

ریاضیات انتخاب

یا

چگونه بدون شمارش بشماریم

ایوان نیون

ترجمه علی عمیدی، بتول جذبی



(ریاضیات پیش‌دانشگاهی - ۱۵)

www.riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا



ریاضیات انتخاب

یا

چگونه بدون شمارش بشماریم

(ریاضیات پیش دانشگاهی - ۱۵)

ایوان نیون

ترجمه علی عمیدی، بتول جذبی

دانلود از سایت (ریاضی سرا

www.riazisara.ir

مرکز نشر دانشگاهی، تهران



Mathematics of Choice of How to Count without Counting
New Mathematical Library (15)

Ivan Niven

The Mathematical Association of America, 1965

ریاضیات انتخاب یا چگونه بدون شمارش بشماریم
تألیف ایوان نیون

ترجمه دکتر علی عمیدی، بتول جذبی

ویراسته دکتر علی عمیدی

مرکز نشر دانشگاهی، تهران

چاپ اول ۱۳۶۸

چاپ سوم ۱۳۷۹

تعداد ۴۰۰۰

حروفچینی: مهدی

لیتوگرافی: بهزاد

چاپ و صحافی: الهادی - قم

حق چاپ برای مرکز نشر دانشگاهی محفوظ است

فهرست نویسی پیش از انتشار کتابخانه ملی جمهوری اسلامی ایران

نیون، ایوان مورتن، ۱۹۱۵ - Niven, Ivan Morton.

ریاضیات انتخاب یا چگونه بدون شمارش بشماریم / ایوان نیون؛ ترجمه
علی عمیدی، بتول جذبی. - تهران: مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۶۸.

هفت، ۲۲۲ ص. - مصور، جدول. - (مرکز نشر دانشگاهی؛ ۴۵۷. ریاضی،
آمار، و کامپیوتر؛ ۵۱) (ریاضیات پیش دانشگاهی؛ ۱۵)

فهرست نویسی براساس اطلاعات فیبا.

عنوان اصلی:

Mathematics of Choice or How to count without counting.

کتابنامه: ص. ۲۲۲.

ISBN 964-01-0457-3

چاپ سوم: ۱۳۷۹.

۱. آنالیز ترکیبی، الف. عمیدی، علی، ۱۳۱۲ - ، مترجم. ب. جذبی،

بتول، ۱۳۲۹ - ، مترجم. ج. مرکز نشر دانشگاهی. د. عنوان. ه. چگونه
بدون شمارش بشماریم.

۵۱۱/۶

QA۱۶۴/۹۹

۱۳۶۸

م ۲۷۵۸ - ۶۸

کتابخانه ملی ایران

فهرست

صفحه	عنوان
شش	سخنی با خواننده
۱	پیشگفتار
۳	فصل ۰۱. مسائل مقدماتی
۹	فصل ۰۲. جایگشتها و ترکیبها
۱۰	۱.۲ اصل ضرب
۱۳	۲.۲ فاکتوریلها
۱۴	۳.۲ جایگشتها
۱۹	۴.۲ فاکتوریل صفر
۲۰	۵.۲ ترکیبها
۲۶	۶.۲ جایگشتهای اشیاء واقع بر یک دایره
۲۸	۷.۲ خلاصه
۳۰	فصل ۰۳. ترکیبها و ضریبهای دو جمله‌ای
۳۰	۱.۳ مسئله مسیر
۳۱	۲.۳ جایگشتهای اشیایی که همه آنها یکسان نیستند
۳۴	۳.۳ فرمول پاسکال برای $C(n, r)$

۳۷	۴.۳ بسط دوجمله‌ای
۴۱	۵.۳ بسط چندجمله‌ای
۴۴	۶.۳ مثلث پاسکال
۴۶	۷.۳ تعداد زیر مجموعه‌های يك مجموعه
۴۷	۸.۳ مجموع توانهای اعداد طبیعی
۵۳	۹.۳ خلاصه

فصل ۰۴. برخی توزیعهای خاص

۵۵	۱.۴ اعداد فیبوناچی
۵۵	۲.۴ معادله‌های خطی با ضریبهای واحد
۶۰	۳.۴ ترکیبها با تکرارها
۶۴	۴.۴ معادله‌های با جوابهای مشروط
۶۶	۵.۴ خلاصه
۷۱	

فصل ۰۵. اصل شمول - عدم شمول؛ احتمال

۷۳	۱.۵ يك نتیجه کلی
۷۳	۲.۵ کاربرد برای معادله‌ها و ترکیبهای با تکرار
۷۸	۳.۵ پریشها
۸۵	۴.۵ احتمال ترکیبیاتی
۸۹	۵.۵ خلاصه
۹۵	

فصل ۰۶. افرازه‌های يك عدد صحیح

۹۸	۱.۶ نمودارهای افرازا
۹۹	۲.۶ تعداد افرازا
۱۰۳	۳.۶ خلاصه
۱۰۶	

فصل ۰۷. چندجمله‌ایهای مولد

۱۰۸	۱.۷ افرازا و حاصلضربهای چندجمله‌ایها
۱۱۰	۲.۷ خرید کردن اسکناس يك دلاری
۱۱۴	۳.۷ خلاصه
۱۱۶	

صفحه	عنوان
۱۱۷	فصل ۸. توزیع اشیایی که همگی همانند نیستند
۱۱۸	۱۰.۸ اشیاء متفاوت، جعبه‌ها متفاوت
۱۲۰	۲۰.۸ اشیاء متفاوت، جعبه‌ها همانند (افرازهای يك مجموعه)
۱۲۳	۳۰.۸ اشیاء آمیخته، جعبه‌ها متفاوت
۱۲۷	۴۰.۸ خلاصه
۱۲۹	فصل ۹. مسائل پیکربندی
۱۲۹	۱۰.۹ اصل لانه کبوتر
۱۳۱	۲۰.۹ مثلثهای رنگی
۱۳۳	۳۰.۹ تفکیک صفحه
۱۳۸	۴۰.۹ خلاصه
۱۳۹	فصل ۱۰. استقرای ریاضی
۱۴۰	۱۰.۱۰ اصل استقرای ریاضی
۱۴۴	۲۰.۱۰ نماد گذاری برای مجموعه‌ها و حاصلضربها
۱۵۱	۳۰.۱۰ خلاصه
۱۵۲	فصل ۱۱. تعبیرهای حاصلضرب شرکت ناپذیر
۱۵۳	۱۰.۱۱ رابطه بازگشتی
۱۵۵	۲۰.۱۱ گسترش يك فرمول صریح
۱۶۲	۳۰.۱۱ برهان حدس
۱۶۴	۴۰.۱۱ فرمولی برای $F(n)$
۱۶۵	۵۰.۱۱ خلاصه
۱۶۷	مسائل گوناگون
۱۷۵	پاسخها و راه حلها
۲۰۶	راه حلهای مسائل گوناگون
۲۲۰	فهرست راهنما
۲۲۱	نماوها
۲۲۲	مراجع

بسم الله الرحمن الرحيم

سخنی با خواننده

ارتباط بین استادان برجسته دانشگاهها و دانش آموزان دوره های پیش دانشگاهی، از مؤثرترین وسیله هایی است که به کشف و پرورش استعدادها کمک می کند و زمینه را برای تربیت دانشمندان آینده فراهم می سازد. در بین شخصیتهای علمی تراز اول، که پژوهندگان يك علم را در بالاترین سطح ممکن آموزش می دهند و راهنمایی می کنند، عده کمی این توانایی را دارند که در آن زمینه علمی، و با رعایت همه دقتها و نکته ها، کتابهایی تألیف کنند که برای قشر وسیعی از دانش آموزان دبیرستانی، و گاه برای افراد عادی، آموزنده و قابل درک باشد. این شخصیتهای، که در هر کشور انگشت شمارند، از این راه، ارتباطی بین خود و جوانان برقرار می سازند. دسترسی دانش آموزان به چنین کتابهایی، پشتوانه ای برای تأمین آینده علمی جامعه است.

جامعه ریاضی آمریكا مجموعه ای از این گونه كتابها را زیر عنوان New Mathematical Library فراهم آورده و تا كنون بیش از سی جلد از آنها را منتشر کرده است که بعضی از آنها مستقیماً به زبان انگلیسی تألیف شده و بعضی دیگر از زبانهای مختلف به انگلیسی ترجمه شده اند. این كتابها تا كنون به بسیاری از زبانهای دیگر ترجمه شده و هر کدام، چه در آمریكا و چه در کشورهای دیگر، بارها تجدید چاپ شده است.

گروه ریاضی، آمار، و کامپیوتر مرکز نشر دانشگاهی، به حکم وظیفه ای که برای گسترش دانش ریاضی به عهده دارد، به ترجمه این كتابها از انگلیسی به فارسی، و ویرایش آنها پرداخته است. مترجمان و ویراستاران از افراد خبره برگزیده شده اند و کوشش لازم به عمل آمده است تا، ضمن رعایت امانت کامل در ترجمه، متن فارسی روان و خالی از ابهام باشد. كتابها به ترتیبی که ترجمه آنها آماده شود زیر عنوان ریاضیات پیش دانشگاهی منتشر می شوند.

شش

این مجموعه کتابها را می توان دو دسته کرد. يك دسته شامل کتابهایی است که مباحثی از ریاضیات را به زبان ساده تشریح می کنند و می توانند برای درسهای ریاضیات عمومی دانشگاه نیز جنبه كمك درسی داشته باشند. ویراستاران متن اصلی این کتابها در پیشگفتار خود از جمله نوشته اند:

مطالب کتابهای این مجموعه در برنامه ریاضیات دبیرستانی یا گنجانیده نشده یا به اجمال بیان شده است. میزان دشواری آنها متفاوت است و حتی در يك كتاب هم، مطالعه بعضی از بخشها به تمرکز حواس بیشتری نیاز دارد. خواننده برای فهم مطالب اغلب این کتابها، هر چند به اطلاعات ریاضی چندانی نیاز ندارد، ولی باید تلاش فکری فراوانی به عمل آورد. كتاب ریاضی را نمی توان به سرعت خواند، و نباید توقع داشت که با يك بار مطالعه، تمام بخشهای آن فهمیده شود. می توان بدون معطل ماندن روی بخشهای پیچیده از آنها گذشت و بعد، برای مطالعه عمیق به آنها بازگشت، زیرا بسیار پیش می آید که مطلبی در مبحث بعدی روشن می شود. از سوی دیگر، می توان بخشهایی را که مطالب آنها کاملاً آشناست خیلی سریع مطالعه کرد. بهترین راه فرا گرفتن ریاضیات، حل مسأله های آن است. هر كتاب شامل مسأله هایی است که حل برخی از آنها ممکن است مستلزم تأمل قابل ملاحظه ای باشد. پاسخها یا راهنمایهای مربوط به حل این مسأله ها، غالباً در پایان كتاب آمده اند. به خواننده توصیه می شود که کوشش کند هر مسأله را خود حل کند و فقط برای اطمینان از درستی راه حل خود به بخش پاسخها مراجعه نماید. بدین طریق، مطلب رفته رفته برایش پر معنا تر خواهد شد.

دسته دیگر کتابها، شامل مجموعه هایی غنی از مسأله ها یا پرسشهای جالب چند گزینه ای است که در مسأله های معروف ریاضی مطرح شده اند. در این کتابها، راه حل دقیق مسأله ها آمده است. در مورد پرسشها به ذکر پاسخ درست اکتفا نشده، بلکه حل کامل آنها نیز عرضه شده است.

نظرات و پیشنهاد های خوانندگان ما را به ادامه کار و گسترش این گونه فعالیتها تشویق خواهد کرد.

گروه ریاضی، آمار، و کامپیوتر
مرکز نشر دانشگاهی

پیشگفتار

موضوع این کتاب غالباً «آنالیز ترکیبیاتی» و یا «ترکیبیات» نامیده می‌شود. مسائلی که مورد بحث قرار گرفته‌اند از نوع «به چند طریق ممکن است که...؟»، یا صورتهای دیگر این عبارت هستند. جایگشتها و ترکیبها بخشی از آنالیز ترکیبیاتی را تشکیل می‌دهند که شاید خواننده قبلاً با آنها آشنا شده باشد. در این صورت، ممکن است خواننده با بعضی از مطالب سه فصل اول آشنا باشد.

این کتاب تنها با پیشنیاز مقدمات جبر، مستقلاً قابل استفاده است. خلاصه‌هایی که شامل تمام فرمولهاست در آخر هر فصل داده شده‌اند. در سرتاسر کتاب مسائل زیادی برای خواننده آورده ایم. در واقع این کتاب بیشتر يك کتاب مسأله است که در آن اطلاعات پایه‌ای کافی برای حل مسائل عرضه شده است. بعد از فصل آخر، فهرستی از مسائل گوناگون آمده است. در پایان کتاب برای مسائل مشکلتز راه حل یا خلاصه‌ای از راه حل را آورده ایم و برای مسائل ساده‌تر به پاسخهای عددی اکتفا کرده ایم.

اعضای هیأت داورى گروه بررسی ریاضیات مدرسه‌ای، و همچنین هربرت سوکرمان^۱ پیشنهادهای مفیدی داده‌اند. ما کس بل^۲ بعضی از مباحث را با دانشجویان خود در میان نهاده و نظرات آنان را برای من فرستاده است. مارک کاک^۳ عناوین فرعی ظریف و بدیع کتاب را پیشنهاد کرده است. مراتب قدردانی خود را برای تمامی این کمکها ابراز می‌دارم.

مسائل مقدماتی

هدف این فصل معرفی چند مسأله نمونه برای تشریح موضوع کتاب است. بسط سیستماتیک موضوع از فصل بعدی شروع می‌شود. بعضی از نمونه‌مسائلی را که در اینجا داده شده‌اند می‌توان بدون داشتن پایه نظری حل کرد، حل بقیه مسائل تا ارائه نظریه لازم به تعویق می‌افتد.

ایده این کتاب بررسی جنبه‌های معین سؤال «چندتا؟» است. ممکن است سؤال‌هایی، مانند «تعداد صفحه‌ها از صفحه ۱۴ تا ۵۹ چندتا است؟» بسیار ساده باشند؛ در بعضی موارد ممکن است پاسخ سؤال‌هایی مانند تعداد روزهای ماه اکتبر، یا تعداد یاردها در یک مایل، تنها به داشتن معلومات عمومی مربوط باشد. در موارد دیگر ممکن است پاسخ به سؤال‌اتی مانند تعیین تعداد عناصر شیمیایی که تا زمان حال شناخته شده‌اند، یا تعیین تعداد سانتیمترهای مکعب جا به جایی در موتور اتومبیلی معین، به اطلاعات فنی نیاز داشته باشد، اما علاقه ما به حل مسائلی است که پاسخ آنها به فکر نیاز دارند. همچنین ممکن است پاسخ دادن به این مسائل به بعضی شناخته‌های قبلی احتیاج داشته باشند که اگر جزء اطلاعات عمومی نباشند در متن کتاب فراهم می‌شوند، به کمک بعضی از فرمول‌های ریاضی نیاز است که به موقع خود

ارائه خواهند شد. ولی حل بیشتر مسائل تنها به کمی قوه ابتکار احتیاج دارند. بسیاری از این مسائل شروع می‌کنیم.

مسئله ۱۰۱* در تقویم هر سال، چند جمعه وجود دارند که سیزدهمین روز ماه باشند؟ کوچکترین تعداد ممکن چیست؟

این مسئله، مانند بسیاری از مسائل دیگر این کتاب، در بخش پاسخها و راه حلها در آخر کتاب حل شده است. البته از خواننده مصرراً خواسته می‌شود که قبل از مراجعه به راه حل کتاب سعی کند شخصاً مسئله را حل کند. مسئله ۱۰۱ را می‌توان با مراجعه‌ای ساده به یک تقویم، و یا به مجموعه‌ای از تقویمهای سالانه که تمام آرایشهای ممکن روزهای سال را دارا باشند حل کرد. هدف این است که مسئله را، حتی به روشی ساده‌تر با ابداع یک دستگاه حل کنیم. مثلاً باید توجه کرد سالهایی را که دارای ۳۶۵ روزند می‌توان به هفت نوع مختلف تفکیک نمود. نوعی که با دوشنبه شروع می‌شود، نوعی که با سه‌شنبه شروع می‌شود و قس علی‌هذا. به همین ترتیب هفت نوع سال کیسه وجود دارند، و بنابراین کلاً در ارتباط با این مسئله، چهارده نوع سال وجود دارند. سپس برای بررسی تعداد جمعه‌هایی که سیزدهم ماه در این نوع سالها هستند می‌توان نظامی ابداع کرد. لیکن ما در اینجا تحلیل مطلب را نمی‌آوریم و بقیه کار را به خواننده واگذار می‌کنیم.

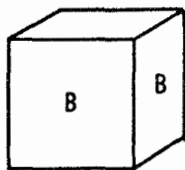
مسئله ۲۰۱ سازنده‌ای برای بچه‌ها مکعبهایی می‌سازد. وجوه هر مکعبی که حجمش دو اینچ مکعب است با یکی از دو رنگ قرمز و آبی رنگ می‌شود. وجوه بعضی از مکعبها تماماً آبی، وجوه بعضی تماماً قرمز و وجوه بعضی آمیزه‌ای از قرمز و آبی است. سازنده چند نوع مختلف از این مکعبها می‌تواند بسازد؟

برای آنکه سؤال دارای معنی دقیق باشد، لازم است منظور از مکعبهای «مختلف» را تعریف کنیم. دو مکعب را یکسان می‌گوییم که اگر آنها را در وضعیتهای همانند قرار دهیم، وجوه متناظرشان دارای رنگهای یکسان باشند، یعنی به قسمی که وجوه پایین یک رنگ، وجوه بالا دارای یک رنگ و وجوه مقابل دارای یک رنگ و الخ... باشند. اگر دو مکعب با این مفهوم یکسان نباشند، آنها را دو مکعب مختلف می‌گوییم. مثلاً هر دو مکعبی که پنج وجه آنها آبی و یک وجه آنها قرمز باشد یکسان اند. اما به عنوان مثالی دیگر، دو مکعب را در نظر بگیرید که چهار

* این مسئله، تحت عنوان مسئله E1541 در صفحه ۹۱۹

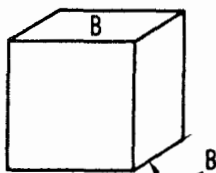
the American Mathematical Monthly, November, 1962

آمده است.



وجه آبی مجاورند

B : آبی



وجه آبی مقابل اند (بالا و پایین)

شکل ۱.۱

وجه آنها قرمز و دو وجه آنها آبی باشند، این چنین دو مکعبی ممکن است یکسان باشند و یا نباشند. اگر در هر مکعب دو وجه آبی مجاور یکدیگر باشند، آن گاه این دو مکعب یکسان اند، یا اگر در هر مکعب دو وجه مقابل آبی باشند، این دو مکعب یکسان اند. اما اگر در یکی از مکعبها دو وجه مجاور آبی و در مکعب دیگر دو وجه مقابل آبی باشند، آن گاه این دو مکعب مختلف اند. شکل ۱.۱ را ببینید.

این مسأله نیز در بخش پاسخها و راه حلها حل شده است، اما باز توصیه می شود که خواننده شخصاً مسأله را حل، و از راه حل آخر کتاب برای کنترل کارش استفاده کند.

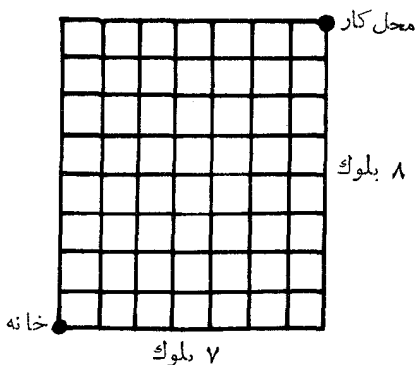
اکنون به سه مسأله که قدری مشکلترند و راه حل آنها تا ارائه نظریه لازم به تعویق می افتد می پردازیم.

مسأله ۱.۳ مسأله مسیر. شخصی در ساختمانی کار می کند که هفت بلوک در شرق و هشت بلوک در شمال خانه اش قرار دارد. (شکل ۲.۱ را ببینید). بنا بر این، برای رسیدن به محل کارش هر روز پانزده بلوک را طی می کند. تمام خیابانهایی که در الگوی مستطیل شکل وجود دارند برای رفتن او به محل کار قابل استفاده اند. این شخص با چند مسیر مختلف می تواند از منزل به محل کارش برود، در صورتی که تنها از پانزده بلوک بگذرد؟

رهیافتی بدیهی برای این مسأله رسم نمودار تمام مسیرهای ممکن و سپس شمارش آنهاست. اما $6 \times 4 \times 3 \times 5$ مسیر مختلف وجود دارند، و بنابراین رهیافت مستقیم ناکارآمدی غیر عملی است. اگر به طریقی صحیح به مسأله نگاه کنیم مسأله خیلی مشکل نیست. راه حل در فصل ۳ داده شده است.

