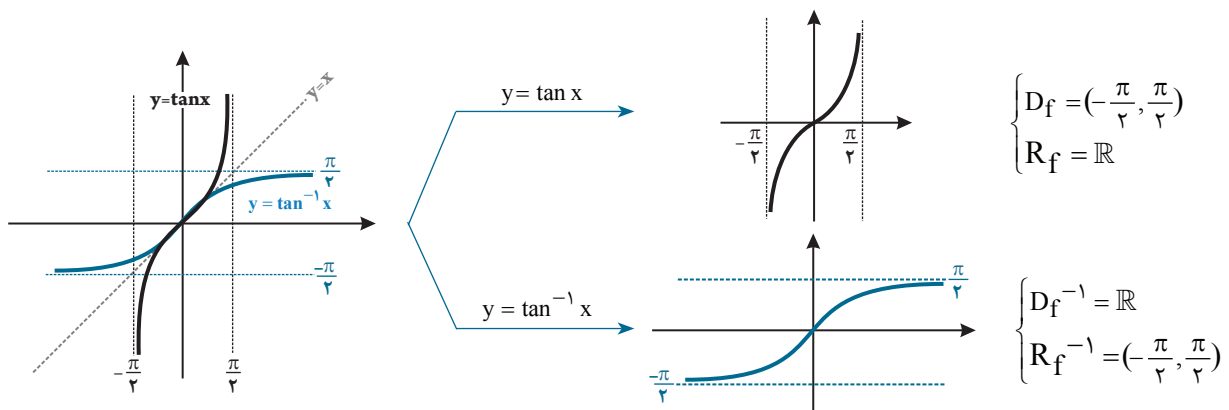
۱۹

توابع معکوس مثلثاتی ($y = \tan^{-1} x$) یا ($y = \text{Arctan } x$)

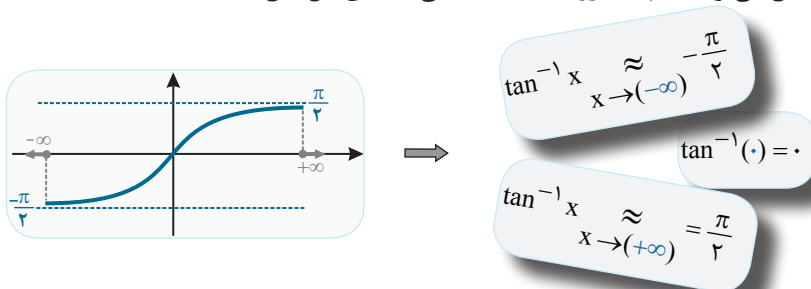
۱۹

نمودار و دامنه ی تابع $y = \tan^{-1} x$

بچه ها! همون طور که می دونید تابع $y = \tan x$ یک به یک نیست، پس معکوس این تابع، تابع نخواهد بود. به همین دلیل بخشی از نمودار $y = \tan x$ رو انتخاب می کنم که یک به یک باشه (طبق قرارداد، بازه ی $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$) در نتیجه معکوس این قطعه از $y = \tan x$ ، صد درصد تابع هست. پس، تابع $y = \tan^{-1} x$ معکوس قسمتی از $y = \tan x$ هست که در بازه ی $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ قرار داره. نگاه کنید:



بچه‌ها! با توجه به نمودار $y = \tan^{-1} x$ ، این تابع می‌تونه تمام x ها رو جذب کنه، یعنی دامنه‌ی این تابع $\mathbb{R}$ هست.



بچه‌ها یه سؤال: فکر می‌کنید دامنه‌ی تابع $y = \tan^{-1}(g(x))$ چیه؟



آقا اجازه؟ از اونجایی که $y = \tan^{-1}(\quad)$ هر مقدار حقیقی رو پذیراست. پس همه‌ی $g(x)$ بستگی داره. آله $g(x)$ تعریف بشه پس $y = \tan^{-1}(g(x))$ هم تعریف میشه و در غیر اینصورت فیر. بنابراین:



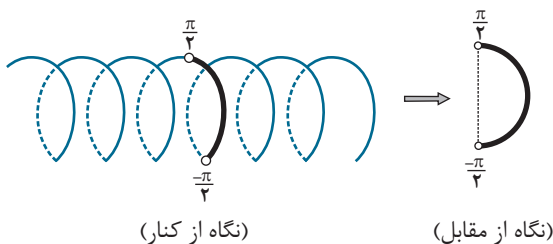
$$y = \tan^{-1}(g(x)) \Rightarrow D = D_g$$

مثال دامنه‌ی تابع مقابل را بیابید.

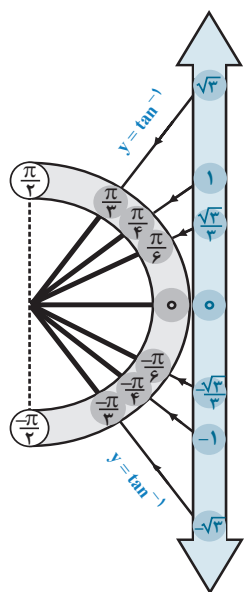
$$y = \tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{x-2}{5-x}}\right) \Rightarrow \frac{x-2}{5-x} \geq 0 \Rightarrow \frac{x}{x-2} \quad \begin{array}{c|c|c} 2 & 5 & \\ \hline - & + & - \end{array} \Rightarrow D = [2, 5)$$

یافتن مقدار $y = \tan^{-1} x$ به کمک نیم‌دایره‌ی مثلثاتی

همون‌طور که می‌دونید برای رسم نمودار تابع $y = \tan^{-1} x$ باید قسمت یک به یک تابع $y = \tan x$ رو که در بازه‌ی $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ قرار داره انتخاب کرده و بعد معکوسش کنید. بنابراین اگه می‌خواید مقدار $\tan^{-1}$ رو به کمک دایره‌ی مثلثاتی محاسبه کنید، کافیه قسمتی از فنر مثلثاتی رو انتخاب کنید که در بازه‌ی $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ قرار داره. یعنی:



بنابراین زاویه‌ی $y = \tan^{-1} x$ رو از طریق نیم‌دایره‌ی مثلثاتی به راحتی می‌شه حساب کرد. نگاه کنید:



$$\tan^{-1}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$$

$$\tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{6}$$

$$\tan^{-1}(0) = 0$$

$$\tan^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6}$$

$$\tan^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{4}$$

$$\tan^{-1}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$$

نمایش زاویه‌ی $y = \tan^{-1} x$ روی نیم‌دایره‌ی مثلثاتی

برای این که بتوانید زاویه‌ی $y = \tan^{-1} x$ رو نمایش بدید به دو چیز نیاز دارید:

(۱) محور $\tan$ (۲) نیمه‌ی سمت راست دایره‌ی مثلثاتی

یعنی روی محور $\tan$ ، مقدار x رو انتخاب می‌کنید. x انتخاب شده رو توسط یک خط به مرکز نیم‌دایره وصل می‌کنید تا زاویه‌ی $\tan^{-1} x$ معلوم بشه.

اگر مقدار x از $-\infty$ تا $+\infty$ افزایش پیدا کنه، زاویه‌ی $\tan^{-1} x$ هم از $-\frac{\pi}{2}$ تا $\frac{\pi}{2}$ افزایش پیدا می‌کنه.

مثال اگر $-\frac{\sqrt{3}}{3} < x \leq 1$ باشد، برد تابع $f(x) = 3\tan^{-1}x + \frac{\pi}{2}$ کدام است؟

$$-\frac{\sqrt{3}}{3} < x \leq 1 \Rightarrow \tan^{-1}x \in \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right] \Rightarrow 3\tan^{-1}x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right] \Rightarrow 3\tan^{-1}x + \frac{\pi}{2} \in \left(0, \frac{5\pi}{4}\right]$$

برد

۲۰

توابع معکوس مثلثاتی ($y = \cot^{-1} x$) یا ($y = \operatorname{Arccot} x$)

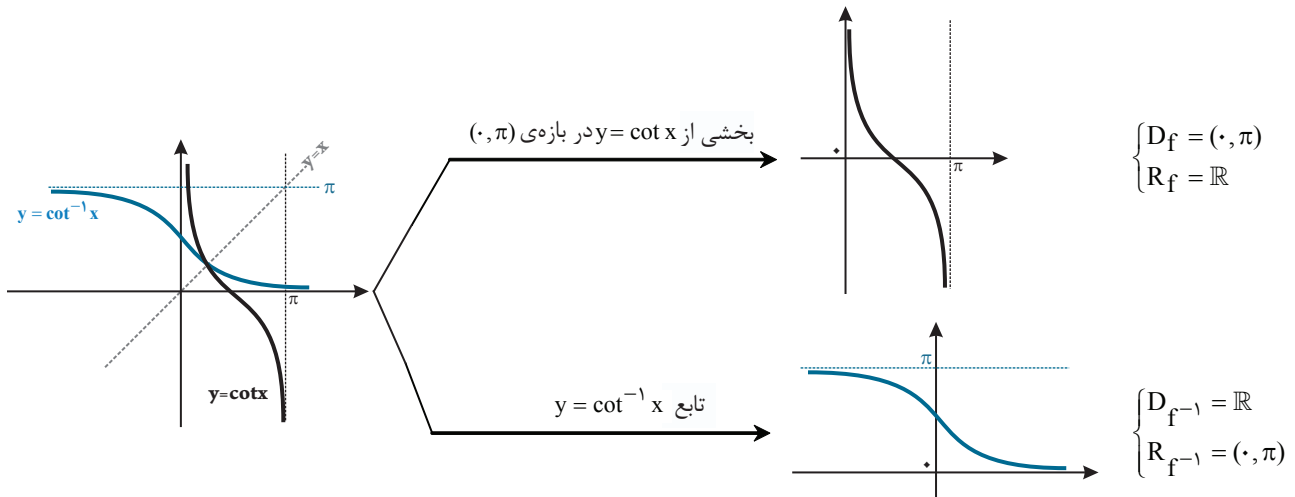
۲۰

نمودار و دامنه‌ی تابع $y = \cot^{-1} x$

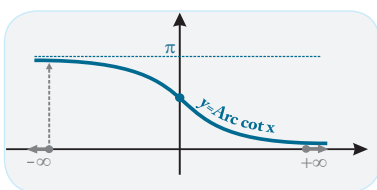
بچه‌ها! با توجه به این که تابع $y = \cot x$ یک به یک نیست پس معکوسش هم تابع نخواهد بود. بنابراین بخشی از نمودار $y = \cot x$

رو انتخاب می‌کنم که یک به یک (طبق قرارداد، بازه‌ی $(0, \pi)$) در نتیجه معکوس این قطعه از $y = \cot x$ قطعاً تابع خواهد بود.

پس قرارداد، تابع $y = \cot^{-1} x$ معکوس قسمتی از $y = \cot x$ هست که در بازه‌ی $(0, \pi)$ قرار داره. یعنی:



بچه‌ها! اگر به نمودار تابع $y = \cot^{-1} x$ دقت کنید می‌بینید که این تابع، قدرت جذب همه x ها رو داره یعنی: $D_f = \mathbb{R}$



$$\begin{aligned} \cot^{-1} x &\approx 0 & x \rightarrow +\infty \\ \cot^{-1}(0) &= \frac{\pi}{2} \\ \cot^{-1} x &\approx \pi & x \rightarrow -\infty \end{aligned}$$

بچه‌ها یه سؤال: دامنه $y = \cot^{-1}(g(x))$ چیه؟

$$y = \text{Arc cot}(g(x)) \Rightarrow D = D_g$$

آقا اجازه؟

مثال دامنه‌ی تابع $y = \cot^{-1}\left(\frac{1}{x+|x|}\right)$ کدام است؟

همونطور که می‌دونید، دامنه‌ی این تابع، x هایی هستن که باعث میشن $x+|x| \neq 0$ بشه. پس:

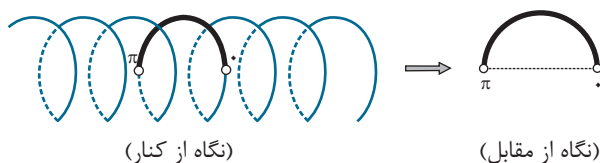
$$\left. \begin{array}{l} \text{اگر } x > 0 \rightarrow x+x \neq 0 \quad \text{ق ق} \\ \text{اگر } x = 0 \rightarrow 0+0 \neq 0 \quad \text{ق ق غ} \\ \text{اگر } x < 0 \rightarrow x-x \neq 0 \quad \text{غ ق ق} \end{array} \right\} \Rightarrow x > 0 \Rightarrow D = (0, +\infty)$$

یافتن مقدار $y = \cot^{-1} x$ به کمک نیم‌دایره‌ی مثلثاتی

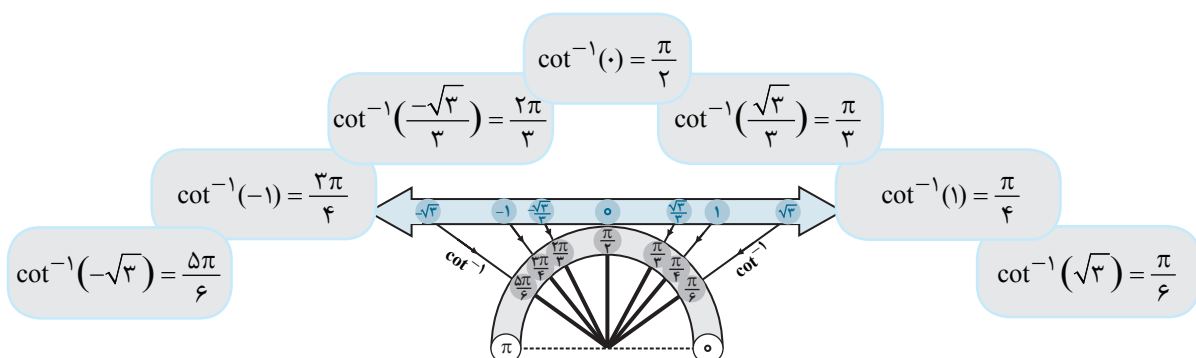
همونطور که می‌دونید برای رسم نمودار تابع $y = \cot^{-1} x$ باید قسمت یک به یک تابع $y = \cot x$ رو که در بازه $(0, \pi)$ قرار داره انتخاب

کرده و بعد معکوسش کنید. بنابراین اگر می‌خواید مقدار $y = \cot^{-1} x$ رو به کمک دایره‌ی مثلثاتی محاسبه کنید، کافیه قسمتی از فنر مثلثاتی

رو انتخاب کنید که در بازه $(0, \pi)$ قرار داره. یعنی:



بنابراین مقدار $\cot^{-1} x$ رو به راحتی میشه از طریق نیم‌دایره‌ی مثلثاتی حساب کرد. نگاه کنید:



نمایش زاویه‌ی $y = \cot^{-1} x$ روی نیم‌دایره‌ی مثلثاتی

برای این که بتوانید زاویه‌ی $\cot^{-1} x$ رو نمایش بدید به دو چیز نیاز دارید:

(۱) محور $\cot$ (۲) نیمه‌ی بالایی دایره‌ی مثلثاتی

یعنی روی محور $\cot$ ، مقدار x رو انتخاب می‌کنید. x انتخاب شده رو توسط یک خط به مرکز نیم‌دایره وصل می‌کنید تا زاویه‌ی $\cot^{-1} x$ معلوم بشه.

اگر مقدار x از $-\infty$ تا $+\infty$ افزایش پیدا کنه، زاویه‌ی $\cot^{-1} x$ هم از π به سمت صفر کاهش پیدا می‌کنه.

مثال مقدار عبارت $\sin\left(\frac{3}{4}\cot^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right) + \cos\left(2\cot^{-1}(0)\right)$ کدام است؟

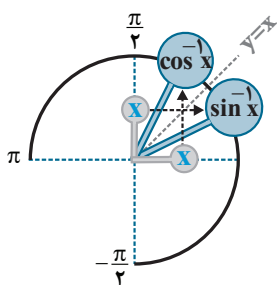
$$\sin\left(\frac{3}{4} \times \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(2 \times \frac{\pi}{2}\right) = \sin \frac{\pi}{2} + \cos \pi = 1 - 1 = 0$$

۲۱

 روابط موجود بین زوایای $\cot^{-1} x$ ، $\tan^{-1} x$ ، $\cos^{-1} x$ ، $\sin^{-1} x$

۲۱

مجموع دو زاویه‌ی متمم



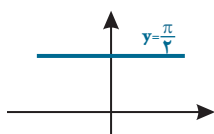
بچه‌ها! آیا می‌تونید مقدار $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x$ رو به کمک نیم‌دایره‌های مثلثاتی پیدا کنید؟

آقا اجازه؟! با مطالب پیربردی که گفتید، فیلی راحت میشه مقدار $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x$ رو به‌دست آورد. با توجه به شکل روبه‌رو، دو مقدار یکسان رو روی محور $\sin$ و $\cos$ انتقاب کرده و $\sin^{-1}$ و $\cos^{-1}$ این دو مقدار رو مشخص می‌کنیم. همونطور که می‌بینید زاویه‌های $\sin^{-1} x$ و $\cos^{-1} x$ متمم هم‌دیگه هستن، چون نسبت به خط $y = x$ متقارنن.

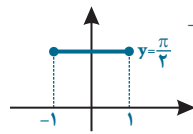
$$\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2} \quad \text{بنابراین:}$$

یه سؤال دیگه: آیا می‌تونید تابع $y = \sin^{-1} x + \cos^{-1} x$ رو رسم کنید؟

آقا اجازه؟! فیلی آسوننه. این تابع، یک تابع ثابتته. یعنی: $y = \frac{\pi}{2}$ پس نمودارش اینطوره:



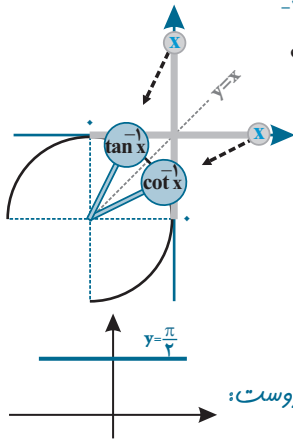
دانش آموز عزیزم باز هم حواست رو جمع نکردی. اگه به تابع $y = \sin^{-1}x + \cos^{-1}x$ خوب نگاه کنی می فهمی که این تابع فقط



x هایی رو که در بازه $[-1, 1]$ قرار داره می تونه جذب کنه، پس شما

با تابع $y = \frac{\pi}{2}$ که دامنه اش بازه $[-1, 1]$ هست سروکار داری. یعنی:

دوستان من! آیا می تونید مقدار $\tan^{-1}x + \cot^{-1}x$ رو به کمک نیم دایره های مثلثاتی پیدا کنید؟



آقا اجازه؟ کافیه دو مقدار یکسان رو روی محور $\cot, \tan$ انتقاب کرده و $\cot^{-1}, \tan^{-1}$



رو برای ایندو مقدار رومشفص کنیم. کاملاً واضحه که زاویه های $\tan^{-1}x$ با $\cot^{-1}x$ متمم

$$\tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \frac{\pi}{2} \quad \text{همرگه هستن. بنابراین:}$$

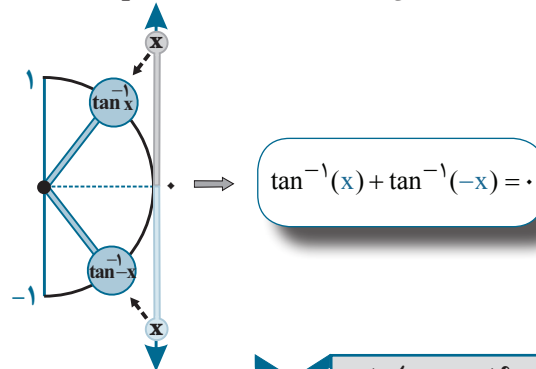
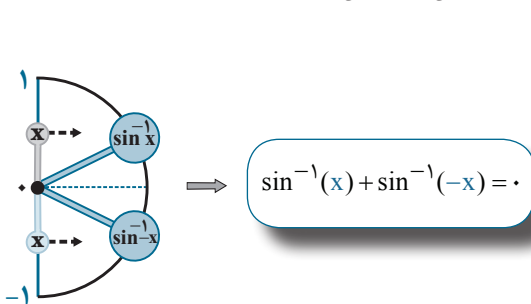
تازه نمودار تابع $y = \tan^{-1}x + \cot^{-1}x$ با توجه به این که دامنه اش برابر با $\mathbb{R}$ ، به شکل روبروست:

مثال معادله $\sin^{-1}x + \cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$ چند جواب دارد؟

$$\sin^{-1}x = \frac{\pi}{2} - \cos^{-1}\frac{1}{x} \Rightarrow \sin^{-1}x = \sin^{-1}\frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

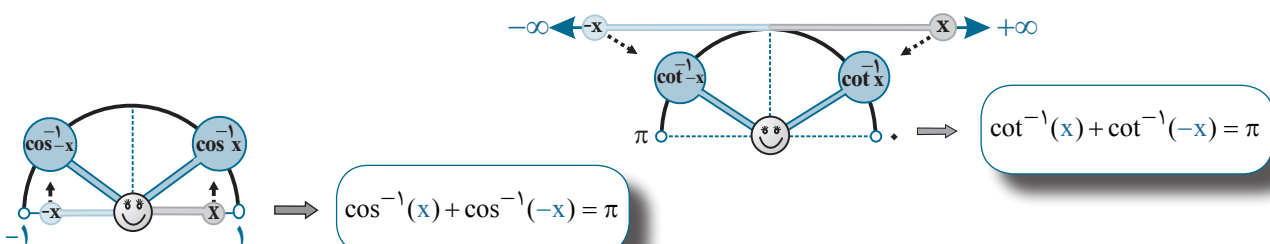
مجموع دو زاویه ی قرینه

شکلهای زیر داره نشون میده که زاویای $\sin^{-1}(x)$ و $\sin^{-1}(-x)$ قرینه ی همدیگه هستن (همچنین زاویای $\tan^{-1}(x)$ ، $\tan^{-1}(-x)$)



مجموع دو زاویه ی مکمل

شکلهای زیر داره نشون میده که زاویای $\cos^{-1}(x)$ ، $\cos^{-1}(-x)$ مکمل همدیگه هستن (همچنین زاویای $\cot^{-1}x$ ، $\cot^{-1}(-x)$):



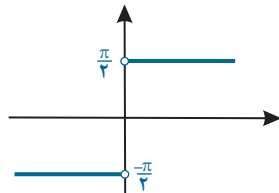
مقادیر $\tan^{-1} + \tan^{-1}(\frac{1}{x})$ ، $\cot^{-1} x + \cot^{-1}(\frac{1}{x})$

$$\tan^{-1} x + \tan^{-1} \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & x < 0 \end{cases}$$

بچه‌ها! رابطه‌ی



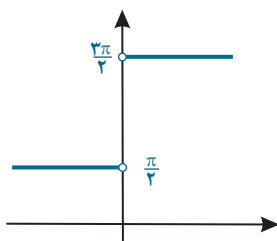
همواره برقراره.

پس نمودار تابع $y = \tan^{-1} x + \tan^{-1} \frac{1}{x}$ هم به شکل روبه‌روست:

آقا اجازه؟ رو چه مسابی این حرف‌ها رو می‌زنید؟

بچه‌ها! تابع $y = \tan^{-1} x + \tan^{-1} \frac{1}{x}$ رو در نظر بگیرید. دامنه‌ی این تابع $\mathbb{R} - \{0\}$ هست. یعنی: $D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ اگر مشتق این تابع رو به دست بیارید می‌بینید که $y' = 0$ همیشه. یعنی این تابع علاوه بر این که در بازه‌ی $(0, +\infty)$ یک تابع ثابت،در بازه‌ی $(-\infty, 0)$ هم تابعی ثابت خواهد بود. از اون جایی که یک تابع ثابت به ازای تمام x های دامنه، فقط یک مقدار داره، کافیهکه در بازه‌ی $(0, +\infty)$ یک x دلخواه مثل $x = 1$ رو درون تابع قرار بدیم تا مقدار این تابع ثابت در بازه‌ی $(0, +\infty)$ معلوم بشه.هم‌چنین در بازه‌ی $(-\infty, 0)$ هم باید یک x دلخواه مثل $x = -1$ رو به تابع بدیم تا مقدار تابع در بازه‌ی $(-\infty, 0)$ هم مشخص بشه.

$$\text{یعنی: } y = \tan^{-1} x + \tan^{-1} \frac{1}{x} = \begin{cases} x=1 & \tan^{-1}(1) + \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \\ x=-1 & \tan^{-1}(-1) + \tan^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$



هم همواره برقراره.

$$\cot^{-1} x + \cot^{-1} \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & x > 0 \\ \frac{3\pi}{2} & x < 0 \end{cases}$$

بچه‌ها! در ضمن رابطه‌ی

پس نمودار تابع $y = \cot^{-1} x + \cot^{-1}(\frac{1}{x})$ به شکل روبه‌روست:

بله عزیزم.

آقا اجازه؟ آیا از دلایل بالا همیشه برای اثبات این رابطه استفاده کرد؟

آقا اجازه؟ فقط در اینجا یک سؤال وجود داره. چرا در این رابطه به ازای $x < 0$ مقدار $\frac{3\pi}{4}$ رو قرار دادید؟

خب معلومه. اگر مثل بالا عمل کنی می‌فهمی که:



$$y = \cot^{-1} x + \cot^{-1} \frac{1}{x} = \begin{cases} x=1 & \cot^{-1}(1) + \cot^{-1}(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \\ x=-1 & \cot^{-1}(-1) + \cot^{-1}(-1) = \frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

نسبت‌های مثلثاتی زوایای $\tan^{-1} x$ ، $\cos^{-1} x$ ، $\sin^{-1} x$

بچه‌ها! همون طور که می‌دونید وقتی که دو تابع معکوس هم، با یکدیگر ترکیب بشن، همدیگر رو خنثی می‌کنن و فقط عبارت درونشون



$$f^{-1}(f(x)) = x \quad , \quad f(f^{-1}(x)) = x \quad \text{می‌مونه. یعنی:}$$

بنابراین $\sin^{-1} x$ رو فقط $\sin$ میتونه خنثی کنه (یعنی: $\sin(\sin^{-1} x) = x$)همچنین $\cos^{-1} x$ رو فقط $\cos$ میتونه خنثی کنه (یعنی: $\cos(\cos^{-1} x) = x$)

مثال حاصل $\cos\left(2\sin^{-1}\frac{2}{5} + \cos^{-1}\frac{2}{5}\right)$ کدام است؟

$$\cos\left(\sin^{-1}\frac{2}{5} + \underbrace{\sin^{-1}\frac{2}{5} + \cos^{-1}\frac{2}{5}}_{\frac{\pi}{2}}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \sin^{-1}\frac{2}{5}\right) = -\sin\left(\sin^{-1}\frac{2}{5}\right) = -\frac{2}{5}$$

توجه $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$

پس اگر می‌خواید نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی $\sin^{-1}x$ رو محاسبه کنید کافی‌ه اون نسبت مثلثاتی رو بر حسب $\sin$ بنویسید تا بتونه $\sin^{-1}$ رو خنثی کنه. و همچنین برای محاسبه‌ی نسبت‌های مثلثاتی $\cos^{-1}x$ نسبت رو بر حسب $\cos$ بنویسید

$$۱) \cos \bigcirc = \sqrt{1 - \sin^2 \bigcirc} \Rightarrow \cos(\sin^{-1}x) = \sqrt{1 - \sin^2(\sin^{-1}x)} = \sqrt{1 - x^2}$$

$$۲) \cot \bigcirc = \frac{\cos \bigcirc}{\sin \bigcirc} \Rightarrow \cot(\sin^{-1}x) = \frac{\cos(\sin^{-1}x)}{\sin(\sin^{-1}x)} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

$$۳) \tan \bigcirc = \frac{\sin \bigcirc}{\cos \bigcirc} \Rightarrow \tan(\sin^{-1}x) = \frac{\sin(\sin^{-1}x)}{\cos(\sin^{-1}x)} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی $\sin^{-1}$

$$۱) \sin \bigcirc = \sqrt{1 - \cos^2 \bigcirc} \Rightarrow \sin(\cos^{-1}x) = \sqrt{1 - \cos^2(\cos^{-1}x)} = \sqrt{1 - x^2}$$

$$۲) \cot \bigcirc = \frac{\cos \bigcirc}{\sin \bigcirc} \Rightarrow \cot(\cos^{-1}x) = \frac{\cos(\cos^{-1}x)}{\sin(\cos^{-1}x)} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$۳) \tan \bigcirc = \frac{\sin \bigcirc}{\cos \bigcirc} \Rightarrow \tan(\cos^{-1}x) = \frac{\sin(\cos^{-1}x)}{\cos(\cos^{-1}x)} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی $\cos^{-1}$

$$۱) \sin \bigcirc = \frac{\tan \bigcirc}{\sqrt{1 + \tan^2 \bigcirc}} \Rightarrow \sin(\tan^{-1}x) = \frac{\tan(\tan^{-1}x)}{\sqrt{1 + \tan^2(\tan^{-1}x)}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$۲) \cos \bigcirc = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \bigcirc}} \Rightarrow \cos(\tan^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(\tan^{-1}x)}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$۳) \cot \bigcirc = \frac{1}{\tan \bigcirc} \Rightarrow \cot(\tan^{-1}x) = \frac{1}{\tan(\tan^{-1}x)} = \frac{1}{x}$$

نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی $\tan^{-1}$

بچه‌ها! لطف کنید، نسبت‌های مثلثاتی $\cot^{-1}x$ رو خودتون به دست بیارید.