اکنون به مسأله دیگری می پردازیم که راه حل آن موکول به تحلیلی نظری است.

مسأله ۴.۱ فرماندار یک ایالت در جشن صدمین سال تأسیس یک چاپخانه معروف شرکت می کند. ناشر به منظور ابراز قدردانی، به فرماندار پیشنهاد می کند که



شکل ۲.۱

به عنوان هدیه، ده کتاب از بیست کتابی را که جزو پرفروشترین کتابهای این چاپخانه است، انتخاب کند. فرماندار مجاز است که ده کتاب مختلف از بیست کتاب، یا ده کتاب مشابه (ده نسخه از یک کتاب)، یا هر ترکیب دلخواه دیگری را که ترجیح می‌دهد انتخاب کند مشروط به اینکه تعداد کتابها از ده جلد تجاوز نکند، (الف) فرماندار به چند طریق می‌تواند انتخابش را انجام دهد؟ (ب) اگر فرماندار بخواهد ده جلد کتاب متمایز انتخاب کند، به چند طریق می‌تواند این انتخاب را انجام دهد؟ سؤال (ب) از سؤال (الف) آسانتر است، زیرا سؤال (ب) مطلب سراسر انتخاب ده شیء از بیست شیء است. تعداد انتخابهای مختلف ده شیء از بیست شیء را با نماد $C(20, 10)$ نشان می‌دهند و همان طوری که در فصل بعد خواهیم دید، به راحتی محاسبه می‌شود. حل قسمت (الف) مسأله در صفحه ۶۵ داده شده است.

مسأله ۵.۱ به چند طریق ممکن است یک اسکناس یک دلاری را خرد کرد؟ (فرض کنید سکه‌ها به صورت ۱، ۵، ۱۰، ۲۵ و ۵۰ سنتی باشند، که به سکه‌های یک سنتی، نیکلی، ده سنتی، ربع و نیم دلاری نیز معروف اند.)

این مسأله را، نظیر بسیاری از مسائل دیگر این کتاب می‌توان صرفاً با تعیین تمام حالتها و شمارش آنها حل کرد. راهی اصولی‌تر برای حل آن در فصل ۷ ارائه شده است. این فصل را با بیان اصلی اساسی درباره شمارش به پایان می‌رسانیم، این اصل از سؤال ساده‌ای، مثل تعیین تعداد صفحه‌ها از صفحه ۱۴ تا ۵۹، حاصل می‌شود، پاسخ برابر ۴۶ است که یک واحد از تفاضل دو عدد صحیح* ۱۴ و ۵۹ بیشتر است.

* اعداد صحیح که بعضی اوقات «اعداد درست» نامیده می‌شوند، بر سه نوع اند؛ اعداد صحیح مثبت یا اعداد طبیعی ۱، ۲، ۳، ۴، ...، که، (...)، به جای کلمه «و غیره» به کار می‌رود؛ اعداد صحیح منفی ۱-، ۲-، ۳-، و ... و ۰ که نه منفی و نه مثبت است. اعداد صحیح نامنفی عبارت‌اند از ۰، ۱، ۲، ۳، ۴،

به‌طور کلی تعداد اعداد صحیح از k تا n ، برابر $n - k + 1$ است که در آن فرض شده است که n بزرگتر از k است، یعنی $n > k$.

مجموعه مسائل ۱

۱. از عدد ۲۵ تا ۷۹ چند عدد صحیح وجود دارد؟
۲. پنجاه و سومین عدد صحیح دنباله $\dots, ۸۸, ۸۷, ۸۶$ کدام است؟
۳. بزرگترین عدد ۱۲۳ عدد متوالی، عدد ۳۰۷ است. کوچکترین عدد این دنباله چند است؟
۴. کوچکترین عدد r عدد متوالی n است، بزرگترین عدد این دنباله چند است؟
۵. بزرگترین عدد r عدد متوالی k است، کوچکترین عدد این دنباله چند است؟
۶. در دنباله $n, n+1, n+2, \dots, n+h$ چند عدد صحیح وجود دارد؟
۷. چند عدد صحیح x در نابرابریهای $۱۲ < \sqrt{x} < ۱۵$ ، یعنی $\sqrt{x}$ بزرگتر از ۱۲ و کوچکتر از ۱۵، صدق می‌کنند؟
۸. در دنباله‌های زیر چند عدد صحیح وجود دارند؟
الف) $۵۴۰, ۷۰, ۸۰, \dots, ۶۰$ ؛ ب) $۱۴۴, \dots, ۱۸, ۱۵$ ؛
پ) $۲۲۱, \dots, ۳۵, ۲۹, ۲۳, ۱۷$.
۹. بین ۱ تا ۲۰۰۰ چند عدد صحیح وجود دارد که الف) مضرب ۱۱ باشند؛ ب) مضرب ۱۱ بوده ولی مضرب ۳ نباشند؛ پ) مضرب ۶ بوده ولی مضرب ۴ نباشند؟
۱۰. کمترین تعداد سکه‌های لازم برای پرداخت هزینه‌ای کمتر از یک دلار به‌صورت پول خرد چقدر است؟ (سکه‌ها به ترتیب ۱، ۵، ۱۰، ۲۵ و ۵۰ سنتی نامگذاری شده‌اند.)
۱۱. شخصی ۴۷ سنت طلبکار است. فرض کنیم پول نقد موجود صندوقدار شامل مقدار زیادی سکه‌های ۱، ۵، ۱۰ و ۲۵ سنتی است. صندوقدار به‌چند طریق مختلف می‌تواند بدهی شخص را بپردازد؟
۱۲. شخصی در یک جعبه تعداد شش جفت دکمه سردست دارد. هیچ دو جفتی شبیه به هم نیستند. این شخص برای اینکه مطمئناً یک جفت دکمه جور به‌دست آورد، چندتا از

این دکه سردهستها را باید باهم (چشم بسته) بیرون بکشند؟

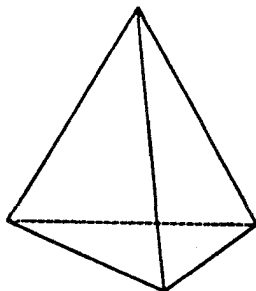
۱۳. شخصی در یک کشتی دوازده جوراب آبی و دوازده جوراب مشکی که به صورت تصادفی قاطی شده‌اند دارد. او باید چند جوراب را باهم (چشم بسته) بیرون بیاورد تا مطمئن باشد که یک جفت جوراب جور در بین آنهاست؟ (هر دو جورابی که آبی و هر دو جورابی که مشکی باشند یک جفت جوراب جور را تشکیل می‌دهند.)

۱۴. اندازه یک زاویه چند ضلعی منتظم بر حسب درجه عددی صحیح است. چنین چند ضلعی چند ضلع می‌تواند داشته باشد؟

۱۵. شخصی تعداد زیادی چهار وجهیهای منتظم چوبی دارد که تمام آنها یک اندازه‌اند. (چهاروجهی منتظم عبارت از جسم صلبی است که به چهار مثلث متساوی-الاضلاع یکسان محدود شده است؛ شکل ۳.۱ را ببینید.) اگر او هر وجه مثلث شکل را با یکی از چهار رنگ، رنگ آمیزی کند، و اگر تمام ترکیبهای رنگهای مختلف مجاز باشند، چند چهاروجهی رنگ شده مختلف می‌تواند تهیه نماید؟ (دو بلوک را مختلف گویند، اگر نتوان آنها را در وضعیتهای یکسان با وجوه متناظری که رنگهای یکسان دارند قرار داد.)

۱۶. چند مسیر مختلف، یک رأس مکعب را به رأس مقابل آن وصل می‌کند به طوری که هر مسیر ممکن در روی سه یال از دوازده یال مکعب قرار داشته باشد؟

۱۷. در کنفرانسه‌های رسمی دیوان عالی ایالات متحده، هر یک از نه قاضی در شروع جلسه با بقیه دست می‌دهد. در چنین جلسه‌ای چند بار عمل دست دادن انجام می‌گیرد؟



شکل ۳.۱

جایگشتها و ترکیبها

این فصل و فصل بعدی بعضی از ایده‌های اساسی موضوع این کتاب را معرفی می‌کنند. ممکن است خواننده از روی مطالعات قبلی خود با تعدادی از این مفاهیم آشنا باشد. اما در چندین مورد، در فصلهای ۲ و ۳، موضوعها با تفصیلی بیشتر از آنچه معمولاً در کتابهای مقدماتی جبر وجود دارند، مورد بحث قرار می‌گیرند. اگر خواننده تمام این ایده‌های اساسی را کاملاً بفهمد در فصلهای بعدی برای او راه هموار خواهد بود. اگر او قادر باشد به سؤالاتی مجموعه‌های مسائل پاسخ دهد، می‌تواند اطمینان حاصل کند که موضوع را درک کرده‌است. در این دو فصل بیشتر نمادهای پایه‌ای ترکیبیاتی بیان می‌شوند. از میان نمادهای مختلفی که در تمام نوشته‌های ریاضی مورد استفاده قرار گرفته‌اند، چند صورت استاندارد را شرح می‌دهیم، اما بعداً تنها بایکی از این صورتهای کار می‌کنیم.

برای معرفی موضوع، مسأله ساده‌ی زیر را در نظر می‌گیریم. یک فروشگاه لباس پنج نوع کمر بند برای آقایان و پسران دارد. و از هر نوع کمر بند هفت اندازه موجود است. چند نوع مختلف کمر بند در این فروشگاه یافت می‌شود؟

از ضرب ۵ در ۷ می‌توان جواب ۳۵ را به دست آورد، زیرا ۷ کمر بند از نوع اول و ۷ کمر بند از نوع دوم و...، ۷ کمر بند از نوع پنجم وجود دارند، و بنابراین داریم:

$$7+7+7+7+7=5 \times 7=35.$$

این مسئله ساده، يك اصل پایه‌ای را توضیح می‌دهد.

۱۰۲ اصل ضرب

اگر گردایه‌ای از اشیاء را بتوان به m دسته مختلف تفکیک کرد و اگر هر يك از این دسته‌ها را بتوان به صورت k زیر دسته مختلف تفکیک نمود، آن‌گاه کلاً mk دسته مختلف وجود دارد.

این اصل را می‌توان، علاوه بر يك رده‌بندی بر حسب دو ویژگی مانند نوع و اندازه کمر بندها، به رده‌بندی‌هایی بر حسب سه ویژگی، چهار ویژگی و بیشتر تعمیم داد. به عنوان مثال، سؤال زیر را در نظر بگیرید. داروخانه‌ای از هفت تولیدکننده مختلف، خمیر دندان تهیه می‌کند. هس تولیدکننده دو نوع خمیر دندان فلوردار و معمولی را در سه اندازه مختلف می‌سازد. داروخانه چند نوع مختلف خمیر دندان دارد؟ چون ۷ تولیدکننده، در ۳ اندازه، ۲ نوع خمیر دندان فلوردار و معمولی می‌سازند مبتنی بر اصل ضرب، پاسخ برابر با $7 \times 3 \times 2$ یا ۴۲ است.

اصل ضرب را علاوه بر مورد مسائل مربوط به اشیاء رده‌بندی شده، در مورد بسیاری از مسائل دیگر نیز می‌توان به کار برد. به عنوان مثال، شخصی را در نظر بگیرید که تصمیم دارد با هواپیما به اروپا رفته و با کشتی برگردد. اگر هشت خط مختلف هوایی و نه شرکت مختلف کشتیرانی موجود باشند، آن‌گاه او به 8×9 یا ۷۲ راه مختلف می‌تواند سفر خود را انجام دهد.

مثال ساده دیگری نیز می‌آوریم. در يك پيك نيك بزرگ، ناهار شامل ساندویچ (با چهار نوع انتخاب)، نوشیدنی (با انتخاب از قهوه، شیر، چای) و يك ظرف بستنی (با انتخاب از سه نوع طعم) است. هر شخص به چند راه مختلف می‌تواند ناهار خود را انتخاب کند؟ بنابراین اصل ضرب می‌بینیم که پاسخ برابر با $4 \times 3 \times 3$ یا ۳۶ راه است.

به دلیل کاربردهای مختلف اصل ضرب، غالباً این اصل بر حسب پیشامدها فرمولبندی می‌شود: اگر پیشامدی بتواند به m طریق رخ دهد و پیشامد دوم بتواند

مستقل از اولی به k طریق رخ دهد، آن گاه این دو پیشامد می‌توانند به $m.k$ طریق مختلف رخ دهند.

واژه «مستقل» در اینجا نقش اساسی دارد، زیرا برای وضعیتهایی که پیشامد دوم به پیشامد اول وابسته بوده و یا به وسیله آن محدود می‌شود، اصل ضرب الزاماً معتبر نیست. مثلاً دختری با هفت دامن و پنج بلوز نمی‌تواند ۳۵ بلوز و دامن جورداشته باشد. زیرا ممکن است بعضی از رنگها یا طرحها از نظر زیبایی ناهماهنگ باشند، به عنوان مثال یک دامن قرمز بخصوص بایک بلوز نارنجی بخصوص به هم نمی‌آیند. اما مثال زیر، نوع استاندارد وابستگی پیشامدها را نشان می‌دهد که در آن باز می‌توان از اصل ضرب استفاده کرد.

مسئله ۱۰۲ چهار حرف A, B, C, D را به چند ترتیب مختلف می‌توان طوری نوشت که در هیچ آرایشی هیچکدام از حروف تکرار نشود؟

به این سؤال می‌توان صرفاً با نوشتن تمام ترتیبهای ممکن $ABCD, ACBD, ABDC$ و غیره پاسخ داد. اما ساده‌تر است و در مسائل پیچیده‌تر لازم است که برای حل مسئله سیستمی ابداع کنیم. در هر آرایش، حرف اول را در نظر بگیریم. برای این حرف در این موضع، چهار انتخاب وجود دارد. به ازای هر انتخاب حرف اول، سه انتخاب ممکن برای حرف دوم موجود است. اگر مثلاً، حرف اول B باشد آن گاه حرف دوم یکی از حرفهای A, C یا D است. به طور مشابه بعد از آنکه از میان چهار حرف دو حرف انتخاب شد، سومین حرف را می‌توان به دو راه انتخاب کرد، و وقتی می‌خواهیم حرف چهارم را به دست آوریم تنها یک راه انتخاب وجود دارد؛ یعنی تنها یک حرف موجود است که می‌تواند در محل چهارم قرار بگیرد. بنابراین، اصل ضرب پاسخ

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

را به دست می‌دهد. خواننده باید با فهرست کردن تمام ۲۴ حالت، درستی جواب را تحقیق کند. آرایشهایی را که با حرف A شروع می‌شوند در زیر ارائه می‌دهیم:

$ABCD, ABDC, ACBD, ACDB, ADBC, ADCB.$

مسئله ۲۰۲ در یک استان (فرضی) شماره پلاک اتومبیلها به جای اعداد با حروف مشخص شده‌اند. برای این کار دقیقاً از سه حرف استفاده شده است، مثلاً BQJ, CCT و DWD . اگر تعداد حروف الفبا ۲۶ باشد چند پلاک مختلف

می توان ساخت؟

همان طوری که مثالها نشان می دهند، تکرار حرفها در شماره اتومبیل مجاز است. با توجه به اینکه برای انتخاب هر يك از سه حرف، ۲۶ انتخاب وجود دارد، جواب برابر است با:

$$26 \times 26 \times 26 = 17576.$$

مسأله ۳.۲ اگر در مسأله ۲.۲ در شماره گذاری پلاك اتومبیل تکرار حروف مجاز نباشد، پاسخ چه خواهد بود؟

می توان استدلالی را به کار برد که با آنچه در حل مسأله ۱.۲ به کار رفت مشابه است. برای اولین حرف ۲۶ انتخاب، ولی برای حرف دوم ۲۵ انتخاب و برای حرف سوم تنها ۲۴ انتخاب وجود دارد. بنابراین پاسخ برابر است با:

$$26 \times 25 \times 24 = 15600.$$

مجموعه مسائل ۲

۱. چندتا از آرایشهای مسأله ۲.۲ با حرف Q شروع می شوند؟

۲. چندتا از آرایشهای مسأله ۳.۲ با حرف Q شروع می شوند؟ چندتا به حرف Q ختم می شوند؟

۳. چندتا از آرایشهای مسأله ۲.۲ به یکی از حرفهای صدادار (U و O , I , E , A) ختم می شوند؟

۴. چندتا از آرایشهای مسأله ۳.۲ به يك حرف صدادار ختم می شوند؟

۵. اتاقی دارای شش در است. به چند طریق می توان از يك در وارد و از در دیگر خارج شد؟

۶. يك انبار لاستيك ماشین از نظر اندازه دارای هشت نوع لاستيك است. هر نوع یا با تویی و یا بدون تویی است، و هر لاستيك دارای زه نایلونی و یا زهی از بافتهای سلولزی است و جدار هر لاستيك یا دورسفید و یا کاملاً سیاه است. چند نوع مختلف لاستيك در این انبار وجود دارد؟

۷. يك کمپانی سفارش کالا، ۲۳ نوع دمپایی زنانه سفارش می دهد. اگر دمپایها

از نظر طولی در ۱۲ اندازه و از نظر عرضی در سه اندازه و از نظر رنگ در شش رنگ باشند، چند نوع مختلف دمپایی زنانه ممکن است در انبار این کمپانی موجود باشد؟
 ۸. بین اعداد ۱۰۰۰۰ تا ۱۰۰۰۰۰ چند عدد صحیح (درست) وجود دارند که ارقامی بجز ۶، ۷ یا ۸ ندارند؟ چند عدد صحیح موجودند که ارقامی بجز ۶، ۷، ۸ یا ۰ ندارند؟

۲.۲ فاکتوریلها

در بسیاری از وضعیتها برای حاصلضربهایی نظیر

$$۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱, ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱, ۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱,$$

که هر کدام از آنها حاصلضرب دنباله‌ای از اعداد صحیح متوالی، بوده و تمام آنها به یک ختم می‌شوند، داشتن نماد ساده‌ای مفید است. چنین حاصلضربهایی فاکتوریل نامیده می‌شوند. نماد ریاضی استاندارد که معمولاً به کار می‌رود یک علامت تعجب است. بنا بر این

$$۴! = ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۲۴,$$

$$۶! = ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۷۲۰,$$

$$۷! = ۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۵۰۴۰.$$

۴! را «فاکتوریل چهار»، ۶! را «فاکتوریل شش»، ۷! را «فاکتوریل هفت» می‌خوانیم. به طور کلی برای هر عدد صحیح مثبت n ، $n!$ را (که فاکتوریل n خوانده می‌شود) به صورت

$$n! = n(n-1)(n-2)(n-3) \dots ۱,$$

تعریف می‌کنیم. این، حاصلضرب تمام اعداد صحیح از n تا ۱ است. توجه کنید که ۱! برابر ۱ است.

مجموعه مسائل ۳

۰۹. ۳!، ۵!، ۸! را به صورت حاصلضرب درآورده، سپس مقدار آنها را محاسبه

کنید.*

۲. هریک از مقادیر زیر را به دست آورید:

$$\frac{12!}{10!}; 2!; 4! + 3!; (4+3)!.$$

۳. مقدار $(n+1)!$ را در حالت $n=4$ محاسبه کنید.۴. مقدار $n! + 1$ را در حالت $n=4$ محاسبه کنید.۵. مقدار $(n-1)!$ را در حالت $n=4$ حساب کنید.۶. مقدار $(n-r)!$ را در حالت $n=10$ و $r=8$ محاسبه کنید.۷. مقدار $(n-r)!$ را در حالت $n=12$ و $r=6$ حساب کنید.۸. مقدار $\frac{n!}{(n-r)!}$ را در حالت $n=12$ و $r=4$ و همچنین در حالت $n=10$ و $r=6$ محاسبه کنید.۹. مقدار $\frac{n!}{r!(n-r)!}$ را در حالت $n=10$ و $r=6$ محاسبه کنید.

۱۰. کدام يك از روابط زیر صحیح و کدام يك غلط است؟

$$\text{الف) } 8! = 8 \times 7! \quad \text{ب) } \frac{10!}{9!} = 9 \quad \text{پ) } 4! + 4! = 8! \quad \text{ت) } 2! - 1! = 1!$$

$$\text{ث) } n! = n \times (n-1)! \quad \text{ج) } n! = (n^2 - n) \times (n-2)! \quad \text{د) } n! > 1 \text{ به ازای } n > 1$$

$$\text{ه) } n! > 2 \text{ به ازای } n > 2$$

۳.۲ جایگشتها

جایگشتها آرایشهای مرتب اشیاء هستند. به عنوان مثالهایی برای جایگشتها، دوباره مسائل ۱.۲ و ۳.۲ از بخش ۱.۲ را در نظر بگیرید.