نسبت‌های مثلثاتی زوایای $\tan^{-1} x$, $\cos^{-1} x$, $\sin^{-1} x$

$$\sin \alpha = \sin(\sin^{-1} x) = x \Rightarrow \sin(\sin^{-1} x) = x \Rightarrow \sin(\sin^{-1} x) = x \Rightarrow \sin(\sin^{-1} x) = x$$

$$\cos \alpha = \cos(\cos^{-1} x) = x \Rightarrow \cos(\cos^{-1} x) = x \Rightarrow \cos(\cos^{-1} x) = x \Rightarrow \cos(\cos^{-1} x) = x$$

$$\tan \alpha = \tan(\tan^{-1} x) = x \Rightarrow \tan(\tan^{-1} x) = x \Rightarrow \tan(\tan^{-1} x) = x \Rightarrow \tan(\tan^{-1} x) = x$$

$$\sin^2 \alpha = \sin^2(\sin^{-1} x) = x^2 \Rightarrow \sin^2(\sin^{-1} x) = x^2 \Rightarrow \sin^2(\sin^{-1} x) = x^2 \Rightarrow \sin^2(\sin^{-1} x) = x^2$$

$$\cos^2 \alpha = \cos^2(\cos^{-1} x) = x^2 \Rightarrow \cos^2(\cos^{-1} x) = x^2 \Rightarrow \cos^2(\cos^{-1} x) = x^2 \Rightarrow \cos^2(\cos^{-1} x) = x^2$$

$$\tan^2 \alpha = \tan^2(\tan^{-1} x) = x^2 \Rightarrow \tan^2(\tan^{-1} x) = x^2 \Rightarrow \tan^2(\tan^{-1} x) = x^2 \Rightarrow \tan^2(\tan^{-1} x) = x^2$$

$$\sin \alpha \cos \alpha = \sin(\sin^{-1} x) \cos(\sin^{-1} x) = x \sqrt{1-x^2} \Rightarrow \sin \alpha \cos \alpha = x \sqrt{1-x^2} \Rightarrow \sin \alpha \cos \alpha = x \sqrt{1-x^2} \Rightarrow \sin \alpha \cos \alpha = x \sqrt{1-x^2}$$

$$\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \begin{cases} \tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) & \text{if } x,y \leq 1 \\ \tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) + \pi & \text{if } x > 0, y > 0 \\ \tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) - \pi & \text{if } x < 0, y < 0 \end{cases}$$

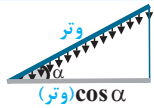
بچه‌ها! آخرین رابطه از مبحث توابع معکوس مثلثاتی رو می‌بینید که من اسمش رو گذاشتم رابطه‌ی فوق‌العاده به دلیل حجم زیاد اثبات، فقط خود رابطه رو براتون می‌گم:

$$\begin{aligned} \text{مثال} \quad \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) &= \tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}}\right) = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4} \\ \text{مثال} \quad \tan^{-1}(2) + \tan^{-1}(3) &= \tan^{-1}\left(\frac{2+3}{1-2 \times 3}\right) + \pi = \tan^{-1}\left(\frac{5}{-5}\right) + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4} \\ \text{مثال} \quad \tan^{-1}(-2) + \tan^{-1}(-3) &= \tan^{-1}\left(\frac{(-2)+(-3)}{1-(-2)(-3)}\right) - \pi = \tan^{-1}\left(\frac{-5}{-5}\right) - \pi = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3\pi}{4} \end{aligned}$$

Extra رابطه‌ی



کلید حل مسائل کاربردی و هندسی



در مثلث قائم الزاویه α ، وظیفه ی $\cos \alpha$ ، تصویر کردن وتر روی ضلع مجاور α ست. یعنی :



در مثلث قائم الزاویه α ، وظیفه ی $\sin \alpha$ ، تصویر کردن وتر روی ضلع مقابل α ست. یعنی :

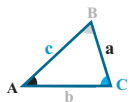


در مثلث قائم الزاویه α ، وظیفه ی $\sin \alpha$ ، تصویر کردن وتر روی ضلع مقابل α ست. یعنی :



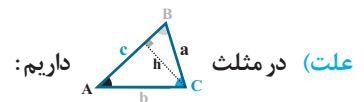
$$\cos \alpha = \frac{\text{ضلع مجاور } \alpha}{\text{وتر}} \Rightarrow \cos \alpha \cdot \text{وتر} = \text{ضلع مجاور } \alpha$$

بچه ها! در یک مثلث، روابطی بین اضلاع و زوایای اون مثلث وجود داره که من ۳ دسته از اونها رو براتون بازگو می کنم:

دسته ی اول : (معروف به روابط $\sin$)

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

این قانون باعث برقراری ارتباط، بین دو ضلع دلخواه و زوایای روبروشون میشه.



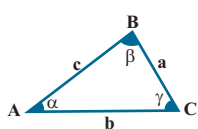
علت) در مثلث داریم:

$$\begin{cases} h = a \sin B \\ h = b \sin A \end{cases} \Rightarrow a \sin B = b \sin A \Rightarrow \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$$

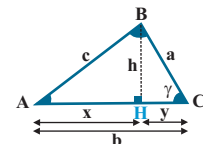
بقیه ی اثبات با شما.

دسته ی دوم : (معروف به روابط $\cos$)

در این قانون، شما با داشتن اندازه ی دو ضلع و زاویه ی بین شون می تونید اندازه ی ضلع سوم مثلث رو بدست بیارید.



$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \end{cases} \quad (*)$$



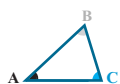
علت) (* :

$$\begin{cases} \text{در مثلث ABH: } h^2 = c^2 - x^2 \\ \text{در مثلث BCH: } h^2 = a^2 - y^2 \end{cases} \Rightarrow c^2 - x^2 = a^2 - y^2 \Rightarrow c^2 - (b-y)^2 = a^2 - y^2 \Rightarrow c^2 - (b^2 - 2by + y^2) = a^2 - y^2$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2by \xrightarrow{y = a \cos \gamma} c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

دسته ی سوم : مساحت مثلث

در این قانون، مساحت یک مثلث، به کمک دو ضلع و زاویه ی بین اون دو ضلع، قابل محاسبه هست:



$$S_{\text{مثلث}} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin A}{2} = \frac{AB \cdot BC \cdot \sin B}{2} = \frac{BC \cdot AC \cdot \sin C}{2}$$

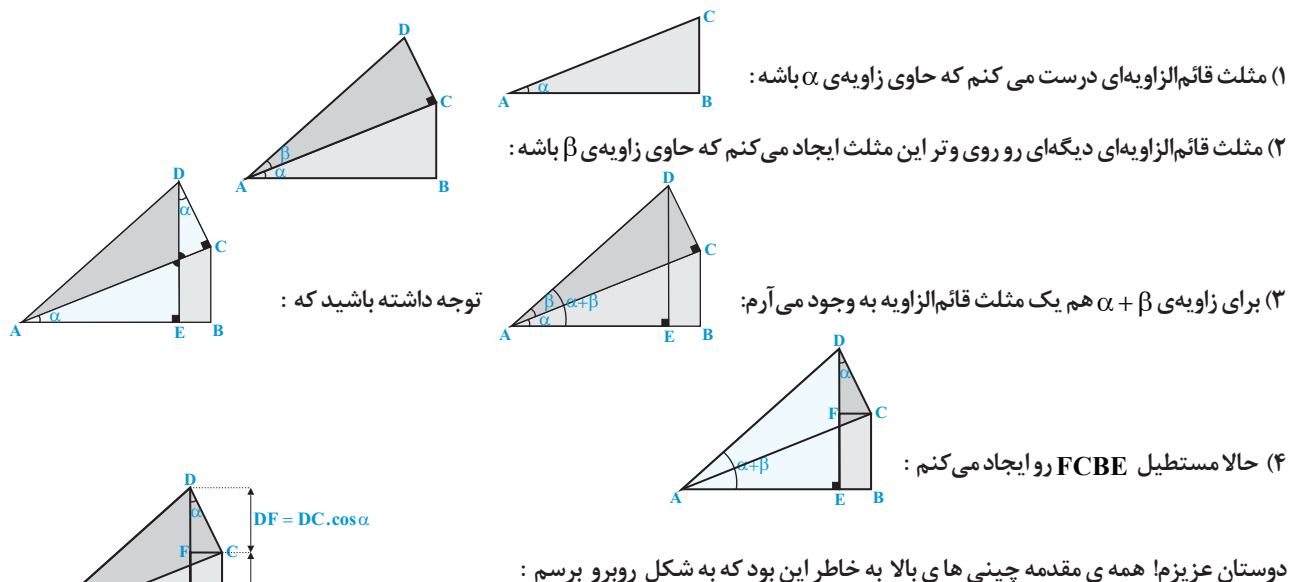
$$S_{\text{مثلث}} = \frac{\sin(\text{زاویه ی بین دو ضلع}) \times \text{حاصلضرب اندازه ی دو ضلع}}{2}$$



$$S = \frac{h \cdot AC}{2} \xrightarrow{\text{با توجه به } h = AB \sin A} S = \frac{AB \sin A \cdot AC}{2} \Rightarrow S = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin A}{2}$$

علت)

بچه‌ها! می‌خواهم برای $\sin(\alpha + \beta)$ و $\cos(\alpha + \beta)$ رابطه‌ای ایجاد کنم. پس مرحله‌ی رو که طی می‌کنم با دقت زیر نظر بگیرید:



$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{DE}{AD} = \frac{DF + FE}{AD} \stackrel{\text{با توجه به مستطیل}}{=} \frac{DF + CB}{AD} = \frac{DC \cdot \cos \alpha + AC \cdot \sin \alpha}{AD} = \cos \alpha \cdot \frac{DC}{AD} + \sin \alpha \cdot \frac{AC}{AD}$$

علامت تغییر نمی‌کنه

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{AE}{AD} = \frac{AB - EB}{AD} \stackrel{\text{با توجه به مستطیل}}{=} \frac{AB - FC}{AD} \stackrel{\text{لطفاً خودتون ادامه بدید}}{=}$$

علامت تغییر می‌کنه

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

آموزش تکمیلی فصل (۹) در قالب تست

(آزاد - ۶۴)

۱ سینوس یک رادیان در چه فاصله ای است؟ (فاصله ی کوچکتر مورد نظر است)

- (۱) $[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}]$ (۲) $[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$ (۳) $[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1]$ (۴) $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

(آموزش و پرورش - ۸۵)

۲ اگر $f(x) = \min\{\cos t \mid \frac{\pi}{3} < t \leq x\}$ ، در این صورت حاصل $f(\frac{5\pi}{6}) + f(\frac{7\pi}{6})$ کدام است؟

- (۱) وجود ندارد (۲) $\frac{\sqrt{3}}{2} - 1$ (۳) $-\sqrt{3}$ (۴) $-[1 + \frac{\sqrt{3}}{2}]$

(سراسری - ۷۱)

۳ اگر $\cos x = \sqrt{\frac{\cot x}{\cot x - a^2}}$ ، $a \in \mathbb{R}$ ، انتهای کمان x در کدام ناحیه ی مثلثاتی است؟

- (۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

(سراسری - ۷۳)

۴ اگر $\cos x = -\frac{\sqrt{10}}{10}$ و انتهای کمان x در ناحیه ی سوم دایره ی مثلثاتی باشد، $\tan(\frac{3\pi}{4} - x)$ کدام است؟

- (۱) -3 (۲) $-\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) 3

(سراسری - ۷۷)

۵ حاصل $\cos \frac{3\pi}{14} + \cos \frac{5\pi}{14} + \cos \frac{7\pi}{14} + \cos \frac{9\pi}{14} + \cos \frac{11\pi}{14}$ کدام است؟

- (۱) -1 (۲) 0 (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) 1

(آزاد - ۷۵)

۶ اگر $\sin x + \frac{1}{\sin x} = 2$ باشد، آنگاه مقدار عبارت $\sin^2 x + \cos^2 x$ چقدر است؟

- (۱) -1 (۲) 1 (۳) $2 - \sqrt{2}$ (۴) $\sqrt{2} - 1$

(استاد عادل مهرپاک - همدان)

۷ اگر α و β ریشه های معادله ی $x^2 + x - 1 = 0$ باشند، حاصل $[\cos(\alpha^2 - \beta)]$ کدام است؟

- (۱) فقط صفر (۲) فقط ۱ (۳) فقط -1 (۴) 0 یا 1

(سراسری - ۷۰)

۸ اگر $\sin x + \tan x > 0$ و $\frac{1}{\cos x} - \sin x \tan x < 0$ باشد، انتهای کمان x در کدام ناحیه ی مثلثاتی است؟

- (۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

(آزاد - ۷۶)

۹ اگر $\sin^2 x + 2\cos^2 x = \frac{3}{4}$ باشد آنگاه $\tan^2 x$ کدام است؟

- (۱) 1 (۲) 2 (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{1}{2}$

(آزاد - ۸۶)

۱۰ اگر $\sin x + \cos x = \frac{1}{3}$ باشد، حاصل $\sin^3 x + \cos^3 x$ چقدر است؟

- (۱) $\frac{13}{27}$ (۲) $\frac{13}{81}$ (۳) $\frac{17}{27}$ (۴) $\frac{17}{81}$

(آزاد - ۸۷)

۱۱ اگر $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{5}$ باشد، حاصل $\sin^6 x + \cos^6 x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{5}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{2}{5}$ (۴) $\frac{3}{7}$

(آزاد - ۷۷)

۱۲ اگر $\sin x + \cos x = a$ و $\sin x - \cos x = b$ ، آنگاه $\tan(x - \frac{\pi}{4})$ کدام است؟

- (۱) $\frac{b}{a}$ (۲) $\frac{a}{b}$ (۳) $a^2 - b^2$ (۴) $\frac{a+b}{a-b}$

(آزاد - ۸۳)

۱۳ در مثلث ABC ، رابطه ی $\tan(B + 30^\circ) \cdot \tan(C + 30^\circ) = 1$ برقرار است، آنگاه:

- (۱) $\hat{A} = 15^\circ$ (۲) $\hat{A} = 120^\circ$ (۳) $\hat{A} = 60^\circ$ (۴) $\hat{A} = 30^\circ$

(آزاد - ۸۲)

۱۴ اگر $\frac{\sin^2 x - 2\cos^2 x + 1}{\sin^2 x + 2\cos^2 x - 1} = 4$ باشد، مقدار $\tan^2 x$ چقدر است؟

- (۱) 2 (۲) $\frac{2}{5}$ (۳) $\frac{5}{2}$ (۴) 1

آموزش تکمیلی فصل (۹) در قالب تست

(سنجش - ۷۸)

۱۵ اگر $\sin x \cos x = -1$ باشد، $\sin(x + \frac{\pi}{4})$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\pm \frac{1}{2}$ (۴) ± 1

(آزاد - ۶۹)

۱۶ مقدار عددی $\tan 85^\circ - \tan 5^\circ + \tan 85^\circ \tan 5^\circ$ برابر است با:

- (۱) ۳ (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) -۳

(سراسری - ۷۴)

۱۷ اگر $\tan(\alpha + 20^\circ) = \frac{3}{4}$ باشد، $\cot(25^\circ - \alpha)$ کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

(آزاد - ۷۹)

۱۸ اگر $\tan x = \sqrt{2} - 1$ و $\tan y = \sqrt{2} + 1$ حاده باشند، کدام رابطه درست است؟

- (۱) $y - x = \frac{\pi}{3}$ (۲) $y - x = \frac{\pi}{6}$ (۳) $y - x = \frac{\pi}{4}$ (۴) $y - x = \frac{\pi}{2}$

(سراسری - ۸۴)

۱۹ اگر $\alpha + \beta = 135^\circ$ و $\tan(\alpha - \beta) = \frac{3}{4}$ ، مقدار کسر $\frac{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta}{\sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha \sin^2 \beta}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $-\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) $-\frac{4}{3}$

(گزینه ی دو - ۸۵)

۲۰ حاصل عبارت $A = (1 + \tan 18^\circ)(1 + \tan 27^\circ)$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) ۱ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) ۲

(سراسری - ۸۶)

۲۱ خلاصه شده ی $\sin(\frac{\pi}{4} + \alpha)\sin(\pi + \alpha) - \sin(\pi - \alpha)\cos(-\alpha)$ کدام است؟

- (۱) $-\sin 2\alpha$ (۲) $\sin 2\alpha$ (۳) $\cos 2\alpha$ (۴) صفر

(آزاد - ۸۰)

۲۲ حاصل عبارت $\frac{\cos 2x}{\sqrt{2} \sin x - 1} - \frac{\sqrt{2} \cos 2x}{\sin x + \cos x} + \sqrt{2} \cos x$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) صفر (۴) $2\sqrt{2} \cos x$

(سراسری - ۷۸)

۲۳ خلاصه شده ی عبارت $\tan 20^\circ(1 + \cos 40^\circ)$ برابر کدام است؟

- (۱) $\sin 20^\circ$ (۲) $\sin 40^\circ$ (۳) $\cos 20^\circ$ (۴) $\cos 40^\circ$

(سراسری - ۷۷)

۲۴ حاصل عبارت $2\cos^2(\frac{7\pi}{4} - x) - \cos^2 x(1 + \tan^2 x)$ برابر کدام است؟

- (۱) $\sin 2x$ (۲) $-\cos 2x$ (۳) $-\sin 2x$ (۴) $\cos 2x$

(آموزش و پژوهش - ۸۷)

۲۵ مقدار عددی $\frac{2\tan(\frac{\pi}{4} + \alpha)}{1 - \tan^2(\frac{\pi}{4} + \alpha)}$ به ازای $\alpha = \frac{\pi}{8}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۱ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) -۱

(سراسری - ۷۴)

۲۶ ساده شده ی عبارت $\cos 4x + \tan x \sin 4x$ کدام است؟

- (۱) $2\cos^2 x - 1$ (۲) $2\sin^2 x + 1$ (۳) $4\sin^2 x + 1$ (۴) $4\cos^2 x - 3$

(سنجش - ۸۶)

۲۷ حاصل $\cot \alpha + \frac{1}{\sin \alpha}$ برابر کدام است؟

- (۱) $\sin \frac{\alpha}{2}$ (۲) $\tan \frac{\alpha}{2}$ (۳) $\cos \frac{\alpha}{2}$ (۴) $\cot \frac{\alpha}{2}$

آموزش تکمیلی فصل (۹) در قالب تست

(آموزش و پرورش - ۸۶)

۲۸ حاصل عبارت $A = \sin 2^\circ \cos 4^\circ \cos 8^\circ$ برابر کدام است ؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{6}$ (۳) $\frac{1}{8}$ (۴) $\frac{1}{12}$

(سراسری - ۸۳)

۲۹ اگر $a + b = \frac{\pi}{4}$ باشد، حاصل $\cos a \cos b \cos(\frac{\pi}{4} - a) \cos(\frac{\pi}{4} - b)$ کدام است ؟

- (۱) $\sin 4a$ (۲) $\cos 4a$ (۳) $\sin 2a$ (۴) $\cos 2a$

(گزینه ی ۲ - ۸۷)

۳۰ بیشترین مقدار تابع $f(x) = (\sin x - \cos 2x)^2 + (\cos x - \sin 2x)^2$ چیست ؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

(آزاد - ۸۵)

۳۱ اگر $\sin x = \frac{3}{5}$ و $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ، آنگاه $\tan(\frac{\pi}{2} + 2x)$ کدام است ؟

- (۱) $\frac{7}{24}$ (۲) $\frac{24}{7}$ (۳) $-\frac{7}{24}$ (۴) $-\frac{24}{7}$

(آزاد - ۸۳)

۳۲ در مثلثی $1 - \cos 2c = \tan c$ آنگاه :

- (۱) $\hat{C} = 30^\circ$ (۲) $\hat{C} = 60^\circ$ (۳) $\hat{C} = 45^\circ$ (۴) $\hat{C} = 90^\circ$

(آزاد - ۷۵)

۳۳ در مثلث قائم الزاویه ی ABC ، ($\hat{A} = 90^\circ$)، مقدار $\tan \frac{C}{2}$ چقدر است ؟

- (۱) $\frac{b}{a+c}$ (۲) $\frac{c}{a+b}$ (۳) $\frac{a}{b+c}$ (۴) $\frac{a+b}{c}$

(آزاد - ۸۱ با کمی تغییر)

۳۴ حاصل عبارت $\sqrt{1 + \sin 2x} + \cos x$ وقتی $\frac{3\pi}{4} < x < \pi$ باشد برابر کدام است ؟

- (۱) صفر (۲) $-2 \sin x$ (۳) $-\sin x$ (۴) $2 \cos x + \sin x$

(گزینه ی دو - ۸۵)

۳۵ حاصل عبارت $\tan^2(\frac{\pi}{4} + \alpha) \cdot \frac{1 - \sin 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha}$ برابر کدام است ؟

- (۱) $1 - \tan \alpha$ (۲) $1 + \tan \alpha$ (۳) -1 (۴) ۱

(آزاد - ۷۵)

۳۶ اگر $\sin x + \cos x = \frac{5}{4}$ باشد، حاصل $\tan x + \cot x$ چقدر است ؟

- (۱) $\frac{5}{2}$ (۲) $\frac{32}{9}$ (۳) $\frac{9}{32}$ (۴) $\frac{18}{7}$

(آزاد - ۷۴)

۳۷ اگر $\sin 2x = \frac{4}{5}$ باشد، حاصل کسر $\frac{\tan^2 x + \cot^2 x}{\tan^3 x + \cot^3 x}$ چقدر است ؟

- (۱) $\frac{34}{65}$ (۲) ۱ (۳) $\frac{65}{34}$ (۴) $\frac{17}{35}$

(سراسری - ۷۵)

۳۸ از معادله ی $\tan x - \cot x = 6$ ، مقدار $\tan 2x$ کدام است ؟

- (۱) -3 (۲) $-\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) ۳

(سراسری - ۷۵)

۳۹ اگر انتهای کمان α در ناحیه ی اول دایره ی مثلثاتی باشد، عبارت $\sqrt{1 + \cot^2 \alpha} - \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$ برابر کدام است ؟

- (۱) $-\tan \alpha$ (۲) $-\cot \alpha$ (۳) $\tan \alpha$ (۴) $\cot \alpha$

(آزاد - ۷۱)

۴۰ یکی از ریشه های معادله ی $x = 4 \sin^3 x - 3 \sin x = k$ برابر $\frac{\pi}{18}$ است. مقدار k کدام است ؟

- (۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) -1

آموزش تکمیلی فصل (۹) در قالب تست

(استاد عادل مهرپاک - همدان)

۴۱) اگر $2 = \sin x + \sin 2x + \cos x \sin 2x + \dots$ باشد، آنگاه $\sin x$ برابر کدام است؟

$$\sin^2 x \quad (1) \quad \cos^2 x \quad (2) \quad 2 \sin^2 \frac{x}{2} \quad (3) \quad 2 \cos^2 \frac{x}{2} \quad (4)$$

(گزینه ی دو - ۷۸)

۴۲) اگر $\sin x + \sqrt{3} \cos x = a$ باشد، مقدار $\cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x$ کدام است؟

$$a^2 - 2 \quad (1) \quad a^2 - a\sqrt{3} + 1 \quad (2) \quad a^2 - a - 1 \quad (3) \quad a^2 - 1 \quad (4)$$

(آزاد - ۸۱)

۴۳) اگر $\sin x(\cos x - \sin x) = -1$ باشد، آنگاه $\cos(2x - \frac{\pi}{4})$ چقدر است؟

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (1) \quad 3 \quad (2) \quad 0 \quad (3) \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (4)$$

(آزاد - ۷۵)

۴۴) اگر $\frac{5\pi}{4} \leq x \leq \frac{7\pi}{4}$ و $A = \sin 2x + \cos 2x$ باشد تمام مقادیر A کدام است؟

$$-1 \leq A \leq 1 \quad (1) \quad -1 \leq A \leq \sqrt{2} \quad (2) \quad -\sqrt{2} \leq A \leq 1 \quad (3) \quad -\sqrt{2} \leq A \leq 0 \quad (4)$$

(استاد عادل مهرپاک - همدان)

۴۵) در ک. م. دو عبارت $1 - 2 \cos^2 x$ و $1 + \sin 2x$ چه تعداد از عبارات زیر وجود دارند؟

$$2 \sin(x + \frac{\pi}{4}) \quad (1) \quad \sqrt{2} \sin(x - \frac{\pi}{4}) \quad (2) \quad 2 \sin^2(x + \frac{\pi}{4}) \quad (3) \quad \sqrt{2} \sin^2(x - \frac{\pi}{4}) \quad (4) \quad 4$$

(آموزش و پرورش - ۸۶)

۴۶) مقدار عددی $\frac{\sqrt{3} \cos 20^\circ - \cos 10^\circ}{\sin 40^\circ}$ کدام است؟

$$\frac{1}{4} \quad (1) \quad \frac{1}{2} \quad (2) \quad 1 \quad (3) \quad 2 \quad (4)$$

(سراسری - ۷۶)

۴۷) اگر $\frac{2 \sin x \cos 3x}{\sin 2x} = 2 \cos 2x + a$ مقدار a کدام است؟

$$-\frac{1}{2} \quad (1) \quad -1 \quad (2) \quad \frac{1}{2} \quad (3) \quad 1 \quad (4)$$

(سراسری - ۸۶)

۴۸) حاصل عبارت $\cos 20^\circ \cos 40^\circ + \cos^2 80^\circ$ برابر کدام است؟

$$\cos 10^\circ \quad (1) \quad \sin 70^\circ \quad (2) \quad \frac{1}{2} \quad (3) \quad \frac{3}{4} \quad (4)$$

(سراسری - ۸۵)

۴۹) حاصل عبارت $4 \cos 40^\circ - \frac{1}{\cos 20^\circ}$ برابر کدام است؟

$$\frac{1}{2} \quad (1) \quad 1 \quad (2) \quad \sqrt{3} \quad (3) \quad 2 \quad (4)$$

(آزاد - ۸۴)

۵۰) حاصل عبارت $\frac{\sin x + \sin \Delta x}{\cos x + \cos \Delta x} + \frac{\cos x + \cos \Delta x}{\sin x + \sin \Delta x}$ به ازای $x = \frac{\pi}{36}$ چقدر است؟

$$4 \quad (1) \quad 1 \quad (2) \quad 2 \quad (3) \quad \frac{1}{3} \quad (4)$$

(سراسری - ۸۴)

۵۱) عبارت $\sin 3x - 2 \sin 4x + \sin \Delta x$ با کدام عبارت زیر برابر است؟

$$2 \sin 4x \sin^2 \frac{x}{2} \quad (1) \quad -2 \sin 4x \sin^2 \frac{x}{2} \quad (2) \quad 4 \sin 4x \sin^2 \frac{x}{2} \quad (3) \quad -4 \sin 4x \sin^2 \frac{x}{2} \quad (4)$$

(سراسری - ۷۴)

۵۲) ساده شده ی کسر $\frac{\sin a + \sin 3a + 2 \cos a}{(\sin a + \cos a)^2}$ برابر است با:

$$\cos a \quad (1) \quad 2 \cos a \quad (2) \quad 1 + \cos a \quad (3) \quad 1 + \sin a \quad (4)$$

(آزاد - ۸۰)

۵۳) حاصل عبارت $\frac{\sin^2 x + \sin x \sin 3x + \sin x \sin \Delta x}{\cos^2 x + \cos x \cos 3x + \cos x \cos \Delta x}$ کدام است؟

$$\tan^2 x \tan^2 3x \quad (1) \quad \tan x \tan 3x \quad (2) \quad \tan^2 x \tan^2 3x \quad (3) \quad \tan x \tan 3x \quad (4)$$

(آزاد - ۶۷)

۵۴) حاصل $\cos^2 110^\circ - \sin^2 70^\circ$ برابر است با:

$$\sin 50^\circ \quad (1) \quad \cos(-40^\circ) \quad (2) \quad -\cos 40^\circ \quad (3) \quad \sin 40^\circ \quad (4)$$

آموزش تکمیلی فصل (۹) در قالب تست

(سراسری - ۸۷)

۵۵ حاصل عبارت $2 + \frac{1}{\cos 20^\circ}$ برابر کدام است؟

- (۱) $2 \sin 40^\circ$ (۲) $4 \cos 40^\circ$ (۳) $2 \cos 40^\circ$ (۴) $4 \sin 40^\circ$

(سنجش - ۸۷)

۵۶ حاصل $\frac{\sin 10^\circ + \cos 23^\circ}{\sin 10^\circ}$ برابر کدام است؟

- (۱) $2 \sin 10^\circ$ (۲) $2 \cos 10^\circ$ (۳) $2 \cos 20^\circ$ (۴) $2 \sin 20^\circ$

(آزاد - ۷۹)

۵۷ حاصل کسر $\frac{\tan a + \tan b}{\cot a + \cot b}$ برابر است با:

- (۱) $\tan a + \tan b$ (۲) $\tan a \cdot \tan b$ (۳) $\cot a + \tan b$ (۴) $\tan a \cdot \cot b$

۵۸ اگر $\sin 2x = \frac{3}{5}$ و $0 < x < \frac{\pi}{4}$ باشد، حاصل $\cos x \cos 3x (\tan x + \tan 3x)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{12}{25}$ (۲) $-\frac{12}{25}$ (۳) $\frac{24}{25}$ (۴) $-\frac{24}{25}$

(سراسری - ۸۵)

۵۹ ساده شده عبارت $\cos 50^\circ (\tan 70^\circ + \tan 10^\circ)$ برابر کدام است؟

- (۱) $\sin 20^\circ$ (۲) $\cos 20^\circ$ (۳) $2 \sin 20^\circ$ (۴) $2 \cos 20^\circ$

(گزینه ی دو - ۸۶)

۶۰ حاصل عبارت $(\tan 20^\circ + \cot 20^\circ) \sin 50^\circ$ برابر کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\tan 50^\circ$ (۳) $\sqrt{3} \sin 50^\circ$ (۴) $\cos 50^\circ$

(گزینه ی دو - ۸۶)

۶۱ معادله ی $2 \sin^2 x = 3 \cos x$ چند جواب متمایز در بازه ی $[0, \frac{5\pi}{4}]$ دارد؟

- (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۵

(سراسری - ۸۳)

۶۲ جواب کلی معادله ی مثلثاتی $\frac{\sin 3x + \sin x}{\sin x} = 1$ به کدام صورت است؟

- (۱) $\frac{k\pi}{3}$ (۲) $k\pi + \frac{\pi}{3}$ (۳) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۴) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

(آزاد - ۸۳)

۶۳ جواب کلی معادله ی مثلثاتی $\frac{\cos 2x}{\cos(x + \frac{\pi}{4})} = 0$ به کدام صورت است؟

- (۱) $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ (۲) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۳) $k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ (۴) $k\pi - \frac{\pi}{4}$

(آزاد - ۸۶)

۶۴ معادله ی $\cos 2x \cos 3x = 0$ در بازه ی $[0, 2\pi]$ چند ریشه دارد؟

- (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲

(سراسری - ۷۸)

۶۵ صورت کلی تمام قوس هایی که در معادله ی $\sin(\frac{\pi}{4} + x) \cos(2\pi - x) = \sin^2 \frac{7\pi}{6}$ صدق می کنند کدام است؟

- (۱) $2k\pi - \frac{\pi}{3}$ (۲) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۳) $k\pi + \frac{\pi}{3}$ (۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

(سنجش - ۸۷)

۶۶ معادله ی $5 = 2 \sin^2(x - \frac{\pi}{8}) + 3 \cos(x - \frac{5\pi}{8})$ در بازه ی $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

(آموزش و پرورش - ۸۶)

۶۷ مجموع ریشه های معادله ی $2 = \tan(x + \frac{\pi}{4}) + \tan(\frac{5\pi}{14} - x)$ در بازه ی $[0, \pi]$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3\pi}{14}$ (۲) $\frac{3\pi}{28}$ (۳) $\frac{\pi}{14}$ (۴) $\frac{\pi}{7}$

(آزاد - ۸۰)

۶۸ تمام جواب های معادله ی $\cos^2 x - \tan(x + \frac{\pi}{4}) \cot(x + \frac{\pi}{4}) = 0$ کدام است؟

- (۱) $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۲) $x = 2k\pi$ (۳) $x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۴) $x = k\pi$

آموزش تکمیلی فصل (۹) در قالب تست

- ۶۹ معادله ی $\tan x \tan 2x = \sin x \sin 2x$ در بازه ی $[\frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}]$ چند ریشه دارد؟ (آزاد - ۸۱)
- ۱ (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۰ (۴)
- ۷۰ معادله ی $2 \cot 2x + \tan x = \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x}$ در فاصله ی $[0, 2\pi]$:
- ۱ (۱) یک ریشه دارد (۲) ریشه ندارد (۳) دو ریشه دارد (۴) چهار ریشه دارد. (آزاد-۷۸)
- ۷۱ معادله ی $\sin x - \cos x = -1$ در فاصله ی $0 \leq x \leq 2\pi$ چند ریشه دارد؟ (آزاد-۷۸)
- ۲ (۱) ۱ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴)
- ۷۲ تمام جواب های معادله ی $\tan^2 x - \cos 2x = 1$ کدام است؟ (آزاد-۸۲)
- ۱ (۱) $k\pi + \frac{\pi}{2}$ (۲) $2k\pi + \frac{\pi}{2}$ (۳) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ (۴) $\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{4}$
- ۷۳ جواب های کلی معادله ی مثلثاتی $\cos 2x = \sin x$ به صورت $x = 2k\pi + \frac{i\pi}{6}$ بیان شده است. مجموع ی مقادیر i به کدام صورت است؟ (سراسری - ۸۳)
- ۱ (۱) $\{7, 9\}$ (۲) $\{1, 3, 5\}$ (۳) $\{1, 4, 7\}$ (۴) $\{1, 5, 9\}$
- ۷۴ معادله ی $\sin^2 x = \cos^2 x + \frac{1}{4}$ در بازه ی $0 \leq x \leq \pi$ چند ریشه دارد؟ (آزاد-۸۳)
- ۲ (۱) ۴ (۲) ۱ (۳) ۰ (۴)
- ۷۵ معادله ی $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{2}$ در بازه ی $[0, 2\pi]$ چند ریشه دارد؟ (آزاد-۸۴)
- ۰ (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۸ (۴)
- ۷۶ مجموع جوابهای معادله ی $\tan x + \tan(\frac{3\pi}{2} - x) = 2 \tan(\frac{3\pi}{4})$ در بازه ی $[0, 2\pi]$ کدام است؟ (سنجش-۸۷)
- ۱ (۱) $\frac{3\pi}{2}$ (۲) $\frac{5\pi}{2}$ (۳) $\frac{7\pi}{2}$ (۴) $\frac{9\pi}{2}$
- ۷۷ تعداد جواب های معادله ی مثلثاتی $\frac{\cos 2x}{\sqrt{2} \cos x - 1} = 2$ در بازه ی $[0, 2\pi]$ کدام است؟ (آموزش و پرورش-۸۷)
- هیچ (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴)
- ۷۸ معادله ی مثلثاتی $\tan 60^\circ \sin x + \sin(\frac{\pi}{2} - x) = m - 1$ دارای جواب است. مجموعه ی مقادیر m برابر کدام فاصله است؟ (سراسری-۷۸)
- ۱ (۱) $[-1, 3]$ (۲) $[-3, 1]$ (۳) $[0, 2]$ (۴) $[-2, 4]$
- ۷۹ جواب کلی معادله ی مثلثاتی $\sqrt{2} \sin(\frac{\pi}{4} - x) = 1 + \sin(\frac{5\pi}{4} + x)$ کدام است؟ (سراسری-۸۵)
- ۱ (۱) $k\pi + \frac{\pi}{2}$ (۲) $2k\pi - \frac{\pi}{4}$ (۳) $2k\pi - \frac{\pi}{2}$ (۴) $2k\pi + \frac{\pi}{2}$
- ۸۰ معادله ی $\sin^3 x + \cos^3 x + 3 \sin^2 x \cos x + 3 \cos^2 x \sin x = \frac{1}{2}$ در بازه ی $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ چند جواب دارد؟ (آزاد-۸۷)
- ۲ (۱) ۴ (۲) ۰ (۳) ۱ (۴)
- ۸۱ اگر زاویه ی حاده باشد و به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ رابطه ی $a \sin \frac{x+\theta}{2} \cos \frac{x-\theta}{2} = 1 + 2 \sin x$ برقرار باشد، مقدار عددی $a \cdot \theta$ کدام است؟ (آموزش و پرورش - ۸۷)
- ۱ (۱) $\frac{\pi}{3}$ (۲) $\frac{2\pi}{3}$ (۳) $\frac{\pi}{6}$ (۴) $\frac{\pi}{2}$
- ۸۲ جواب های معادله ی $\cos 4x - \cos 2x = \cos(3x - \frac{3\pi}{4})$ چند نقطه بر روی دایره ی مثلثاتی معلوم می کنند؟ (گزینه ی دو-۸۵)
- ۱ (۱) ۹ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸

آموزش تکمیلی فصل (۹) در قالب تست

۸۳ جواب کلی $\sin(x + \frac{\pi}{6})\sin(x - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{4}$ در کدام گزینه آمده است؟ (گزینه ی دو-۸۵)

(۴) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ (۳) $k\pi$ (۲) $\frac{k\pi}{2}$ (۱) $k\pi + \frac{\pi}{4}$

۸۴ مجموع جواب های معادله ی مثلثاتی $\cos 6x \cos 4x = \frac{1}{2} \cos 10x$ در بازه ی $[0, 2\pi]$ چقدر است؟ (گزینه ی دو-۸۷)

(۴) 4π (۳) 3π (۲) 2π (۱) π

۸۵ معادله ی $\sin 3x + \cos 2x = 0$ در فاصله ی $[0, \pi]$ چند ریشه دارد؟ (آزاد-۷۷)

(۴) ۶ ریشه (۳) ۴ ریشه (۲) ۳ ریشه (۱) ۲ ریشه

۸۶ معادله ی $\sin 2x \cos 2x \cos 4x = 2 \sin x$ در بازه ی $[0, 2\pi]$ چند ریشه ی متمایز دارد؟ (آزاد-۸۶)

(۴) ۵ (۳) ۳ (۲) ۱ (۱) ۰

۸۷ معادله ی $\sin x - \cos(x + \frac{\pi}{4}) = 0$ در بازه ی $[0, 2\pi]$ چند ریشه دارد؟ (آموزش و پرورش-۸۵)

(۴) ۴ (۳) ۳ (۲) ۲ (۱) ۱

۸۸ جواب کلی معادله ی مثلثاتی $\tan 2x \tan 3x = 1$ به کدام صورت است؟ (گزینه ی دو-۸۷)

(۴) $\frac{k\pi}{5} + \frac{\pi}{5}$ (۳) $\frac{2k\pi}{5} + \frac{\pi}{5}$ (۲) $\frac{k\pi}{5} + \frac{\pi}{10}$ (۱) $\frac{2k\pi}{5} + \frac{\pi}{10}$

۸۹ معادله ی $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 3 + \sin^2 x$ در بازه ی $[\pi, 5\pi]$ چند ریشه دارد؟ (آزاد-۸۲)

(۴) ۲ (۳) ۱ (۲) ۴ (۱) ۵

۹۰ معادله ی $2 - \sqrt{\cos 2x} = \tan x + \cot x$ در بازه ی $[0, 2\pi]$ چند ریشه دارد؟ (آزاد-۸۲)

(۴) ۲ ریشه (۳) ۴ ریشه (۲) ۳ ریشه (۱) ۱ ریشه

۹۱ معادله ی $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{8} - \cos^2(x + \frac{\pi}{4})$ در بازه ی $[0, 2\pi]$ چند ریشه دارد؟ (آزاد-۸۷)

(۴) ۴ (۳) ۸ (۲) ۲ (۱) ۰

۹۲ معادله ی $\tan^2 x - 2 \cot^2 x = 1$ در بازه ی $[0, 2\pi]$ چند ریشه دارد؟ (آزاد-۸۲)

(۴) ۸ (۳) ۴ (۲) ۲ (۱) ۰

۹۳ معادله ی $\tan^3 x \cot x + \cot^4 x \tan^2 x = 4$ در بازه ی $[0, 2\pi]$ چند ریشه دارد؟ (آزاد-۸۴)

(۴) ۴ (۳) ۸ (۲) ۰ (۱) ۲

۹۴ چند عدد طبیعی دو رقمی در معادله ی $3^{x-[x]} = \cos \frac{\pi x}{2}$ صدق می کنند؟ (عادل مهرپاک - همدان)

(۴) ۲۳ (۳) ۲۲ (۲) ۲۱ (۱) ۲۰

۹۵ اگر سه جمله ی غیر صفر $\sin \alpha, \sin 2\alpha, \sin 4\alpha$ تشکیل یک دنباله ی هندسی را بدهند جواب کلی معادله ی مثلثاتی $\cos x = \sin \alpha$ کدام است؟

(عادل مهرپاک - همدان) $x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۴) $x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۳) $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۲) $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۱)

۹۶ کاملترین مجموعه ی جواب معادله ی $\sqrt{[-x]} - \sqrt{[x]} = \sin \pi [x]$ کدام است؟ (عادل مهرپاک - همدان)

(۴) Z (۳) $Z - Z^+$ (۲) $Z - Z^-$ (۱) Z^-

آموزش تکمیلی فصل (۹) در قالب تست

(آزاد-۶۹)

۹۷ مقدار عددی $\cos(\sin^{-1}(-\frac{8}{17}))$ برابر است با :

$$\begin{array}{llll} (۱) \frac{15}{17} & (۲) -\frac{15}{17} & (۳) \frac{8}{17} & (۴) \text{هیچکدام} \end{array}$$

(سراسری-۷۷)

۹۸ حاصل $\sin[\frac{3}{4}\cot^{-1}(-\frac{\sqrt{3}}{3})] + \cos[2\tan^{-1}(\sqrt{3})]$ کدام است ؟

$$\begin{array}{llll} (۱) -\frac{1}{2} & (۲) \frac{1}{2} & (۳) 1 & (۴) \frac{3}{2} \end{array}$$

(گزینه ی دو-۸۶)

۹۹ حاصل $\sin[\cos^{-1}(\frac{3}{5}) + \cot^{-1}(-1)]$ کدام است ؟

$$\begin{array}{llll} (۱) \frac{\sqrt{2}}{5} & (۲) -\frac{\sqrt{2}}{5} & (۳) \frac{\sqrt{2}}{10} & (۴) -\frac{\sqrt{2}}{10} \end{array}$$

(آموزش و پرورش-۸۵)

۱۰۰ حاصل عبارت $a = \frac{\sin[\tan^{-1}(\frac{2}{3})]}{\cos[\cot^{-1}(-\frac{3}{2})]}$ ، چند برابر حاصل عبارت $b = \cot[\sin^{-1}(\frac{1}{\sqrt{3}})]$ است ؟

$$\begin{array}{llll} (۱) -\frac{\sqrt{2}}{3} & (۲) -\frac{\sqrt{3}}{2} & (۳) -\frac{\sqrt{6}}{2} & (۴) -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{array}$$

(آزاد-۸۱)

۱۰۱ حاصل عبارت $\sin[2\sin^{-1}(\frac{3}{5}) + 3\cos^{-1}(\frac{3}{5})]$ کدام است ؟

$$\begin{array}{llll} (۱) \frac{4}{5} & (۲) -\frac{4}{5} & (۳) \frac{3}{5} & (۴) -\frac{3}{5} \end{array}$$

(گزینه ی دو-۸۵)

۱۰۲ اگر $a = \cos^{-1}(\frac{1}{3}) + \cos^{-1}(\frac{2}{3})$ باشد ، حاصل $\sin^{-1}(\frac{1}{3}) + \sin^{-1}(\frac{2}{3})$ کدام است ؟

$$\begin{array}{llll} (۱) \frac{\pi}{2} - a & (۲) \frac{\pi}{2} + a & (۳) \pi - a & (۴) 2\pi - a \end{array}$$

(آزاد-۷۸)

۱۰۳ حاصل عبارت $\tan^{-1}(\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \tan^{-1}(\sqrt{3} + \sqrt{2})$ کدام است ؟

$$\begin{array}{llll} (۱) \frac{\pi}{2} & (۲) \text{صفر} & (۳) \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} & (۴) \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \end{array}$$

(گزینه ی دو-۸۵)

۱۰۴ ساده شده ی عبارت $\cos^2[2\tan^{-1}(\frac{1}{2})]$ کدام است ؟

$$\begin{array}{llll} (۱) 0/36 & (۲) 0/12 & (۳) 0/25 & (۴) 0/16 \end{array}$$

(آموزش و پرورش-۸۷)

۱۰۵ مقدار عددی $\sin^2[\frac{1}{2}\cos^{-1}(\frac{3}{5})]$ کدام است ؟

$$\begin{array}{llll} (۱) 0/1 & (۲) 0/2 & (۳) 0/3 & (۴) 0/4 \end{array}$$

(آزاد-۷۳)

۱۰۶ مقدار عددی $\tan^2[\frac{1}{2}\cos^{-1}(\frac{1}{3})]$ برابر است با :

$$\begin{array}{llll} (۱) \frac{1}{4} & (۲) \frac{4}{5} & (۳) \frac{1}{3} & (۴) \frac{1}{2} \end{array}$$

(آزاد-۷۳)

۱۰۷ حاصل عبارت $\tan^{-1}(\frac{1}{4}) + \tan^{-1}(\frac{3}{5})$ برابر است با :

$$\begin{array}{llll} (۱) \frac{\pi}{3} & (۲) \frac{\pi}{4} & (۳) \frac{5\pi}{12} & (۴) \frac{\pi}{2} \end{array}$$

(آزاد-۷۸)

۱۰۸ حاصل عبارت $\tan^{-1}(\frac{x}{x+1}) - \cot^{-1}(\frac{x+1}{x})$ ($x > 0$ یا $x < -1$) برابر است با :

$$\begin{array}{llll} (۱) \frac{1}{x} & (۲) 0 & (۳) 1 & (۴) -1 \end{array}$$

(آزاد-۸۴)

۱۰۹ حاصل $\sin^{-1}(\frac{3}{5}) + \cos^{-1}(\frac{4}{5})$ کدام است ؟

$$\begin{array}{llll} (۱) \sin^{-1}(\frac{7}{24}) & (۲) \cos^{-1}(\frac{7}{24}) & (۳) \tan^{-1}(\frac{7}{24}) & (۴) \cot^{-1}(\frac{7}{24}) \end{array}$$

آموزش تکمیلی فصل (۹) در قالب تست

(سنجش-۷۸)

۱۱۰ از رابطه ی $\sin^{-1}(\sin x) = \sin \alpha$ کدام نتیجه گیری صحیح است ؟

$$\cos x + \alpha = \frac{\pi}{4} \quad (۴) \quad x + \cos \alpha = \frac{\pi}{4} \quad (۳) \quad \sin x + \alpha = \frac{\pi}{4} \quad (۲) \quad x + \sin \alpha = \frac{\pi}{4} \quad (۱)$$

(آزاد-۸۷)

۱۱۱ حاصل $\sin^{-1}[\sin^4(\frac{\pi}{4}) - \cos^4(\frac{\pi}{4})]$ کدام است ؟

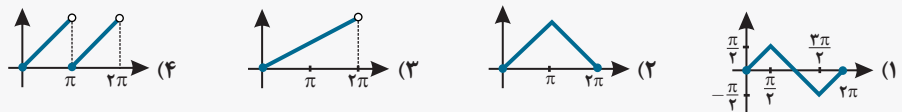
$$\frac{2\pi}{7} \quad (۴) \quad \frac{3\pi}{14} \quad (۳) \quad -\frac{2\pi}{7} \quad (۲) \quad -\frac{3\pi}{14} \quad (۱)$$

(آزاد-۸۷)

۱۱۲ حاصل $\sin^{-1}(\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta)$ اگر $0 < \alpha + \beta < \frac{\pi}{4}$ باشد، کدام است ؟

$$\alpha + \beta - \frac{\pi}{4} \quad (۴) \quad \alpha - \beta \quad (۳) \quad \frac{\pi}{4} - \alpha - \beta \quad (۲) \quad \alpha + \beta \quad (۱)$$

(گزینه ی دو-۷۸)

۱۱۳ نمودار $y = \sin^{-1}(\sin x)$ در بازه ی $[0, 2\pi]$ به کدام صورت است ؟

(سراسری-۷۰ با کمی تغییر)

۱۱۴ مجموع جواب های معادله ی $\tan^{-1}(2x) - \cot^{-1}(x) = \frac{\pi}{4}$ کدام است ؟

$$\frac{3 + \sqrt{17}}{4} \quad (۴) \quad \frac{3}{2} \quad (۳) \quad -2 \quad (۲) \quad 1 \quad (۱)$$

(آزاد-۷۲)

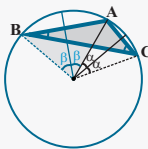
۱۱۵ جواب معادله ی $\tan^{-1}(x) + \tan^{-1}(3x) = \frac{\pi}{4}$ برابر است با :

$$x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (۴) \quad x = \sqrt{3} \quad (۳) \quad x = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (۲) \quad x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad (۱)$$

(گزینه ی دو - ۷۸)

۱۱۶ مجموع جواب های معادله ی $\sin^{-1}(x) + \cos^{-1}(x) = \sin^{-1}|2x - 1|$ کدام است ؟

$$2 \quad (۴) \quad 1 \quad (۳) \quad 0 \quad (۲) \quad -1 \quad (۱)$$

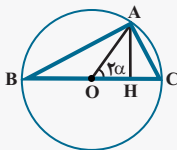


۱۱۷ مثلث ABC در دایره ی مقابل محاط شده است. از نقطه ی A بر ضلع BC عمود می کنیم

و پای عمود را H می نامیم. اندازه ی BH کدام است ؟

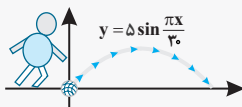
(متن کتاب)

$$2 \cos \alpha \cos \beta \quad (۴) \quad 2 \sin \alpha \sin \beta \quad (۳) \quad 2 \cos \alpha \sin \beta \quad (۲) \quad 2 \sin \alpha \cos \beta \quad (۱)$$



۱۱۸ در شکل مقابل نقطه ی O مرکز دایره ای به شعاع واحد است. اندازه ی HC کدام است؟ (متن کتاب)

$$1 - 2 \sin^2 \alpha \quad (۴) \quad 2 \sin^2 \alpha \quad (۳) \quad 2 \cos^2 \alpha \quad (۲) \quad 2 \sin \alpha \cos \alpha \quad (۱)$$

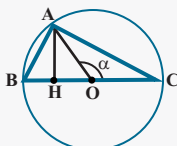


۱۱۹ مطابق شکل روبرو معادله ی مسیروتویی که علی به آن ضربه می زند به صورت

$$y = \Delta \sin \frac{\pi x}{30} \quad (۲) \quad y = \Delta \sin \frac{\pi x}{30} \quad (۱)$$

برخورد توپ با زمین دارد چند برابر بیشترین ارتفاع توپ از سطح زمین است ؟

$$8 \quad (۴) \quad 7 \quad (۳) \quad 6 \quad (۲) \quad 5 \quad (۱)$$

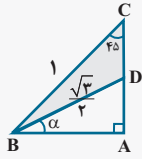


۱۲۰ در شکل روبرو نقطه ی O مرکز دایره ای به شعاع واحد است. مساحت مثلث AHO کدام است ؟

$$-\frac{1}{4} \sin 2\alpha \quad (۴) \quad \frac{1}{4} \sin 2\alpha \quad (۳) \quad -\frac{1}{2} \sin 2\alpha \quad (۲) \quad \frac{1}{2} \sin 2\alpha \quad (۱)$$

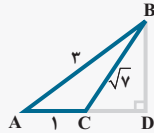
(متن کتاب با کمی تغییر)

آموزش تکمیلی فصل (۹) در قالب تست



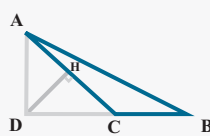
۱۲۱ در شکل روبرو مساحت مثلث BCD کدام است ؟ (متن کتاب)

$$(1) \frac{\sqrt{6}}{8} \sqrt{1 - \sin 2\alpha} \quad (2) \frac{\sqrt{3}}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \quad (3) \frac{\sqrt{3}}{4} (\sin \alpha - \cos \alpha) \quad (4) \frac{\sqrt{3}}{2} (1 + \sin 2\alpha)$$



۱۲۲ در شکل روبرو مقدار CD کدام است ؟ (متن کتاب)

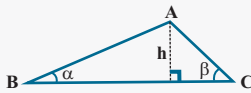
$$(1) \frac{1}{2} \quad (2) 1 \quad (3) \frac{3}{4} \quad (4) \frac{\sqrt{7}}{2}$$



۱۲۳ در شکل مقابل مساحت مثلث ABC سه سانتی متر مربع می باشد . (متن کتاب)

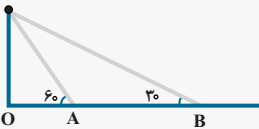
اندازه ی ضلع DH چند است ؟ (BC=2, AC=6)

$$(1) \sqrt{3} \quad (2) \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (3) \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (4) \frac{3\sqrt{3}}{2}$$