* اگرچه از خواننده خواسته می شود که اعدادی مانند $5!$ و $8!$ را محاسبه نماید، ولی نباید از او انتظار داشت که (مثلاً) $20!$ را حساب کند. اگر چنین عددی پاسخ سؤالی در این کتاب باشد، باید آن را دقیقاً به همان شکل فاکتوریل باقی گذاشت. تکنیکهای شمارشی بسیار اهمیت دارند ولی در این کتاب روی آنها تأکید نمی شود.

مسئله ۱۰۲ چهار حرف A, B, C, D را به چند ترتیب مختلف می‌توان طوری نوشت که در هیچ آرایشی هیچ حرفی تکرار نشود؟

مسئله بالا نظیر این است که پیرسیم چند جایگشت برای چهار حرف، هر دفعه چهار حرف، وجود دارد. تعداد چنین جایگشتهایی را با نماد $P(4, 4)$ نشان می‌دهند.

مسئله ۳۰۲ اگر در هر شماره اتومبیل سه حرف وجود داشته باشد و تکرار حروف در شماره گذاری مجاز نباشد، چند شماره متفاوت اتومبیل وجود دارد؟

این نظیر آن است که پیرسیم چند جایگشت برای بیست و شش حرف، هر دفعه سه حرف، وجود دارد؟ تعداد چنین جایگشتهایی با $P(26, 3)$ نشان داده می‌شود. این مسائل را در بخش ۱۰۲ حل کرده‌ایم و حالا می‌توان این پاسخها را با نماد جدید به صورت

$$P(26, 3) = 26 \times 25 \times 24 = 15600 \text{ و } P(4, 4) = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

نوشت.

هر يك از این $P(26, 3) = 15600$ جایگشت سه به سه از ۲۶ شیء را يك جایگشت سه تایی گویند. به طور کلی يك جایگشت r تایی، آرایشی مرتب از r شیء است، و $P(n, r)$ تعداد جایگشتهای r تایی يك مجموعه از n شیء متمایز را نشان می‌دهد. این نظیر آن است که بگوییم $P(n, r)$ تعداد جایگشتهای r به r از n شیء است. البته از پیش فرض می‌شود که r از n تجاوز نکند یعنی $r \leq n$. توجه کنید که n شیء باید متمایز باشند، یعنی باید بتوانیم آنها را از یکدیگر تمیز دهیم. به منظور به دست آوردن فرمولی برای $P(n, r)$ ، جعبه متمایز در نظر می‌گیریم که n شیء را بتوان در داخل آنها قرار داد:



جعبه اول



جعبه دوم



جعبه سوم

...



جعبه r ام

بنابراین $P(n, r)$ را ممکن است تعداد راههایی در نظر گرفت که می‌توان n شیء متمایز را در داخل r جعبه قرار داد، به شرطی که در هر جعبه يك شیء قرار گیرد.

ابتدا حالت خاصی را در نظر می‌گیریم که تعداد اشیاء به اندازه تعداد جعبه‌ها باشد. برای اولین جعبه می‌توان هر يك از n شیء را انتخاب کرد. بعد از انجام این کار، $n - 1$ شیء باقی می‌ماند که می‌توان یکی از آنها را برای جعبه دوم انتخاب

کرد. به همین ترتیب $n-2$ شیء باقی می ماند که می توان یکی از آنها را برای جعبه سوم انتخاب کرد. با ادامه این روش می بینیم که وقتی به جعبه آخر می رسیم فقط یک شیء باقی می ماند و بنابراین تنها یک انتخاب وجود دارد. بنا بر اصل ضرب داریم

$$P(n, n) = n! \quad \text{یا} \quad P(n, n) = n(n-1)(n-2)\dots 1$$

مثلاً

$$P(7, 7) = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 7!,$$

$$P(28, 28) = 28 \times 27 \times 26 \times \dots \times 3 \times 2 \times 1 = 28!.$$

می توان همان استدلالی را که برای محاسبه $P(n, n)$ به کار رفت برای محاسبه $P(n, r)$ به کار برد. به عنوان نمونه توجه کنید که

$$P(28, 5) = 28 \times 27 \times 26 \times 25 \times 24.$$

مشاهده کنید که در این حاصلضرب ۵ عدد صحیح متوالی، تفاضل بین بزرگترین و کوچکترین عدد، یعنی تفاضل بین ۲۴ و ۲۸، برابر ۴ است. به طور کلی $P(n, r)$ حاصلضرب r عدد صحیح $n, n-1, n-2, \dots, n-r+1$ است:

$$P(n, r) = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1).$$

برای آنکه ببینیم $P(n, r)$ حاصلضرب r عدد صحیح متوالی است، یادآوری می کنیم که تعداد اعداد صحیح از k تا n و خود n ، برابر $n-k+1$ است (صفحه ۶ را ببینید). بنابراین تعداد اعداد صحیح از $n-r+1$ تا n و خود n ، برابر

$$n - (n-r+1) + 1 = r$$

است. توجه کنید که اگر $r = n$ ، فرمول $P(n, r)$ با فرمول قبلی

$$P(n, n) = n(n-1)(n-2)\dots 1$$

هماهنگی دارد.

اکنون به تهیه فرمول دیگری برای $P(n, r)$ می پردازیم. به عنوان مثال توجه کنید که

$$P(10, 4) = 10 \times 9 \times 8 \times 7,$$

که با استفاده از کسری شامل فاکتوریلها می توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$P(10, 4) = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \\ = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{10!}{6!}.$$

همین شیوه در مورد حالت کلی $P(n, r)$ به کار می رود:

$$P(n, r) = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1) \\ = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)(n-r)\dots 1}{(n-r)(n-r-1)\dots 1}, \\ P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!} \quad (1.2)$$

مثال: بین اعداد صحیح ۱۰۰ تا ۹۹۹ و خود این عدد چند عدد صحیح وجود دارند که رقمهای آنها اعداد فرد متمایزند.

حل: رقمهای فرد عبارت اند از ۱، ۳، ۵، ۷، ۹ و رقمهای زوج عبارت اند از ۰، ۲، ۴، ۶ و ۸. عدد صحیحی مانند ۷۲۳ به حساب نمی آید زیرا شامل ۲ است؛ و عدد صحیحی مانند ۳۷۳ نیز به حساب نمی آید زیرا این عدد شامل رقمهای متمایز نیست. این سؤال به سؤال درباره تعداد جایگشتهای ۵ رقم متمایز ۱، ۳، ۵، ۷، ۹، هر بار سه رقم، برمی گردد. پاسخ برابر است با

$$P(5, 3) = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 5 \times 4 \times 3 = 60.$$

فرمول (۱.۲) برای $P(n, r)$ را نمی توان در حل تمام مسائل مربوط به جایگشتها به کار برد، زیرا تمام آرایشهای مرتب n شیء متمایز، هر بار r تا، پاسخ چنین مسائلی نیستند. همان طوری که مثالهای زیر نشان می دهند، گاهی يك مسأله با استفاده مستقیم از اصل ضرب قابل حل است.

مثال: بین ۱۰۰ تا ۹۹۹ چند عدد صحیح با رقمهای متمایز وجود دارند؟

حل: جواب، صرفاً $P(10, 3)$ ، یعنی تعداد جایگشتهای سه به سه تمام ۱۰ رقم نیست، زیرا مثلاً ۰۸۶ عددی بین ۱۰۰ تا ۹۹۹ نیست. رقم ۰ می تواند در مرتبه

یکان (مانند ۸۶۰) یا در مرتبه دهگان (مانند ۸۰۶) قرار گیرد ولی در مرتبه صدگان قرار نمی گیرد. سه جعبه در نظر بگیرید که هر یک با رقمی از رقمهای اعداد صحیح مورد نظر پر شود:



مرتبه صدگان



مرتبه دهگان



مرتبه یکان

برای مرتبه صدگان نه انتخاب وجود دارد زیرا از صفر نمی توان استفاده کرد. سپس برای مرتبه دهگان نیز نه انتخاب، یعنی صفر و هشت رقم غیر صفر که قبلاً از آنها استفاده نشده است، وجود دارد. به همین ترتیب برای انتخاب رقم مرتبه یکان هشت انتخاب موجود است. بنابراین پاسخ برابر با $8 \times 9 \times 8$ یا ۶۴۸ است.

مثال: در میان ۶۴۸ عدد صحیح مسأله قبل، چند عدد فرد وجود دارند.

حل: عددی فرد است که رقم یکان آن فرد باشد، یعنی یکی از رقمهای ۱، ۳، ۵، ۷، ۹ در مرتبه یکان آن قرار گیرد. بنابراین بهتر است که استدلال را با این سؤال آغاز کنیم که چند انتخاب برای رقمی که در مرتبه یکان قرار می گیرد وجود دارد؟ پاسخ، پنج است. سپس، به مرتبه صدگان برمی گردیم؛ هشت رقم، یعنی تمام رقمهای مخالف صفر بجز رقمی که قبلاً برای مرتبه یکان انتخاب شده است وجود دارند که می توان از میان آنها رقم صدگان را انتخاب کرد. سرانجام برای تعیین رقم مرتبه دهگان نیز هشت انتخاب وجود دارد. بنابراین پاسخ برابر با $8 \times 8 \times 5$ یا ۳۲۰ است.

بعضی از مسائل را می توان با در نظر گرفتن حالت های جدا از هم سریعتر حل کرد.

مثال: چند عدد از اولین ۱۰۰۰ عدد صحیح هستند که رقمهای آنها از هم

متمایزند؟

حل: عدد صحیح ۱۰۰۰ را که رقمهای آن متمایز نیستند کنار گذاشته، بقیه

را به سه دسته مختلف تقسیم می کنیم:

۱، ۲، ۳، ...، ۹

اعداد صحیحی که یک رقم دارند:

۱۰، ۱۱، ۱۲، ...، ۹۹

اعداد صحیحی که دو رقم دارند:

۱۰۰، ۱۰۱، ۱۰۲، ...، ۹۹۹

اعداد صحیحی که سه رقم دارند:

دانلود از سایت ریاضی سرا

همان طور که در مثال قبل نشان داده شد تعداد اعداد صحیح سه رقمی، با رقمهای متمایز، برابر ۶۴۸ است. استدلال مشابهی نشان می‌دهد که ۸۱ عدد صحیح دو رقمی و البته ۹ عدد یک رقمی وجود دارند که دارای رقمهای متمایزند. از اینرو پاسخ برابر است با:

$$۶۴۸ + ۸۱ + ۹ = ۷۳۸.$$

ایده‌ای که در اینجا از آن استفاده شده است اصل جمع نامیده می‌شود: اگر اشیاء به حالت‌های جدا از هم شمارش شوند، تعداد کل، برابر مجموع تعداد در حالت‌های مختلف است.

۴.۲ فاکتوریل صفر

اگر از فرمول (۱.۲) برای $P(n, r)$ در حالتی مانند

$$P(\gamma, \gamma) = \frac{\gamma!}{(\gamma - \gamma)!} = \frac{\gamma!}{0!}.$$

استفاده شود، پدیده‌ی جالبی رخ می‌دهد. نماد $0!$ را که تاکنون تعریف نشده است «فاکتوریل صفر» می‌گویند. در ریاضیات می‌توانیم مفهوم نمادها را به هر راهی که بخواهیم تعریف کنیم، البته به شرط آنکه در این تعریف سازگاری وجود داشته باشد. در حالت فعلی چون قبلاً تعیین کردیم که مقدار $P(\gamma, \gamma) = \gamma!$ سازگاری ایجاد می‌کند که داشته باشیم

$$P(\gamma, \gamma) = \gamma! = \frac{\gamma!}{0!}.$$

بنابراین باید فاکتوریل صفر را برابر ۱ تعریف کرد:

$$0! = 1.$$

ممکن است این تعریف عجیب به نظر آید، ولی، تعریف مفیدی است. این تعریف نه تنها به $P(n, r)$ ؛ بلکه به نمادگذاری ترکیبیاتی دیگری نیز مربوط می‌شود.

مجموعه مسائل ۴

۰۱. $P(7, 3)$ و $P(8, 4)$ و $P(20, 2)$ را محاسبه کنید.

۰۲. تحقیق کنید که $P(15, 2) = P(7, 3)$ و $P(5, 5) = P(6, 3)$.

۳. ثابت کنید به ازای تمام اعداد صحیح مثبت m و n ،

$$P(n, 1) + P(m, 1) = P(n + m, 1).$$

۴. ثابت کنید به ازای تمام اعداد صحیح مثبت n ، $P(n, n) = P(n, n - 1)$.

۵. از سه حرف مختلف یونانی، چند اسم برای سازمان دانشجویی می توان ساخت؟
(تعداد حروف الفبای یونانی بیست و چهار تاست.)

۶. اگر تکرار حروف در مسئله قبل مجاز باشد، پاسخ چه خواهد بود؟ اگر تکرار حروف مجاز باشد و اسامی دو حرفی نیز به حساب بیایند، پاسخ چه خواهد شد؟

۷. از اعداد ۱۰۰۰ تا ۹۹۹۹ چند عدد صحیح هستند که رقمهایشان متمایزند؟
چندتا از این اعداد فردند؟

۸. با رقمهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ چند عدد چهار رقمی با رقمهای متمایز می توان ساخت؟ چندتا از این اعداد فردند؟

۹. با رقمهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ چند عدد چهار رقمی با رقمهای متمایز می توان ساخت؟ چندتا از این اعداد زوج اند؟

۱۰. چند عدد صحیح بزرگتر از ۵۳۰۰۰ وجود دارند که دارای دو ویژگی زیر باشند:
الف) رقمهای هر عدد صحیح از هم متمایز باشند
ب) رقمهای ۰ و ۹ در عدد ظاهر نشوند.

۱۱. در مسئله قبل اگر شرط (ب) با شرط «رقمهای ۸ و ۹ در عدد ظاهر نشوند» عوض شود، پاسخ چه خواهد بود؟

۵.۲ ترکیبها

در حالی که یک جایگشت، آرایش مرتب اشیاء است، یک ترکیب، انتخابی بدون در نظر گرفتن ترتیب است. از نماد $C(n, r)$ برای نمایش تعداد ترکیبهای یک نوع خاص، به موازات نماد $P(n, r)$ برای نمایش تعداد جایگشتها، استفاده می شود. بنابراین $C(n, r)$ ، تعداد ترکیبهای، هر بار r تا، را که می توان از میان کل n شیء متمایز انتخاب کرد، نشان می دهد.

مثلاً، $C(5, 3)$ را در نظر بگیرید. فرض کنید پنج شیء، A, B, C, D و E باشند. بنابراین می توان دید که $C(5, 3) = 10$ ، زیرا ده ترکیب از اشیاء، که

هر بار سه تا از آنها انتخاب شود، وجود دارند:

$$\begin{array}{ccccccccc} A, B, C & A, B, D & A, B, E & A, C, D & A, C, E & & & & \\ & A, D, E & B, C, D & B, C, E & B, D, E & C, D, E & & & \end{array} \quad (۲.۲)$$

توجه کنید که هر کدام از این ده سه تایی صرفاً گردهای است که در آن ترتیب اهمیت ندارد. مثلاً سه تایی C, D, E را می توان به صورت D, E, C یا E, C, D و یا هر ترتیب دیگری نوشت، که همگی يك سه تایی به حساب می آیند.

n شیء متمایز داده شده اند. $C(n, r)$ تعداد راههای انتخاب r شیء از n گردهای کلی است. البته فرض می شود که r از n تجاوز نمی کند، یعنی $r \leq n$. مفهوم $C(n, r)$ را می توان بر حسب مجموعه ای از n عنصر نیز بیان کرد. $C(n, r)$ تعداد زیر مجموعه هایی است که شامل r عنصر هستند. مثلاً فهرست (۲.۲) در بالا، تمام زیر مجموعه های سه عنصری منتخب از مجموعه A, B, C, D, E را به دست می دهد.

قبل از به دست آوردن يك فرمول کلی برای $C(n, r)$ ، به منظور تشریح استدلال، مقدار $C(۲۶, ۳)$ را محاسبه می کنیم. می توان $C(۲۶, ۳)$ را به عنوان تعداد راههای انتخاب سه حرف از ۲۶ حرف الفبا در نظر گرفت. مثلاً چنین انتخابی، سه تایی D, Q, X است که بدون در نظر گرفتن ترتیب انتخاب می شود. این ترکیب D, Q, X ، با شش جایگشت متمایز

$$DQX \quad DXQ \quad QDX \quad QXD \quad XDQ \quad XQD$$

متناظر است.

در واقع هریك از $C(۲۶, ۳)$ ترکیب، با $P(۳, ۳) = ۶$ یا ۳! جایگشت متناظر است. از اینرو به ازای هر ترکیب، شش جایگشت وجود دارد:

$$P(۲۶, ۳) = ۶C(۲۶, ۳).$$

اما قبلاً مقدار

$$P(۲۶, ۳) = ۲۶ \times ۲۵ \times ۲۴ = ۱۵۶۰۰$$

را در مسئله ۳.۲ محاسبه کردیم. بنابراین داریم:

$$C(۲۶, ۳) = ۱۵۶۰۰ / ۶ = ۲۶۰۰ \text{ به طوری که } C(۲۶, ۳) = ۲۶۰۰.$$

اکنون برای به دست آوردن رابطه ای بین $C(n, r)$ و $P(n, r)$ ، این استدلال

دانلود از سایت ریاضی سرا

را تعمیم داده، سپس مقدار $C(n, r)$ را، با استفاده از فرمول (۱.۲) برای $P(n, r)$ ، محاسبه می‌کنیم. با n شیء متمایز، $C(n, r)$ تعداد راه‌های انتخاب r شیء از n شیء بدون در نظر گرفتن ترتیب است. هر يك از این انتخابها صرفاً گردایه‌ای از r شیء است. چنین گردایه‌ای را به $r!$ راه مختلف می‌توان مرتب کرد. چون هر يك از چنین ترکیب‌هایی متناظر با $r!$ جایگشت است، تعداد جایگشتها $r!$ برابر تعداد ترکیبهاست:

$$C(n, r) = \frac{P(n, r)}{r!} \quad \text{یا} \quad P(n, r) = r! C(n, r)$$

اما بنا بر فرمول (۱.۲) می‌دانیم که $P(n, r)$ برابر $n!/(n-r)!$ است، و لذا فرمولی اساسی برای $C(n, r)$ به دست می‌آوریم،

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad (۳.۲)$$

شاید این پر استفاده‌ترین فرمول آنالیز ترکیبیاتی باشد. عدد $C(n, r)$ اغلب به صورت‌های دیگری نشان داده می‌شود. مثلاً

$$\cdot \binom{n}{r} \quad C_r^n, \quad {}^nC_r, \quad nCr$$

آخرین نماد خیلی متداول است و آن را « n روی r » یا «ضریب دوجمله‌ای n روی r » می‌نامند. ضریب‌های دوجمله‌ای در بسط توانی از مجموع دوجمله مانند $(x+y)^n$ ظاهر می‌شوند؛ این یکی از عنوانهای فصل بعدی است. يك ویژگی ساده $C(n, r)$ که تقریباً بدیهی است عبارت است از

$$C(n, r) = C(n, n-r) \quad (۴.۲)$$

فرض کنیم به عنوان مثال قرار دهیم $n=5$ و $r=3$. آن گاه معادله (۴.۲) به صورت $C(5, 3) = C(5, 2)$ درمی‌آید، و می‌توان درستی آن را به صورت زیر تحقیق کرد. ۵ شیء A, B, C, D, E را اختیار می‌کنیم. می‌بینیم که $C(5, 3) = 10$ ، این ۱۰ سه‌تایی در (۲.۲) به تفصیل نوشته شده‌اند. حال وقتی که يك سه‌تایی مانند A, C, D انتخاب می‌شود يك زوج (در این حالت B, E) انتخاب نشده باقی می‌ماند. بنا بر این متناظر با هر سه‌تایی که در (۲.۲) انتخاب شده داندلود از سایت ریاضی سرا

است می‌توان يك زوج متناظر انتخاب نشده را (در پرانتز) نوشت:

$$\begin{array}{lll} A, B, C(D, E) & A, B, D(C, E) & A, B, E(C, D) \\ A, C, D(B, E) & A, C, E(B, D) & A, D, E(B, C) \\ B, C, D(A, E) & B, C, E(A, D) & B, D, E(A, C) \\ C, D, E(A, B) \end{array}$$

نتیجه می‌شود که تعداد راههای انتخاب سه شیء از ۵ شیء، برابر تعداد راههای انتخاب ۲ شیء از ۵ شیء است، بنابراین $C(5, 3) = C(5, 2) = 10$.

به‌طور کلی متناظر با انتخاب هر r شیء از میان n شیء، يك مجموعه $n-r$ عنصری از اشیاء انتخاب نشده که هیچکدام در انتخاب وجود ندارند، موجود است. بنابراین تعداد راههای انتخاب r شیء باید برابر تعداد راههای انتخاب $n-r$ شیء باشد و در نتیجه فرمول (۴.۲) برقرار است.