۱۲۴ در شکل مقابل مساحت مثلث ABC کدام است ؟ دکتر سازگار (سر گروه مازندران)

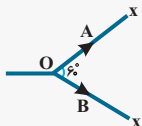
$$(1) \frac{h^2 \sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)} \quad (2) \frac{h^2 \sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)} \quad (3) \frac{h^2 \sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)} \quad (4) \frac{h^2 \sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)}$$



دکتر ثنائی (سر گروه گلستان)

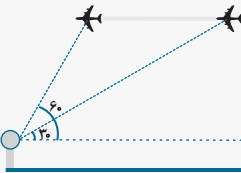
۱۲۵ مطابق شکل روبرو دوراننده با اتومبیل های A و B همزمان از پای یک برج (نقطه ی O) شروع به حرکت کردند و پس از گذشت ۳۰ ثانیه اتومبیل B از اتومبیل A یک کیلومتر فاصله گرفت به طوری که در آن لحظه زاویه ی دید اتومبیل های A و B از نوک برج به ترتیب ۶۰ و ۳۰ درجه بود . سرعت متوسط اتومبیل B در ۳۰ ثانیه ی اول چقدر بوده است ؟

$$(1) \frac{120}{h} \text{ km} \quad (2) \frac{150}{h} \text{ km} \quad (3) \frac{180}{h} \text{ km} \quad (4) \frac{200}{h} \text{ km}$$



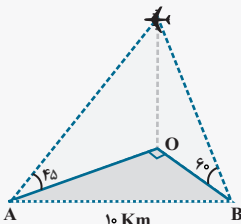
۱۲۶ مطابق شکل روبرو دو اتومبیل A و B در یک اتوبان به ترتیب با سرعت ثابت $\frac{120}{h} \text{ km}$ و $\frac{100}{h} \text{ km}$ در حرکتند و در نقطه ی O به یکدیگر می رسند . و با همان سرعت قبلی از هم جدا شده و در جهات Ox و Ox' به حرکت خود ادامه می دهند . پس از گذشت ۳ دقیقه فاصله ی اتومبیل A از B چقدر است ؟

$$(1) 5 \text{ km} \quad (2) \sqrt{31} \text{ km} \quad (3) 6 \text{ km} \quad (4) \sqrt{42} \text{ km}$$



۱۲۷ مطابق شکل روبرو هواپیمایی با سرعت ثابت $600 \frac{\text{km}}{h}$ در حال پرواز از بالای فرودگاهی می باشد . برج مراقبت فرودگاه که در ارتفاع ۱۰۰ متری از سطح زمین قرار دارد در یک لحظه هواپیما را با زاویه ی ۳۰ درجه و در ۶ ثانیه ی بعدی با زاویه ی ۴۵ درجه مشاهده می کند . ارتفاع هواپیما از سطح زمین چقدر است ؟

$$(1) \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (2) \frac{\sqrt{3}+1}{2} \quad (3) \frac{\sqrt{3}+1}{5} \quad (4) \frac{5\sqrt{3}+1}{10}$$

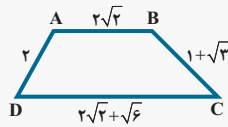


امیر مسین نصیری (تهران)

۱۲۸ مطابق شکل روبرو دو پدافند ضد هوایی که در فاصله ی ۱۰ کیلومتری از یکدیگر قرار دارند روی نقاط A و B مستقر هستند . در هنگام ظهر این دو پدافند ، یک هواپیمای شکای را به ترتیب با زاویه های ۴۵ و ۶۰ درجه به طور همزمان مورد شلیک قرار می دهند . در صورتی که $\angle AOB = 90^\circ$ باشد ، ارتفاع هواپیما چقدر است ؟ (O سایه ی هواپیما بر روی زمین می باشد .)

$$(1) 5 \text{ km} \quad (2) 5\sqrt{2} \text{ km} \quad (3) 5\sqrt{3} \text{ km} \quad (4) 10 \text{ km}$$

آموزش تکمیلی فصل (۹) در قالب تست



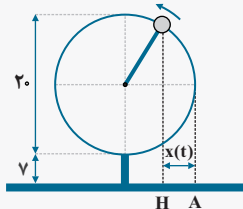
۱۲۹ در ذوزنقه ی مقابل زاویه ی B چند درجه است ؟ (استاد عادل مهر پاک همدان)

۱۰۵ (۴)

۱۲۰ (۳)

۱۳۵ (۲)

۱۵۰ (۱)



۱۳۰ مطابق شکل روبرو چرخ و فلکی به قطر ۲۰ متر در هر دو دقیقه یک دور در جهت مثبت می چرخد .

کابین خاصی از چرخ و فلک را در نظر بگیرید که در لحظه ی $t = 0$ بازمین ۱۷ متر فاصله داشته و

رو به بالا حرکت می کند . اگر پایین ترین نقطه ی چرخ و فلک ، ۷ متر بالاتر از سطح زمین باشد ،

پس از گذشت t ثانیه ، کابین چه کمانی را بر حسب رادیان طی می کند و تابعی که ارتفاع کابین (m)

نسبت به زمان (ثانیه) نشان می دهد کدام است ؟ (متن کتاب)

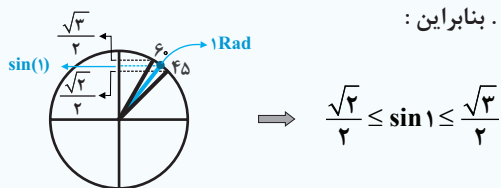
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{کمان} = \frac{\pi t}{60} \\ h(t) = 10 \sin \frac{\pi t}{60} + 17 \end{array} \right. \quad (۴) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{کمان} = \frac{\pi t}{6} \\ h(t) = 10 \sin \frac{\pi t}{6} + 17 \end{array} \right. \quad (۳) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{کمان} = \frac{\pi t}{60} \\ h(t) = 20 \sin \frac{\pi t}{60} + 17 \end{array} \right. \quad (۲) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{کمان} = \frac{\pi t}{6} \\ h(t) = 20 \sin \frac{\pi t}{6} + 17 \end{array} \right. \quad (۱)$$

۱۳۱ در تست قبل اگر در لحظه ی t فاصله ی سایه ی کابین روی زمین تا نقطه ی A را با $X(t)$ نشان دهیم ، ضابطه ی $X(t)$ کدام است ؟

$$X(t) = 20 - 20 \cos \frac{\pi t}{60} \quad (۴) \quad X(t) = 10 - 10 \cos \frac{\pi t}{6} \quad (۳) \quad X(t) = 20 - 20 \cos \frac{\pi t}{6} \quad (۲) \quad X(t) = 10 - 10 \cos \frac{\pi t}{60} \quad (۱)$$

(۲): ۱

همونطور که در قسمت آموزش گفتیم ۱ رادیان تقریباً ۵۷ درجه هست. بنابراین:



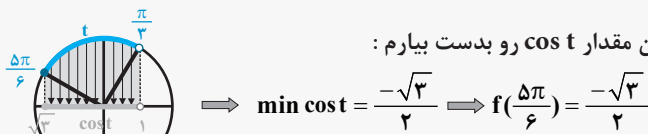
(۴): ۲

داده ی مسئله $f(x) = \min \left\{ \cot \left| \frac{\pi}{3} < t \leq x \right. \right\}$ و خواسته ی مسئله $f\left(\frac{5\pi}{6}\right) + f\left(\frac{7\pi}{6}\right)$ هست. پس کافیه مقادیر $f\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ و

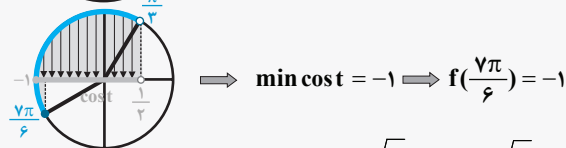
(۱) $f\left(\frac{7\pi}{6}\right)$ رو بدست بیارم و بعدش این دو مقدار رو با هم جمع کنم:

با توجه به (۱) داریم: $f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \min \left\{ \cot \left| \frac{\pi}{3} < t \leq \frac{5\pi}{6} \right. \right\}$

با معلوم شدن محدوده ی t می تونم محدوده ی $\cos t$ و بعدش کمترین مقدار $\cos t$ رو بدست بیارم:



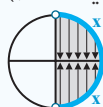
با توجه به (۱) داریم: $f\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \min \left\{ \cot \left| \frac{\pi}{3} < t \leq \frac{7\pi}{6} \right. \right\}$



خواسته ی مسئله: $f\left(\frac{5\pi}{6}\right) + f\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = -\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)$

(۴): ۳

شرط لازم برای برقراری رابطه ی $\cos x = \frac{\cot x}{\sqrt{\cot^2 x - a^2}}$ اینه که: (۱) $\cos x > 0$ (۲) $\frac{\cot x}{\cot x - a^2} > 0$



برای اینکه $\cos x > 0$ باشه باید x در ربع اول یا چهارم قرار داشته باشه.

حالا باید ببینیم در بین ربع اول و چهارم، x های کدوم ربع، درون رادیکال رو منفی می کنن تا اون ربع رو از گردونه خارج کنیم.

بررسی ربع اول: در ربع اول $\cot x > 0$ امانمی دونیم $\left(\frac{\cot x}{\cot x - a^2}\right)$ مثبت یا منفی. پس این امکان وجود داره که $\frac{\cot x}{\cot x - a^2}$ منفی بشه و رابطه رو به هم بریزه.

بررسی ربع چهارم: در ربع چهارم $\cot x < 0$ و $\left(\frac{\cot x}{\cot x - a^2}\right)$ منفی. در نتیجه $\frac{\cot x}{\cot x - a^2} > 0$.

پس تمام x های ربع چهارم، با رابطه ی $\cos x = \frac{\cot x}{\sqrt{\cot^2 x - a^2}}$ دوست هستن.

(۳): ۴

$\tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = ?$ (در ربع سوم قرار داره) و $\cos x = \frac{-\sqrt{10}}{10}$ صورت مسئله

$$\tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = +\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\frac{-\sqrt{10}}{10}}{\frac{-3\sqrt{10}}{10}} = \frac{1}{3}$$

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \left(\frac{-\sqrt{10}}{10}\right)^2 = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10} \Rightarrow \sin x = \pm \frac{3\sqrt{10}}{10} \xrightarrow{\text{در ربع سوم}} \sin x = \frac{-3\sqrt{10}}{10}$$

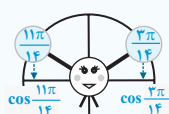
(۲): ۵

$$\cos \frac{3\pi}{14} + \cos \frac{5\pi}{14} + \cos \frac{7\pi}{14} + \cos \frac{9\pi}{14} + \cos \frac{11\pi}{14} = \cos \frac{3\pi}{14} + \cos \frac{11\pi}{14} + \cos \frac{5\pi}{14} + \cos \frac{9\pi}{14} + \cos \frac{7\pi}{14} = 0$$

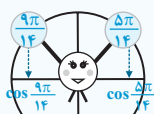
(۱) با توجه به

(۲) با توجه به

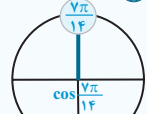
(۳) با توجه به



$$\cos \frac{11\pi}{14} = -\cos \frac{3\pi}{14}$$



$$\cos \frac{9\pi}{14} = -\cos \frac{5\pi}{14}$$



$$\cos \frac{7\pi}{14} = 0$$

(۲): ۶

مسئله : $\sin x + \frac{1}{\sin x} = 2 \Rightarrow \sin x = 1 \Rightarrow \cos x = 0$

خواسته ی مسئله : $\sin^2 x + \cos^2 x = (1)^2 + (0)^2 = 1$

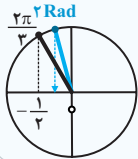
(۳): ۷

با توجه به مسئله : α و β ریشه های معادله ی $x^2 + x - 1 = 0$ هستن و مقدار $[\cos(\alpha^2 - \beta)]$ مورد سؤاله .

$x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = -1 \Rightarrow \alpha + \beta = -1$ (۱)

$\alpha^2 + \alpha - 1 = 0 \Rightarrow \alpha^2 = 1 - \alpha$ (۲)

با توجه به (۱) : $[\cos(2)]$ با توجه به (۲) : $[\cos(\alpha^2 - \beta)] = [\cos(1 - \alpha - \beta)] = [\cos(1 - (\alpha + \beta))]$



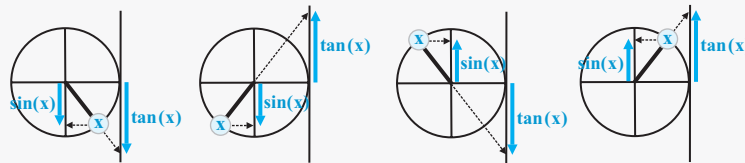
همونطور که می دونید یک رادیان تقریباً ۵۷ درجه هست . پس : $2 \text{ Rad} \approx 114^\circ$

$\Rightarrow \frac{-1}{2} < \cos 2 < 0 \Rightarrow [\cos 2] = -1$

(۳): ۸

x در کدام ربع قرار داره ؟ $\Rightarrow \frac{1}{\cos x} - \sin x \tan x < 0$ و $\sin x + \tan x > 0$ خلاصه ی مسئله

بررسی نامساوی : $\sin x + \tan x > 0$ لطفاً روی شکلهای زیر کمی تفکر کنید :



اگر به شکل های بالا نگاه کنید می بینید فقط x های ربع اول و سوم باعث میشن که : $\sin x + \tan x > 0$

بررسی نامساوی : $\frac{1}{\cos x} - \sin x \tan x < 0$

$\frac{1}{\cos x} - \frac{\sin^2 x}{\cos x} < 0 \Rightarrow \frac{1 - \sin^2 x}{\cos x} < 0 \Rightarrow \frac{\cos^2 x}{\cos x} < 0 \Rightarrow \cos x < 0$

برای اینکه هر دو نامساوی برقرار باشه باید x در ربع سوم قرار بگیره .

توجه : زاویه ی x در هر ربعی که باشه ، همیشه اندازه ی $\tan x$ از اندازه ی $\sin x$ بزرگتره . یعنی : $|\tan x| > |\sin x|$

(۱): ۹

خلاصه مسئله : $\sin^2 x + 2\cos^2 x = \frac{3}{2} \Rightarrow \tan^2 x = ? \Rightarrow \sin^2 x + \cos^2 x + \cos^2 x = \frac{3}{2} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2}$ (۲)

خواسته ی مسئله : $\tan^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} \xrightarrow{\text{با توجه به (۲)}} \frac{1 - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$

(۱): ۱۰

داده ی مسئله : $\sin x + \cos x = \frac{1}{3} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x = \frac{1}{9} \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{-4}{9}$ (۲)

خواسته ی مسئله : $\sin^2 x + \cos^2 x \xrightarrow{\text{اتحاد چاق و لاغر}} (\sin x + \cos x)(\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x) = (\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x)$

با توجه به (۱) و (۲) : $\left(\frac{1}{3}\right)\left(1 - \left(\frac{-4}{9}\right)\right) = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{13}{9}\right) = \frac{13}{27}$

(۳): ۱۱

داده ی مسئله : $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{5} \Rightarrow 1 + 2\sin^2 x \cos^2 x = \frac{3}{5} \Rightarrow \sin^2 x \cos^2 x = \frac{-1}{5}$ (۱)

خواسته ی مسئله : $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 + 3\sin^2 x \cos^2 x \xrightarrow{\text{با توجه به (۱)}} 1 + 3\left(\frac{-1}{5}\right) = \frac{2}{5}$

(۱): ۱۲ صورت و مخرج رو به $\cos x$ تقسیم می‌کنم تا $\tan x$ ایجاد بشه

$$\begin{cases} \sin x - \cos x = b \\ \sin x + \cos x = a \end{cases} \xrightarrow{\text{تقسیم}} \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} = \frac{b}{a}$$

خواسته ی مسئله: $\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{\tan x - 1}{\tan x + 1} = \frac{b}{a} \Rightarrow -\frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} = \frac{b}{a} \xrightarrow{\text{رابطه ی ناقله}} -\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{b}{a} \Rightarrow \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{b}{a}$

(۱): ۱۳ $\tan(B + 30^\circ)\tan(C + 30^\circ) = 1 \Rightarrow \tan(B + 30^\circ) = \frac{1}{\tan(C + 30^\circ)} \Rightarrow \tan(B + 30^\circ) = \cot(C + 30^\circ)$

اگر α و β متمم هم باشند اون موقع $\tan \alpha = \cot \beta$ می‌دونیم که $A + B + C = 180^\circ \Rightarrow B + C = 30^\circ \Rightarrow A = 150^\circ$

(۳): ۱۴ $\frac{\sin^2 x - 2\cos^2 x + 1}{\sin^2 x + 2\cos^2 x - 1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\sin^2 x - 2\cos^2 x + 1 - \cos^2 x}{2\cos^2 x - (1 - \sin^2 x)} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2\sin^2 x - \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2\tan^2 x - 1 = \frac{1}{2} \Rightarrow \tan^2 x = \frac{5}{4}$

داده ی مسئله: $4\sin x \cos x = -1$ (۱)

خواسته ی مسئله: $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin x \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x + \cos x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pm \frac{1}{2}$

$(\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x \xrightarrow{\text{با توجه به (۱)}} 1 + 2\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x + \cos x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

خواسته ی مسئله: $\tan 50^\circ + \tan 85^\circ - \tan 50^\circ \tan 85^\circ = ?$

می‌دونیم: $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \Rightarrow -1 = \frac{\tan 50^\circ + \tan 85^\circ}{1 - \tan 50^\circ \tan 85^\circ} \Rightarrow$

$\Rightarrow \tan 50^\circ + \tan 85^\circ = -1 + \tan 50^\circ \tan 85^\circ \Rightarrow \tan 50^\circ + \tan 85^\circ - \tan 50^\circ \tan 85^\circ = 1$

داده: $\tan(\alpha + 20^\circ) = \frac{3}{4}$

خواسته: $\cot(25^\circ - \alpha) = \frac{1}{\tan(25^\circ - \alpha)} = \frac{1}{\tan(45^\circ - (\alpha + 20^\circ))} = \frac{1}{\left(\frac{1 - \tan(\alpha + 20^\circ)}{1 + \tan(\alpha + 20^\circ)}\right)} = \frac{1 + \tan(\alpha + 20^\circ)}{1 - \tan(\alpha + 20^\circ)} = \frac{1 + \frac{3}{4}}{1 - \frac{3}{4}} = 7$

زاویه ی $(25^\circ - \alpha)$ رو بر حسب $(\alpha + 20^\circ)$ مرتب می‌کنم تا به داده ی مسئله نزدیک بشم

داده ها: $\begin{cases} \tan x = \sqrt{2} - 1 \\ \tan y = \sqrt{2} + 1 \end{cases}$ و x و y زاویای حاده هستن

خواسته: $y - x = ?$

$\tan(y - x) = \frac{\tan y - \tan x}{1 + \tan y \tan x} = \frac{(\sqrt{2} + 1) - (\sqrt{2} - 1)}{1 + (\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)} \Rightarrow \tan(y - x) = 1 \Rightarrow y - x = \frac{\pi}{4}$

چون x و y حاده هستن پس تفاضلشون هم حاده هست

داده ها: (۱) $\alpha + \beta = 135^\circ$ و (۲) $\tan(\alpha - \beta) = \frac{3}{4}$

خواسته: $\frac{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta}{\sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha \sin^2 \beta} \xrightarrow{\text{صورت و مخرج رو به } \cos^2 \alpha \cos^2 \beta \text{ تقسیم می‌کنم تا } \tan^2 \alpha \tan^2 \beta \text{ ایجاد بشه}} \frac{1 - \tan^2 \alpha \tan^2 \beta}{\tan^2 \alpha - \tan^2 \beta}$

$= \frac{(1 - \tan \alpha \tan \beta)(1 + \tan \alpha \tan \beta)}{(\tan \alpha + \tan \beta)(\tan \alpha - \tan \beta)} = \frac{1}{\tan(\alpha + \beta)} \times \frac{1}{\tan(\alpha - \beta)} \xrightarrow{\text{با توجه به (۱) و (۲)}} \frac{1}{\tan(135^\circ)} \times \frac{1}{\left(-\frac{3}{4}\right)} = \frac{-4}{3}$

(۴): ۲۰

$$\tan 27 + \tan 18 + \tan 27 \tan 18 = 1 + 1 = 2 \quad \text{خواسته ی مسئله}$$

$$\tan(27 + 18) = \frac{\tan 27 + \tan 18}{1 - \tan 27 \tan 18} \Rightarrow 1 = \frac{\tan 27 + \tan 18}{1 - \tan 27 \tan 18} \Rightarrow \tan 27 + \tan 18 = 1 - \tan 27 \tan 18$$

$$\Rightarrow \tan 27 + \tan 18 + \tan 27 \tan 18 = 1$$

(۱): ۲۱

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \sin(\pi + \alpha) - \sin(\pi - \alpha) \cos(-\alpha) = (\cos \alpha)(-\sin \alpha) - (\sin \alpha)(\cos \alpha) = -2 \sin \alpha \cos \alpha = -\sin 2\alpha$$

در قسمت آموزش، چگونگی محاسبه ی نسبت های مثلثاتی $(k\pi \pm \alpha)$ و $\left((2k+1)\frac{\pi}{4} \pm \alpha\right)$ رو توضیح دادیم

(۱): ۲۲

$$\text{خواسته ی مسئله: } \frac{\cos 2x}{\sqrt{2} \sin x - 1} - \frac{\sqrt{2} \cos 2x}{\sin x + \cos x} + \sqrt{2} \cos x = \frac{1 - 2 \sin^2 x}{\sqrt{2} \sin x - 1} - \frac{\sqrt{2} (\cos^2 x - \sin^2 x)}{\sin x + \cos x} + \sqrt{2} \cos x =$$

$$\frac{(1 - \sqrt{2} \sin x)(1 + \sqrt{2} \sin x)}{-(1 - \sqrt{2} \sin x)} - \frac{\sqrt{2} (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{(\cos x + \sin x)} + \sqrt{2} \cos x = -1 - \sqrt{2} \sin x - \sqrt{2} \cos x + \sqrt{2} \sin x + \sqrt{2} \cos x = -1$$

(۲): ۲۳

$$\text{خواسته ی مسئله: } \tan 20(1 + \cos 40) = \frac{\sin 20}{\cos 20} (1 + 2 \cos^2 20) = 2 \sin 20 \cos 20 = \sin 40$$

(۳): ۲۴

$$\text{خواسته ی مسئله: } 2 \cos^2\left(\frac{7\pi}{4} - x\right) - \cos^2 x (1 + \tan^2 x) = 2 \cos^2\left(\frac{7\pi}{4} - x\right) - \left(\frac{1}{1 + \tan^2 x}\right) (1 + \tan^2 x) =$$

$$2 \cos^2\left(\frac{7\pi}{4} - x\right) - 1 = \cos 2\left(\frac{7\pi}{4} - x\right) = \cos\left(\frac{7\pi}{2} - 2x\right) = -\sin 2x$$

ربع سوم

$$2 \cos^2 \alpha - 1 = \cos 2\alpha$$

(۲): ۲۵

اگر در عبارت $\frac{2 \tan(\frac{\pi}{4} + \alpha)}{1 - \tan^2(\frac{\pi}{4} + \alpha)}$ به جای α زاویه ی $\frac{\pi}{4}$ رو قرار بدم، به زاویه ای می رسم که نمی شه باهاش عبارت رو محاسبه کرد. پس بهتره عبارت رو بر حسب 2α مرتب کنم. چون $2\alpha = \frac{\pi}{4}$ میشه و عبارت قابل محاسبه خواهد شد:

$$\frac{2 \tan(\frac{\pi}{4} + \alpha)}{1 - \tan^2(\frac{\pi}{4} + \alpha)} = \tan 2(\frac{\pi}{4} + \alpha) = \tan(\frac{\pi}{2} + 2\alpha) = \cot 2\alpha$$

با توجه به ۱

$$\cot \frac{\pi}{4} = 1$$

ربع دوم

$$\frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = \tan 2\theta$$

(۴): ۲۶

$$\cos 4x + \tan x \sin 4x = \cos 4x + \frac{\sin x \sin 4x}{\cos x} = \frac{\cos 4x \cos x + \sin 4x \sin x}{\cos x}$$

$$= \frac{\cos(4x - x)}{\cos x} = \frac{\cos 3x}{\cos x} = \frac{4 \cos^3 x - 3 \cos x}{\cos x} = \frac{\cos x (4 \cos^2 x - 3)}{\cos x} = 4 \cos^2 x - 3$$

روابط $\alpha \pm \beta$ روابط 3α

(۴): ۲۷

$$\text{خواسته: } \cot \alpha + \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{\cos \alpha + 1}{\sin \alpha} = \frac{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1 + 1}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \cot \frac{\alpha}{2}$$

به کمک روابط $\cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1$ و $\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$ زاویه ی α رو نصف می کنیم، چون در گزینه ها زاویه بر حسب $\frac{\alpha}{2}$ هست

(۳): ۲۸

$$\text{خواسته: } \cos 20 \cos 40 \cos 80 = \frac{\sin 20 \cos 20 \cos 40 \cos 80}{\sin 20} = \frac{\frac{1}{2} \sin 40 \cos 40 \cos 80}{\sin 20} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \sin 80 \cos 80}{\sin 20} =$$

$$\frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \sin 160}{\sin 20} = \frac{\frac{1}{8} \times \sin(180 - 20)}{\sin 20} = \frac{\frac{1}{8} \times \sin 20}{\sin 20} = \frac{1}{8}$$

ربع دوم

(۱): ۲۹

داده: $a + b = \frac{\pi}{4}$ ① خواسته: $\lambda \cos a \cos b \cos(\frac{\pi}{4} - a) \cos(\frac{\pi}{4} - b) = ?$

از اونجایی که در گزینه ها، زوایا بر حسب $\frac{\pi}{4}$ یا $\frac{\pi}{2}$ هستند، بهتره که خواسته ی مسئله رو بر حسب $\frac{\pi}{4}$ یا $\frac{\pi}{2}$ مرتب کنیم:

خواسته: $\lambda \cos a \cos b \cos(\frac{\pi}{4} - a) \cos(\frac{\pi}{4} - b) = \lambda \cos a \cos b \sin a \sin b = 2 \times \underbrace{\sin a \cos a}_{\sin 2a} \times \underbrace{\sin b \cos b}_{\sin 2b}$

با توجه به ①: $2 \sin 2a \sin \left(2(\frac{\pi}{4} - a) \right) = 2 \sin 2a \sin(\frac{\pi}{2} - 2a) = 2 \sin 2a \cos 2a = \sin 4a$

خاصیت زاویه متمم

(۴): ۳۰

می خوام بیشترین مقدار تابع $f(x) = (\sin x - \cos 2x)^2 + (\cos x - \sin 2x)^2$ رو بدست بیارم. به همین منظور اول تابع f رو تا

حد امکان ساده می کنم و بعدش می رم سراغ برد f تا بیشترین مقدار f مشخص بشه:

$$f(x) = \sin^2 x + \cos^2 2x - 2 \sin x \cos 2x + \cos^2 x + \sin^2 2x - 2 \cos x \sin 2x \Rightarrow$$

$$f(x) = \underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_1 + \underbrace{\sin^2 2x + \cos^2 2x}_1 - 2(\sin x \cos 2x + \cos x \sin 2x) \Rightarrow f(x) = 2 - 2 \sin 3x$$

حالا که تابع f ساده شده، بهتره برم سراغ برد f :

$$\sin 3x \in [-1, 1] \Rightarrow -2 \sin 3x \in [-2, 2] \Rightarrow 2 - 2 \sin 3x \in [0, 4] \Rightarrow \text{Max}(f(x)) = 4$$

(۳): ۳۱

خواسته: $\tan(\frac{\pi}{2} + 2x) = -\cot 2x = -\frac{1}{\tan 2x} = \frac{-1}{\left(\frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} \right)} = \frac{\tan^2 x - 1}{2 \tan x} = \frac{\frac{9}{16} - 1}{2 \times \frac{3}{4}} = \frac{-\frac{7}{16}}{\frac{3}{2}} = -\frac{7}{24}$

داده ها: $\begin{cases} \sin x = \frac{3}{5} \\ 0 < x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$ ① ② ایجاد یک مثلث قائم الزاویه با رابطه ی ① و ② $\Rightarrow \tan x = \frac{3}{4}$

(۳): ۳۲

داده: $1 - \cos 2c = \tan c$ خواسته: $c = ?$

خواسته: $1 - \cos 2c = \tan c \Rightarrow 1 - (1 - 2 \sin^2 c) = \frac{\sin c}{\cos c} \Rightarrow 2 \sin^2 c = \frac{\sin c}{\cos c} \Rightarrow 2 \sin c = \frac{1}{\cos c}$
 $\Rightarrow 2 \sin^2 c \cdot \cos c = 1 \Rightarrow \sin 2c = 1 \Rightarrow 2c = 90^\circ \Rightarrow c = 45^\circ$

(۲): ۳۳

داده: $\triangle ABC$ خواسته: $\tan \frac{c}{2} = ?$

می دونیم: $\tan^2 \frac{c}{2} = \frac{1 - \cos c}{1 + \cos c} \Rightarrow \tan^2 \frac{c}{2} = \frac{1 - \frac{b}{a}}{1 + \frac{b}{a}} = \frac{a - b}{a + b} \Rightarrow \tan^2 \frac{c}{2} = \frac{(a - b)(a + b)}{(a + b)(a + b)} = \frac{a^2 - b^2}{(a + b)^2}$

روابط طلایی

با توجه به ①: $\cos \hat{c} = \frac{b}{a}$

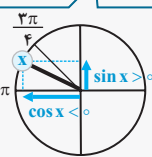
با توجه به ①: $\tan^2 \frac{c}{2} = \frac{c^2}{(a + b)^2} \Rightarrow \tan \frac{c}{2} = \frac{c}{a + b}$

با توجه به ①: فیثاغورث

(۳): ۳۴

خواسته ی مسئله: $\sqrt{1 + \sin 2x} + \cos x = \sqrt{(\sin x + \cos x)^2} + \cos x = |\sin x + \cos x| + \cos x = -\sin x - \cos x + \cos x = -\sin x$

داده ی مسئله: $-\frac{3\pi}{4} < x < \pi \Rightarrow \sin x + \cos x < 0$



(۴): ۳۵

$$\text{خواسته: } \frac{1 - \sin^2 a}{1 + \sin^2 a} \times \tan^2\left(\frac{\pi}{4} + a\right) = \frac{(\sin a - \cos a)^2}{(\sin a + \cos a)^2} \times \left(\frac{1 + \tan a}{1 - \tan a}\right)^2$$

$$= \left(\frac{\sin a - \cos a}{\sin a + \cos a}\right)^2 \times \left(\frac{1 + \frac{\sin a}{\cos a}}{1 - \frac{\sin a}{\cos a}}\right)^2 = \left(\frac{\sin a - \cos a}{\sin a + \cos a}\right)^2 \times \left(\frac{\cos a + \sin a}{\cos a - \sin a}\right)^2 = 1$$

(۲): ۳۶

داده: $\sin x + \cos x = \frac{5}{4}$ به توان ۲ $\Rightarrow \underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_1 + \underbrace{2 \sin x \cos x}_{\sin 2x} = \frac{25}{16} \Rightarrow \boxed{\sin 2x = \frac{9}{16}} \text{ (۱)}$

خواسته: $\tan x + \cot x = \frac{2}{\sin 2x} \stackrel{\text{با توجه به (۱)}}{=} \frac{2}{(\frac{9}{16})} = \frac{32}{9}$

(۱): ۳۷

داده: $\sin 2x = \frac{4}{5}$ (۱)

$$\begin{cases} a + b = S \\ a \cdot b = P \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = S^2 - 2P \\ a^2 + b^2 = S^2 - 2PS \end{cases}$$

خواسته: $\frac{\tan^2 x + \cot^2 x}{\tan^2 x + \cot^2 x} = \frac{(\tan x + \cot x)^2 - 2 \tan x \cot x}{(\tan x + \cot x)^2 - 2(\tan x \cot x)(\tan x + \cot x)} = \frac{(\frac{2}{\sin 2x})^2 - 2(1)}{(\frac{2}{\sin 2x})^2 - 2(1)(\frac{2}{\sin 2x})}$

با توجه به (۱) $\frac{\left(\frac{2}{\frac{4}{5}}\right)^2 - 2}{\left(\frac{2}{\frac{4}{5}}\right)^2 - 2\left(\frac{2}{\frac{4}{5}}\right)} = \frac{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 2}{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{5}{2}\right)} = \frac{\frac{25}{4} - 2}{\frac{25}{4} - 5} = \frac{\frac{17}{4}}{\frac{5}{4} - 3} = \frac{\frac{17}{4}}{\frac{5}{4} \times \frac{13}{4}} = \frac{34}{65}$

(۲): ۳۸

داده: $\tan x - \cot x = 6$ خواسته: $\tan 2x = ?$

$$\tan x - \cot x = 6 \Rightarrow -2 \cot 2x = 6 \Rightarrow \cot 2x = -3 \Rightarrow \tan 2x = \frac{-1}{3}$$

(۴): ۳۹

داده: α در ربع اول است خواسته: $\sqrt{1 + \cot^2 \alpha} - \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = ?$

$$\sqrt{1 + \cot^2 \alpha} - \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \alpha}} - \sqrt{\frac{(1 - \cos \alpha)^2}{(1 + \cos \alpha)(1 - \cos \alpha)}} = \frac{1}{|\sin \alpha|} - \sqrt{\frac{(1 - \cos \alpha)^2}{1 - \cos^2 \alpha}}$$

$$= \frac{1}{|\sin \alpha|} - \frac{1 - \cos \alpha}{|\sin \alpha|} = \frac{1}{\sin \alpha} - \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1 - 1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \cot \alpha$$

باتوجه به اینکه α در ربع اوله

(۳): ۴۰

از اونجایی که $x = \frac{\pi}{18}$ ریشه ی معادله ی $3 \sin x - 4 \sin^3 x = K$ هست، پس در این معادله صدق می کنه. اما به دلیل اینکه نمی تونم در این معادله، $\sin \frac{\pi}{18}$ رو محاسبه کنم بهتره که به کمک روابط 3α ، زاویه ی x رو به $3x$ تبدیل کنم تا:

$$3 \sin x - 4 \sin^3 x = K \xrightarrow{\text{ساده کردن معادله}} \sin 3x = K \xrightarrow{x = \frac{\pi}{18} \text{ در معادله صدق می کنه}} \sin 2\left(\frac{\pi}{18}\right) = K \Rightarrow \sin \frac{\pi}{9} = K \Rightarrow K = \frac{1}{2}$$

(۳): ۴۱

اگر به سمت چپ معادله ی $2 \sin x + \sin 2x + \cos x \sin 2x + \dots = 2$ دقت کنید یک تصاعد هندسی نامحدوده. پس به کمک

سمت چپ معادله

رابطه ی حد مجموع، می تونیم سمت چپ معادله رو ساده تر کنیم:

سمت چپ معادله: $2 \sin x + \sin 2x + \cos x \sin 2x + \dots = \frac{2 \sin x}{1 - \cos x}$

$\times \cos x \quad \times \cos x$

حد مجموع $= \frac{a_1}{1 - q_1}$

حالا معادله به صورت $\frac{2 \sin x}{1 - \cos x} = 2$ در می آید که خیلی ساده قابل حله :

$$\frac{2 \sin x}{1 - \cos x} = 2 \Rightarrow \sin x = 1 - \cos x \xrightarrow{\text{با توجه به گزینه ها ، باید زاویه ی } \frac{x}{2} \text{ ایجاد کنیم}} \sin x = 1 - (1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}) \Rightarrow \sin x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$$

خواسته ی مسئله

۴۲: (۱) برای اینکه از رابطه ی $\sin x + \sqrt{3} \cos x = a$ ، حاصل عبارت $\cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x$ رو بدست بیارم ، قبل از هر حرکتی باید

زاویه ی x رو به $2x$ تبدیل کنم تا به خواسته ی مسئله نزدیک بشم :

$$\sin x + \sqrt{3} \cos x = a \xrightarrow{\text{به توان ۲}} \sin^2 x + 3 \cos^2 x + 2\sqrt{3} \sin x \cos x = a^2 \Rightarrow$$

$$\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_1 + \underbrace{2 \cos^2 x}_{(2 \cos^2 x - 1) + 1} + \sqrt{3} \sin 2x = a^2 \Rightarrow 1 + \cos 2x + 1 + \sqrt{3} \sin 2x = a^2 \xrightarrow[\text{نزدیک میشم}]{\text{دارم به خواسته ی مسئله}} \cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x = a^2 - 2$$

۴۳: (۱) $\cos(2x - \frac{\pi}{4}) = ?$ خواسته : $\sin x(\cos x - \sin x) = -1$ داده :

$$\sin x(\cos x - \sin x) = -1 \Rightarrow \sin x \cos x - \sin^2 x = -1 \xrightarrow{\text{اگر طرفین معادله رو در ۲ ضرب کنم ، می توانم معادله رو بر حسب زاویه ی ۲x مرتب کنم و به خواسته ی مسئله نزدیک بشم .}}$$

$$2 \sin x \cos x - 2 \sin^2 x = -2 \Rightarrow \underbrace{2 \sin x \cos x}_{\sin 2x} + \underbrace{1 - 2 \sin^2 x}_{\cos 2x} = -1$$

$$\Rightarrow \sin 2x + \cos 2x = -1 \xrightarrow{\text{به کمک رابطه ی معرکه}} \sqrt{2} \cos(2x - \frac{\pi}{4}) = -1 \Rightarrow \cos(2x - \frac{\pi}{4}) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

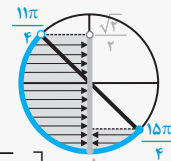
۴۴: (۳) (محدوده ی A) : خواسته $A = \sin 2x + \cos 2x$ و $(\frac{5\pi}{4} \leq x \leq \frac{7\pi}{4})$ داده ها :

$$A = \sin 2x + \cos 2x \Rightarrow A = \sqrt{2} \sin(2x + \frac{\pi}{4}) \quad ①$$

حالا با داشتن محدوده ی x میتونم محدوده ی A رو بدست بیارم :

$$x \in [\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}] \Rightarrow 2x \in [\frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}] \Rightarrow 2x + \frac{\pi}{4} \in [\frac{11\pi}{4}, \frac{15\pi}{4}] \Rightarrow$$

$$\sin(2x + \frac{\pi}{4}) \in [-1, \frac{\sqrt{2}}{2}] \Rightarrow \sqrt{2} \sin(2x + \frac{\pi}{4}) \in [-\sqrt{2}, 1] \Rightarrow A \in [-\sqrt{2}, 1]$$



۴۵: (۴) برای پیدا کردن ک.م.م عبارت های $(1 + \sin 2x)$ و $(2 \cos^2 x - 1)$ باید اونها رو تا حد امکان تجزیه کنم :

$$1 + \sin 2x = (\sin x + \cos x)^2 = (\sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4}))^2 = 2 \sin^2(x + \frac{\pi}{4}) \quad ①$$

$$2 \cos^2 x - 1 = \cos 2x = (\cos x - \sin x)^2 = (\sin x - \cos x)^2 = (\sqrt{2} \sin(x - \frac{\pi}{4}))^2 = 2 \sin^2(x - \frac{\pi}{4}) \quad ②$$

$$\textcircled{۲} \text{ و } \textcircled{۱} : [1 + \sin 2x, 2 \cos^2 x - 1] = 2 \sin^2(x + \frac{\pi}{4}) \sin^2(x - \frac{\pi}{4})$$

همونطور که می بینید ، هر چهار عبارت $\sqrt{2} \sin^2(x - \frac{\pi}{4})$, $2 \sin^2(x + \frac{\pi}{4})$, $\sqrt{2} \sin(x - \frac{\pi}{4})$, $2 \sin(x + \frac{\pi}{4})$ در ک.م.م وجود دارن .

$$\frac{\sqrt{3} \cos 20^\circ - \cos 10^\circ}{\sin 40^\circ} = \frac{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 20^\circ - \cos 10^\circ}{\sin 40^\circ} = \frac{2 \cos 20^\circ \cos 20^\circ - \cos 10^\circ}{\sin 40^\circ} = \frac{\cos 40^\circ + \cos 20^\circ - \cos 10^\circ}{\sin 40^\circ} = \frac{\cos 40^\circ + \cos 20^\circ - \cos 10^\circ}{\sin 40^\circ} = 1$$

$$\text{داده : } \frac{2 \sin x \cos 3x}{\sin 2x} = 2 \cos 2x + a \xrightarrow{\text{ضرب به جمع}} \frac{\sin(x + 3x) + \sin(x - 3x)}{\sin 2x} = 2 \cos 2x + a$$

$$\Rightarrow \frac{\sin 4x - \sin 2x}{\sin 2x} = 2 \cos 2x + a \Rightarrow \frac{2 \sin 2x \cos 2x - \sin 2x}{\sin 2x} = 2 \cos 2x + a$$

$$\Rightarrow \frac{\sin 2x(2 \cos 2x - 1)}{\sin 2x} = 2 \cos 2x + a \Rightarrow 2 \cos 2x - 1 = 2 \cos 2x + a \Rightarrow a = -1$$

خواسته ی مسئله

(۴): ۴۸

$$\begin{aligned}\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ + \cos^2 80^\circ &= \frac{1}{2}(\underbrace{2 \cos 40^\circ \cos 20^\circ}_{\text{ضرب به جمع}}) + \cos^2 80^\circ = \frac{1}{2}(\underbrace{\cos(40^\circ + 20^\circ)}_{60^\circ} + \underbrace{\cos(40^\circ - 20^\circ)}_{20^\circ}) + \cos^2 80^\circ \\&= \frac{1}{2}(\frac{1}{2} + \cos 20^\circ) + \cos^2 80^\circ = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos 20^\circ + \cos^2 80^\circ = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}(1 - 2 \sin^2 10^\circ) + \sin^2 10^\circ \\&= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \cancel{\sin^2 10^\circ} + \cancel{\sin^2 10^\circ} = \frac{3}{4}\end{aligned}$$

(۴): ۴۹

$$\begin{aligned}4 \cos 40^\circ - \frac{1}{\cos 20^\circ} &= \frac{4 \cos 40^\circ \cos 20^\circ - 1}{\cos 20^\circ} = \frac{2(2 \cos 40^\circ \cos 20^\circ) - 1}{\cos 20^\circ} = \frac{2(\cos 60^\circ + \cos 20^\circ) - 1}{\cos 20^\circ} \\&= \frac{2(\frac{1}{2} + \cos 20^\circ) - 1}{\cos 20^\circ} = \frac{\cancel{1} + 2 \cos 20^\circ - \cancel{1}}{\cos 20^\circ} = 2\end{aligned}$$

(۱): ۵۰

اگر $x = \frac{\pi}{36}$ رو درون عبارت $\frac{\cos x + \cos 5x}{\sin x + \sin 5x} + \frac{\sin x + \sin 5x}{\cos x + \cos 5x}$ قرار بدم نمی تونم مقدار عبارت رو بدست بیارم مگه

اینکه زوایای $x, 5x$ رو تغییر بدم. به همین منظور از تبدیل جمع به ضرب استفاده می کنم تا به زاویه ی دلخواه خودم برسم:

$$\begin{aligned}\frac{\cos 5x + \cos x}{\sin 5x + \sin x} + \frac{\sin 5x + \sin x}{\cos 5x + \cos x} &= \frac{\cancel{2} \cos(\frac{5x+x}{2}) \cos(\frac{5x-x}{2})}{\cancel{2} \sin(\frac{5x+x}{2}) \sin(\frac{5x-x}{2})} + \frac{\cancel{2} \sin(\frac{5x+x}{2}) \cos(\frac{5x-x}{2})}{\cancel{2} \cos(\frac{5x+x}{2}) \cos(\frac{5x-x}{2})} \\&= \frac{\cos 3x}{\sin 3x} + \frac{\sin 3x}{\cos 3x} = \cot 3x + \tan 3x = \frac{2}{\sin 6x} \\&\quad \boxed{\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}}\end{aligned}$$

حالا که زاویه ها تغییر کرد، می تونم $x = \frac{\pi}{36}$ رو درون عبارت ساده شده قرار بدم:

$$\frac{2}{\sin 6x} \Big|_{x = \frac{\pi}{36}} = \frac{2}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{2}{(\frac{1}{2})} = 4$$

(۴): ۵۱

همونطور که می بینید عبارت $\sin 3x - 2 \sin 4x + \sin 5x$ رو به دلیل یکی نبودن زاویه هاش، نمی شه به راحتی ساده کرد. اگر من $\sin 3x, \sin 5x$ رو در کنار هم قرار بدم و از تبدیل جمع به ضرب استفاده کنم به زاویه ی $\frac{5x+3x}{2} = 4x$ می رسم که با زاویه ی جمله ی وسط (یعنی $-2 \sin 4x$) یکی میشه و این باعث میشه که قفل عبارت شکسته بشه:

$$\begin{aligned}\sin 5x + \sin 3x - 2 \sin 4x &= 2 \sin(\frac{5x+3x}{2}) \cos(\frac{5x-3x}{2}) - 2 \sin 4x = 2 \sin 4x \cos x - 2 \sin 4x \\&= 2 \sin 4x (\cos x - 1) = 2 \sin 4x ((1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}) - 1) = 2 \sin 4x (-2 \sin^2 \frac{x}{2}) = -4 \sin 4x \sin^2 \frac{x}{2}\end{aligned}$$

اگر به گزینه ها نگاه کنید زاویه ی $\frac{x}{2}$ رو می بینید

(۲): ۵۲

$$\frac{\sin 3a + \sin a + 2 \cos a}{(\sin a + \cos a)^2} = \frac{2 \sin(\frac{3a+a}{2}) \cos(\frac{3a-a}{2}) + 2 \cos a}{1 + \sin 2a} = \frac{2 \sin 2a \cos a + 2 \cos a}{1 + \sin 2a} = \frac{2 \cos a (\sin 2a + 1)}{1 + \sin 2a} = 2 \cos a$$

بچه ها! در حل این مسئله دیدید که تبدیل جمع به ضرب باعث شد تا در صورت کسر، عامل های مشترک ایجاد بشه و عبارت کسری ساده بشه.

(۲): ۵۳

$$\begin{aligned}\frac{\sin^2 x + \sin x \sin 5x + \sin x \sin 3x}{\cos^2 x + \cos x \cos 5x + \cos x \cos 3x} &= \frac{\sin x (\sin x + \sin 5x + \sin 3x)}{\cos x (\cos x + \cos 5x + \cos 3x)} = \tan x \times \frac{2 \sin 2x \cos 2x + \sin 3x}{2 \cos 3x \cos 2x + \cos 3x} \\&= \tan x \times \frac{\sin 3x (2 \cos 2x + 1)}{\cos 3x (2 \cos 2x + 1)} = \tan x \cdot \tan 3x\end{aligned}$$

در حل این مسئله هم مثل سؤال قبل، تبدیل جمع به ضرب باعث ایجاد عامل های مشترک در صورت و مخرج شد و باعث شد، کسر ساده بشه.

$$\cos^2 11^\circ - \sin^2 7^\circ = \cos^2 7^\circ - \cos^2 2^\circ = \frac{1}{4} (2 \cos^2 7^\circ - 2 \cos^2 2^\circ) = \frac{1}{4} ((2 \cos^2 7^\circ - 1) - (2 \cos^2 2^\circ - 1)) = \frac{1}{4} (\cos 14^\circ - \cos 4^\circ) \quad \text{تبدیل جمع به ضرب}$$

$$\frac{1}{4} \left(-2 \sin \left(\frac{14^\circ + 4^\circ}{2} \right) \sin \left(\frac{14^\circ - 4^\circ}{2} \right) \right) = -\sin 9^\circ \sin 5^\circ = -\sin 5^\circ = -\cos 4^\circ \quad \text{متکم}$$

$$\frac{1}{\cos 2^\circ} + 2 = \frac{1 + 2 \cos 2^\circ}{\cos 2^\circ} = \frac{2 \left(\frac{1}{2} + \cos 2^\circ \right)}{\cos 2^\circ} = \frac{2 (\cos 6^\circ + \cos 2^\circ)}{\cos 2^\circ} = \frac{2 \left(2 \cos \frac{6^\circ + 2^\circ}{2} \cos \frac{6^\circ - 2^\circ}{2} \right)}{\cos 2^\circ} = \frac{4 \cos 4^\circ \cos 2^\circ}{\cos 2^\circ} = 4 \cos 4^\circ \quad \text{تبدیل جمع به ضرب}$$

$$\frac{\sin 10^\circ + \cos 22^\circ}{\sin 1^\circ} = \frac{\sin(9^\circ + 1^\circ) + \cos(18^\circ + 5^\circ)}{\sin 1^\circ} = \frac{\cos 1^\circ - \cos 5^\circ}{\sin 1^\circ} = \frac{-2 \sin \left(\frac{1^\circ + 5^\circ}{2} \right) \sin \left(\frac{1^\circ - 5^\circ}{2} \right)}{\sin 1^\circ} =$$

$$\frac{-2 \sin 3^\circ \sin(-2^\circ)}{\sin 1^\circ} = \frac{\cancel{2} \times \cancel{2} \times \sin 2^\circ}{\sin 1^\circ} = \frac{2 \sin 1^\circ \cos 1^\circ}{\sin 1^\circ} = 2 \cos 1^\circ$$

$$\frac{\tan a + \tan b}{\cot a + \cot b} = \frac{\frac{\sin(a+b)}{\cos a \cos b}}{\frac{\sin(a-b)}{\sin a \sin b}} = \frac{\sin a \sin b}{\cos a \cos b} = \tan a \cdot \tan b$$

$$\tan a + \tan b = \frac{\sin a}{\cos a} + \frac{\sin b}{\cos b} = \frac{\sin a \cos b + \cos a \sin b}{\cos a \cos b} = \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cos b}$$

$$\cot a + \cot b = \frac{\cos a}{\sin a} + \frac{\cos b}{\sin b} = \frac{\sin b \cos a + \cos b \sin a}{\sin a \sin b} = \frac{\sin(b+a)}{\sin a \sin b}$$

خواسته ی مسئله : $\cos x \cos 3x (\tan x + \tan 3x)$

داده های مسئله : $0 < x < \frac{\pi}{4}$ و $\sin 2x = \frac{3}{5}$

$$\cos x \cos 3x \times \frac{\sin(x+3x)}{\cos x \cos 3x} = \sin 4x = 2 \sin 2x \cos 2x = 2 \times \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{24}{25}$$

$$\cos^2 2x = 1 - \sin^2 2x \xrightarrow{\text{با توجه به ۱}} \cos^2 2x = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 \Rightarrow \cos^2 2x = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos 2x = \pm \frac{4}{5} \xrightarrow{\text{با توجه به ۲}} \cos 2x = \frac{4}{5} \quad 0 < 2x < \frac{\pi}{2}$$

$$\cos 5^\circ (\tan 7^\circ + \tan 1^\circ) = \cos 5^\circ \times \frac{\sin(7^\circ + 1^\circ)}{\cos 7^\circ \cos 1^\circ} = \frac{\cos 5^\circ \sin 8^\circ}{\cos 7^\circ \cos 1^\circ} \xrightarrow{\text{متکم}} \frac{\sin 4^\circ \cos 1^\circ}{\sin 2^\circ \cos 1^\circ} = \frac{2 \sin 2^\circ \cos 2^\circ}{\sin 2^\circ} = 2 \cos 2^\circ$$

$$(\tan 2^\circ + \cot 4^\circ) \sin 5^\circ \xrightarrow{\text{متکم}} (\tan 2^\circ + \tan 5^\circ) \sin 5^\circ = \frac{\sin(2^\circ + 5^\circ)}{\cos 2^\circ \cos 5^\circ} \times \sin 5^\circ = \frac{\sin 7^\circ \sin 5^\circ}{\cos 2^\circ \cos 5^\circ} = \tan 5^\circ$$

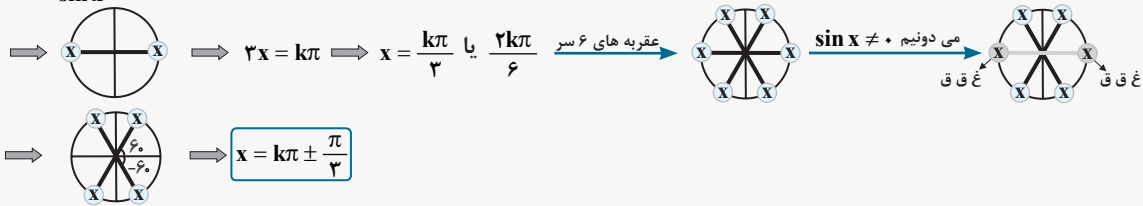
خواسته ی مسئله : تعداد جواب های معادله ی $2 \sin^2 x = 3 \cos x$ در بازه ی $\left[0, \frac{5\pi}{2}\right]$

$$\xrightarrow{\text{۱}} 2(1 - \cos^2 x) = 3 \cos x \Rightarrow 2 \cos^2 x + 3 \cos x - 2 = 0 \xrightarrow{\Delta = 9 + 16} \cos x = \frac{-3 \pm 5}{4}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \\ \cos x = -2 \quad (\text{غ ق ق}) \end{cases} \rightarrow \text{در مسیر } 0 \text{ تا } \frac{5\pi}{2} \text{ معادله سه جواب دارد}$$

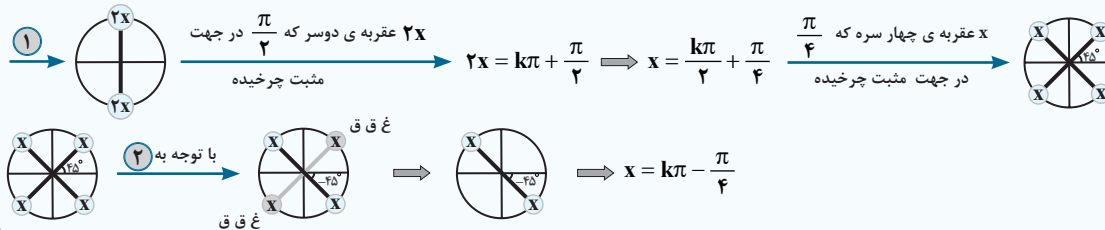
(۳): ۶۲

$$\frac{\sin 3x + \sin x}{\sin x} = 1 \xrightarrow{\text{با شرط } \sin x \neq 0 \text{ طرفین وسطین می کنیم}} \sin 3x + \sin x = \sin x \Rightarrow \sin 3x = 0$$

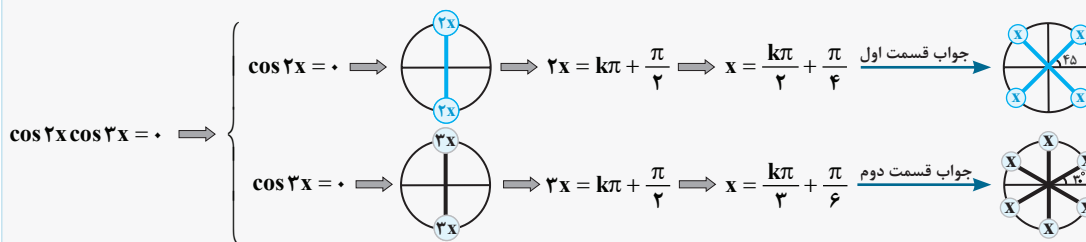


(۴): ۶۳

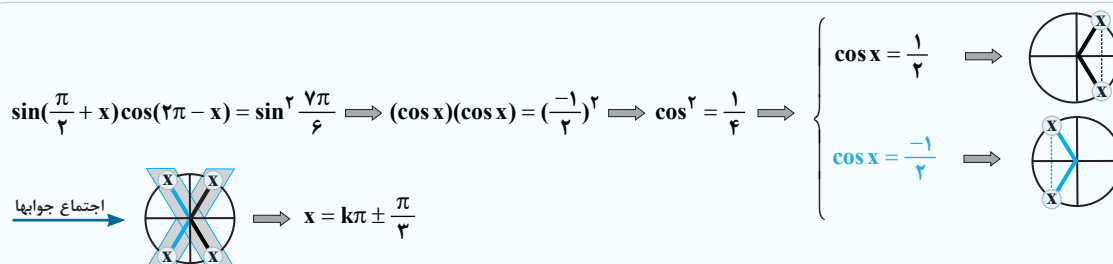
$$\frac{\cos 2x}{\cos(x + \frac{\pi}{4})} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 & (1) \\ \cos(x + \frac{\pi}{4}) \neq 0 & (2) \end{cases}$$



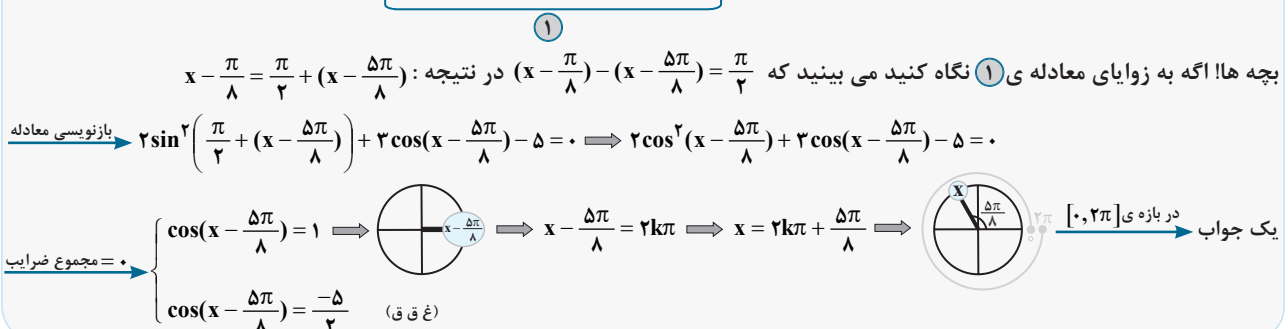
(۳): ۶۴

خواسته ی مسئله: تعداد جواب های معادله ی $\cos 2x \cos 3x = 0$ در بازه $[0, 2\pi]$ 

(۴): ۶۵



(۱): ۶۶

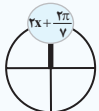
خواسته ی مسئله: تعداد جواب های معادله ی $2\sin^2(x - \frac{\pi}{\lambda}) + 3\cos(x - \frac{\Delta\pi}{\lambda}) = 5$ در بازه $[0, 2\pi]$ 

۶۷: (۲) خواسته ی مسئله: مجموع ریشه های معادله ی $\tan(x + \frac{\pi}{y}) + \tan(\frac{5\pi}{14} - x) = 2$ در بازه ی $[0, \pi]$.