اگر در فرمول (۴.۲) به جای r ، صفر قرار دهیم، به‌دست می‌آوریم $C(n, 0) = C(n, n)$. اما $C(n, n)$ به معنای تعداد راههای انتخاب n شیء از میان n شیء است، بنابراین $C(n, n) = 1$. اما به‌نظر می‌رسد که $C(n, 0)$: «تعداد راههای انتخاب هیچ شیء از میان n شیء» بی‌معنی است. مناسب است که $C(n, 0)$ را برابر ۱ تعریف کنیم. توجه کنید که این تعریف با فرمول (۳.۲) که برای $r=0$ ، برابری

$$C(n, 0) = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{0!n!} = 1$$

را به دست می‌دهد هماهنگی دارد، زیرا $0! = 1$. همچنین تعریف می‌کنیم $C(0, 0) = 1$.

بجاست که تعریف $C(n, r)$ را به تمام اعداد صحیح n و r ، حتی اعداد صحیح منفی؛ تعمیم داد، زیرا در این صورت فرمولهای مختلف را می‌توان بدون توصیف یا توضیح اضافی نوشت. اگر n عددی منفی، اگر r عددی منفی، یا اگر $r > n$ باشد، $C(n, r)$ برابر صفر تعریف می‌شود مثلاً $C(5, -8), C(-10, 8), C(5, 12), C(10, 12)$ و بنا بر تعریف برابر صفرند. به عبارت دیگر در حالتی که یکی یا چندتا از مقادیر $r, n, r-n$ منفی باشند، $C(n, r) = 0$.

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad \text{در حالت‌های دیگر،}$$

مجموعه مسائل ۵

۱. مقدار $C(9, 3)$ و $C(7, 4)$ ، $C(6, 2)$ را محاسبه کنید.
۲. به وسیله جفت کردن زیر مجموعه‌های دو عنصری با زیر مجموعه‌های چهار عنصری مجموعه A, B, C, D, E, F نشان دهید که $C(6, 2) = C(6, 4)$.
۳. امتحانی شامل ده سؤال است که هر دانشجو باید به هشت سؤال جواب داده و ۲ سؤال را نادیده بگیرد. (الف) دانشجو به چند طریق می‌تواند سؤال‌های خود را انتخاب کند؟ (ب) اگر دانشجویی به دو سؤال جواب داده و هشت سؤال را حذف کند، به چند طریق می‌تواند سؤال‌های خود را انتخاب کند؟
۴. دانشکده‌ای ۷۲۰ دانشجو دارد. به چند طریق می‌توان هیأتی ده نفری برای نمایندگی دانشکده انتخاب کرد؟ (پاسخ را به شکل فاکتوریل باقی بگذارید)
۵. با استفاده از فرمول (۳.۲) $C(n, r) = C(n, n-r)$ درستی را تحقیق کنید.
۶. ۲۰ نقطه طوری در صفحه‌ای قرار دارند که هیچ سه‌تایی از آنها همخط نیستند، یعنی هیچ سه نقطه‌ای بر یک خط مستقیم قرار ندارند. با وصل کردن هر دو تای این نقاط، چند خط مستقیم می‌توان رسم کرد؟ با اتصال هر سه نقطه از این نقاط چند مثلث می‌توان ساخت؟
۷. به چند طریق می‌توان ده نفر را در یک ردیف نشانند به طوری که دو نفر مشخص آنها کنار هم قرار نگیرند.
۸. ثابت کنید که حاصلضرب پنج عدد صحیح متوالی بر ۵! تقسیم‌پذیر است و به طور کلی ثابت کنید که حاصلضرب r عدد صحیح متوالی بر $r!$ تقسیم‌پذیر است؟ پیشنهاد: فرمول را برای $C(n, r)$ امتحان کنید.
۹. نه جلد کتاب مختلف در قفسه‌ای قرار دارند. چهار جلد آنها قرمز و پنج جلد آنها سبزند. به چند ترتیب مختلف می‌توان کتابها را در قفسه‌ای مرتب کرد، (الف) اگر هیچ شرطی وجود نداشته باشد؛

ب) اگر کتا بهای قرمز کنار هم و کتا بهای سبز کنار هم باشند؛
 پ) اگر کتا بهای قرمز کنار هم باشند ولی در عین حال امکان داشته باشد که کتا بهای سبز پهلوی هم باشند ولی نه الزاماً؛
 ت) اگر رنگها يك درمیان باشند، یعنی هیچ دو کتاب همرنگی مجاور یکدیگر نباشند؟

۱۰۰. يك باشگاه مخصوص آقایان شصت عضو دارد، سی نفر آنها در کار تجارت و سی نفر آنها استادند. به چند طریق می توان کمیته ای مرکب از هشت نفر تشکیل داد که الف) حداقل سه نفر در کار تجارت و حداقل سه نفر استاد باشند؛
 ب) تنها شرط آن باشد که حداقل یکی از هشت نفر در کار تجارت باشد.
 (پاسخها را به صورت $C(n, r)$ باقی بگذارید.)

۱۱. اگر قرار باشد که يك شهروند به یکی از سه نفر داوطلب مقام شهردار، به یکی از چهار نفر داوطلب عضویت انجمن شهرداری و به یکی از سه نفر داوطلب وکالت ناحیه رأی دهد، به چند طریق يك برگه رأی به صورتی معتبر نوشته می شود؟ لازم نیست که هر شهروند به هر سه مقام رأی دهد ولی از او انتظار می رود که حداقل به یکی از این افراد رأی دهد.

۱۲. اگر ۲۰۱ به صورت حاصلضرب نوشته شود در انتهای راست عدد حاصل چند صفر متوالی ظاهر خواهند شد؟

۱۳. اگر ۵۲! به صورت حاصلضرب نوشته شود در انتهای راست عدد حاصل چند صفر متوالی وجود خواهند داشت؟

۱۴. با حرکت دادن پرچمهایی از پنج رنگ در بالای يك دکل، علامتهایی داده می شود. اگر ذخیره ای نامحدود از پرچمهایی که از هفت رنگ مختلف اند وجود داشته باشد، چند علامت مختلف می توان ساخت؟

۱۵. پاسخ مسأله قبل چه خواهد بود، اگر الف) در علامتی که داده می شود پرچمهای مجاور از يك رنگ نباشند؛ ب) در علامتی که داده می شود هر پنج پرچم رنگهای مختلف داشته باشند؟

۱۶. در ۲۶ حرف الفبا، چند زیرمجموعه سه حرفی وجود دارد به قسمی که هیچ دو حرفی از سه حرف مزبور حرفهای متوالی الفبا نباشند؟

۱۷. به چند طریق می‌توان تمام n شیء متمایز را در k جعبه متمایز قرار داد به شرطی که در هر جعبه بیش از یک شیء قرار نگیرد، و تعداد جعبه‌ها بیشتر از تعداد اشیاء باشد.

۲.۶ جایگشتهای اشیاء واقع بر یک دایره

جایگشتهایی را که تاکنون بررسی کردیم جایگشتهای خطی می‌نامند، زیرا جایگشتهایی از اشیاء واقع بر یک خط یا در یک سطرند. جایگشتهای اشیاء بر یک دایره یا جایگشتهای دوری در مسأله‌ای مانند مسأله زیر پیش می‌آیند: به چند طریق می‌توان پنج نفر را دور یک میز نشانند؟

راه حل اول. اگر افراد را با A, B, C, D و E نامگذاری کنیم، می‌بینیم که پنج جایگشت خطی

$$ABCDE, BCDEA, CDEAB, DEABC, EABCD,$$

وقتی آنها را به عنوان یک جایگشت دوری در نظر بگیریم، یکی هستند. این مطلب بدین دلیل است که دو آرایش از افراد در دور یک میز را یک جایگشت دوری واحد در نظر می‌گیرند اگر یکی از آنها از دیگری با دوران هر فردی به یک اندازه و در یک جهت حول یک دایره به دست آید. مثلاً این نظیر موردی است که هر فرد به صندلی سمت راست تغییر مکان دهد. از این رو می‌توانیم با مربوط کردن جایگشتهای دوری به جایگشتهای خطی تعداد آنها را به دست آوریم: هر جایگشت دوری با پنج جایگشت خطی متناظر است، بنابراین تعداد جایگشتهای دوری، فقط $1/5$ تعداد جایگشتهای خطی است. اما پنج شیء دارای ۵! جایگشت خطی است و لذا، پاسخ مسأله برابر است با

$$\frac{1}{5}(5!) = \frac{1}{5}(5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4!.$$

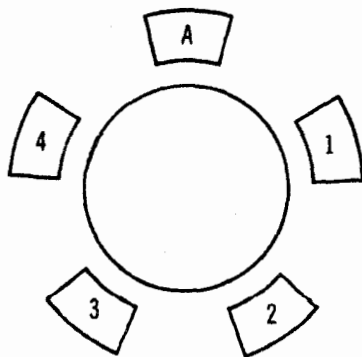
راه حل دوم. چون وقتی هر شیء (یا هر فرد) به طور یکنواخت به اندازه یک مکان به سمت راست و یا به طور یکنواخت به اندازه دو مکان به سمت راست و غیره حرکت کند، یک آرایش دوری تغییر نمی‌کند، می‌توانیم یک مکان را برای اولین فرد ثابت نگهداشته و دیگران را در مقایسه با مکان این فرد دور میز مرتب کنیم. A را در یک مکان ثابت قرار می‌دهیم، می‌بینیم که هر یک از چهار نفر می‌توانند بلافاصله در سمت راست A قرار گیرند، آن گاه هر یک از سه نفر باقیمانده، در سمت

راست مکان جدید و هر يك از دونفر بعدی در مکان بعدی و فرد باقیمانده در مکان آخر قرار می‌گیرد؛ شکل ۱۰۲ را ببینید. با استفاده از اصل ضرب، پاسخ $4 \times 3 \times 2 \times 1$ را به دست می‌آوریم.

در حالت کلی تعداد جایگشت‌های دوری n شیء متمایز برابر $(n-1)!$ است. برای نشان دادن این مطلب می‌توان مانند آنچه در راه‌حل‌هایی که در بالا برای حالت خاص $n=5$ انجام دادیم استدلال کرد. بخصوص راه حل دوم را دنبال می‌کنیم. فرض می‌کنیم که n فرد $A, B, C, D, \dots$ در دور میزی نشسته باشند. چون دوران یکنواخت افراد، يك آرایش را تغییر نمی‌دهد، باید شخص A را در مکانی ثابت قرار داده، آن‌گاه تعداد راه‌های آرایش دادن بقیه را بررسی کنیم. در صندلی سمت راست A می‌توانیم هر يك از $n-1$ فرد دیگر را قرار دهیم. بعد از انجام این عمل، می‌توانیم هر يك از $n-2$ فرد باقیمانده را در صندلی بعدی سمت راست قرار دهیم. با ادامه این روش در دور میز، در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت، می‌بینیم که اصل ضرب پاسخ

$$(n-1)(n-2)(n-3)\dots 1 = (n-1)!$$

را به دست می‌دهد.



شکل ۱۰۲

مجموعه مسائل ۶

۰۱. به چند طریق می توان هشت نفر را دور يك میز نشاند؟

۰۲. در مسأله قبل اگر دو شخص معین از هشت نفر نتوانند در دو صندلی مجاور بنشینند، پاسخ چه خواهد بود؟

۰۳. به چند طریق چهار مرد و چهار زن را می توان دور يك میز نشاند، به شرط آنکه هیچ دو مردی در دو صندلی مجاور قرار نگیرند؟

۰۴. در مسأله قبل فرض می کنیم که اشخاص، چهار زن و شوهر باشند، اگر هیچ زن و شوهری و همچنین هیچ دو مردی پهلوی هم قرار نگیرند پاسخ چه خواهد بود؟

۰۵. در يك موتور شش سیلندر از لحاظ نظری جرقه زدن به چند ترتیب مختلف ممکن است صورت بگیرد؟ (اگر سیلندرها از ۱ تا ۶ شماره گذاری شوند، ترتیب جرقه زدن فهرستی مانند ۱، ۴، ۲، ۵، ۳، ۶ است که يك ترتیب دورانی را می دهد که در آن سوخت در سیلندر می سوزد.)

۰۶. چند بلوك رنگ شده مکعب شکل می توان ساخت به شرطی که از شش رنگ استفاده شود و هر يك از شش وجه هر بلوك با رنگی متفاوت با رنگ وجوه دیگر، رنگ آمیزی شود؟ تعریف بلو کهای رنگی متفاوت همان است که در مسأله ۰۱ فصل اول آمده است.

۰۷. چند مکعب مختلف، که شش وجه هر يك را از ۱ تا ۶ شماره گذاری کرده اند، می توان ساخت که مجموع اعداد روی هر جفت از وجوه مقابل برابر ۷ باشد؟

۷.۲ خلاصه

اصل ضرب: اگر پیشامدی به m راه و پیشامد دوم به k راه مستقل از راههای اول رخ دهد، آن گاه دو پیشامد به mk راه رخ می دهند.

فرمول فاکتوریل n :

$$n! = n(n-1)(n-2)\dots 1 \quad n \text{ برای اعداد صحیح مثبت}$$

$$0! = 1.$$

تعداد جایگشتها (یعنی آرایشهای مرتب) r به r از n شیء متمایز، برابر است با

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

تعداد ترکیبهای (یعنی تعداد انتخابهای بدون در نظر گرفتن ترتیب) r به r از n شیء متمایز برابر است با

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$C(n, r)$ را می توان به عنوان تعداد زیرمجموعه های r تایی (زیرمجموعه هایی شامل r عنصر) یک مجموعه ای از n شیء تعبیر کرد. یک نماد دیگر برای $C(n, r)$ ، که غالباً مورد استفاده قرار می گیرد، $\binom{n}{r}$ است. ویژگی پایداری $C(n, r)$ عبارت است از

$$C(n, r) = C(n, n-r).$$

نماد $C(n, r)$ ، مقدار عددی زیر بدازای تمام زوجهای اعداد صحیح n و r است:

در حالتی که یک یا چندتا از مقادیر n ، r ، $n-r$ منفی باشند، $C(n, r) = 0$

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad \text{در تمام حالت های دیگر،}$$

تعداد جایگشتهای دوری (یعنی آرایشهای روی دایره) n شیء متمایز برابر $(n-1)!$ است.

فرمولهای $P(n, r)$ و $C(n, r)$ تنها در وضعیتهای خاص آرایشهای مرتب و انتخابهای نامرتب که در آنها n شیء متمایزند و تکرارها در مجموعه های r عنصری مجاز نیستند، به کار می روند. اینها فرمولهای کلی جایگشتها و ترکیبها نیستند. اما در فصلهای بعدی بسیاری از مسائل به این حالت های خاص تبدیل می شوند.

ترکیبها و ضریبهای دو جمله‌ای

برای نگرش به $C(n, r)$ ، یعنی تعداد ترکیبهای r به n شیء مختلف، راههای دیگری نیز به غیر از راههای فصل قبل وجود دارند. بعضی از این راهها در این فصل مطالعه می‌شوند. کار را با اشاره بدین مطلب آغاز می‌کنیم که به آسانی می‌توانیم مسئله مسیر را که به عنوان مسئله ۳.۱ در فصل اول آمده بود حل کنیم. برای راحتی صورت مسئله را تکرار می‌نماییم.

۱.۳ مسئله مسیر

شخصی در ساختمانی کار می‌کند که هفت بلوک در شرق و هشت بلوک در شمال خانه‌اش قرار دارد. بنابراین، برای رسیدن به محل کارش هر روز پانزده بلوک را طی می‌کند. تمام خیابانهایی که در الگوی مستطیل شکل وجود دارند برای رفتن او به محل کارش قابل استفاده‌اند. این شخص با چند مسیر مختلف می‌تواند از منزل به محل کارش برود، در صورتی که تنها از پانزده بلوک بگذرد؟

حرکت شخصی به اندازه یک بلوک به طرف شرق را با E و به اندازه یک بلوک

به طرف شمال را با N نشان می دهیم، و رشته ای شامل E ها و N ها مانند

$$EENNNENN$$

را (که از چپ به راست خوانده می شود) به این معنا تعبیر می کنیم که شخص دو بلوک به طرف شرق رفته و سپس سه بلوک به طرف شمال و بعد یک بلوک به طرف شرق و سرانجام دو بلوک به طرف شمال می رود. بنابراین هر مسیری از خانه تا محل کار را می توان با الگوی مناسبی از هفت E و هشت N واقع در یک ردیف مشخص کرد. مثلاً مسیری که با سه بلوک به طرف شرق شروع می شود، سپس با دو بلوک به طرف شمال، و چهار بلوک به طرف شرق و سرانجام شش بلوک به طرف شمال ادامه می یابد به صورت زیر است:

$$EENNEEEENNNNNN$$

لذا به هر چنین مسیری رشته ای از هفت E و هشت N متناظر می شود که درست در یک ردیف پراکنده شده اند؛ و برعکس به هر چنین رشته ای از E ها و N ها دقیقاً یک مسیر متناظر است. بنابراین می توان مسأله را به صورت زیر از نو بیان کرد: به چند طریق هفت E و هشت N را می توان در یک ردیف قرار داد؟



اگر پانزده جعبه را که با هفت E و هشت N پر می شوند در نظر بگیریم، می بینیم که پاسخ این سؤال درست برابر تعداد راههایی است که می توان هفت جعبه را از میان پانزده جعبه برای پر کردن با E ها انتخاب کرد، و این تعداد برابر است با

$$C(15, 7) = \frac{15!}{8!7!} = \frac{15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9}{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2} = 6435.$$

این همان تعداد راههایی است که می توان هشت جعبه از پانزده جعبه را برای پر کردن با N ها انتخاب کرد، یعنی همان $C(15, 8)$ است. در فصل ۲ دیدیم که

$$C(n, r) = C(n, n-r), \text{ و بنابراین } C(15, 7) = C(15, 8) = 6435.$$

۲.۳ جایگشتهای اشیایی که همه آنها یکسان نیستند

همانک دیدیم که $C(15, 7)$ را می توان به عنوان تعداد جایگشتهای پانزده شیء که هفت تای آنها یکسان و هشت تای دیگر آنها نیز یکسان اند تعبیر کرد. به طور کلی $C(n, r)$ را

می‌توان به صورت تعداد جایگشت‌های n شیء که r تای آنها یکسان و $n-r$ تای آنها نیز یکسان‌اند، تعبیر کرد. این ایده را می‌توان از دو دسته از اشیاء مانند E ها و N ها به تعداد بیشتری از دسته‌ها تعمیم داد. با یک مثال شروع می‌کنیم.

مسئله ۱۰.۳ اگر تمام حرف‌های کلمه *Mississippi* را با هم در نظر بگیریم، چند جایگشت مختلف از حرف‌های این کلمه وجود دارند؟ به عبارت دیگر حرف‌های کلمه *Mississippi* را به چند ترتیب مختلف می‌توان نوشت؟

راه حل اول. یازده حرف وجود دارند که چهار تای آنها (زها) یکسان و چهار تای دیگر آنها (وها) یکسان و دو تای دیگر آنها (p ها) نیز یکسان‌اند. برای به دست آوردن جایگشت‌های مختلف، یازده جعبه برای جادهی این حرف‌ها در نظر می‌گیریم. چهار تا از این جعبه‌ها را برای زها انتخاب می‌کنیم. برای انجام این عمل $C(11, 4)$ راه مختلف وجود دارد. سپس از هفت جعبه باقیمانده چهار جعبه برای وها انتخاب می‌کنیم. برای انجام این کار $C(7, 4)$ راه وجود دارد. آن‌گاه از سه جعبه باقیمانده دو جعبه برای p ها انتخاب می‌کنیم. برای انجام این کار $C(3, 2)$ راه وجود دارد. حرف M جعبه باقیمانده را پر می‌کند. بنابر اصل ضرب، پاسخ مسأله به صورت

$$C(11, 4) \times C(7, 4) \times C(3, 2) = \frac{11!}{4!7!} \times \frac{7!}{4!3!} \times \frac{3!}{2!1!} = \frac{11!}{4!4!2!1!}$$

به دست می‌آید. البته اگر حرف‌ها را برای جعبه‌ها به ترتیب دیگری انتخاب می‌کردیم، در محاسبات کمی اختلاف به چشم می‌خورد، ولی پاسخ نهایی همان است. مثلاً فرض کنیم که ابتدا از میان یازده جعبه، یک جعبه را برای حرف M ، سپس چهار جعبه را برای وها، آن‌گاه دو جعبه را برای p ها، و چهار جعبه باقیمانده را برای زها؛ انتخاب کنیم؛ بنا بر این تعداد کل آرایش‌های مختلف حرف‌ها برابر است با

$$C(11, 1) \times C(10, 4) \times C(6, 2) = \frac{11!}{1!10!} \times \frac{10!}{4!6!} \times \frac{6!}{2!4!} = \frac{11!}{4!4!2!1!},$$

که همان پاسخ قبلی است.