در اینجا بین زوایای معادله ی ① رابطه ی $(x + \frac{\pi}{y}) + (\frac{5\pi}{14} - x) = \frac{\pi}{y}$ برقراره. پس این دو زاویه، متمم هم هستن.

می دونید که اگر α و β متمم هم باشن، اون موقع $\tan \alpha = \cot \beta$ $\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}$

بازنویسی معادله ① $\tan(x + \frac{\pi}{y}) + \cot(x + \frac{\pi}{y}) = 2 \Rightarrow \frac{2}{\sin 2(x + \frac{\pi}{y})} = 2 \Rightarrow \sin(2x + \frac{2\pi}{y}) = 1 \Rightarrow$



$2x + \frac{2\pi}{y} = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x + \frac{\pi}{y} = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi + \frac{3\pi}{8} \Rightarrow$

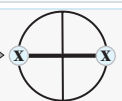


$\Rightarrow$ مجموعه ریشه ها $\Rightarrow$ در بازه ی $[0, \pi]$ معادله فقط یک ریشه داره $(x = \frac{3\pi}{8})$

۶۸: (۴) $\cos^2 x - \tan(x + \frac{\pi}{4}) \cot(x + \frac{\pi}{4}) = 0 \Rightarrow \cos^2 x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = \pm 1 \Rightarrow x = k\pi$

①

$\tan \alpha \cot \alpha = 1$



از اونجایی که $x = k\pi$ در معادله ی ① صدق میکنه پس جواب معادله هست.

۶۹: (۳) خواسته ی مسئله: تعداد جوابهای معادله ی $\tan x \tan 2x = \sin x \sin 2x$ در بازه ی $[\frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}]$

$\frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \sin x \cdot \sin 2x \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 & ① \\ \sin 2x = 0 & ② \\ \frac{1}{\cos x \cos 2x} = 1 & ③ \end{cases}$

① در بازه ی $[\frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}]$ $x = k\pi \Rightarrow x = \pi, 2\pi$ A

② در بازه ی $[\frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}]$ $2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ B

③ $\cos x \cos 2x = 1$
 از جوابهای دو معادله اشتراک می گیریم $\cos x = 1 \Rightarrow \cos 2x = 1$
 از جوابهای دو معادله اشتراک می گیریم $\cos x = -1 \Rightarrow \cos 2x = -1$
 در بازه ی $[\frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}]$ $x = 2\pi$ C

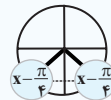
از اجتماع A و B و C به جوابهای $x = \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ می رسیم. اما $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ در معادله ی اولیه صدق نمی کنه. پس:
 جوابهای نهایی معادله: $x = \pi, 2\pi$

۷۰: (۲) خواسته ی مسئله: تعداد ریشه های معادله ی $2 \cot 2x + \tan x = \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x}$ در بازه ی $[0, 2\pi]$

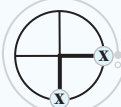
① $(\cot x - \tan x) + \tan x = \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} \Rightarrow \frac{1}{\tan x} = \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} \Rightarrow \tan x - \tan^2 x = 1 + \tan x \Rightarrow \tan^2 x = -1 \Rightarrow$ معادله ریشه نداره
 $2 \cot 2x = \cot x - \tan x$

۷۱: (۴) خواسته ی مسئله: تعداد ریشه های معادله ی $\sin x - \cos x = -1$ در بازه ی $[0, 2\pi]$

$\sin x - \cos x = -1 \xrightarrow{\text{رابطه ی معرکه}} \sqrt{2} \sin(x - \frac{\pi}{4}) = -1 \Rightarrow \sin(x - \frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$

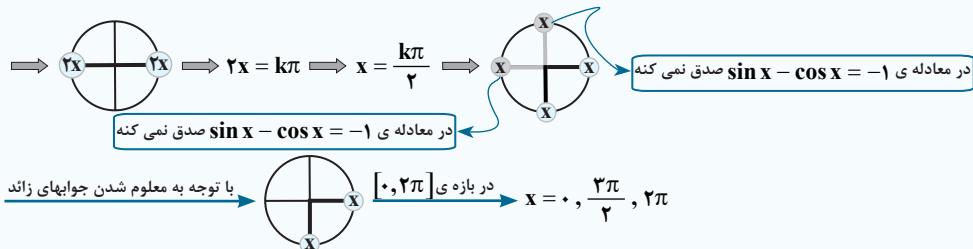


$\begin{cases} x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi \\ x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{5\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \end{cases} \xrightarrow{\text{اجتماع جوابها}} \text{در بازه ی } [0, 2\pi] \Rightarrow x = 0, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$



روش دوم: دو طرف معادله رو به توان ۲ می‌رسونیم. اما حواسم باید جمع باشه که به توان زوج رسوندن یک معادله، ممکنه جوابهای زائد تولید کنه.

$$\sin x - \cos x = -1 \xrightarrow{\text{به توان } 2} \sin^2 x + \cos^2 x - 2 \sin x \cos x = 1 \Rightarrow 1 - \sin 2x = 1 \Rightarrow \sin 2x = 0$$



(۳): ۷۲

$$\tan^2 x - \cos^2 x = 1 \Rightarrow \tan^2 x - 1 = \cos^2 x \Rightarrow -\frac{(1 - \tan^2 x)}{(1 + \tan^2 x)} = \frac{(1 - \tan^2 x)}{(1 + \tan^2 x)} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 1 - \tan^2 x = 0 \Rightarrow \tan^2 x = 1 \Rightarrow \tan x = \pm 1 \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \\ -1 = \frac{1}{1 + \tan^2 x} \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

(۴): ۷۳

خواسته ی مسئله: مجموعه ی مقادیر i

داده ی مسئله: $x = 2k\pi + \frac{i\pi}{6}$ جواب معادله ی $\cos 2x = \sin x$ هست

$$\cos 2x = \sin x \Rightarrow 1 - 2\sin^2 x = \sin x \Rightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} \sin x = -1 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

با توجه به ① $i = \{1, 5, 9\}$

اجتماع جوابها روی دایره مثلثاتی

(۱): ۷۴

خواسته ی مسئله: تعداد جوابهای معادله ی $\sin^2 x = \cos^2 x + \frac{1}{4}$ در بازه ی $[0, \pi]$

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \frac{-1}{4} \Rightarrow \cos 2x = \frac{-1}{4} \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \alpha \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\alpha}{2}$$

در بازه ی $[0, \pi]$ دو جواب

(۱): ۷۵

خواسته ی مسئله: تعداد ریشه های معادله ی $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4}$ در بازه ی $[0, 2\pi]$

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4} \Rightarrow 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x = \frac{3}{4} \Rightarrow 2\sin^2 x \cos^2 x = -\frac{1}{4} \quad (\text{غ ق ق}) \Rightarrow \text{معادله ریشه نداره}$$

(۲): ۷۶

خواسته ی مسئله: مجموع جواب های معادله ی $\tan x + \tan(\frac{3\pi}{2} - x) = 2 \tan \frac{3\pi}{4}$ در بازه ی $[0, 2\pi]$

$$\tan x + \cot x = 2(-1) \Rightarrow \frac{2}{\sin 2x} = -2 \Rightarrow \sin 2x = -1 \Rightarrow 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$$

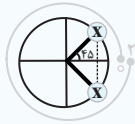
$$\Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow \text{در بازه ی } [0, 2\pi] \text{ جوابها } = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \Rightarrow \text{مجموع جوابها} = \frac{3\pi}{4} + \frac{7\pi}{4} = \frac{5\pi}{2}$$

روش دوم: $\tan x + \cot x = 2(-1) \Rightarrow \tan x + \frac{1}{\tan x} = -2 \Rightarrow \tan x = -1 \Rightarrow$

در بازه ی $[0, 2\pi]$ $x = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

مجموع جوابها $= \frac{3\pi}{4} + \frac{7\pi}{4} = \frac{5\pi}{2}$

۷۷: (۳) خواسته ی مسئله: تعداد جواب های معادله ی $\frac{\cos x}{\sqrt{2} \cos x - 1} = 2$ در بازه ی $[0, 2\pi]$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \rightarrow \frac{2 \cos^2 x - 1}{\sqrt{2} \cos x - 1} = 2 &\Rightarrow \frac{(\sqrt{2} \cos x - 1)(\sqrt{2} \cos x + 1)}{(\sqrt{2} \cos x - 1)} = 2 \Rightarrow \sqrt{2} \cos x + 1 = 2 \Rightarrow \sqrt{2} \cos x = 1 \\ \Rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} &\Rightarrow \text{دو جواب در بازه ی } [0, 2\pi] \end{aligned}$$


۷۸: (۱) داده ی مسئله: معادله ی $\sin(\frac{\pi}{2} - x) + \tan \phi \cdot \sin x = m - 1$ جواب دارد. خواسته ی مسئله: محدوده ی m چیست؟

$$\textcircled{1} \rightarrow \cos x + \sqrt{3} \sin x = m - 1 \xrightarrow{\text{رابطه ی معرکه}} 2 \cos(x - \frac{\pi}{3}) = m - 1 \Rightarrow \cos(x - \frac{\pi}{3}) = \frac{m - 1}{2} \textcircled{2}$$

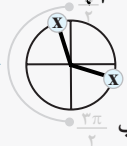
برای اینکه معادله ی $\textcircled{2}$ جواب داشته باشد لازم است که $-1 \leq \frac{m - 1}{2} \leq 1$ باشد. یعنی $-2 \leq m - 1 \leq 2$ و در نتیجه: $-1 \leq m \leq 3$

$$\sqrt{2} \sin(\frac{\pi}{4} - x) = 1 + \sin(\frac{5\pi}{4} + x) \Rightarrow -\sqrt{2} \sin(x - \frac{\pi}{4}) = 1 + \cos x$$

ربع دوم

$$\xrightarrow{\text{رابطه ی معرکه}} -(\sin x - \cos x) = 1 + \cos x \Rightarrow -\sin x + \cos x = 1 + \cos x \Rightarrow \sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$$


۸۰: (۴) خواسته ی مسئله: تعداد جواب های معادله ی $\sin^3 x + \cos^3 x + 2 \sin^2 x \cos x + 2 \cos^2 x \sin x = \frac{1}{3}$ در بازه ی $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$

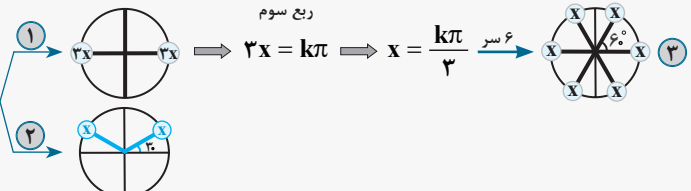
$$\begin{aligned} \textcircled{1} \rightarrow (\sin x + \cos x)^3 &= \frac{1}{3} \Rightarrow \sin x + \cos x = \frac{1}{\sqrt{3}} \xrightarrow{\text{رابطه ی معرکه}} \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \Rightarrow \sin(x + \frac{\pi}{4}) &= \frac{1}{\sqrt{2} \times \sqrt{3}} \Rightarrow \sin(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{عقربه ها رو در جهت منفی می چرخونیم تا زاویه ی } x + \frac{\pi}{4} \text{ به } x \text{ تبدیل بشه} \end{aligned}$$


۸۱: (۳) داده ی مسئله: $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ و رابطه ی $2 \sin x + 1 = a \sin \frac{x + \theta}{2} \cos \frac{x - \theta}{2}$ یک اتحاد خواسته ی مسئله: $a \cdot \theta = ?$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \rightarrow 2 \sin x + 1 &= \frac{a}{2} (2 \sin \frac{x + \theta}{2} \cos \frac{x - \theta}{2}) \Rightarrow 2 \sin x + 1 = \frac{a}{2} (\sin x + \sin \theta) \\ \text{تبدیل ضرب به جمع} &\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} 2 &= \frac{a}{2} \Rightarrow a = 4 \\ 1 &= \frac{a}{2} \sin \theta \Rightarrow \sin \theta = \frac{1}{2} \end{aligned} \right. \xrightarrow{0 < \theta < \frac{\pi}{2}} \theta = \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

یا توجه به اتحاد بودن این رابطه

۸۲: (۴) خواسته ی مسئله: جواب های معادله ی $\cos 4x - \cos 2x = \cos(3x - \frac{3\pi}{2})$ چند نقطه روی دایره ی مثلثاتی ایجاد می کنن؟

$$\cos 4x - \cos 2x = \cos(\frac{3\pi}{2} - 3x) \Rightarrow -2 \sin 3x \sin x = -\sin 3x \Rightarrow \begin{cases} \sin 3x = 0 & \textcircled{1} \\ \sin x = \frac{1}{2} & \textcircled{2} \end{cases}$$


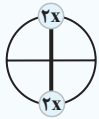
نقطه ۸

(۴): ۸۳

آماده سازی برای تبدیل ضرب به جمع

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{1}{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{4} \xrightarrow{\text{تبدیل ضرب به جمع}}$$

$$\cos\left[\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right] - \cos\left[\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right] = -\frac{1}{4} \Rightarrow \cos 2x - \cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{4} \Rightarrow \cos 2x = 0 \Rightarrow$$



$$\Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \quad \text{خواسته ی مسئله:}$$

(۴): ۸۴

خواسته ی مسئله: مجموع جواب های معادله ی $\cos 6x \cdot \cos 4x = \frac{1}{4} \cos 10x$ در بازه ی $[0, 2\pi]$:

$$2 \cos 6x \cdot \cos 4x = \cos 10x \xrightarrow{\text{تبدیل ضرب به جمع}} \cos(6x + 4x) + \cos(6x - 4x) = \cos 10x \Rightarrow \cos 10x + \cos 2x = \cos 10x$$

$$\Rightarrow \cos 2x = 0 \Rightarrow \text{Unit circle diagram showing } 2x \text{ at } (0, 1) \text{ and } (0, -1) \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \Rightarrow \text{Unit circle diagram showing } x \text{ at } \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$$

$$x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \Rightarrow \text{مجموع جواب ها} = \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} + \frac{5\pi}{4} + \frac{7\pi}{4} = \frac{16\pi}{4} = 4\pi$$

(۱): ۸۵

خواسته ی مسئله: تعداد جواب های معادله ی $\sin 3x + \cos 2x = 0$ در بازه ی $[0, \pi]$:

$$\sin 3x + \cos 2x = 0 \Rightarrow \sin 3x = -\cos 2x \Rightarrow \sin 3x = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2x\right) \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + \left(\frac{3\pi}{2} + 2x\right) \\ 3x = 2k\pi + \pi - \left(\frac{3\pi}{2} + 2x\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \\ \Delta x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \\ x = \frac{2k\pi}{5} - \frac{\pi}{10} \end{cases} \Rightarrow \text{Unit circle diagrams showing solutions in } [0, \pi]$$

بچه ها! همونطور که می بینید، معادله در بازه $[0, \pi]$ فقط دو ریشه داره.

(۳): ۸۶

خواسته ی مسئله: تعداد ریشه های متمایز معادله ی $\sin 2x \cos 2x \cos 4x = 2 \sin x$ در بازه ی $[0, 2\pi]$:

$$2 \sin x \cos x \cos 2x \cos 4x = 2 \sin x \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \quad (1) \\ \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x = 1 \quad (2) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow \text{Unit circle diagram showing } x \text{ at } 0, \pi, 2\pi \Rightarrow x = 0, \pi, 2\pi \quad (3)$$

$$(2) \Rightarrow \cos x = 1, \cos 2x = 1, \cos 4x = 1 \xrightarrow{\text{اشتراک جوابهای این سه معادله}} \text{Unit circle diagram showing } x \text{ at } 0, \pi, 2\pi \Rightarrow x = 0, \pi, 2\pi \quad (4)$$

$$(3) \cup (4) \Rightarrow x = 0, \pi, 2\pi \Rightarrow \text{این معادله در بازه } [0, 2\pi] \text{ سه ریشه داره}$$

بچه ها! از معادله ی (۲) نتایج دیگه ای هم میشه گرفت که قابل قبول نیستن. مثلاً:

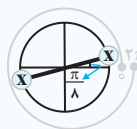
$$\cos x \cos 2x \cos 4x = 1 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = -1, \cos 2x = -1, \cos 4x = 1 & \text{غ ق ق} \\ \cos x = -1, \cos 2x = 1, \cos 4x = -1 & \text{غ ق ق} \\ \cos x = 1, \cos 2x = -1, \cos 4x = -1 & \text{غ ق ق} \end{cases} \quad (\text{چرا؟})$$

(۲): ۸۷

خواسته ی مسئله: تعداد جواب های معادله ی $\sin x - \cos(x + \frac{\pi}{4}) = 0$ در بازه ی $[0, 2\pi]$

$$\cos(x + \frac{\pi}{4}) = \sin x \Rightarrow \cos(x + \frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4} - x) \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + (\frac{\pi}{4} - x) \\ x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi - (\frac{\pi}{4} - x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ \frac{3\pi}{4} = 2k\pi \end{cases} \quad (1)$$

$$\textcircled{1} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{8} \Rightarrow \text{در بازه ی } [0, 2\pi] \Rightarrow \text{دو جواب}$$



(۲): ۸۸

$$\tan 2x \cdot \tan 2x = 1 \Rightarrow \tan 2x = \frac{1}{\tan 2x} \Rightarrow \tan 2x = \cot 2x \Rightarrow \tan 2x = \tan(\frac{\pi}{2} - 2x)$$

$$2x = k\pi + (\frac{\pi}{2} - 2x) \Rightarrow \Delta x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

(۴): ۸۹

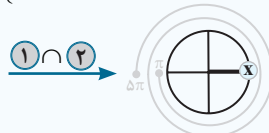
خواسته ی مسئله: تعداد جواب های معادله ی $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 3 + \sin^2 x$ در بازه ی $[\pi, 5\pi]$

بچه ها! شما نمی توانید به راحتی این معادله رو ساده کنید. اما اگر کمی دقت کنید می بینید که برد سمت چپ معادله با برد سمت راست فقط یک نقطه ی مشترک دارد، یعنی:

$$\left. \begin{array}{l} \text{سمت راست معادله: } 3 + \sin^2 x \geq 3 \\ \text{سمت چپ معادله: } \cos x + \cos 2x + \cos 3x \leq 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{این معادله فقط در صورتی برقراره که هر دو طرف، همزمان صفر بشن}$$

$$3 + \sin^2 x = 3 \Rightarrow \sin^2 x = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \quad (1)$$

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 3 \Rightarrow \cos x = 1, \cos 2x = 1, \cos 3x = 1 \Rightarrow \text{اشتراک جوابهای این سه معادله}$$



$$\text{در بازه ی } [\pi, 5\pi] \Rightarrow \text{دو جواب}$$

(۴): ۹۰

خواسته ی مسئله: تعداد ریشه های معادله ی $2 - \sqrt{\cos 2x} = \tan x + \cot x$ در بازه ی $[0, 2\pi]$

بچه ها! این سؤال هم تو دسته ی سوالاتیه که برد سمت چپ و راست معادله، فقط در یک نقطه اشتراک دارن. میگی نه نگاه کن:

$$\cos 2x \in [-1, 1] \Rightarrow \sqrt{\cos 2x} \in [0, 1] \Rightarrow -\sqrt{\cos 2x} \in [-1, 0] \Rightarrow 2 - \sqrt{\cos 2x} \in [1, 2]$$

$$\tan x + \frac{1}{\tan x} \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty) \Rightarrow \tan x + \cot x \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$$

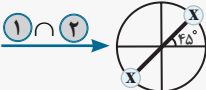
همونطور که می بینید، عدد ۲ تنها نقطه ی مشترک بین برد های سمت چپ و راست معادله هست. پس این معادله فقط زمانی برقراره که

$$\tan x + \frac{1}{\tan x} = 2 \Rightarrow \tan x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \quad (1)$$

همزمان $2 - \sqrt{\cos 2x} = 2$ و $\tan x + \cot x = 2$ باشد.

$$2 - \sqrt{\cos 2x} = 2 \Rightarrow \cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$$

$$\text{در بازه ی } [0, 2\pi] \Rightarrow \text{دو جواب}$$



(۲): ۹۱

خواسته ی مسئله: تعداد ریشه های معادله ی $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{\lambda} - \cos^2(x + \frac{\pi}{4})$ در بازه ی $[0, 2\pi]$

بچه ها! قبل از هر عملی می خوام شما رو با رابطه ی $\sin^{2n} x + \cos^{2n} x \in [\frac{1}{\lambda^{n-1}}, 1]$ آشنا کنم. مثلاً:

$$n = 4: \sin^4 x + \cos^4 x \in [\frac{1}{\lambda^3}, 1] \Rightarrow \sin^4 x + \cos^4 x \in [\frac{1}{\lambda}, 1] \quad (1)$$

چه جالب! محدوده ی سمت چپ معادله پیدا شد. حالا که تا اینجا اومدم، بهتره برم سراغ محدوده ی سمت راست معادله:

$$\cos^2(x + \frac{\pi}{4}) \in [0, 1] \Rightarrow -\cos^2(x + \frac{\pi}{4}) \in [-1, 0] \Rightarrow \frac{1}{\lambda} - \cos^2(x + \frac{\pi}{4}) \in [-\frac{\lambda-1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}] \quad (2)$$

باز هم در این سؤال، مثل دو سؤال قبلی، محدوده ی سمت چپ و راست معادله فقط در یک نقطه (یعنی $\frac{1}{\lambda}$) مشترک هستن.

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\lambda} - \cos^2(x + \frac{\pi}{4}) &= \frac{1}{\lambda} \\ \sin^4 x + \cos^4 x &= \frac{1}{\lambda} \end{aligned} \right\} \text{ پس این معادله فقط در صورتی میتونه برقرار باشه که همزمان:}$$

بچه ها! لزومی نداره که هر دو معادله ی بالا رو حل کنید و بین جوابیهایی که از دو معادله بدست می آید اشتراک بگیرید.

کافیه شما یکی از معادلات ساده تر رو انتخاب کنید، جوابش رو بدست بیارید و جواب بدست اومده رو در معادله ی دیگه چک کنید. اگه صدق کرد به اون جواب می گیم جواب مشترک دو معادله و یا به عبارت دیگه جواب نهایی معادله. مثلاً:

$$\frac{1}{\lambda} - \cos^2(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \cos^2(x + \frac{\pi}{4}) = 0 \Rightarrow \cos(x + \frac{\pi}{4}) = 0 \Rightarrow x + \frac{\pi}{4} = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}$$

معادله ی ساده تر

چک کردن در معادله ی دوم $x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ در بازه ی $[0, 2\pi]$

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{\lambda} \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow (\frac{\sqrt{2}}{2})^4 + (\frac{\sqrt{2}}{2})^4 = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{\lambda} \\ x = \frac{5\pi}{4} \Rightarrow (-\frac{\sqrt{2}}{2})^4 + (-\frac{\sqrt{2}}{2})^4 = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{\lambda} \end{cases}$$

معادله ی دوم

بنابراین $x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ جوابهای معادله ی $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{\lambda} - \cos^2(x + \frac{\pi}{4})$ در بازه ی $[0, 2\pi]$ هستن.