راه حل دوم. استدلال دیگری که از نوعی کاملاً متفاوت با استدلال بالاست به شرح زیر است: فرض کنیم تعداد جایگشت‌های پاسخ را با x نشان دهیم. اگر چهار i را با چهار حرفی که هم بایکدیگر و هم با بقیه حروف *Mississippi* متفاوت‌اند مانند i, j, k و l عوض کنیم از x اصلی $x \times 4!$ جایگشت به دست خواهیم آورده،

زیرا در هر يك از جایگشتهای اصلی، ۴! جایگشت حاصل می شود. به همین ترتیب اگر چهاری با چهار حرف مختلف عوض شود، باز ۴! برابر جایگشتهای، جایگشت به دست می آوریم. و اگر دو p با دو حرف مختلف عوض شود، ۲! برابر جایگشتهای قبلی، جایگشت به دست می آید. اما اکنون یازده حرف تماماً متفاوت اند و در نتیجه ۱۱! جایگشت خواهیم داشت. این مطالب، معادله

$$x = \frac{11!}{4!4!2!} \quad \text{و بنا بر این } x \times 4! \times 4! \times 2! = 11!$$

را به دست می دهد.

به طور کلیتر اگر n شیء موجود باشند که a تای آنها یکسان، b تای دیگر یکسان و c تای دیگر آنها یکسان و بالاخره d تای باقیمانده نیز یکسان باشند، با استدلالی مشابه می توان تعداد جایگشتهای $n = a + b + c + d$ شیء را، که همگی را یکجا در نظر گرفته ایم، یابیم. اگر تعداد جایگشتهای مختلف را با x نشان دهیم،

$$x = \frac{n!}{a!b!c!d!} \quad \text{بنا بر این } x \times a! \times b! \times c! \times d! = n!$$

نیازی نیست که فقط چهار دسته از اشیاء وجود داشته باشند. به طور کلی اگر n شیء موجود باشند که a تای آنها یکسان، b تای دیگر یکسان، c تای دیگر یکسان باشند و غیره، آن گاه تعداد جایگشتهای n شیء، که همه با هم در نظر گرفته می شوند، برابر است با

$$n = a + b + c + \dots \quad \text{که در آن } \frac{n!}{a!b!c!\dots} \quad (۱)$$

در این کسر، نقطه ها در مخرج به جای «و غیره»، یعنی به تعدادی که جمله های فاکتوریل اضافی لازم باشند، منظور شده اند.

مجموعه مسائل ۷

۱. چند جایگشت از حرفهای کلمه (الف) *assesses* و (ب) *humuhumunukunukua puaa* (واژه ای هاوایی برای نام يك نوع ماهی)، که یکجا در نظر گرفته می شوند، وجود دارد؟

۲. مطابق با اولین استدلالی که برای مسأله ۱.۳ داده شد، در حالتی که $n = a + b + c + d$ ، فرمول (۱.۳) را نتیجه بگیرد.

۳. در مسألهٔ مسیر بخش ۱.۳، خیابانهای شمال-جنوبی را با $A, B, C, \dots, H$ و خیابانهای شرقی - غربی را با خیابانهای اول، دوم، ...، نهم نشان دهید. فرض کنید که شخص در تقاطع خیابان اول و خیابان A زندگی می‌کند و محل کار او در تقاطع خیابان نهم و خیابان H قرار دارد. این آگاهی را داریم که شخص می‌تواند از تمام خیابانها بجز يك خیابان عبور کند، یعنی در خیابان E نمی‌توان از خیابان پنجم به ششم رفت، با چند مسیر مختلف شخص می‌تواند از منزل به محل کار خود برود، به شرط آنکه فقط از پانزده بلوك بگذرد؟

۴. به عنوان تعمیم مسألهٔ مسیر به سه بعد، يك چوب بست فلزی سه بعدی را در نظر بگیرید. به وسیلهٔ چند مسیر پانزده واحدی می‌توان از يك نقطهٔ تقاطع چوب بست به نقطهٔ دیگری رفت که در چهار واحد به سمت راست، پنج واحد به سمت عقب، و شش واحد در بالای نقطهٔ تقاطع قرار دارد؟

۵. ۱۷ حرف زیر را به چند ترتیب مختلف می‌توان نوشت؟

xxxx yyyyy zzzzzz ww

۳.۳ فرمول پاسکال برای $C(n, r)$

زیر مجموعه‌های r تایی، یعنی زیر مجموعه‌هایی r عنصری مجموعه‌ای از n شیء را در نظر می‌گیریم. تعداد این زیر مجموعه‌های r تایی برابر $C(n, r)$ است. از مجموعهٔ n شیء، يك شیء را خارج کرده و آن را T می‌نامیم. زیر مجموعه‌های r تایی را می‌توان به دو نوع تقسیم کرد.

(الف) آنهایی که شامل شیء T هستند؛

(ب) آنهایی که شامل شیء T نیستند.

تعداد آنهایی که شامل شیء T هستند برابر $C(n-1, r-1)$ است، زیرا همراه با T در هر زیر مجموعهٔ r تایی، $r-1$ شیء دیگر که از $n-1$ شیء انتخاب شده‌اند وجود دارند. تعداد آنهایی که شامل T نیستند برابر $C(n-1, r)$ است، زیرا این زیر مجموعه‌های r تایی، وقتی T را کنار بگذاریم، از $n-1$ شیء انتخاب شده‌اند. بدین ترتیب گردا به تمام زیر مجموعه‌های r تایی را به دو نوع تقسیم کرده و سپس تعداد هر نوع را به دست آوردیم، بنابراین فرمول پاسکال به صورت زیر برقرار می‌شود

$$C(n, r) = C(n-1, r) + C(n-1, r-1). \quad (۲.۳)$$

این، ابزار ساده‌ای است که استفاده از چنین فرمولهایی را گسترش می‌دهد. می‌بینیم استدلالی که به رابطه (۲.۳) منجر می‌شود به تعداد مشخصی از اشیاء n یا r بستگی ندارد. اگر با m شیء شروع، و از آن، برای تشکیل دادن زیرمجموعه‌های k عنصری، k شیء انتخاب کنیم استدلال مطلب به همان اندازه بالا منطقی است، و به فرمول

$$C(m, k) = C(m-1, k) + C(m-1, k-1),$$

که همان مفهوم فرمول قبلی را دارد، منجر می‌شود. همچنین، اگر با $n+1$ شیء شروع و از آنها r شیء انتخاب می‌کردیم فرمول

$$C(n+1, r) = C(n, r) + C(n, r-1) \quad (۳.۳)$$

نتیجه می‌شد. حقیقتاً لازم نیست که درباره تمام فرایندها دست آوردن فرمول (۳.۳) دوباره بیان‌دهیم؛ با قرارداد $n+1$ به جای n در فرمول (۲.۳) می‌توان این فرمول را به دست آورد؛ بنا بر این

$C(n, r)$ به صورت $C(n+1, r)$ درمی‌آید؛

$C(n-1, r)$ به صورت $C(n+1-1, r)$ یا به صورت $C(n, r)$ درمی‌آید؛

$C(n-1, r-1)$ به صورت $C(n+1-1, r-1)$ یا $C(n, r-1)$ درمی‌آید؛

و فرمول (۲.۳) به صورت فرمول (۳.۳) درمی‌آید.

در فرمول (۲.۳) می‌توان $n+1$ را به جای n قرارداد و با یک فرمول معتبر بحث را به پایان رسانند، زیرا فرمول (۲.۳) به ازای هر عدد صحیح مثبت n و r ، تنها به شرط $n \geq r$ ، برقرار است. بنابراین می‌توان به جای نمادهای n و r از نمادهای دیگری استفاده کرد که تنها مقید به این شرایط باشند که: (i) نمادهای جدید، اعداد صحیح مثبت را نشان دهند و (ii) نمادی که به جای n قرار می‌گیرد عدد صحیحی را نشان دهد که حداقل به همان بزرگی عدد صحیحی باشد که جانشین r می‌شود. مثلاً در فرمول (۲.۳) می‌توان به جای n اعداد $n+1, n+2, n+3$ را قرارداد. [به دلیل شرط (i) ، به جای n نمی‌توان $(n+1)/2$ را قرارداد و به دلیل شرط (ii) نیز به جای n نمی‌توان $r-3$ را قرار داد].

به معنای دیگر، چنین جایگزاریهایی هیچ اطلاع جدیدی به دست نمی‌دهند. مثلاً فرمول (۲.۳) به ازای $n=20$ و $r=6$ اطلاع

$$C(20, 6) = C(19, 6) + C(19, 5),$$

را فراهم می‌کند. با قرار دادن $n = 19$ و $r = 6$ در (۳.۳) دقیقاً همین برابری حاصل می‌شود. اما اگر معادله‌های (۲.۳) و (۳.۳) را باهم جمع کنیم به دست می‌آوریم

$$C(n, r) + C(n+1, r) = C(n, r) + C(n, r-1) + C(n-1, r) + C(n-1, r-1);$$

و با کم کردن $C(n, r)$ از دو طرف این برابری، فرمول جدید

$$C(n+1, r) = C(n, r-1) + C(n-1, r) + C(n-1, r-1), \quad (4.3)$$

را به دست می‌آوریم. مطلب بالا این واقعیت را نشان می‌دهد که از فرمولهای ساده‌تری مانند (۲.۳)، بدون ارائه هیچ بحثی درباره معنی خود نمادها، فقط با دستکاری نمادگذاری، می‌توان فرمولهای جدیدی به دست آورد.

مجموعه مسائل ۸

۱. مقدار $C(5, 2)$ ، $C(6, 2)$ و $C(5, 1)$ را محاسبه کرده، تحقیق کنید که اولی برابر مجموع دوتای دیگر است.

۲. مجموع $C(9, 3) + C(9, 4)$ را به صورت تک ترکیب $C(n, r)$ بنویسید.

۳. $C(50, 10) - C(49, 9)$ را به صورت تک ترکیب $C(n, r)$ بنویسید.

۴. اگر (الف) در فرمول (۲.۳)، $n-1$ را به جای n قرار دهیم؛ (ب) در (۲.۳)، $n-1$ را به جای n و $r-1$ را به جای r قرار دهیم، برابری حاصل چیست؟

۵. اگر در

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

(الف) $n-1$ را به جای n قرار دهیم؛ (ب) $n-1$ را به جای n و $r-1$ را به جای r قرار دهیم، فرمولهای حاصل چه خواهند بود؟

۶. با استفاده از نتایج مسأله قبل و با استدلالی که متضمن فاکتوریلهاست، برای فرمول (۲.۳) برهانی ارائه دهید که با آنچه در متن آمده است متفاوت باشد.

۷. برهانی که برای فرمول (۲.۳) در متن کتاب آمد شامل ملاحظات دیگری است.

خاص T از n شیء بود. اکنون دوشیء خاص مانند S و T را در نظر بگیرید. ترکیبها را می‌توان به چهار رده تقسیم کرد: آنهایی که شامل S و T هستند؛ آنهایی که تنها شامل S بوده و شامل T نیستند؛ آنهایی که تنها شامل T هستند ولی شامل S نیستند؛ آنهایی که نه شامل T و نه شامل S هستند. اگر $C(n, r)$ مجموع تعداد اعضای این چهار رده باشند، چه فرمولی نتیجه می‌شود؟ سپس با استفاده از فرمول (۲.۳)، به راه دیگری این فرمول را نتیجه بگیرید.

۸. صرف نظر از يك استثناء، فرمول پاسکال (۲.۳) به ازای تمام زوجهای اعداد صحیح n و r ، مثبت، منفی یا صفر برقرار است. این استثناء کدام است؟

۲.۳ بسط دوجمله‌ای

مجموع هر دو نماد مختلف مانند $x+y$ را يك دوجمله‌ای گویند. بسط دوجمله‌ای یا قضیه دوجمله‌ای، فرمولی برای توانهای دوجمله‌ای است. اگر چند توان اول $x+y$ را محاسبه کنیم به دست می‌آوریم

$$(x+y)^1 = x+y;$$

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2;$$

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3;$$

$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4;$$

$$(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5. \quad (5.3)$$

با استفاده از برابری (۵.۳) به عنوان پایه‌ای برای بحث، توجه می‌کنیم که سمت راست آن دارای شش جمله x^5 ، $5x^4y$ ، $10x^3y^2$ ، $10x^2y^3$ ، $5xy^4$ و y^5 است. آنچه ما می‌خواهیم انجام دهیم بیان ضریبهای این جمله‌ها، یعنی ۱، ۵، ۱۰، ۱۰، ۵، ۱، به وسیله نظریه ترکیبهاست.

ابتدا نتایج ضرب چند دوجمله‌ای را بررسی می‌کنیم. مثلاً برای ضرب $(a+b)$ در $(c+d)$ قانون توزیع پذیری را به کار می‌بریم و به دست می‌آوریم که

$$(a+b)(c+d) = (a+b)c + (a+b)d = ac + bc + ad + bd.$$

در این مجموع هر کدام از جمله‌ها، حاصل ضرب دو نماد است، که یکی از اولین پُرانتز

حاصلضرب اصلی و دیگری از پرانتز دوم گرفته شده است. توجه کنید که برای انتخاب يك نماد از دوجمله‌ای اول و يك نماد از دوجمله‌ای دوم دقیقاً $2 \times 2 = 4$ راه مختلف وجود دارد.

اکنون حاصلضرب سه دوجمله‌ای را بررسی می‌کنیم

$$(a+b)(c+d)(e+f) = ace + acf + ade + adf + bce + bcf + bde + bdf,$$

و مشاهده می‌کنیم که این عبارت شامل هشت جمله است، که هر يك، حاصلضرب سه نمادی است که به ترتیب از سه دوجمله‌ای انتخاب شده‌اند. مجدداً می‌بینیم که $2 \times 2 \times 2 = 8$ ، دقیقاً برابر تعداد راههای مختلفی است که می‌توان سه نماد را، که هر کدام از يك دوجمله‌ای هستند، انتخاب کرد. نتایج مشابهی برای حاصلضرب توسیع یافته چهار یا چند دوجمله‌ای وجود دارد. حال حاصلضرب

$$(a+b)(c+d)(e+f)(p+q)(r+s)$$

را در نظر می‌گیریم. بسط عبارت، که آن را به تفصیل نمی‌نویسیم، مجموع $2^5 = 32$ جمله است. به عنوان نمونه‌ای از جمله‌ها، دوجمله

$$bceps \text{ و } adeqs$$

را ذکر می‌کنیم. هر جمله، حاصلضرب پنج نماد است که هر نماد از یکی از پنج دوجمله‌ای اصلی انتخاب شده است.

اکنون با توجه به این مشاهدات، $(x+y)^5$ را به صورت حاصلضرب

$$(x+y)(x+y)(x+y)(x+y)(x+y)$$

در نظر می‌گیریم. برای انتخاب پنج نماد، هر کدام از يك پرانتز، 32 راه وجود دارد، اما 32 جمله حاصل همگی از هم متمایز نیستند. مثلاً، ضرب x ها و y های بخصوصی که در

$$\begin{array}{c} \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ (x+y)(x+y)(x+y)(x+y)(x+y) \end{array}$$

با فلشهای جهت‌دار نشان داده شده‌اند در حاصلضرب به صورت

$$xyyx = x^3 y^2$$

نتیجه می‌شود. اما اگر x ها را از سه پرانتز اول و y ها را از دو پرانتز باقی‌مانده انتخاب

دانلود از سایت ریاضی سرا

کنیم، باز x^3y^2 به دست می‌آید. در واقع، عبارت x^3y^2 در بسط $(x+y)^5$ ، دقیقاً به تعداد راههایی که سه x و دو y را بتوان با ترتیبهای مختلف نوشت حاصل می‌شود:

$$yxxxxy, xxxxyy, xyyxx$$

بنابر نظریه بخش ۲.۳، تعداد

$$C(5, 2) = \frac{5!}{2!3!} = 10$$

آرایش مختلف برای این نمادها وجود دارد. این تحلیل، عدد ۱۰ را که ضریب x^3y^2 در برابری (۵.۳) از بسط $(x+y)^5$ است، نشان می‌دهد. با روشی مشابه می‌توان ضریبهای دیگر را به دست آورد، بنابراین داریم

$$(x+y)^5 = C(5, 0)x^5 + C(5, 1)x^4y + C(5, 2)x^3y^2 \\ + C(5, 3)x^2y^3 + C(5, 4)xy^4 + C(5, 5)y^5.$$

این فرمول به اختصار فرمول (۵.۳) نیست ولی يك الگوی کلی را القا می‌کند. این فرمول القا می‌کند که ضریب x^3y^3 در بسط $(x+y)^6$ برابر $C(6, 3)$ ، یعنی تعداد راههای نوشتن سه x و سه y در يك ردیف است؛ و ضریب x^2y^4 در همان بسط برابر $C(6, 4)$ ، یعنی، تعداد راههای نوشتن دو x و چهار y در يك ردیف است. (البته $C(6, 4)$ همان $C(6, 2)$ است، اما ما از نماد ترکیبی استفاده می‌کنیم که به جای تعداد x ها از تعداد y ها تبعیت می‌کند.)

اکنون فرض کنیم n يك عدد صحیح مثبت دلخواه باشد. عبارت $(x+y)^n$ به صورت

$$(x+y)(x+y)(x+y)\dots(x+y), \quad (n \text{ عامل})$$

تعریف می‌شود.

در بسط این حاصلضرب، $x^{n-j}y^j$ به همان تعدادی که می‌توان $n-j$ تا x و j تا y را در يك ردیف نوشت، ظاهر می‌شود. از این رو ضریب $x^{n-j}y^j$ برابر $C(n, j)$ است. بنابراین بسط دوجمله‌ای را می‌توان به صورت

$$(x+y)^n = C(n, 0)x^n + C(n, 1)x^{n-1}y + C(n, 2)x^{n-2}y^2 \\ + C(n, 3)x^{n-3}y^3 + \dots + C(n, j)x^{n-j}y^j + \dots + C(n, n)y^n,$$

نوشت. همان‌طور که در فصل ۲ خاطر نشان کردیم، نماد $\binom{n}{j}$ اغلب، خصوصاً در بسط دوجمله‌ای، به جای $C(n, j)$ به کار می‌رود. بنابراین در بسیاری از کتابها بسط دوجمله‌ای به صورت زیر می‌آید:

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \binom{n}{3}x^{n-3}y^3 + \dots \\ + \binom{n}{j}x^{n-j}y^j + \dots + \binom{n}{n}y^n.$$

جمله‌های اول و آخر را می‌توان به صورت ساده‌تر x^n و y^n نوشت، و این، شکل دیگری از بسط دوجمله‌ای را ارائه می‌دهد که اغلب به صورت

$$(x+y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2 \times 1}x^{n-2}y^2 \\ + \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \times 2 \times 1}x^{n-3}y^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4 \times 3 \times 2 \times 1}x^{n-4}y^4 \\ + \dots + y^n,$$

داده می‌شود.

مجموعه مسائل ۹

۱. در بسط $(x+y)^5$ چند جمله وجود دارد؟ در بسط $(x+y)^n$ چند جمله؟

۲. بسط $(x+y)^6$ را با ضریبهایی به صورت $C(n, r)$ به تفصیل بنویسید. به جای x عدد ۱ و به جای y عدد ۱ قرار دهید و سپس مجموع

$$C(6, 0) + C(6, 1) + C(6, 2) + C(6, 3) + C(6, 4) \\ + C(6, 5) + C(6, 6),$$

را محاسبه کنید.

۳. در بسط $(x+y)^6$ به جای x عدد ۱ و به جای y عدد ۱- را قرار دهید و سپس مجموع

$$C(6, 0) - C(6, 1) + C(6, 2) - C(6, 3) + C(6, 4) \\ - C(6, 5) + C(6, 6),$$

را محاسبه کنید.

۴. ضریب u^3v^7 در $(u+v)^{10}$ که به شکل یک عدد طبیعی بیان می‌شود، چیست؟

۵. بسط کامل $(u+v)^7$ را با ضرایبی به صورت اعداد طبیعی بنویسید.

۶. تحقیق کنید که بسط $(x+y)^8$ را می‌توان بدین طریق نوشت: مجموع تمام جملاتی به صورت

$$\frac{8!}{a!b!} x^a y^b,$$

که در آنها a و b روی تمام زوجهای اعداد صحیح نامنفی به شرط $a+b=8$ ، تغییر می‌کند.

۷. تحقیق کنید که $(x+y)^n$ مجموع تمام جمله‌هایی به صورت

$$\frac{n!}{a!b!} x^a y^b$$

است که در آنها a و b روی تمام زوجهای اعداد صحیح نامنفی با شرط $a+b=n$ تغییر می‌کنند.