(۳): ۹۲

خواسته ی مسئله: تعداد جواب های معادله ی $\tan^2 x - 2\cot^2 x = 1$ در بازه ی $[0, 2\pi]$

$$\tan^2 x - 2\cot^2 x = 1 \xrightarrow{\times \tan^2 x} \tan^4 x - 2 = \tan^2 x \Rightarrow (\tan^2 x)^2 - (\tan^2 x) - 2 = 0 \xrightarrow{a+b=c}$$

$$\begin{cases} \tan x = -1 \Rightarrow \text{نقطه } (-1, 1) \text{ و } (1, -1) \\ \tan x = 2 \Rightarrow \text{نقطه } (2, 0) \text{ و } (-2, 0) \end{cases} \xrightarrow{\text{اجتماع جوابها}} \text{در بازه ی } [0, 2\pi] \xrightarrow{\text{جواب ۴}}$$

(۳): ۹۳

خواسته ی مسئله: تعداد جواب های معادله ی $\tan^3 x \cot x + \cot^4 x \tan^2 x = 4$ در بازه ی $[0, 2\pi]$

$$\tan^3 x \cot x + \cot^4 x \tan^2 x = 4 \Rightarrow \tan^2 x + \cot^2 x = 4 \xrightarrow{\times \tan^2 x} \tan^4 x + 1 = 4 \tan^2 x \Rightarrow (\tan^2 x)^2 - 4(\tan^2 x) + 1 = 0$$

$$\Delta = 16 - 4 = 12 \Rightarrow \begin{cases} \tan^2 x = \frac{4 + \sqrt{12}}{2} \\ \tan^2 x = \frac{4 - \sqrt{12}}{2} \end{cases} \xrightarrow{\alpha > \beta} \begin{cases} \tan^2 x = \alpha \\ \tan^2 x = \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tan x = \pm \sqrt{\alpha} \\ \tan x = \pm \sqrt{\beta} \end{cases} \xrightarrow{\text{در بازه ی } [0, 2\pi]} \text{هشت جواب}$$

(۳): ۹۴

خواسته ی مسئله: تعداد n های طبیعی و دو رقمی که در معادله ی $3^{x-[x]} = \cos \frac{n\pi}{4}$ صدق می کنه.فرض می کنیم n به عدد طبیعی که در معادله ی ① صدق می کنه. بنابراین:

$$3^{n-[n]} = \cos \frac{n\pi}{4} \Rightarrow 3^0 = \cos \frac{n\pi}{4} \Rightarrow \cos \frac{n\pi}{4} = 1 \Rightarrow \frac{n\pi}{4} = 2k\pi \Rightarrow n = 8k$$

حالا که فهمیدیم n مضرب ۴ هست، باید به دنبال تعداد اعداد دو رقمی مضرب ۴ بگردیم. یعنی:

$$k=3 \quad k=4 \quad k=24 \Rightarrow \text{تعداد اعداد دو رقمی مضرب ۴} = (24-3)+1 = 22$$

$$n = 8k \Rightarrow n = 24, 32, 40, \dots, 96$$

اعداد دورقمی مضرب ۴

(۳): ۹۵

داده ی مسئله: سه جمله ی غیر صفر $\sin \alpha, \sin 2\alpha, \sin 4\alpha$ یک دنباله ی هندسی رو تشکیل دادن.خواسته ی مسئله: جواب کلی معادله ی $\cos x = \sin \alpha$

$$\begin{aligned} & \times 2 \cos \alpha \quad \times 2 \cos 2\alpha \\ & \sin \alpha, \sin 2\alpha, \sin 4\alpha \xrightarrow{\text{دنباله، هندسیه}} \cos \alpha = \cos 2\alpha \Rightarrow \cos \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 \Rightarrow 2\cos^2 \alpha - \cos \alpha - 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos \alpha = 1 \\ \cos \alpha = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \sin \alpha = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \text{از اونجایی که } \sin \alpha \text{ اولین جمله ی این دنباله ی هندسیه و جملات دنباله غیر صفر هستن پس:}$$

$$\sin \alpha = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos x = \sin \alpha \Rightarrow \cos x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$$

(۳): ۹۶

اگر به معادله ی $\sqrt{-x} - \sqrt{x} = \sin \pi[x]$ دقت کنید می بینید که $[x]$ عدد صحیح، بنابراین $\sin \pi[x] = 0$.پس شما با معادله ی $\sqrt{-x} - \sqrt{x} = 0$ سروکار دارید.

$$\sqrt{-x} = \sqrt{x} \xrightarrow{\text{با شرط } [-x] \geq 0} [-x] = x \xrightarrow{\text{روش هندسی}} \begin{cases} y = [-x] \\ [-x] \geq 0 \end{cases}$$

همونطور که می بینید x های صحیح و نا مثبت محل برخورد نمودار دو تابع $y = |x|$ و $y = [-x]$ هستن. بنابراین: $x \in \mathbb{Z} - \mathbb{Z}^+$

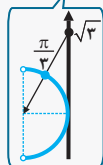
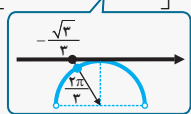
(۱): ۹۷

$$\cos \left[\sin^{-1} \left(-\frac{8}{17} \right) \right] = \sqrt{1 - \left(-\frac{8}{17} \right)^2} = \sqrt{1 - \frac{64}{289}} = \sqrt{\frac{225}{289}} = \frac{15}{17}$$

$$\cos(\sin^{-1} x) = \sqrt{1-x^2}$$

(۲): ۹۸

$$\sin \left[\frac{3}{4} \cot^{-1} \left(-\frac{\sqrt{3}}{3} \right) \right] + \cos \left[2 \tan^{-1} (\sqrt{3}) \right] = \sin \left[\frac{3}{4} \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right] + \cos \left[2 \left(\frac{\pi}{3} \right) \right] = \sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{2\pi}{3} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$



(۴): ۹۹

$$\sin \left[\cos^{-1} \left(\frac{3}{5} \right) + \cot^{-1} (-1) \right] = \sin \left[\cos^{-1} \left(\frac{3}{5} \right) + \frac{3\pi}{4} \right] = \sin \left(\cos^{-1} \frac{3}{5} \right) \cos \left(\frac{3\pi}{4} \right) + \cos \left(\cos^{-1} \frac{3}{5} \right) \sin \left(\frac{3\pi}{4} \right)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$= \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5} \right)^2} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \left(\frac{3}{5} \right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \left(\frac{4}{5} \right) \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \left(\frac{3}{5} \right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{-4\sqrt{2}}{10} + \frac{3\sqrt{2}}{10} = \frac{-\sqrt{2}}{10}$$

(۱): ۱۰۰

$$a = \frac{\sin(\tan^{-1} \frac{3}{4})}{\cos(\cot^{-1} \frac{3}{4})} \Rightarrow a = \frac{\sin(\cot^{-1} \frac{3}{4})}{\cos(\pi - \cot^{-1} \frac{3}{4})} \Rightarrow a = \frac{\sin(\cot^{-1} \frac{3}{4})}{-\cos(\cot^{-1} \frac{3}{4})} \Rightarrow -\tan(\cot^{-1} \frac{3}{4}) = -\frac{3}{4}$$

$x > 0: \tan^{-1} = \cot^{-1} \frac{1}{x}$ $\tan(\cot^{-1} x) = \frac{1}{x}$
 $\cot^{-1}(-x) = \pi - \cot^{-1}(x)$ $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$

$$b = \cot\left(\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \Rightarrow b = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} \Rightarrow b = \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{3}}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} \Rightarrow b = \frac{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} \Rightarrow b = \sqrt{2}$$

$$\begin{cases} \cos(\sin^{-1} x) = \sqrt{1 - x^2} \\ \sin(\sin^{-1} x) = x \end{cases} \xrightarrow{\text{تقسیم}} \cot(\sin^{-1} x) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$$

$$a = \frac{-2}{3} \text{ و } b = \sqrt{2} \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{\left(\frac{-2}{3}\right)}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \frac{-2}{3\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{3}$$

(۲): ۱۰۱

$$\sin\left(2\sin^{-1}\frac{3}{5} + 2\cos^{-1}\frac{3}{5}\right) = \sin\left[2\left(\sin^{-1}\frac{3}{5} + \cos^{-1}\frac{3}{5}\right) + \cos^{-1}\frac{3}{5}\right] = \sin\left(\pi - \cos^{-1}\frac{3}{5}\right) = -\sin\left(\cos^{-1}\frac{3}{5}\right) = -\sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = -\frac{4}{5}$$

$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$

(۳): ۱۰۲

خلاصه ی مسئله: $\cos^{-1}\frac{1}{3} + \cos^{-1}\frac{2}{3} = a \Rightarrow \sin^{-1}\frac{1}{3} + \sin^{-1}\frac{2}{3} = ?$

خواسته ی مسئله: $\sin^{-1}\frac{1}{3} + \sin^{-1}\frac{2}{3} = \left(\frac{\pi}{2} - \cos^{-1}\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \cos^{-1}\frac{2}{3}\right) = \pi - \left(\cos^{-1}\frac{1}{3} + \cos^{-1}\frac{2}{3}\right) = \pi - a$

با توجه به ۱

(۱): ۱۰۳

$$\tan^{-1}(\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \tan^{-1}(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}\right) + \tan^{-1}(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = \frac{\pi}{2}$$

$(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = 1 \Rightarrow \sqrt{3} - \sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$

$\tan^{-1} x + \tan^{-1} \frac{1}{x} \stackrel{x > 0}{=} \frac{\pi}{2}$

(۱): ۱۰۴

$$\cos^2\left(2\tan^{-1}\frac{1}{2}\right) = \left[\cos\left(2\tan^{-1}\frac{1}{2}\right)\right]^2 = \left(\frac{1 - \tan^2\left(\tan^{-1}\frac{1}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\tan^{-1}\frac{1}{2}\right)}\right)^2 = \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}\right)^2 = \left(\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}}\right)^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} = 0.36$$

$\cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$

(۲): ۱۰۵

$$\sin^2\left(\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{3}{5}\right) = \frac{1 - \cos\left(\cos^{-1}\frac{3}{5}\right)}{2} = \frac{1 - \frac{3}{5}}{2} = \frac{\frac{2}{5}}{2} = \frac{1}{5} = 0.2$$

$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$

(۴): ۱۰۶

$$\tan^2\left(\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{1}{3}\right) = \frac{1 - \cos\left(\cos^{-1}\frac{1}{3}\right)}{1 + \cos\left(\cos^{-1}\frac{1}{3}\right)} = \frac{1 - \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{1}{2}$$

$\tan^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha}$

(۲): ۱۰۷

$$\tan^{-1}\frac{1}{4} + \tan^{-1}\frac{3}{5} \stackrel{\frac{1}{4} \times \frac{3}{5} < 1}{=} \tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{4} + \frac{3}{5}}{1 - \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{5}\right)}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{17}{20}}{\frac{19}{20}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{17}{19}\right) = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$$

(۲): ۱۰۸ از فرض مسئله (یعنی $x > 0$ یا $x < -1$) همیشه فهمید که: $\frac{x}{x+1} > 0$

خواسته ی مسئله: $\tan^{-1}\frac{x}{x+1} - \cot^{-1}\frac{x+1}{x} = \cot^{-1}\frac{x+1}{x} - \cot^{-1}\frac{x+1}{x} = 0$

اگر $x > 0$ باشد اون موقع $\tan^{-1} \bigcirc = \cot^{-1} \bigcirc$

$$\sin^{-1} \frac{3}{5} + \cos^{-1} \frac{4}{5} = ?$$

بچه ها! اگه به مثلث معروف  دقت کنید می بینید که :

$$\sin \alpha = \frac{3}{5} \Rightarrow \alpha = \sin^{-1} \frac{3}{5} \quad (1)$$

$$\tan \alpha = \frac{3}{4} \Rightarrow \alpha = \tan^{-1} \frac{3}{4} \quad (2)$$

$$\cos \alpha = \frac{4}{5} \Rightarrow \alpha = \cos^{-1} \frac{4}{5} \quad (3)$$

$$\cot \alpha = \frac{4}{3} \Rightarrow \alpha = \cot^{-1} \frac{4}{3} \quad (4)$$

با توجه به روابط (۱) و (۲) و (۳) و (۴) : $\sin^{-1} \frac{3}{5} + \cos^{-1} \frac{4}{5} \xrightarrow{(1)(2)(3)(4)} \tan^{-1} \frac{3}{4} + \tan^{-1} \frac{3}{4} \Rightarrow \tan^{-1} \left(\frac{\frac{3}{4} + \frac{3}{4}}{1 - (\frac{3}{4})(\frac{3}{4})} \right) = \tan^{-1} \frac{24}{7} = \cot^{-1} \frac{7}{24}$

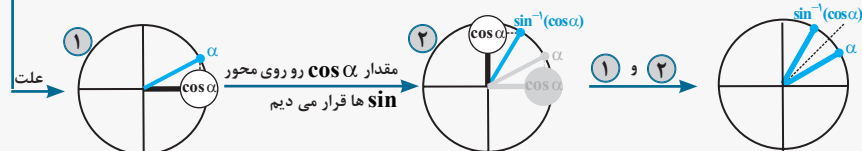
(۱۱۰): توجه: اگه α یک زاویه ی حاده باشد، اون موقع زوایای $\cot^{-1}(\tan \alpha)$ و $\tan^{-1}(\cot \alpha)$ ، $\cos^{-1}(\sin \alpha)$ ، $\sin^{-1}(\cos \alpha)$ متتام زاویه ی α هستند. یعنی:

$$\sin^{-1}(\cos \alpha) = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

$$\cos^{-1}(\sin \alpha) = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

$$\tan^{-1}(\cot \alpha) = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

$$\cot^{-1}(\tan \alpha) = \frac{\pi}{2} - \alpha$$



حالا بریم سراغ حل مسئله و ببینیم که از رابطه ی $\cos^{-1}(\sin x) = \sin \alpha$ چه نتیجه ای رو میشه گرفت.

$$\cos^{-1}(\sin x) = \sin \alpha \Rightarrow \frac{\pi}{2} - x = \sin \alpha \Rightarrow x + \sin \alpha = \frac{\pi}{2}$$

فرض کنید x یک زاویه ی حاده هست

$$\sin^{-1} \left(\sin^2 \frac{\pi}{4} - \cos^2 \frac{\pi}{4} \right) = \sin^{-1} \left[\left(\sin^2 \frac{\pi}{4} + \cos^2 \frac{\pi}{4} \right) (\sin^2 \frac{\pi}{4} - \cos^2 \frac{\pi}{4}) \right] = \sin^{-1} (-\cos \frac{\pi}{2}) =$$

$$-\sin^{-1}(\cos \frac{\pi}{2}) = -\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = -\cos 2\alpha$$

$$\sin^{-1}(\cos \alpha) = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

زاویه ی حاده

خواسته ی مسئله حاصل: $\sin^{-1}(\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta)$

داده ی مسئله: $0 < \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$

$$\sin^{-1}(\cos(\alpha + \beta)) = \frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)$$

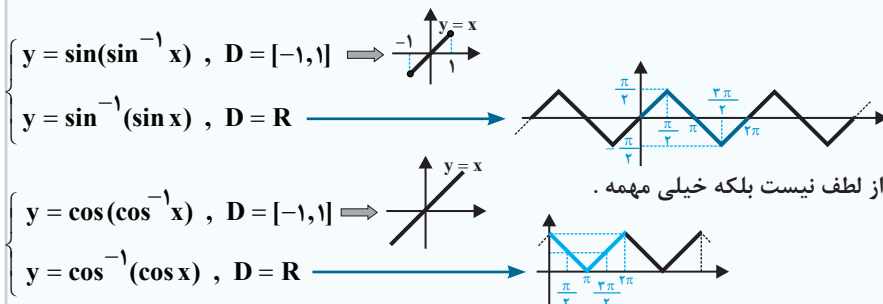
با توجه به داده ی مسئله، $\alpha + \beta$ حاده هست

(۱۱۳): بچه ها! بعضی ها فکر می کنند که دو تابع $y = \sin^{-1}(\sin x)$ و $y = \sin(\sin^{-1} x)$ با هم مساوی هستند.

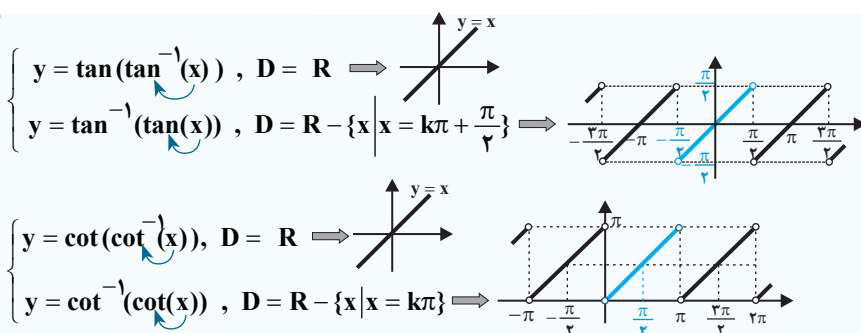
در صورتی که اگه به دامنه ی دو تابع دقت بشه معلوم میشه که از این خبرا نیست.

$$\begin{cases} y = \sin(\sin^{-1}(x)) \xrightarrow{\text{در این تابع، } x \text{ باید وارد } \sin^{-1}} x \in [-1, 1] \\ y = \sin^{-1}(\sin(x)) \xrightarrow{\text{در این تابع، } x \text{ باید وارد } \sin} x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

از طرفی تابع $y = \sin(\sin^{-1} x)$ متناوب نیست اما تابع $y = \sin^{-1}(\sin x)$ یک تابع متناوبه. اما بریم سراغ رسم نمودار:



بچه ها! رسم نمودار توابع زیر نه تنها خالی از لطف نیست بلکه خیلی مهمه.



۱۱۴: (۴) خواسته ی مسئله: مجموع جواب های معادله ی $\tan^{-1} 2x - \cot^{-1} x = \frac{\pi}{4}$

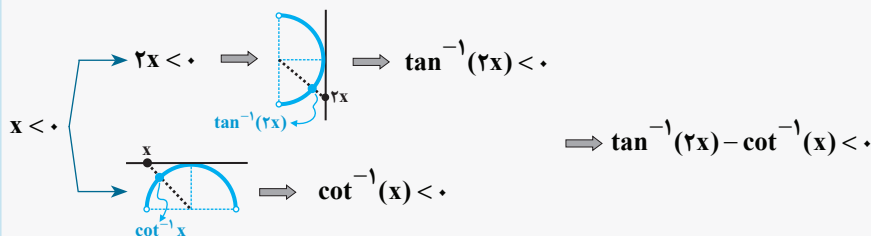
①

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \rightarrow \tan^{-1} 2x &= \frac{\pi}{4} + \cot^{-1} x \xrightarrow{\text{از طرفین tan میگیریم}} 2x = \frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan(\cot^{-1} x)}{1 - \tan \frac{\pi}{4} \tan(\cot^{-1} x)} \Rightarrow 2x = \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} \Rightarrow 2x = \frac{x+1}{x-1} \\ \Rightarrow 2x &= \frac{x+1}{x-1} \Rightarrow 2x^2 - 2x = x+1 \Rightarrow 2x^2 - 3x - 1 = 0 \end{aligned}$$

از اونجایی که $a \cdot c < 0$ ، این معادله ی درجه ی ۲ یک ریشه ی مثبت و یک ریشه ی منفی داره. پس قاعدتاً باید مجموع ریشه های معادله ی

① برابر بشه با: $-\frac{b}{a}$ یا $\frac{3}{2}$

اما اینطوری نیست. چون x های منفی در معادله ی ① صدق نمی کنن و در نتیجه جواب های معادله هم نخواهند بود. علتش اینه که:



با توجه به اینکه $\tan^{-1}(2x) - \cot^{-1}(x)$ منفی شد پس نمی تونه با $\frac{\pi}{4}$ برابر بشه. یعنی: $(x < 0 \Rightarrow \tan^{-1}(2x) - \cot^{-1}(x) \neq \frac{\pi}{4})$

پس فقط ریشه ی مثبت معادله ی $2x^2 - 3x - 1 = 0$ جواب معادله ی ① هست.

$$2x^2 - 3x - 1 = 0 \xrightarrow{\Delta = 9 + 8 = 17} x = \frac{3 + \sqrt{17}}{4}$$

چون این معادله فقط یک جواب داره، پس مجموع جواب ها برابر میشه با تنها جواب معادله. یعنی: $x = \frac{3 + \sqrt{17}}{4}$

۱۱۵: (۲) قبل از اینکه جواب معادله ی $\tan^{-1} x + \tan^{-1} 3x = \frac{\pi}{4}$ رو بدست بیارم می خوام بگم که x های منفی

نمی تونن جواب این معادله باشن. چون:

$$x < 0 \Rightarrow \boxed{\tan^{-1} x} + \boxed{\tan^{-1} 3x} \neq \boxed{\frac{\pi}{4}}$$

اما با فرض $x \geq 0$ بریم سراغ معادله ی $\tan^{-1} x + \tan^{-1} 3x = \frac{\pi}{4}$

$$\tan^{-1} x = \frac{\pi}{4} - \tan^{-1} 3x \xrightarrow{\text{از طرفین tan می گیریم}} x = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \tan^{-1} 3x\right) \Rightarrow x = \cot(\tan^{-1} 3x) \Rightarrow x = \frac{1}{3x}$$

$\tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \cot \alpha$ $\cot(\tan^{-1} \alpha) = \frac{1}{\alpha}$

$$3x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \xrightarrow{\text{با توجه به ①}} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

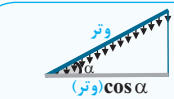
۱۱۶: (۳)

$$\underbrace{\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \sin^{-1} |2x-1|}_{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \sin^{-1} |2x-1| = \frac{\pi}{2} \xrightarrow{\text{از طرفین sin می گیریم}}$$

$$|2x-1| = \sin \frac{\pi}{2} \Rightarrow |2x-1| = 1 \Rightarrow \begin{cases} 2x-1=1 \Rightarrow x=1 \\ 2x-1=-1 \Rightarrow x=0 \end{cases}$$

از اونجایی که $x=0$ و $x=1$ در دامنه ی معادله ی ① صدق می کنند پس جوابهای معادله هستند و در نتیجه: $0+1=1$ = مجموع جوابها

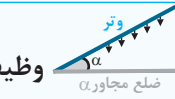
۱۱۷: (۲)



در مثلث قائم الزاویه ی α ، وظیفه ی $\cos \alpha$ ، تصویر کردن وتر روی ضلع مجاور α ست. یعنی:

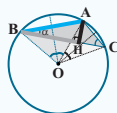


در مثلث قائم الزاویه ی α ، وظیفه ی $\sin \alpha$ ، تصویر کردن وتر روی ضلع مقابل α ست. یعنی:



بچه ها! همونطور که در شکل می بینید ، کمان AC روبروی زاویه ی مرکزی 2α قرار داره . پس : $\widehat{AC} = 2\alpha$

از طرفی کمان AC روبروی زاویه ی محاطی $\widehat{ABC}$ هم قرار داره . پس : $\widehat{ABC} = \frac{\widehat{AC}}{2} = \alpha$



$$\text{① } BH = AB \cdot \cos \alpha$$

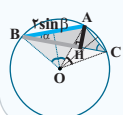
اما خواسته ی مسئله ، اندازه ی ضلع BH هست و من می دونم که

پس اگه بتونم اندازه ی AB رو پیدا کنم ، اندازه ی BH هم مشخص میشه .



پیدا کردن اندازه ی AB : AD ضلع روبرو به زاویه ی β هست . بنابراین :

$$AD = OA \cdot \sin \beta \xrightarrow{OA=1} AD = \sin \beta \xrightarrow{AB=2AD} \boxed{AB = 2 \sin \beta}$$



حالا که AB معلوم شد ، با توجه به رابطه ی ① اندازه ی BH هم مشخص میشه :

$$BH = AB \cdot \cos \alpha \Rightarrow BH = 2 \sin \beta \cdot \cos \alpha$$

۱۱۸: (۳)

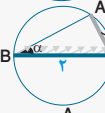
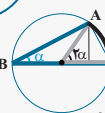
خلاصه ی سؤال : در شکل B (اگر $OA = OB = OC = 1$ شعاع) باشد اندازه ی HC چقدره ؟



همونطور که می بینید B زاویه ی محاطی و زاویه ی مرکزی 2α ، هر دوشون روبرو به کمان AC هستن پس :

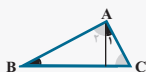
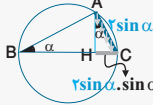
$$\angle B = \angle \alpha$$

با توجه به شکل B ، وتر $(BC=2)$ رو به ضلع مقابلش (یعنی AC) تصویر میکنم. پس : $AC = 2 \sin \alpha$



حالا با توجه به شکل B ، وتر AC رو که مقدارش مشخص شده ، به ضلع HC تصویر میکنم:

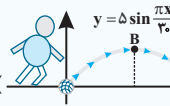
$$HC = AC \sin \alpha \Rightarrow HC = (2 \sin \alpha) (\sin \alpha)$$



توجه: در یک مثلث قائم الزاویه ، ارتفاع وارد بر وتر ، مثلثهای متشابه ایجاد می کنه ، بطوریکه :

$$\angle A_1 = \angle B \quad , \quad \angle A_2 = \angle C$$

(۲): ۱۱۹



بچه ها! با توجه به شکل (می خوام ببینم فاصله ی علی از اولین نقطه ی برخورد توپ با زمین (یعنی A)

چند برابر بیشترین ارتفاع توپ (یعنی B) هست.

پیدا کردن A: کوچکترین ریشه ی مثبت تابع $y = 5 \sin \frac{\pi x}{30}$ همون فاصله ی علی از اولین نقطه ی برخورد توپ با زمینه . بنابراین :

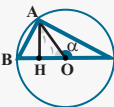
$$5 \sin \frac{\pi x}{30} = 0 \Rightarrow \sin \frac{\pi x}{30} = 0 \Rightarrow \frac{\pi x}{30} = \pi \Rightarrow x = 30 \Rightarrow \boxed{A = 30}$$

پیدا کردن B: بیشترین ارتفاع توپ ، همون بیشترین مقدار تابع $y = 5 \sin \frac{\pi x}{30}$ هست . بنابراین :

$$y_{\text{Max}} = 5 \times (\sin \frac{\pi x}{30})_{\text{Max}} \Rightarrow y_{\text{Max}} = 5 \times 1 \Rightarrow \boxed{B = 5}$$

خواسته ی مسئله $\frac{A}{B} + \frac{30}{5} = 6$

(۳): ۱۲۰



حل مسئله در یک نگاه : با توجه به شکل B H O C می خوام مساحت مثلث AHO رو بدست بیارم . از اونجایی که

$OA = 1$ هست ، کافیست زاویه ی A_1 رو داشته باشیم تا به کمک A_1 ، یکبار OA رو روی OH تصویر کنیم $OA \cdot \sin \hat{A}_1 = OH$ و بار دیگه OA

رو روی AH تصویر کنیم $OA \cdot \cos \hat{A}_1 = AH$

در واقع با بدست اومدن OH و AH مساحت مثلث ، یعنی $S = \frac{AH \times OH}{2}$ هم مشخص میشه .