۸. بدون بسط حاصلضرب

$$(a+b+c)(d+e+f)(p+q+r+s)(x+y+u+v+w)$$

به سؤالهای زیر پاسخ دهید: چند جمله وجود دارد؟ کدام یک از جمله‌های $adps$ ، $bds w$ ، $bfp u$ در بسط عبارت بالا، جمله‌های واقعی هستند؟

۵.۳ بسط چند جمله‌ای

ایده بخش قبل از دو جمله‌ایها به مجموعه‌های بیشتر از دو عنصر قابل تعمیم است. به عنوان مثال عبارت

$$(x+y+z+w)^{17};$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

را در نظر بگیرد. طبق تعریف، این عبارت، حاصل ضرب هفده عامل همانند $x+y+z+w$ است:

$$(x+y+z+w)(x+y+z+w)\dots(x+y+z+w).$$

بسط این ضرب، دارای جمله‌ای به صورت $x^4y^5z^6w^2$ است، زیرا مجموع توانهای آنها برابر $17 = 4+5+6+2$ است. این جمله بخصوص در بسط ضرب، به همان تعدادی ظاهر می‌شود که می‌توان x را از چهار عامل از هفده عامل، و y را از پنج عامل از سیزده عامل باقیمانده و z را از شش عامل از هشت عامل باقیمانده و سپس w را خود به خود از دو عامل باقیمانده انتخاب کرد. نظیر استدلالی که در حالت بسط دو جمله‌ای ارائه شد به سادگی می‌بینیم که

$$C(17, 4) \times C(13, 5) \times C(8, 6) \times 1 = \frac{17!}{13!4!} \times \frac{13!}{8!5!} \times \frac{8!}{2!6!} = \frac{17!}{4!5!6!2!}.$$

بدین طریق نشان داده‌ایم که بسط $(x+y+z+w)^{17}$ شامل جمله

$$\frac{17!}{4!5!6!2!} x^4 y^5 z^6 w^2$$

است. این ضرب شباهتی زیاد به اعدادی دارد که در بخش ۲.۳ به دست آمدند؛ این مطلب شگفت‌آور نیست، زیرا آنچه در اینجا محاسبه کردیم، تعداد راههای مرتب کردن هفده حرف زیر است:

$$xxxxxyyyzzzzzzww.$$

به‌طور کلیتر می‌توانیم بگوییم که بسط $(x+y+z+w)^{17}$ برابر مجموع تمام جمله‌هایی به صورت

$$\frac{17!}{a!b!c!d!} x^a y^b z^c w^d$$

است که در آن a و b و c و d روی تمام مجموعه‌های ممکن اعداد صحیح نامنفی تغییر می‌کنند و در شرط $a+b+c+d=17$ صادق‌اند. به‌عنوان حالتی ساده به جواب $a=17$ ، $b=0$ ، $c=0$ و $d=0$ که متعلق به جمله

$$\frac{17!}{17!0!0!0!} x^{17} y^0 z^0 w^0$$

یا به طور ساده تر متعلق به x^{17} در بسط است توجه کنید. جوابهای دیگر

$$a+b+c+d=17$$

مثلاً عبارت انداز $a=4, b=5, c=6, d=2$ و $a=4, b=5, c=2, d=6$ که به ترتیب به جمله‌های

$$\frac{17!}{4!5!2!6!}x^4y^5z^2w^6 \text{ و } \frac{17!}{4!5!6!2!}x^4y^5z^6w^2$$

متعلق اند.

تعمیم بیشتر به وضوح انجام می‌شود. به ازای هر عدد صحیح مثبت n (به جای عدد خاص ۱۷) می‌بینیم که بسط $(x+y+z+w)^n$ مجموع تمام جمله‌هایی به صورت

$$\frac{n!}{a!b!c!d!}x^ay^bw^d$$

است که در آن a, b و c و d روی تمام جوابهای $a+b+c+d=n$ در مجموعه اعداد صحیح نامنفی تغییر می‌کنند.

دلیلی ندارد که توجه خود را به یک مجموع چهارعنصری x, y, z و w محدود کنیم. به ازای هر عدد صحیح مثبت n بسط چندجمله‌ای $(x+y+z+w+\dots)^n$

برابر با مجموع تمام جمله‌هایی به صورت

$$\frac{n!}{a!b!c!d!\dots}x^ay^bw^d\dots$$

است که در آن $a, b, c, d, \dots$ روی تمام جوابهای

$$a+b+c+d+\dots=n$$

از مجموعه اعداد حقیقی نامنفی تغییر می‌کنند.

مجموعه مسائل ۱۰

۰۱. بسط سه‌جمله‌ای $(x+y+z)^4$ را به تفصیل بنویسید.

۰۲. ضریب $x^2 y^2 z^2 w^2 u^2$ در بسط $(x+y+z+w+u)^{10}$ چیست؟

۰۳. ضریب $xyzwuv$ در بسط $(x+y+z+w+u+v)^6$ چیست؟

۰۴. مجموع تمام ضریبها در بسط $(x+y+z)^8$ چقدر است؟ در بسط $(x+y+z+w)^{17}$ چقدر؟

۰۵. مجموع تمام اعدادی به صورت

$$\frac{12!}{a!b!c!}$$

که در آن a و b و c روی تمام اعداد صحیح نامنفیی تغییر می‌کنند که در شرط $a+b+c=12$ صادق‌اند چقدر است؟

۶.۳ مثلث پاسکال

ضریبهای دوجمله‌ای بسط $(x+y)^n$ اگر بر حسب مقادیر صعودی n فهرست شوند، الگوی جالبی تشکیل می‌دهند. برای دادن ویژگی تقارن به جدول، از $(x+y)^0 = 1$ شروع می‌کنیم:

از $(x+y)^0$ ،

از $(x+y)^1$ ،

از $(x+y)^2$ ،

از $(x+y)^3$ ،

و غیره.

۱ ۵ ۱۰ ۱۰ ۵ ۱

۱ ۶ ۱۵ ۲۰ ۱۵ ۶ ۱

۱ ۷ ۲۱ ۳۵ ۳۵ ۲۱ ۷ ۱

۱ ۸ ۲۸ ۵۶ ۷۰ ۵۶ ۲۸ ۸ ۱

این آرایه، که در اینجا تا $n=8$ فهرست شده است، مثلث پاسکال نامیده می‌شود.

رابطه بازگشتی $C(n, r) = C(n-1, r) + C(n-1, r-1)$ بخش ۳.۳ نشان می‌دهد که چطور بدون هیچ اشکالی می‌توان این جدول را ساخت و توسعه داد. مثلاً، سه عدد ۳۵ و ۵۶ که دور آنها دایره کشیده شده است همان مقادیر $C(7, 2)$ و $C(7, 3)$ هستند که بنابر رابطه بازگشتی، آخری برابر مجموع دو تای اول است. بنابراین، در مثلث پاسکال هر عدد $C(n, r)$ برابر مجموع عدد مستقیماً بالایی $C(n-1, r)$ و عدد سمت چپ آن، $C(n-1, r-1)$ است. مثلاً، اگر بخواهیم سطر بعدی جدول بالا، یعنی سطر دهم را به دست آوریم، باید بنویسیم.

$$1, 1+8, 8+28, 28+56, 56+70, 70+56, 56+28, 28+8, 8+1, 1$$

یا

$$1, 9, 36, 84, 126, 126, 84, 36, 9, 1.$$

این اعداد همان ضریبهای بسط $(x+y)^9$ هستند، و اگر در این رابطه قرار دهیم $x=1$ و $y=1$ ، پاسخ $(1+1)^9$ یا 2^9 را به دست می‌آوریم. از این رو مجموع عنصرهای دهمین سطر مثلث پاسکال $1+9+36+84+\dots$ برابر 2^9 است. به طور کلی، اگر در $(x+y)^n$ قرار دهیم $x=1$ و $y=1$ ، جواب 2^n به دست می‌آید و بنابراین نتیجه می‌گیریم که مجموع عناصر $(n+1)$ امین سطر مثلث پاسکال برابر است با

$$C(n, 0) + C(n, 1) + C(n, 2) + \dots + C(n, n) = 2^n. \quad (6.3)$$

از طرف دیگر اگر در $(x+y)^n$ قرار دهیم $x=1$ و $y=-1$ ، جواب 0^n یا 0 را به دست می‌آوریم، و بنابراین می‌توانیم نتیجه بگیریم که

$$C(n, 0) - C(n, 1) + C(n, 2) - C(n, 3) + \dots + (-1)^n C(n, n) = 0. \quad (7.3)$$

مجموعه مسائل ۱۱

۰۱. مثلث پاسکال را تا، ۱۳، ۱۲، ۱۱، ۱۰، ۹ n گسترش دهید.

۰۲. ثابت کنید مجموع عنصرهای سطر نهم برابر با مجموع عنصرهای تمام سطرهای قبلی به علاوه یک است.

۳. ثابت کنید که در هر سطر مثلث پاسکال مجموع اولین، سومین، پنجمین،...، عنصر، برابر مجموع؛ دومین، چهارمین، ششمین،...، عنصر است.

۷.۳ تعداد زیرمجموعه‌های يك مجموعه

مردی به پسرش می‌گوید: «موقع تمیز کردن اتاق زیرشیروانی به هفت جلد مجله قدیمی برخورد کردم. آنها را بررسی کن و هر کدام را که می‌خواهی انتخاب کن. آنچه را نمی‌خواهی دور می‌ریزم.» چند انتخاب مختلف ممکن است انجام بگیرد؟ راه دیگر برای بیان مسأله چنین است: يك مجموعه هفت عنصری چند زیرمجموعه دارد؟

يك راه حل مسأله آن است که بگوییم این پسر ممکن است تمام هفت عنصر، $C(7, 7)$ ، یا شش عنصر از هفت عنصر، $C(7, 6)$ ، یا پنج عنصر از هفت عنصر، $C(7, 5)$ ، و غیره را انتخاب کند. این راه، پاسخ

$$C(7, 7) + C(7, 6) + C(7, 5) + C(7, 4) + C(7, 3) + C(7, 2) + C(7, 1) + C(7, 0)$$

را به دست می‌دهد. طبق فرمول (۶.۳) صفحه ۴۵، این همان 2^7 است.

راه حل دیگری برای مسأله آن است که به جای تمرکز توجه بر روی مجموعه مجله‌ها، توجه خود را روی نسخه‌های تکی مجله متمرکز کنیم: فرض کنیم هفت نسخه مجله را با A, B, C, D, E, F, G نشان دهیم. بنابراین ممکن است A انتخاب یا رد شود (دو امکان)؛ ممکن است B انتخاب یا رد شود (دو امکان)؛ ...؛ ممکن است G انتخاب یا رد شود (دو امکان). با استفاده از اصل ضرب، پاسخ

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^7,$$

را داریم.

بنابر این مجموعه‌ای که دارای هفت عنصر متفاوت است، دارای 2^7 زیرمجموعه است که هم شامل خود مجموعه و هم شامل مجموعه تهی یا هیچ است که دارای عنصری نیست. اگر کل مجموعه را نادیده بگیریم، بقیه را زیرمجموعه‌های سره می‌گویند، و بنابر این مجموعه‌ای از هفت عنصر متفاوت دارای $2^7 - 1$ زیرمجموعه سره است. به طور کلی مجموعه‌ای از n عنصر متفاوت دارای 2^n زیرمجموعه است که $1 - 2^n$ تای آنها زیرمجموعه سره‌اند. در میان این زیرمجموعه‌ها دقیقاً $C(n, r)$ زیرمجموعه r عنصری وجود دارد.

مجموعه مسائل ۱۲

۱. با استفاده از يك يا چند سكه از سكه‌های يك سنتی، پنج سنتی، ده سنتی، بیست و پنج سنتی، پنجاه سنتی و يك دلاری چند مجموع مختلف از سكه‌ها را می‌توان به دست آورد؟

۲. اعضای يك باشگاه باید در باره هر يك از هشت موضوع، رأی «آری» یا «نه» بدهند. در نوشتن ورقه رأی، هر عضوی این اختیار را دارد که از رأی دادن حداکثر به هفت موضوع خودداری کند، ولی نمی‌تواند به هر هشت مورد رأی ندهد. به چند طریق يك ورقه رأی ممکن است نوشته شود؟

۳. يك آژانس مسافرتی ده نوع مختلف دفترچه راهنما دارد. مسؤول آژانس به شخصی می‌گوید که می‌توانی هر تعداد دفترچه که می‌خواهی برداری، اما نه بیش از یکی از هر نوع. با فرض آنکه شخص حداقل يك دفترچه بردارد، چند انتخاب ممکن است انجام بگیرد؟

۴. زیست‌شناسی در باره الگوهای اطفال پسر (M) و دختر (F) خانواده‌ها مطالعه می‌کند. هر نوع خانواده با يك کد تعیین می‌شود. مثلاً، FMM يك خانواده سه فرزندی را نشان می‌دهد که بزرگترین فرزند آنها دختر و دوتای دیگر پسرند. توجه کنید که FMM ، MFM و MMF سه نوع مختلف‌اند. بین خانواده‌هایی که حداقل يك فرزند و حداکثر ۷ فرزند دارند چند نوع خانواده وجود دارد؟

۸.۳ مجموع توانهای اعداد طبیعی

به عنوان يك نتیجه فرعی از نظریه ترکیبها می‌توانیم برای مجموع

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n$$

یعنی برای مجموع اعداد صحیح مثبت (اعداد طبیعی) از ۱ تا n ، برای مجموع مربعات آنها، یعنی

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2,$$

و برای مجموع مکعبهای آنها و غیره فرمولهایی به دست آوریم. ایده مربوط، استفاده از رابطه بازگشتی (۲.۳) برای $C(n, r)$ است که آنرا دوباره به صورت

$$C(n-1, r-1) = C(n, r) - C(n-1, r), \quad (۸.۳)$$

می‌نویسیم.

$$\begin{aligned} C(\lambda, 1) &= C(\lambda, 2) - C(\lambda, 2), \\ C(\gamma, 1) &= C(\lambda, 2) - C(\gamma, 2), \\ C(\rho, 1) &= C(\gamma, 2) - C(\rho, 2), \\ C(\delta, 1) &= C(\rho, 2) - C(\delta, 2), \\ C(\varphi, 1) &= C(\delta, 2) - C(\varphi, 2), \\ C(\mathfrak{z}, 1) &= C(\varphi, 2) - C(\mathfrak{z}, 2), \\ C(\mathfrak{y}, 1) &= C(\mathfrak{z}, 2) - C(\mathfrak{y}, 2). \end{aligned} \tag{9.3}$$
$$C(2, 1) + C(3, 1) + C(4, 1) + C(5, 1) + C(6, 1) + C(7, 1) + C(8, 1) = C(9, 2) - C(2, 2),$$

$$2+3+4+5+6+7+8 = \frac{1}{2} 9 \times 8 - 1.$$

$$\begin{aligned} C(m, 1) &= C(m+1, 2) - C(m, 2), \\ C(m-1, 1) &= C(m, 2) - C(m-1, 2), \\ C(m-2, 1) &= C(m-1, 2) - C(m-2, 2), \\ &\vdots \end{aligned} \quad (10.3)$$

$$\begin{aligned} C(3, 1) &= C(4, 2) - C(3, 2), \\ C(2, 1) &= C(3, 2) - C(2, 2). \end{aligned}$$

$$C(r, 1) + C(r, 1) + \dots + C(m-r, 1) + C(m-1, 1) + C(m, 1) \\ = C(m+1, r) - C(r, r),$$

$$2 + 3 + \dots + (m-2) + (m-1) + m = \frac{1}{2}(m+1)m - 1.$$

به قسمی ۵۴

$$1 + 2 + 3 + \dots + (m-2) + (m-1) + m = \frac{1}{2}m(m+1). \quad (11.3)$$

درمی آید. اگر مثلاً $m=2$ باشد، سمت چپ فقط به صورت $1+2$

به منظور به دست آوردن فرمولی برای مجموع مربعات اعداد طبیعی، مشابه های (۱۰.۳) را به ازای تمام مقادیر n و r که به اندازه ۱ واحد اضافه شده اند می نویسیم؛ یعنی معادله (۸.۳) را به ازای $r = ۳$ نوشته و به جای n مقادیر متوالی $m+۱, m+۲, \dots, m$ را قرار می دهیم، تا به دست آوریم:

$$C(m+1, 2) = C(m+2, 3) - C(m+1, 3),$$

$$C(m, \gamma) = C(m+1, \gamma) - C(m, \gamma),$$

$$C(m-1, r) = C(m, r) - C(m-1, r+1),$$

(12.3)

$$C(\varphi, \psi) = C(\Delta, \psi) - C(\varphi, \psi),$$

$$C(\mathfrak{z}, \mathfrak{y}) = C(\mathfrak{y}, \mathfrak{z}) - C(\mathfrak{z}, \mathfrak{z}).$$

این برابریها را باهم جمع کرده، سپس به جای نمادهای ترکیب مقادیر آنها را قرار می‌دهیم،

$$C(3, 2) + C(4, 2) + \dots + C(m-1, 2) + C(m, 2) + C(m+1, 2) \\ = C(m+2, 3) - C(3, 3),$$

$$\frac{1}{2}3 \times 2 + \frac{1}{2}4 \times 3 + \dots + \frac{1}{2}m(m-1) + \frac{1}{2}(m+1)m \\ = \frac{1}{6}(m+2)(m+1)m - 1.$$

با اضافه کردن ۱ به دوطرف و سپس ضرب دوطرف در ۲، رابطه بالا را به صورت

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + (m-1)m + m(m+1) \\ = \frac{1}{3}m(m+1)(m+2)$$

درمی آوریم. و حاصلضربهای سمت چپ این برابری را می توان دوباره به صورت

$$1 \times 2 = 1(1+1) = 1^2 + 1,$$

$$2 \times 3 = 2(2+1) = 2^2 + 2,$$

$$3 \times 4 = 3(3+1) = 3^2 + 3,$$

.

$$(m-2)(m-1) = (m-2)[(m-2)+1] = (m-2)^2 + (m-2),$$

$$(m-1)m = (m-1)[(m-1)+1] = (m-1)^2 + (m-1),$$

$$m(m+1) = m^2 + m,$$

نوشت. با جانشین کردن این مقادیر، بدست می آوریم

$$1^2 + 1 + 2^2 + 2 + 3^2 + 3 + \dots + (m-1)^2 + (m-1) + m^2 + m \\ = \frac{1}{3}m(m+1)(m+2)$$

$$[1^2 + 2^2 + \dots + (m-1)^2 + m^2] + [1 + 2 + \dots + (m-1) + m] \\ = \frac{1}{3}m(m+1)(m+2).$$

دومین عبارت داخل کروشه را به صورت مجموع m عدد طبیعی که مقدار آن را در فرمول (۱۱.۳) محاسبه کردیم باز می‌شناسیم. با استفاده از فرمول (۱۱.۳) می‌بینیم که

$$[1^2 + 2^2 + \dots + (m-1)^2 + m^2] + \frac{1}{3}m(m+1) = \frac{1}{3}m(m+1)(m+2).$$

این رابطه را می‌توان دوباره به صورت

$$[1^2 + 2^2 + \dots + (m-1)^2 + m^2] = \frac{1}{3}m(m+1)(m+2) \\ - \frac{1}{3}m(m+1)$$

نوشت. سمت راست این برابری، همان‌طور که می‌توان با جبر مقدماتی به آسانی محاسبه کرد، به صورت $(2m+1)(\frac{1}{6}m(m+1))$ خلاصه می‌شود. بنا بر این فرمول مجموع مربعات اولین m عدد طبیعی به دست می‌آید:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + m^2 = \frac{1}{6}m(m+1)(2m+1).$$

مجموعه مسائل ۱۳

۱. مجموع اعداد صحیح از ۱ تا ۱۰۰ را پیدا کنید.

۲. مسأله قبل را مجدداً با نوشتن مجموع اعداد، یک بار از ۱ به بالا و یک بار از ۱۰۰ به پایین، حل کنید.*

* می‌گویند که این روش جمع اعداد صحیح از ۱ تا ۱۰۰ به وسیله گاوس، ریاضیدان معروف قرن نوزدهم، وقتی که شاگرد مدرسه بود، مورد استفاده قرار گرفته است. آموزگار (آن گونه که داستان می‌گوید) مسأله را در کلاس مطرح کرد و امیدوار بود که حل مسأله احتمالاً شاگردان را برای پانزده الی بیست دقیقه مشغول کند، ولی موقعی که گاوس جوان در مدتی کوتاهتر جواب را به دست آورد آموزگار وی جا خورد.

۱ ۲ ۳ ۴ ۹۷ ۹۸ ۹۹ ۱۰۰

۱۰۰ ۹۹ ۹۸ ۹۷ ۴ ۳ ۲ ۱

توجه کنید که مجموع هر زوج از اعداد این آرایه (یعنی $۱۰۰ + ۱$ ، $۹۹ + ۲$ ، $۹۸ + ۳$ ، $۹۷ + ۴$ و غیره) همواره برابر ۱۰۱ است. بنابراین مجموع اعداد ۱ تا ۱۰۰ که دوبار حساب می‌شود، درست برابر آن است که ۱۰۱ را ۱۰۰ بار با هم جمع کنیم. بقیه مطلب به عهده خواننده گذاشته می‌شود.

۳. روشی را که در مسئله قبل طرح‌ریزی شد برای اعداد صحیح ۱ تا n تعمیم داده و بدین وسیله فرمول (۱۱.۳) را به طریق دیگری به دست آورید. (توجه کنید که این شیوه را نمی‌توان برای به دست آوردن مجموع مربعات از ۱ تا n به کار برد.)

۴. مجموع مربعات اعداد صحیح از ۱ تا ۱۰۰ را تعیین کنید.

۵. برای معادله $x + y = ۱۰۰$ در مجموعه اعداد صحیح مثبت x و y چند جواب وجود دارد. (در این مسأله و مسأله‌های بعدی، در شمارش جوابها، جوابهایی مانند $x = ۱۰$ ، $y = ۹۰$ و $x = ۹۰$ ، $y = ۱۰$ را به عنوان جوابهای متفاوت در نظر بگیرید. به عبارت دیگر منظور ما از یک جواب، زوج مرتب (x, y) است که در معادله صدق کند.) در مجموعه اعداد صحیح نامنفی چند جواب وجود دارد؟

۶. معادله $x + y = n$ که در آن n یک عدد صحیح مثبت ثابت است، در مجموعه اعداد صحیح مثبت چند جواب دارد؟ در مجموعه اعداد صحیح نامنفی چند تا؟

۷. چند سه‌تایی مرتب (x, y, z) در مجموعه اعداد صحیح مثبت، جواب معادله $x + y + z = ۱۰۰$ است؟ چند سه‌تایی در مجموعه اعداد صحیح نامنفی، جواب این معادله اند؟

۸. مسئله ۷ را برای $x + y + z = n$ تعمیم دهید.

۹. در بسط $(x + y + z)^۳$ چند جمله وجود دارند؟ در بسط $(x + y + z)^۴$ چند جمله، در بسط $(x + y + z)^n$ چند جمله؟

۱۰. به منظور به دست آوردن فرمولی برای $۱^۳ + ۲^۳ + ۳^۳ + \dots + m^۳$ ، (۱۰.۳)، (۱۱.۳) و غیره به کار رفت تعمیم دهید. شیوه‌ای را که در برابرهای (۱۰.۳)، (۱۱.۳) و غیره به کار رفت تعمیم دهید.

۹.۳ خلاصه

در n شیء مفروض، اشیاء یکسان دسته‌هایی را تشکیل می‌دهند: a تا یکسان؛ b تا دیگر یکسان؛ c تا دیگر یکسان و غیره. در این صورت تعداد جایگشت‌های n شیء که همگی باهم در نظر گرفته می‌شوند برابر است با

$$\frac{n!}{a!b!c!\dots}$$

فرمول پاسکال برای $C(n, r)$ عبارت است از

$$C(n, r) = C(n-1, r) + C(n-1, r-1).$$

به ازای هر عدد صحیح مثبت n ، بسط دوجمله‌ای $(x+y)^n$ عبارت است از

$$(x+y)^n = C(n, 0)x^n + C(n, 1)x^{n-1}y + C(n, 2)x^{n-2}y^2 + \dots + C(n, j)x^{n-j}y^j + \dots + C(n, n)y^n.$$

نمادگذاری دیگری برای این بسط به صورت

$$(x+y)^n = x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \binom{n}{3}x^{n-3}y^3 + \dots + \binom{n}{j}x^{n-j}y^j + \dots + y^n$$

است.

بسط چندجمله‌ای $(x+y+z+w+\dots)^n$ برابر با مجموع تمام جمله‌هایی به صورت

$$\frac{n!}{a!b!c!d!\dots} x^a y^b z^c w^d \dots,$$

است که در آن $a, b, c, d, \dots$ بر روی تمام جوابهای معادله

$$a+b+c+d+\dots = n$$

در مجموعه اعداد صحیح نامنفی تغییر می‌کنند.

در بخش ۶.۳، مثلث پاسکال تا $n=8$ داده شده است. همچنین دو رابطه زیر

ثابت شده است:

$$C(n, 0) + C(n, 1) + C(n, 2) + C(n, 3) + \dots + C(n, n) = 2^n,$$

$$C(n, 0) - C(n, 1) + C(n, 2) - C(n, 3) + \dots + (-1)^n C(n, n) = 0.$$

تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه‌ای از n عنصر مختلف، برابر 2^n است؛ تعداد

دانلود از سایت ریاضی سرا

زیرمجموعه‌های سره برابر $2^n - 1$ است؛ تعداد زیرمجموعه‌هایی که دارای r عنصر باشند برابر $C(n, r)$ است.

برای به‌دست آوردن مجموع k امین توان اولین n عدد از اعداد طبیعی، روش‌هایی مطرح شد. به‌خصوص، مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا n (یعنی $k=1$) و مجموع مربعات آنها (یعنی $k=2$) به‌دست آمد:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n+1),$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

۴

برخی توزیعهای خاص

در آنالیز ترکیبیاتی، اغلب يك مسأله با فرمولبندی مجدد که بدواً صورت می گیرد حل می شود. این نکته در صفحه ۳۱، درمسألهٔ مسیر شرح داده شده که آن را بهمسألهٔ هم‌ارزی که شامل ترکیبها بود تبدیل کردیم. در این فصل به مسائل دیگری توجه می کنیم که وقتی از چشم اندازی خاص مورد نظر قرار می گیرند بهمسائلی شامل ترکیبها تبدیل می شوند.

۱.۴ اعداد فیبوناچی

این سؤال را در نظر بگیرید: به چند طریق می توان هشت علامت بعلاوه و پنج علامت منها را طوری در يك سطر قرار داد که هیچ دو علامت منهای پهلوی هم قرار نگیرند؟ مثالی برای چنین آرایشی عبارت است از:

$$++-+-++++-+-+.$$

حل مسأله، اگر به صورت زیر به آن نگاه کنیم، به سادگی انجام می شود؛ هشت علامت

بعلاوه را با استفاده از تعدادی m که در وسط و اول و آخر قرار می گیرند به صورت عبارت (۱۰۴) می نویسیم:

$$m + m + m + m + m + m + m + m + m. \quad (104)$$

بنابراین هشت علامت بعلاوه و نه m داریم. اکنون می توان از این نه m پنج تا را انتخاب کرده و به جای آنها علامت منها قرار داد. بنابراین پاسخ سؤال برابر $C(9, 5)$ است.

به طور کلی می توانیم بگوییم که تعداد راههای نوشتن k علامت بعلاوه و r علامت منها در یک سطر، به طوری که هیچ دو علامت منهای پهلوی هم قرار نگیرند، برابر $C(k+1, r)$ است. دلیل آن دقیقاً همان دلیل حالت خاص بالاست که در آن $k=8$ و $r=5$ است. اکنون به جای (۱۰۴) داریم

$$m + m + m + m + \dots + m + m, \quad (204)$$

یعنی k علامت بعلاوه و $k+1$ نماد m . تا از m ها را به علامت منها تبدیل کرده، بقیه را حذف می کنیم. بنابراین از میان $k+1$ نماد m ، r تا را انتخاب کرده به علامت منها تبدیل می کنیم و پاسخ $C(k+1, r)$ را به دست می آوریم.

اگر r از $k+1$ تجاوز کند، نماد $C(k+1, r)$ برابر صفر است. این همان مقداری است که باید داشته باشد، زیرا اگر مثلاً $k=8$ و $r=12$ ، هیچ راهی برای نوشتن هشت علامت بعلاوه و دوازده علامت منها در یک سطر وجود ندارد که هیچ دو علامت منهای کنار هم قرار نگیرند.

حال به سؤال دیگری برمی گردیم. یک سری را در نظر می گیریم که شامل ده x در یک سطر است

$$x \ x \ x \ x \ x \ x \ x \ x \ x \ x.$$

فرض کنیم که هر x ممکن است علامتی بعلاوه و یا منها باشد، بنابراین جمعاً 2^{10} یا 1024 حالت وجود دارد. سؤال این است: در این 1024 حالت چند حالت وجود دارد که در آن دو علامت منها مجاور هم قرار نمی گیرند؟ انواع زیر را متوالیاً در نظر می گیریم،

۱۰ علامت بعلاوه،

۹ علامت بعلاوه و ۱ علامت منها،

۸ علامت بعلاوه و ۲ علامت منها،

۷ علامت بعلاوه و ۳ علامت منها، و غیره.

با استفاده از نتیجه‌ای که قبلاً به دست آمد، پاسخ زیر را به دست می‌آوریم:

$$C(11, 0) + C(10, 1) + C(9, 2) + C(8, 3) + C(7, 4) + C(6, 5).$$

جمله‌های دیگری نظیر $C(5, 6)$ ، $C(4, 7)$ و غیره وجود دارند، ولی هر یک از این جمله‌ها صفرند. محاسبه ساده است:

$$1 + 10 + 36 + 56 + 35 + 6 = 144.$$

به طور کلیتر، فرض کنیم به جای عدد ۱۰ عدد n را به کار ببریم. اگر n نماد x در یک سطر باشند و اگر هر x ، علامتی بعلاوه و یا علامتی منها باشد جمعاً 2^n حالت وجود دارند. از این حالتها، تعدادی که در آنها دو علامت منها مجاور هم قرار نمی‌گیرند، برابر است با

$$C(n+1, 0) + C(n, 1) + C(n-1, 2) + C(n-2, 3) + \dots, \quad (3.4)$$

که در آن، مجموع تا وقتی به نمادهایی از نوع $C(u, v)$ که در آنها $u < v$ می‌رسد ادامه پیدا می‌کند؛ بنا بر تعریف، چنین نمادهایی با صفر نشان داده می‌شوند. بنا بر این (۳.۴) معرف تعداد راههای نوشتن n علامت در یک سطر است به شرطی که هر کدام یک علامت بعلاوه و یا علامت منها بوده، و هیچ دو علامت منهایی پهلوی هم قرار نگیرند. این عدد تابعی از n است و آن را به صورت $F(n)$ می‌نویسیم، و سپس به راه دیگری به مسأله توجه می‌کنیم.

اولاً دنباله‌هایی از این $F(n)$ دنباله را که با علامت $+$ شروع می‌شوند در نظر می‌گیریم. تعداد این دنباله‌ها برابر $F(n-1)$ است، زیرا هر یک از آنها از قرار گرفتن یک علامت بعلاوه در جلوی هر یک از $F(n-1)$ آرایش $n-1$ علامت به دست آمده است.

ثانیاً آن دنباله‌هایی از $F(n)$ دنباله را در نظر می‌گیریم که با یک علامت منها شروع می‌شوند. در هر چنین دنباله‌ای علامت بعدی باید مثبت باشد، زیرا علامتهای منهای مجاور قابل قبول نیستند. بنابراین دنباله‌هایی از n علامت را که با $+$ ، شروع می‌شوند در نظر می‌گیریم. تعداد این دنباله‌ها برابر $F(n-2)$ است، زیرا هر یک از این دنباله‌ها را می‌توان با قراردادن زوج، $+$ ، در جلوی هر یک از $F(n-2)$ آرایش $n-2$ علامتی به دست آورد. بنابراین نتیجه می‌گیریم که

$$F(n) = F(n-1) + F(n-2). \quad (4.4)$$

این فرمول يك رابطه بازگشتی برای اعداد فیبوناچی است، که نام اعداد $F(n)$ است. هر وقت که $F(n-1)$ و $F(n-2)$ معلوم باشند می توان مقدار $F(n)$ را محاسبه کرد. مثلاً به ازای $n=3$ داریم

$$F(3) = F(2) + F(1).$$

بنابر تعریف (۳.۴) برای $F(n)$ ، می بینیم که $F(1) = 2$ و $F(2) = 3$ ، بنا براین $F(3) = 5$. به همین ترتیب، با استفاده از (۴.۴) می توانیم حساب کنیم که

$$F(4) = F(3) + F(2) = 5 + 3 = 8,$$

$$F(5) = F(4) + F(3) = 8 + 5 = 13,$$

$$F(6) = F(5) + F(4) = 13 + 8 = 21,$$

$$F(7) = F(6) + F(5) = 21 + 13 = 34,$$

و غیره.

دنباله فیبوناچی* را معمولاً با جمله‌هایی اضافی در ابتدا می نویسند، مثلاً
 $1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$ یا $1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$ یا $1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$ یا $1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$
 ما اولین صورت از این سه صورت را به کار خواهیم برد. برای این کار تعریف می کنیم $F(0) = 1$ ، و سپس از نتایج $F(1) = 2$ و $F(2) = 3$ و غیره استفاده می کنیم که هر جمله برابر مجموع دو جمله ماقبل خودش است.
 اعداد فیبوناچی معمولاً با استفاده از ویژگی (۴.۴)،

$$F(n) = F(n-1) + F(n-2),$$

تعریف می شوند، درحالی که ما از طریق مسأله ای درمورد آرایشها به آنها رسیدیم. این رهیافت نه تنها فرمول (۴.۴) را به ما می دهد، بلکه این واقعیت را توجیه می کند که $F(n)$ به صورت (۳.۴)، که می توان آن را به صورت مثلث پاسکال نیز در نظر گرفت، قابل توجیه است.

* برای رهیافت دیگری از این دنباله ها، مثلاً کسرهای مسلسل صفحه ۸۵، تألیف C. D. Olds از همین مجموعه را ببینید.

$F(0)$	1	1							
$F(1)$	1	2	1						
$F(2)$	1	3	3	1					
$F(3)$	1	4	6	4	1				
$F(4)$	1	5	10	10	5	1			
$F(5)$	1	6	15	20	15	6	1		
$F(6)$	1	7	21	35	35	21	7	1	
$F(7)$	1	8	28	56	70	56	28	8	1

$$F(\Delta) = C(\epsilon, 0) + C(\Delta, 1) + C(\varphi, 2) + C(\varphi, 3) \\ = 1 + \Delta + \epsilon + 1 = 13.$$

۰۹ با استفاده از (۴.۴) مقدار $F(11)$ را به دست آورید. با استفاده از (۳.۴) درستی پاسخ را بررسی کنید.

۲. $F(n)$ به ازای چه اعداد صحیح n ، عددی زوج و به ازای چه اعداد صحیح n ، عددی فرد است؟

۳. اگر در فرمول (۴.۴) به جای n ، $n+1$ را قرار دهیم، چه فرمولی به دست می‌آید؟

۴. ثابت کنید که $F(n+1) = 2F(n-1) + F(n-2)$

۵۰. به چند طریق می‌توان ده A و شش B را طوری در یک سطر قرار داد که هیچ دو B ای کنارهم قرار نگیرند؟

۶. به چند طریق می توان ده A و شش B و پنج C را طوری در يك سطر قرار داد که هیچ دو B ای کنار هم قرار نگیرند؟

۷. اگر تمام حروف کلمه *Mississippi* با هم در نظر گرفته شوند، چند جایگشت از حروف این کلمه وجود دارند به شرط آنکه هیچ دو i ای پهلوی هم قرار نگیرند؟

۲.۴ معادله های خطی با ضریبهای واحد

جوابهای معادله $x+y+z+w=12$ را در مجموعه اعداد صحیح مثبت x, y, z, w در نظر بگیرد. (نخاطر نشان می کنیم که اعداد صحیح مثبت عبارت اند از $1, 2, 3, 4, \dots$) در شمارش جوابها، مثلاً

$$x=9 \quad x=1 \quad x=1 \quad x=1$$

$$y=1 \quad y=9 \quad y=1 \quad y=1$$

$$z=1 \quad z=1 \quad z=9 \quad z=1$$

$$w=1 \quad w=1 \quad w=1 \quad w=9$$

را چهار جواب مختلف خواهیم گفت، زیرا این چهار تاییهای مرتب اعداد صحیح، از هم متمایزند، به طور کلی تنها جوابهایی را یکسان در نظر می گیرند که مقادیر x ها، مقادیر y ها، مقادیر z ها و مقادیر w ها همزمان برابر باشند. (در وضعیتی که چهار جواب درست مانند يك تك جواب رفتار کنند، جوابها تحت عنوان «افراهای عدد ۱۲» می آیند و چنین مسأله در فصل ۶ بررسی خواهند شد.) تعداد جوابهای معادله مفروض، با در نظر گرفتن مسأله به صورت زیر، به آسانی تعیین می شود: اگر ۱۲ واحد واقع بريك سطر (که آنها را با ۱۲ تا u نشان می دهیم) به وسیله ۱۱ فاصله (که آنها را با ۱۱ تا s نشان می دهیم) از هم جدا شده باشند، یعنی

$$u s u s u s u s u s u s u s u s u s, \quad (5.4)$$

و اگر ۳ تای دلخواه از آنها را انتخاب کرده و بقیه را حذف کنیم، مثلاً

$$u u s u u u u s u u u u s u,$$

آن گاه s های باقیمانده، u ها را به چهار دسته تقسیم می کنند. تعداد u ها را در این دسته ها می توان به عنوان مقادیر x, y, z, w در نظر گرفت. در مثال بالا، $x=2$,

$w=1, z=5, y=4$. بنابراین هر انتخاب دلخواه سه S در $(5,4)$ ، يك جواب معادله $x+y+z+w=12$ را در مجموعه اعداد صحيح مثبت به دست می‌دهد و هر جواب، متناظر با يك چنین انتخابی است. نتیجه می‌شود كه تعداد جوابهای این معادله در مجموعه اعداد صحيح مثبت برابر است با تعداد راههای انتخاب ۳ شیء از ۱۱ شیء كه برابر است با

$$C(11, 3) = \frac{11 \times 10 \times 9}{3 \times 2 \times 1} = 165.$$

برای يك نتیجه کلیتر فرض كنیم به جای ۱۲، نماد m و به جای $x+y+z+w$ مجموعه‌ای از k متغیر را قرار دهیم، و بخواهیم تعداد جوابهای معادله

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_k = m \quad (6.4)$$

را در مجموعه اعداد صحيح مثبت به دست آوریم. در حالت خاصی كه هم‌اينك مطالعه شد، $k=4$ و $m=12$ بود، بنابراین با قرار دادن x_1, x_2, x_3, x_4 به جای x, y, z, w ، معادله را می‌توانستیم به صورت $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$ در آوریم كه البته از لحاظ تعداد جواب با معادله قبلی هیچ اختلافی ندارد.

تعداد جوابهای $x_1, x_2, \dots, x_k$ ، معادله (6.4) ، در مجموعه اعداد صحيح مثبت برابر است با

$$C(m-1, k-1). \quad (7.4)$$

این رابطه را می‌توان از تعمیم استدلالی كه در حالت خاص $k=4, m=12$ به كار رفت نتیجه گرفت. اکنون نماد u را، كه m بار تکرار شده است، و نماد S را، كه $m-1$ بار تکرار شده و u ها را از هم جدا می‌کند، داریم:

$$u S u S u S u S \dots S u S u.$$

برای آنكه u ها را به k دسته تقسیم كنیم، $k-1$ نماد S را انتخاب می‌كنیم (و بقیه را حذف می‌نماییم). چنین انتخابی يك جواب یكنا برای (6.4) خواهد داد، یعنی تعداد u ها در دسته اول برابر x_1 ، تعداد u ها در دسته دوم برابر x_2 و غیره است. از این رو تعداد جوابهای (6.4) در مجموعه اعداد صحيح مثبت، همان تعداد راههای انتخاب $k-1$ نماد S از میان $m-1$ نماد S است، و این تعداد با رابطه (7.4) داده می‌شود.

$$x + y + z + w = 12$$

$u s u u u u s u u s u u u u$ (A.4)

برعکس اگر با يك جواب دلخواه مانند $x=0, y=1, z=2, w=9$ شروع کنیم، متناظر با این جواب می‌توان ۱۲ تا u و ۳ تا s را در يك سطر نوشت:

S U S U U S U U U U U U U U.

جواب $x=9$ ، $y=0$ ، $z=1$ ، $w=2$ متناظر با آرایش

u u u u u u u u u u s s u s u u

دانشگاه آزاد اسلامی (ریاضی) سرا

بنابر این تعداد جوابهای $x+y+z+w=12$ در مجموعه اعداد صحیح نامنفی برابر همان تعداد راههای نوشتن ۱۲ تا u و ۳ تا s در یک سطر است. طبق مطالب بخش ۲.۳ این تعداد برابر با $C(15, 3)$ است. این نتیجه را برای معادله

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_k = m \quad (9.4)$$

با k متغیر که مجموع آنها باید همواره برابر m باشد، به وسیله آرایش مشابهی که در حالت خاص داده شد، تعمیم می دهیم. تعداد جوابهای معادله (9.4) در مجموعه اعداد صحیح نامنفی همان تعداد راههای آرایش m تا u و $k-1$ تا s در یک سطر است و تعداد چنین آرایشهایی برابر است با:

$$C(m+k-1, k-1).$$

فرض کنیم m و k دو عدد صحیح مثبت ثابت باشند. تعداد جوابهای معادله (9.4) در مجموعه اعداد صحیح نامنفی برابر است با:

$$C(m+k-1, m) \text{ یا } C(m+k-1, k-1) \quad (10.4)$$

قسمت دوم (10.4) از روی قسمت اول به موجب ویژگی پایه‌ای $C(n, r) = C(n, n-r)$ نتیجه می شود.