حالا بریم سراغ کلید حل این مسئله ، یعنی A_1 :

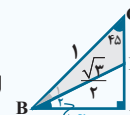
$$\begin{cases} O_1 + \alpha = 180 \Rightarrow O_1 = 180 - \alpha \\ O_1 + A_1 = 90 \Rightarrow (180 - \alpha) + A_1 = 90 \Rightarrow \boxed{\hat{A}_1 = \alpha - 90} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \rightarrow OA \times \sin A_1 = OH \Rightarrow \sin(\alpha - \frac{\pi}{2}) = OH \Rightarrow \boxed{OH = -\cos \alpha}$$

$$\textcircled{2} \rightarrow OA \times \cos A_1 = AH \Rightarrow \cos(\alpha - \frac{\pi}{2}) = AH \Rightarrow \boxed{AH = \sin \alpha}$$

$$\Rightarrow S = \frac{AH \times OH}{2} = \frac{-\sin \alpha \cos \alpha}{2} = \frac{1}{4} \sin 2\alpha$$

(۱): ۱۲۱

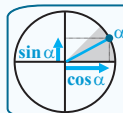


در شکل اگر به مثلث ABC نگاه کنید می بینید که $\hat{B} = 45^\circ$ پس : $B_1 = 45 - \alpha$

حالا اگر به مثلث BCD توجه کنید می بینید که دو ضلع و زاویه ی بین دو ضلع ، معلومه $(BC = 1, BD = \frac{\sqrt{2}}{2}, B = 45 - \alpha)$ پس :

$$\text{خواسته ی مسئله } S_{BCD} = \frac{BC \cdot BD \cdot \sin \hat{B}_1}{2} = \frac{1 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \sin(45 - \alpha)}{2} = \frac{-\sqrt{2}}{4} \sin(\alpha - 45) = \frac{-\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} (\sqrt{2} \sin(\alpha - 45))$$

$$\stackrel{\text{معرفه}}{=} \frac{-\sqrt{6}}{8} (\sin \alpha - \cos \alpha) = \frac{\sqrt{6}}{8} (\cos \alpha - \sin \alpha) = \frac{\sqrt{6}}{8} \sqrt{(\cos \alpha - \sin \alpha)^2} = \frac{\sqrt{6}}{8} \sqrt{1 - \sin 2\alpha}$$



از اونجایی که $0 < \alpha < 45$ پس $\cos \alpha > \sin \alpha$ و در نتیجه $\cos \alpha - \sin \alpha > 0$

(۱): ۱۲۲



برای پیدا کردن ضلع CD کافیست زاویه ی A رو پیدا کنیم تا بتونیم به کمکش ، ضلع AB رو روی

AD تصویر کنیم . $AB \cdot \cos \hat{A} = AD$

پس تکلیف روشن شد (پیدا کردن زاویه ی A) . اگر کمی قوت کنید می بینید که با معلوم شدن AD اندازه ی CD هم معلوم میشه .

$$\text{در مثلث ABC : } (\sqrt{2})^2 = (1)^2 + (3)^2 - 2(1)(3)\cos A \Rightarrow 2 = 1 + 9 - 6\cos A \Rightarrow \boxed{\cos A = \frac{1}{2}}$$

$$\textcircled{1} \rightarrow 3 \cos A = AD \Rightarrow 3 \times \frac{1}{2} = AD \xrightarrow{\text{می دونیم که } CD = AD - AC} CD = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

۱۲۳: (۴)

در شکل

داریم $\left. \begin{array}{l} BC = 2 \\ AC = 6 \\ S_{ABC} = 3 \end{array} \right\}$ بنابراین به کمک رابطه ی $S_{ABC} = \frac{AC \cdot BC \cdot \sin C_1}{2}$ مقدار زاویه ی C

قابل محاسبه هست .

$$3 = \frac{6 \times 2 \times \sin C_1}{2} \Rightarrow \sin \hat{C}_1 = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{منفرجه هست}} \hat{C} = 150^\circ \xrightarrow{\text{با توجه به شکل}} \hat{C}_2 = 30^\circ$$

۲ تا عمل تصویر کردن کافیه تا به DH برسیم .

(۱) به کمک $\hat{C}_2$ ، ضلع AC رو روی DC تصویر می کنیم : $AC \cdot \cos \hat{C}_2 = DC$

(۲) به کمک $\hat{C}_2$ ، ضلع DC رو روی DH تصویر می کنیم : $DC \cdot \sin \hat{C}_2 = DH$

① $6 \times \cos 30^\circ = DC \Rightarrow DC = \frac{6\sqrt{3}}{2}$

② $3\sqrt{3} \times \sin 30^\circ = DH \Rightarrow DH = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

۱۲۴: (۳)

اگر به گزینه ها نگاه کنیم متوجه میشیم که باید مساحت مثلث $\triangle ABC$ رو فقط بر حسب α, β, h بنویسیم.

از طرفی می دونیم $S = \frac{h \times BC}{2}$ پس باید روی BC اون قدر تغییر ایجاد کنیم تا بر حسب α, β, h نوشته بشه .

$$S = \frac{h \times BC}{2} = \frac{h \times (BH + HC)}{2} = \frac{h(AB \cos \alpha + AC \cos \beta)}{2} = \frac{h \left(\frac{h}{\sin \alpha} \cos \alpha + \frac{h}{\sin \beta} \cos \beta \right)}{2} = \frac{h^2 (\cot \alpha + \cot \beta)}{2}$$

$$= \frac{h^2 \left(\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta} \right)}{2} = \frac{h^2 \sin(\alpha + \beta)}{2 \sin \alpha \sin \beta} = \frac{h^2 \sin(\alpha + \beta)}{2(-(\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)))} = \frac{h^2 \sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}$$

تبدیل جمع به ضرب تبدیل ضرب به جمع

۱۲۵: (۳)

فرض می کنیم ، بعد از گذشت ۳۰ ثانیه ، فاصله ی اتومبیل های A و B از پایین برج ، به ترتیب x و y کیلومتر باشه . از اونجایی که فاصله ی اتومبیل B از A بعد از گذشت ۳۰ ثانیه یک کیلومتر شد ، پس : $y - x = 1$

با توجه به شکل

$$\begin{cases} \tan 60^\circ = \frac{h}{x} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{h}{x} \Rightarrow h = \sqrt{3}x \\ \tan 30^\circ = \frac{h}{y} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{h}{y} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{3}y \end{cases} \Rightarrow \sqrt{3}x = \frac{\sqrt{3}}{3}y \Rightarrow y = 3x$$

① و ② $\begin{cases} y - x = 1 \Rightarrow 3x - x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \text{ km} \\ y = 3x \end{cases} \Rightarrow y = \frac{3}{2} \text{ km}$

مسئله ی خواسته ی اول : سرعت متوسط ماشین B در ۳۰ ثانیه ی اول :

$$\text{سرعت متوسط ماشین B} = \frac{\text{مسافت طی شده}}{\text{زمان}} = \frac{\frac{3}{2} \text{ km}}{\frac{1}{120} \text{ km}} = 180 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$3 \text{ sec} = \frac{1}{120} \text{ h}$

۱۲۶: (۲)

ماشین A با سرعت $120 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ بعد از گذشت ۳ دقیقه (یعنی $\frac{3}{60}$ ساعت) مسافت $120 \times \frac{3}{60} = 6$ کیلومتر رو طی می کنه .

ماشین B با سرعت $100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ بعد از گذشت ۳ دقیقه (یعنی $\frac{3}{60}$ ساعت) مسافت $100 \times \frac{3}{60} = 5$ کیلومتر رو طی می کنه .

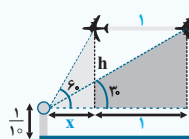
در شکل

$$x^2 = 6^2 + 5^2 - 2(5)(6)\cos 60^\circ \Rightarrow x^2 = 36 + 25 - 60 \cos 60^\circ \Rightarrow x^2 = 61 - 30 \Rightarrow x = \sqrt{31}$$

۱۲۷: (۴) از اونجایی که سرعت هواپیما $\frac{600 \text{ km}}{h}$ هست، بنابراین در طی ۶ ثانیه (یعنی $\frac{6}{3600}$ ساعت) مسافت طی شده توسط هواپیما

$$\text{برابر با } 1 \text{ km} : 600 \times \frac{1}{3600} = 1 \text{ km}$$

حالا همیشه از روی شکل روبرو فهمید که :

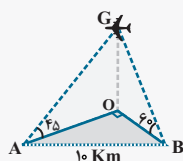


$$\begin{cases} \tan 30^\circ = \frac{h}{x+1} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{h}{x+1} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{3}(x+1) \Rightarrow \sqrt{3}x = \frac{\sqrt{3}}{3}(x+1) \Rightarrow 3x = x+1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \\ \tan 60^\circ = \frac{h}{x} \Rightarrow \sqrt{3}x = h \end{cases}$$

$$h = \sqrt{3}x \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

همونطور که در شکل بالا می بینید، ارتفاع هواپیما از سطح زمین برابر با: $h + \frac{1}{10}$ بنابراین :

$$h + \frac{1}{10} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{10} = \frac{5\sqrt{3} + 1}{10}$$



۱۲۸: (۳) بچه ها! با توجه به شکل روبرو از مثلث همیشه نتیجه گرفت: $OA^2 + OB^2 = 100$

①

از اونجایی که هدف من، پیدا کردن ارتفاع هواپیما (یعنی OG) هست، بهتره یه

جوړایی در رابطه ی ① و OA و OB رو بر حسب OG بنویسیم تا مقدار OG پیدا بشه.

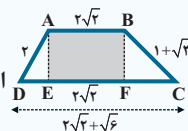
$$\tan 60^\circ = \frac{OG}{OB} \Rightarrow OB = \frac{\sqrt{3}}{3}OG$$

$$\textcircled{1} \rightarrow OA^2 + OB^2 = 100 \Rightarrow OG^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}OG\right)^2 = 100 \Rightarrow \frac{4}{3}OG^2 = 100 \Rightarrow OG^2 = 175 \Rightarrow OG = 5\sqrt{3}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{OG}{OA} \Rightarrow OA = OG$$

۱۲۹: (۲)

از دوزنقه ی $ABFE$ مستطیل رو حذف کنم، دو تا مثلث باقی می مونه که در صورت وصل کردن



اونها به هم شکل $\triangle D$ پدید می آد. اگه بتونم زاویه ی C رو پیدا کنم، بدست آوردن زاویه ی B (یعنی خواسته ی مسئله) خیلی

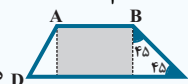
$$2^2 = (\sqrt{6})^2 + (1 + \sqrt{3})^2 - 2\sqrt{6}(1 + \sqrt{3})\cos \hat{C} \Rightarrow 4 = 6 + 4 + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{6}(1 + \sqrt{3})\cos \hat{C} \Rightarrow$$

راحت میشه.

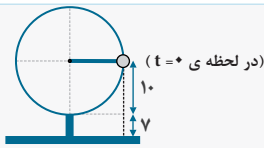
$$2\sqrt{6}(1 + \sqrt{3})\cos \hat{C} = 6 + 2\sqrt{3} \Rightarrow \cos \hat{C} = \frac{6 + 2\sqrt{3}}{2\sqrt{6}(1 + \sqrt{3})} \Rightarrow \cos \hat{C} = \frac{\sqrt{3}(2 + \sqrt{3})}{\sqrt{6}\sqrt{6}(1 + \sqrt{3})} \times \frac{(1 - \sqrt{3})}{(1 - \sqrt{3})} \Rightarrow$$

$$\cos \hat{C} = \frac{3 - 3\sqrt{3} + \sqrt{3} - 3}{\sqrt{6}(1 - 3)} \Rightarrow \cos \hat{C} = \frac{-2\sqrt{3}}{-2\sqrt{6}} \Rightarrow \cos \hat{C} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{2}} \Rightarrow \cos \hat{C} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \hat{C} = 45^\circ$$

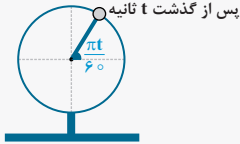
حالا بریم سراغ دوزنقه ی $ABFE$ همونطور که می بینید: $\hat{B} = 135^\circ$



۱۳۰: (۴)



برداشت ۱) با توجه به اینکه کابین مورد نظر، در لحظه ی $t = 0$ با زمین ۱۷ متر فاصله دارد، در لحظه ی $t = 0$ کابین روی مبدأ حرکت دایره قرار دارد.

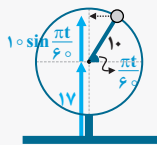


برداشت ۲) وقتی کابین در هر ۲ دقیقه یک دور (یعنی 2π رادیان) در جهت مثبت می چرخد، بنابراین پس از گذشت t ثانیه (یعنی $\frac{t}{60}$ دقیقه) به اندازه ی $\frac{\pi t}{60}$ در جهت مثبت می چرخد.

(کمان طی شده توسط کابین بعد از گذشت t ثانیه)

رادیان	دقیقه
2π	۲
?	$\frac{t}{60}$

علت: $\Rightarrow ? = \frac{2\pi \times \frac{t}{60}}{2} \Rightarrow ? = \frac{\pi t}{60}$

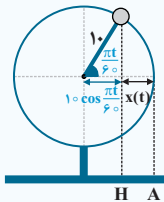


برداشت ۳) پس از گذشت t ثانیه، ارتفاع کابین به اندازه $10 \sin \frac{\pi t}{60}$ یجابجا می شه. چون:

$$\sin \theta = \frac{y}{r} \Rightarrow \sin \frac{\pi t}{60} = \frac{y}{10} \Rightarrow y = 10 \sin \frac{\pi t}{60}$$

بنابراین بعد از گذشت t ثانیه، ارتفاع کابین به اندازه ی $h(t) = 10 \sin \frac{\pi t}{60} + 17$ متر از سطح زمین فاصله دارد.

۱۳۱: (۱) با توجه به شکل اگر فاصله ی نقطه ی A از سایه ی کابین که روی زمین افتاده رو با $x(t)$ نشون بدیم، اون موقع:



$$10 \cos \frac{\pi t}{60} + x(t) = 10 \Rightarrow x(t) = 10 - 10 \cos \frac{\pi t}{60}$$

آزمون شماره ۱ فصل (۹)

(آموزش و پرورش - ۸۷)

۱ اگر به یک زاویه π رادیان اضافه شود، کسینوس زاویه ...

(۱) زیاد می شود (۲) کم می شود (۳) تغییر نمی کند (۴) قرینه می شود

(آزاد - ۷۶)

۲ اگر $\cos x = -1$ ، آنگاه $\cos 17x$ کدام است؟(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) -1 (۴) 1

(سراسری - ۷۷)

۳ با فرض $\alpha < \pi$ و $\frac{3\pi}{4} < \alpha$ و $\tan \alpha = \frac{2}{m-1}$ ، حدود تغییرات m کدام است؟(۱) $m < -1$ (۲) $m < 1$ (۳) $-1 < m < 1$ (۴) $-2 < m < -1$

(سراسری - ۸۴)

۴ اگر $\tan 20^\circ = \frac{1}{3}$ ، حاصل $\frac{\sin 160^\circ - \cos 20^\circ}{\cos 110^\circ + \sin 70^\circ}$ کدام است؟(۱) $\frac{9}{4}$ (۲) $\frac{15}{8}$ (۳) $\frac{17}{8}$ (۴) $\frac{31}{16}$

(آزاد - ۸۳)

۵ حاصل عبارت $\frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin^2 x \cos^2 x} - (\tan x + \cot x)^2$ کدام است؟(۱) -2 (۲) 2 (۳) -1 (۴) 0

(آموزش و پرورش - ۸۷)

۶ اگر $\tan x = 2$ باشد مقدار عددی $\frac{3 \cos x - \sin x}{\sin x - \cos x}$ کدام است؟(۱) 1 (۲) 2 (۳) -1 (۴) -2

(سراسری - ۷۱)

۷ اگر $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$ و $\frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} = \frac{1 - m}{2 + m}$ باشد، حدود تغییرات m کدام است؟(۱) $-1 < m < 2$ (۲) $-2 < m < 1$ (۳) $m > 1$ (۴) $m < -2$

(سنجش - ۸۷)

۸ حاصل $\cos(x + \frac{\pi}{6}) + \sin(x + \frac{\pi}{3}) - \cos(x + \frac{\pi}{6})$ کدام است؟(۱) صفر (۲) $2 \sin x$ (۳) $2 \cos x$ (۴) $\cos x - \sin x$

(سراسری - ۶۴)

۹ اگر $\tan(\alpha + \frac{\beta}{3}) = \sqrt{3} + 1$ و $\tan(\alpha - \frac{\beta}{3}) = \sqrt{3} - 1$ باشد، $\tan \frac{2\beta}{3}$ برابر است با:(۱) $-\frac{3}{2}$ (۲) $-\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{3}{2}$

(گزینه ی ۲ - ۸۴)

۱۰ ساده شده ی عبارت $\frac{\sin 2a}{1 + \cos 2a} \cdot \frac{\cos a}{1 + \cos a}$ کدام است؟(۱) $\tan \frac{a}{2}$ (۲) $\tan a$ (۳) $\cot a$ (۴) $\cot \frac{a}{2}$

(سنجش - ۸۶)

۱۱ حاصل عبارت $\frac{1}{\cos^2 x} + (1 + \tan^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x)$ برابر کدام است؟(۱) $\tan^2 x$ (۲) 0 (۳) 1 (۴) 2

(آزاد - ۸۶)

۱۲ اگر $\cos x = \frac{1}{3}$ باشد، حاصل کسر $\frac{1 + \cos 2x + \cos 4x}{\sin 2x + \sin 4x}$ کدام است؟(۱) $\frac{7\sqrt{2}}{8}$ (۲) $-\frac{7\sqrt{2}}{8}$ (۳) $\frac{7\sqrt{2}}{4}$ (۴) $-\frac{7\sqrt{2}}{4}$

(گزینه ی ۲ - ۸۴)

۱۳ مقدار $\sin^6 \frac{\pi}{8} + \cos^6 \frac{\pi}{8}$ برابر کدام است؟(۱) $\frac{5}{8}$ (۲) $\frac{3}{8}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{3}{4}$

آزمون شماره ۱ فصل (۹)

(آزاد - ۸۱)

۱۴ اگر $\frac{\sin x}{\sin x + \cos x} = 3$ باشد، $\tan 2x$ چقدر است؟

- (۱) $\frac{6}{5}$ (۲) $-\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{12}{5}$ (۴) -3

(سراسری - ۷۷)

۱۵ حاصل $\tan(\frac{\pi}{4} - \alpha) \cdot \frac{1 + \sin 2\alpha}{1 - \sin 2\alpha}$ برابر کدام است؟

- (۱) $1 - \tan \alpha$ (۲) $1 + \tan \alpha$ (۳) $\tan(\frac{\pi}{4} + \alpha)$ (۴) $\cot(\frac{\pi}{4} + \alpha)$

(آزاد - ۸۲)

۱۶ حاصل $(\sin x + \cos x + 1)(\sin x + \cos x - 1)$ به ازای $x = \frac{7\pi}{12}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) 1 (۴) -1

(آزاد - ۸۲)

۱۷ اگر $\frac{\sin x + 2\cos x}{\sin x - 3\cos x} = 2$ باشد، حاصل $\frac{1}{\sin x \cos x}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{65}{8}$ (۲) $-\frac{65}{8}$ (۳) $\frac{17}{4}$ (۴) $-\frac{17}{4}$

(آزاد - ۷۹)

۱۸ اگر $\tan \frac{x}{2} = \sqrt{2}$ باشد، حاصل کسر $\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$ چقدر است؟

- (۱) 2 (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) $\sqrt{2}$

(آزاد - ۷۸)

۱۹ حاصل عبارت $[\frac{\pi}{36} \cos^3 8 - \frac{\pi}{36} \sin^3 6][\frac{\pi}{36} \cos^3 8 - \frac{\pi}{36} \sin^3 6]$ چقدر است؟

- (۱) 1 (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) -1 (۴) $-\frac{1}{2}$

(آزاد - ۷۵)

۲۰ حاصل $\sin 50^\circ + \sqrt{3} \cos 50^\circ$ برابر کدام است؟

- (۱) $2 \cos 110^\circ$ (۲) $2 \cos 10^\circ$ (۳) $2 \cos 20^\circ$ (۴) $\sqrt{3} \cos 20^\circ$

(سراسری - ۷۸)

۲۱ حاصل عبارت $\frac{\sin x \cos 3x}{\sin 2x} - \cos 2x$ برابر کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\cos x$ (۳) $\sin x$ (۴) $-\frac{1}{2}$

(سراسری - ۸۱)

۲۲ ساده شده ی عبارت $\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$ برابر کدام است؟

- (۱) $\cos \alpha - \sin \alpha$ (۲) $\cos 2\alpha$ (۳) $1 + \sin 2\alpha$ (۴) $1 - \sin 2\alpha$

(آزاد - ۸۳)

۲۳ حاصل کسر $\frac{\cos 2x + \cos 6x}{\sin 2x + \sin 6x}$ به ازای $x = \frac{\pi}{24}$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{3}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۳) 1 (۴) -1

(آزاد - ۸۴)

۲۴ حاصل کسر $\frac{-\sin x + \sin 2x - \sin 4x}{\cos x + \cos 2x + \cos 4x}$ برابر است با:

- (۱) $\tan x$ (۲) $\tan 2x$ (۳) $-\tan x$ (۴) $-\tan 2x$

(سراسری - ۸۲)

۲۵ حاصل $\cos 165^\circ \cdot \cos 105^\circ$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{2}$

آزمون شماره ۲ فصل (۹)

- ۱ اگر $a + b = \frac{\pi}{4}$ ، حاصل $\tan a + \tan b$ کدام است؟ (سراسری - ۸۰)
- (۱) $\sin b$ (۲) $\cos a$ (۳) $\frac{1}{\sin a}$ (۴) $\frac{1}{\cos b}$
- ۲ تمام جواب های معادله $\sqrt{\sin x} = \sqrt{\cos x}$ کدام است؟ (آزاد - ۸۱)
- (۱) $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ (۲) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ (۳) $x = 2k\pi$ (۴) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$
- ۳ معادله $y = \frac{9}{4} - (\sin x + 1)^2$ در بازه $[0, \pi]$ چند ریشه دارد؟ (آزاد - ۸۳)
- (۱) ۴ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۱
- ۴ معادله $y = 0$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند ریشه دارد؟ (آزاد - ۸۵)
- (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۲ (۴) ۱۰
- ۵ جواب کلی معادله مثلثاتی $\cos x \cos 2x = 0$ به شکل $k\pi + i \frac{\pi}{4}$ می باشد، مجموعه ی مقادیر i کدام است؟ (گزینه ی دو - ۸۴)
- (۱) $\{2, 3, 4\}$ (۲) $\{1, 2, 5\}$ (۳) $\{1, 2, 3\}$ (۴) $\{1, 3, 5\}$
- ۶ جواب کلی معادله $y = 3$ $\sin(x + \frac{\pi}{8}) + 2 \cos(x + \frac{5\pi}{8})$ عبارت است از: (آزاد - ۷۷)
- (۱) $x = 2k\pi + \frac{3\pi}{8}$ (۲) $x = k\pi + \frac{3\pi}{8}$ (۳) $x = 2k\pi + \frac{5\pi}{8}$ (۴) جواب ندارد
- ۷ جواب کلی معادله ی مثلثاتی $\sin(\frac{5\pi}{6} + x) + \sin(\frac{\pi}{4} + x) \sin(\pi + x) = 0$ کدام است؟ (سراسری - ۷۸)
- (۱) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۲) $k\pi - \frac{\pi}{4}$ (۳) $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ (۴) $2k\pi + \frac{\pi}{4}$
- ۸ معادله $\sin 2x \cos 3x + \cos 2x \sin 3x = \frac{1}{4}$ در فاصله ی $(0, 2\pi)$ چند جواب دارد؟ (گزینه ی دو - ۸۷)
- (۱) ۲ ریشه (۲) ۶ ریشه (۳) ۱۰ ریشه (۴) ۱۴ ریشه
- ۹ انتهای کمان های جواب معادله $y = 0$ $\cos 2x + \sin(\frac{\pi}{4} + x)$ روی دایره ی مثلثاتی راس های کدام چند ضلعی است؟ (سراسری - ۷۶)
- (۱) مربع (۲) مثلث قائم الزاویه (۳) مستطیل (۴) مثلث متساوی الاضلاع
- ۱۰ معادله $y = \frac{1}{4} - \cos^2 x = \sin x \cos x$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند ریشه دارد؟ (آزاد - ۸۵)
- (۱) ۴ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۰
- ۱۱ معادله $y = \sqrt{3}$ $\tan x + \cot x$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند ریشه دارد؟ (آزاد - ۸۶)
- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴
- ۱۲ جواب کلی معادله ی مثلثاتی $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$ با شرط $x \neq \frac{k\pi}{4}$ کدام است؟ (سراسری - ۸۶)
- (۱) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۲) $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ (۳) $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$
- ۱۳ جواب کلی معادله $y = \cos^2 x = \cos 3x \cos x$ کدام است؟ (سراسری - ۷۶)
- (۱) $\frac{k\pi}{2}$ (۲) $k\pi$ (۳) $k\pi + \frac{\pi}{2}$ (۴) $2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$
- ۱۴ مجموع جواب های حاده ی معادله $y = \tan 4x = \cot x$ کدام است؟ (سنجش - ۸۵)
- (۱) $\frac{\pi}{5}$ (۲) $\frac{2\pi}{5}$ (۳) $\frac{3\pi}{5}$ (۴) $\frac{4\pi}{5}$

آزمون شماره ۲ فصل (۹)

(سنجش-۸۶)

۱۵ معادله ی مثلثاتی $\sin 3x \cos x + \cos 3x \sin x = 2 \sin x \cos x$ در بازه ی $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد ؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۸ (۴) ۹

(آزاد-۸۴)

۱۶ معادله ی $\sin^2 x + \sin^3 x = 8$ در بازه ی $[0, 2\pi]$ چند ریشه دارد ؟

- (۱) ۲ (۲) ۰ (۳) ۱ (۴) ۴

(سنجش-۸۷)

۱۷ جواب معادله ی $2 \cos x (\cos x + \sin x) = 1$ کدام است ؟

- (۱) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ (۲) $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$ (۳) $k\pi + \frac{\pi}{8}$ (۴) $k\pi - \frac{\pi}{8}$

(سراسری-۷۸)

۱۸ یکی از جواب های کلی معادله ی مثلثاتی $\cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x = 1$ کدام است ؟

- (۱) $k\pi - \frac{\pi}{6}$ (۲) $k\pi - \frac{\pi}{3}$ (۳) $k\pi + \frac{\pi}{6}$ (۴) $k\pi + \frac{\pi}{3}$

(سراسری-۸۶)

۱۹ جواب کلی معادله ی مثلثاتی $\frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} = \sqrt{3}$ به کدام صورت است ؟

- (۱) $2k\pi + \frac{5\pi}{6}$ (۲) $2k\pi + \frac{\pi}{3}$ (۳) $k\pi + \frac{5\pi}{6}$ (۴) $k\pi + \frac{\pi}{3}$

(سراسری-۷۷)

۲۰ جواب کلی معادله ی مثلثاتی $\sin 3x + \sin x = 4 \sin x \cos x$ کدام است ؟

- (۱) $\frac{k\pi}{2}$ (۲) $\frac{k\pi}{4}$ (۳) $k\pi \pm \frac{\pi}{2}$ (۴) $(2k+1)\frac{\pi}{4}$

(آزاد-۷۵)

۲۱ حاصل عبارت $\cos[\sin^{-1}(-\frac{3}{4}) + \cos^{-1}(-\frac{1}{4})]$ کدام است ؟

- (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۰ (۴) ۱

(سنجش-۸۷)

۲۲ ساده شده ی عبارت $\tan[\frac{5\pi}{4} - \tan^{-1}(\frac{3}{4})]$ برابر کدام است ؟

- (۱) ۵ (۲) ۲ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{1}{5}$

(سراسری-۷۰)

۲۳ حاصل $\cos^{-1}(-\frac{3}{5}) - \sin^{-1}(\frac{3}{5})$ کدام است ؟

- (۱) π (۲) $\frac{\pi}{2}$ (۳) $-\frac{\pi}{2}$ (۴) $-\frac{2\pi}{3}$

(آموزش و پرورش-۸۶)

۲۴ مقدار عددی $\cos[\sin^{-1}(\frac{5}{13})]$ کدام است ؟

- (۱) $\frac{113}{169}$ (۲) $\frac{115}{169}$ (۳) $\frac{117}{169}$ (۴) $\frac{119}{169}$

(سنجش-۷۸)

۲۵ اگر $A - B = \frac{\pi}{6}$ باشد ، حاصل $\frac{2 \sin(A+B) - 1}{4 \cos A \cos B}$ کدام است ؟

- (۱) $\tan B$ (۲) $\tan A$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۱