مجموعه مسائل ۱۵*

۱. معادله $x+y+z+w=50$ (الف) در مجموعه اعداد صحیح مثبت (ب) در مجموعه اعداد صحیح نامنفی، چند جواب دارد؟

۲. ثابت کنید که تعداد جوابهای معادله $x_1+x_2+x_3+x_4=9$ در مجموعه اعداد صحیح مثبت برابر با تعداد جوابهای معادله

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=9$$

در مجموعه اعداد صحیح مثبت است.

۳. بررسی کنید دو عبارتی که در (10.4) داده شده اند مساوی اند.

۴. ثابت کنید که تعداد جوابهای معادله (6.4) در مجموعه اعداد صحیح مثبت برابر

* پاسخهای این مسائل و مسائل بعدی را ممکن است بر حسب نماد $C(n, r)$ داد. مثلاً پاسخی نظیر $C(37, 5) - C(26, 4)$ به همین صورت، بدون تلاشی برای تغییر شکل یا ساده کردن بیشتر آن، قابل قبول است.

با تعداد جوابهای معادله $m - k + 1$ متغیری

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{m-k+1} = m$$

در مجموعه اعداد صحیح مثبت است.

۵. ثابت کنید که تعداد جوابهای دومعادله

$$x_1 + x_2 + \dots + x_9 = 5 \text{ و } x_1 + x_2 + \dots + x_6 = 8$$

در مجموعه اعداد صحیح نامنفی یکی است.

۶. بین اعداد ۱ تا ۱۰۰۰۰۰۰۰ چند عدد وجود دارند که مجموع رقمهای آنها (الف) مساوی ۶؛ (ب) کمتر از ۶ باشد.

۷. در بسط

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5)^{17} \quad \text{(الف)}$$

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k)^6 \quad \text{(ب)}$$

که در آن k و t دو عدد صحیح مثبت اند، چند جمله وجود دارد؟

۳.۴ ترکیبها با تکرارها

نماد $C(n, r)$ ، تعداد ترکیبهای n شیء مختلف را نشان می دهد که هر بار r تای آنها را اختیار می کنیم. اکنون فرض کنیم که از هر يك از این n شیء چند نمونه همانند، مثلاً کپیهای یکسان کتابها در يك کتابفروشی، وجود داشته باشند. بنا براین می توانیم این سؤال را مطرح کنیم که: برای n رسته متمایز از اشیاء، که هر رسته شامل تعداد نامحدودی شیء است، چند ترکیب مختلف از r شیء وجود دارند؟ (هر ترکیب ممکن است شامل چند شیء نامتمایز از اشیاء يك رسته باشد.) این سؤال به مسأله تعیین تعداد جوابهای

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = r$$

در مجموعه اعداد صحیح نامنفی برمی گردد، زیرا می توانیم x_1 تا از اولین شیء، x_2 تا از دومین شیء، $\dots$ ، x_n تا از n امین شیء اختیار کنیم. آن گاه با قرار دادن n و r به جای m و k در فرمول (۱۰.۴) نتیجه زیر به دست می آید.

تعداد ترکیبهای r به n از شیء مختلف، که هر یک از اشیاء به تعداد نامحدودی در دسترس است، برابر است با

$$C(n+r-1, r). \quad (11.4)$$

مثلاً، فرض کنید سؤال کنیم که چند مجموعه مختلف از سه سکه می توان تشکیل داد، به طوری که هر سکه، یک یک سنتی، یک پنج سنتی، یک ده سنتی یا یک بیست و پنج سنتی باشد. در این جا داریم $r=3$ ، و $n=4$ ، و بنا بر این طبق (11.4) پاسخ برابر $C(6, 3)$ یا ۲۰ است. با برگشت به تحلیلی که به فرمول (11.4) منجر شد، توجه می کنیم که سؤال به تعیین تعداد جوابهای معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3$ در مجموعه اعداد صحیح نامنفی برمی گردد که در آن x_i را به عنوان تعداد یک سنتیها، x_2 را به عنوان تعداد پنج سنتیها و x_3 را به عنوان تعداد ده سنتیها و x_4 را به عنوان تعداد بیست و پنج سنتیها می که در تشکیل یک مجموعه ۳ سکه ای به کار می روند تعبیر می کنیم. به عنوان مثالسی دیگر، مسأله ۴.۱ فصل اول را در نظر می گیریم. خلاصه مسأله چنین است: بیست کتاب مختلف را در نظر بگیرید که از هر کدام تعداد نامحدودی در دسترس است. به چند طریق می توان ده کتاب انتخاب کرد به شرط آنکه (الف) تکرار مجاز باشد، (ب) تکرار مجاز نباشد، به طوری که الزاماً ده کتاب با هم متفاوت باشند؟ قسمت (ب) درست موضوع انتخاب ده شیء از بیست شیء است، بنا بر این پاسخ برابر $C(20, 10)$ است. قسمت (الف) تعداد ترکیبهای ده شیء از بیست شیء متفاوتی است که از هر یک نمونه های متعددی در دسترس است. بنا بر این طبق فرمول (11.4) با $r=10$ و $n=20$ ، پاسخ قسمت (الف) داده می شود، یعنی

$$C(29, 10) = \frac{29!}{10!19!}.$$

مجموعه مسائل ۱۶

۰۱ در توضیح فرمول (11.4) در متن کتاب بیان شد که هر یک از اشیاء «به تعدادی نامحدود در دسترس اند». ولی واقعاً لازم نیست که تعداد نامحدود باشد. از هر یک از n شیء چند نمونه باید موجود باشد؟

۰۲ اگر هر سکه بتواند یک سنتی، پنج سنتی، ده سنتی، بیست و پنج سنتی، و پنجاه سنتی، و یا صد سنتی باشد چند گردایه مختلف از شش سکه می توان تشکیل داد؟

۰۳. مهره‌های يك بازی به سه رنگ قرمز، سفید و آبی هستند. از ده مهره چندترکیب مختلف وجود دارد؟

۰۴. يك مغازه اسباب بازی فروشی پنج رنگ مهره در يك اندازه دارد. هر دو جین آنها به ده سنت قیمت گذاری شده است. برای ده سنت چندترکیب رنگی مختلف وجود دارد؟

۰۵. اعداد صحیح هفت رقمی یعنی اعداد صحیحی از ۱۰۰۰۰۰۰ تا ۹۹۹۹۹۹۹ را در نظر بگیرید. این اعداد را به صورت زیر در زیر مجموعه‌هایی جدا از هم قرار دهید: اعداد را در يك زیر مجموعه قرار دهید اگر و فقط اگر ارقام آنها به عنوان يك گردایه، مثل هم باشند. مثلاً ۸۱۲۲۳۳۳ و ۳۲۱۳۲۸۳ در يك زیر مجموعه جا می‌گیرند. در این دسته‌بندی چند زیر مجموعه وجود دارد؟

۲.۴ معادله‌های با جوابهای مشروط

در بخش ۲.۴ مسأله تعداد جوابهای معادله‌ای مانند $x + y + z + w = ۱۲$ را، ابتدا برای جوابهایی که به مجموعه اعداد صحیح مثبت و سپس برای آنهایی که به مجموعه اعداد صحیح نامنفی محدود می‌شدند، بررسی کردیم. وقتی می‌گوییم که x يك عدد صحیح مثبت است مثل این است که بگوییم x عدد صحیحی است که در $x > 0$ ، یا x عدد صحیحی است که در $x \geq 1$ صدق می‌کند. وقتی می‌گوییم x يك عدد صحیح نامنفی است مثل این است که بگوییم x عدد صحیحی است که در $x \geq 0$ صادق است.

اینک سؤال را بدین صورت مطرح می‌کنیم: معادله

$$x + y + z + w = 48 \quad (۱۲.۴)$$

چند جواب صحیح بزرگتر از ۵ دارد؟ مثلاً $x = 6$ ، $y = 10$ ، $z = 12$ ، $w = 20$ يك جواب است و می‌خواهیم تعداد چنین جوابهایی را پیدا کنیم. چون هر يك از متغیرها باید بزرگتر از ۵ باشد، کم کردن ۵ واحد از هر متغیر، مجموعه جدیدی از چهار عدد مثبت

$$r = x - 5, s = y - 5, t = z - 5, u = w - 5 \quad (۱۳.۴)$$

را به دست می‌دهد که مجموع آنها برابر ۲۸ است:

$$r+s+t+u=x-5+y-5+z-5+w-5$$

$$=x+y+z+w-20=28$$

$$r+s+t+u=28 \quad (14.4)$$

بنابراین با جایگذاری، یا تبدیل (۱۳.۴)، معادله‌های (۱۴.۴) و (۱۲.۴) به هم مربوط می‌شوند. مثلاً جواب $x=6$ ، $y=10$ ، $z=12$ ، $w=20$ برای معادله (۱۲.۴)، با جواب $r=1$ ، $s=5$ ، $t=7$ و $u=15$ برای معادله (۱۴.۴) متناظر است. مثالهای دیگری عبارت‌اند از:

$r=5$	$x=10$
$s=6$	$y=11$
$t=8$	$z=13$
$u=9$	$w=14$

متناظر است با

و

$r=20$	$x=25$
$s=4$	$y=9$
$t=3$	$z=8$
$u=1$	$w=6$

متناظر است با

اکنون چون باید هر يك از x و y و z و w از ۵ بزرگتر باشد، هر يك از r ، s ، t ، u باید از ۰ بزرگتر باشد، یعنی باید هر يك از r ، s ، t ، u عدد صحیح مثبتی باشد. بنابراین هر جواب معادله (۱۲.۴) در مجموعه اعداد صحیح بزرگتر از ۵، متناظر با يك جواب معادله (۱۴.۴) در مجموعه اعداد صحیح مثبت است، و به هر جواب معادله (۱۴.۴) در مجموعه اعداد صحیح مثبت، يك جواب از معادله (۱۲.۴) در مجموعه اعداد صحیح بزرگتر از ۵ متناظر است. مثلاً اگر با جواب

$$r=15, s=1, t=8, u=4$$

از معادله (۱۴.۴) شروع کنیم، در به دست آوردن جواب

$$x=20, y=6, z=13, w=9$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

برای معادله (۱۲.۴) از تبدیل (۱۳.۴) استفاده می‌کنیم. پس بین جوابهای معادله (۱۲.۴) در مجموعه اعداد صحیح بزرگتر از ۵ و جوابهای معادله (۱۴.۴) در مجموعه اعداد صحیح مثبت يك تناظر يك به يك برقرار است.

بنابراین می‌بینیم که تعداد جوابهای معادله (۱۲.۴) در مجموعه اعداد صحیح بزرگتر از ۵، برابر تعداد جوابهای معادله (۱۴.۴) در مجموعه اعداد صحیح مثبت است. با به کار بردن فرمول (۷.۴) صفحه ۶۱ برای معادله (۱۴.۴)، می‌بینیم که این تعداد برابر است با:

$$C(27, 3) \text{ یا } C(28-1, 4-1)$$

اگر متغیرها بدشرایط متفاوتی مقید باشند، ایده‌ای که در این جا از آن استفاده شد باز دقیقاً بدخوبی به کار می‌رود. مثلاً، مسأله زیر را در نظر می‌گیریم: چند جواب صحیح معادله $x+y+z+w=48$ بدشرایط زیر صدق می‌کنند:

$$x > 5, y > 6, z > 7, w > 8? \quad (15.4)$$

در این حالت برای بدست آوردن يك مجموعه جدید از اعدادی (که آنها را r, s, t, u می‌نامیم) و هر کدام يك عدد مثبت است، از هر جواب معادله به ترتیب ۵ تا از x ، ۶ تا از y ، ۷ تا از z و ۸ تا از w کم می‌کنیم. پس این بار تبدیل به صورت زیر است:

$$r = x - 5, s = y - 6, t = z - 7, u = w - 8,$$

یا

$$x = r + 5, y = s + 6, z = t + 7, w = u + 8.$$

اگر این عبارات را در معادله $x+y+z+w=48$ قرار دهیم، معادله

$$r + 5 + s + 6 + t + 7 + u + 8 = 48,$$

یا

$$r + s + t + u = 22, \quad (16.4)$$

بدست می‌آید.

هر جواب صحیح معادله $x+y+z+w=48$ که مقید بدشرایط (۱۵.۴)

است با يك جواب معادله (۱۶.۴) در مجموعه اعداد صحيح مثبت متناظر است. مثلاً جواب $x=6, y=10, z=12, w=20$ با جواب $r=1, s=4, t=5, u=12$ از معادله (۱۶.۴) متناظر است. بين جوابها يك تناظر يك به يك وجود دارد، بنا بر اين تعداد جوابهای صحيح معادله

$$x+y+z+w=48$$

که مقید به شرایط (۱۵.۴) هستند، برابر با تعداد جوابهای معادله $r+s+t+u=22$ در مجموعه اعداد صحيح مثبت است. طبق فرمول (۷.۴) صفحه ۶۱، اين تعداد برابر است با

$$C(21, 3) \text{ يا } C(22-1, 4-1)$$

اکنون برای به دست آوردن بعضی از فرمولهای کلی، به این ایده‌ها رسمیتی می‌دهیم. فرض کنیم به جای عدد ۴۸، حرف m را قرار دهیم، و از آنجا معادله

$$x+y+z+w=m$$

را در نظر بگیریم. بعلاوه فرض کنیم به جای شرایط (۱۵.۴) روی x, y, z, w ، شرایط زیر را داشته باشیم

$$x > c_1, y > c_2, z > c_3, w > c_4, \quad (17.4)$$

که در آنها c_1, c_2, c_3, c_4 اعداد صحيح ثابتی هستند. اکنون تبدیل به صورت زیر است:

$$r=x-c_1, s=y-c_2, t=z-c_3, u=w-c_4,$$

یا

$$x=r+c_1, y=s+c_2, z=t+c_3, w=u+c_4.$$

اگر این مقادیر را در معادله $x+y+z+w=m$ قرار دهیم، معادله

$$r+c_1+s+c_2+t+c_3+u+c_4=m,$$

یا

$$r+s+t+u=m-c_1-c_2-c_3-c_4 \quad (18.4)$$

به دست می‌آید.

بنا بر این تعداد جوابهای صحيح معادله $x+y+z+w=m$ که مقید به شرایط (۱۷.۴) هستند برابر با تعداد جوابهای معادله (۱۸.۴) در مجموعه اعداد صحيح مثبت r, s, t, u است. طبق فرمول (۷.۴) صفحه ۶۱، اين تعداد برابر است با

$$C(m - c_1 - c_2 - c_3 - c_4 - 1, 3). \quad (19.4)$$

اگر به جای x, y, z, w به ترتیب x_1, x_2, x_3, x_4 را قرار دهیم، می توان نتیجه را به صورت زیر بیان کرد: تعداد جوابهای صحیح x_1, x_2, x_3, x_4 معادله

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = m$$

که مقید به شرایط

$$x_1 > c_1, x_2 > c_2, x_3 > c_3, x_4 > c_4$$

هستند، با فرمول (۱۹.۴) داده می شود.

اکنون k متغیر $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$ و k ثابت صحیح $c_1, c_2, c_3, \dots, c_k$ وجود دارند. بنابراین از توسیع فوری نظریه بالا نتیجه می شود که: تعداد جوابهای صحیح معادله

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_k = m \quad (20.4)$$

که در شرایط

$$x_1 > c_1, x_2 > c_2, x_3 > c_3, \dots, x_k > c_k \quad (21.4)$$

صدق می کنند برابر است با

$$C(m - c_1 - c_2 - c_3 - \dots - c_k - 1, k - 1). \quad (22.4)$$

تذکره: اگرچه در مثالهایی که به این نتیجه کلی منجر شد، اعداد صحیح c_1 و c_2 و غیره را که اختیار کردیم همگی مثبت بودند، ولی این نتیجه برای اعداد صحیح دلخواه $c_1, c_2, \dots, c_k$ مثبت، منفی و یا صفر برقرار است.

مجموعه مسائل ۱۷

۱. بین جوابهای معادله $x + y + z + w = 27$ در مجموعه اعداد صحیح بزرگتر از ۵ و جوابهای $r + s + t + u = 7$ در مجموعه اعداد صحیح مثبت به تفصیل يك تناظر يك به يك بنویسید.

۲. در مجموعه اعداد صحیح بزرگتر از ۷، معادله $x + y + z + w = 100$ چند جواب دارد؟

۳. تعداد جوابهای معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 50$ را در مجموعه اعداد صحیح مثبت با شرط (الف) $x_5 > 12$ ؛ (ب) $x_5 > 12$ و $x_4 > 7$ پیدا کنید.

۴. تعداد جوابهای معادله $x + y + z + w = 1$ را در مجموعه اعداد صحیح بزرگتر از -4 ، یعنی در مجموعه اعداد صحیح $\dots, 5, 4, 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3$ ، تعیین کنید.

۵. تعداد جوابهای معادله $x + y + z + w = 20$ را در مجموعه اعداد صحیح مثبت با شرط (الف) $x > 6$ ؛ (ب) $x > 6$ و $y > 6$ ؛ (ج) $x > 6$ و $y > 6$ و $z > 6$ تعیین کنید.

۶. تعداد جوابهای معادله $x + y + z + w = 20$ را در مجموعه اعداد صحیح نامنفی با شرط (الف) $x \geq 6$ ؛ (ب) $x \geq 6$ و $y \geq 6$ تعیین کنید.

۷. فرمولی برای تعداد جوابهای معادله $x + y + z + w = m$ در مجموعه اعداد صحیح نامنفی بیابید که در شرط (الف) $x \geq c_1$ ؛ (ب) $x \geq c_1$ و $y \geq c_2$ صدق کنند.

۸. چند عدد صحیح از ۱ تا ۱۰۰۰۰۰۰ وجود دارند که مجموع ارقام آنها ۱۳ است؟

۵.۴ خلاصه

اعداد فیبوناچی ۱، ۲، ۳، ۵، ۸، ۱۳، ۲۱، ... دارای این ویژگی هستند که هر عضو این دنباله (به جز دو جمله اول) برابر با مجموع دو جمله ماقبل است. این ویژگی با فرمول بازگشتی

$$F(n) = F(n-1) + F(n-2)$$

بیان می شود. گرچه در بسیاری از کتابها اعداد فیبوناچی به این طریق تعریف می شوند ولی ما از آنها، با تعریف $F(n)$ به صورت تعداد راههایی که می توان n علامت بعلاوه یا منها را طوری پهلوی هم نوشت که هیچ دو علامت منهای در مجاورت یکدیگر قرار نگیرند، گفتگو کردیم؛ بنابراین $F(1) = 2$ ، $F(2) = 3$ ، $F(3) = 5$ ، $F(5) = 8$ و غیره. ثابت شد که با تعریف $F(0)$ برابر ۱، دنباله تام اعداد فیبوناچی را از فرمول

$$F(n) = C(n+1, 0) + C(n, 1) + C(n-1, 2) + C(n-2, 3) + \dots$$

به دست می آوریم، که در آن مجموع سمت راست وقتی خاتمه پیدا می کند که جمله هایی برابر صفر (جمله هایی به صورت $C(u, v)$ با $u < v$) ظاهر شوند. فرض کنیم m و k اعداد صحیح مثبت ثابت باشند. تعداد جوابهای

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_k = m$$

در مجموعه اعداد صحیح مثبت برابر $C(m-1, k-1)$ ؛ و در مجموعه اعداد صحیح نامنفی برابر $C(m+k-1, m)$ است. بعلاوه اگر $c_1, c_2, c_3, \dots, c_k$ اعداد صحیح ثابت باشند آن گاه تعداد جوابهایی که در مجموعه اعداد صحیح اند و در شرایط

$$x_1 > c_1, x_2 > c_2, x_3 > c_3, \dots, x_k > c_k$$

صادق می کنند برابر است با

$$C(m - c_1 - c_2 - c_3 - \dots - c_k - 1, k - 1).$$

دو جواب را مساوی می گویند اگر و تنها اگر مقادیر x_1 یکی باشند، مقادیر x_2 یکی باشند، مقادیر x_3 یکی باشند و قس علی هذا. (مسأله هایی درباره تعداد جوابهای معادله ای مفروض که جوابها در شرایطی حتی بیشتر صدق کنند، مثلاً نظیر اینکه جوابها در مجموعه اعداد صحیح ۱ تا ۷ صادق باشند، در فصل بعدی مطرح می شوند.)
تعداد ترکیبهای r به r از n شیء مختلف (مانند سکه ها، کتابها یا تمبرها) که هر کدام از آنها به تعداد زیادی در دسترس است برابر $C(n+r-1, r)$ است. در این جا n و r اعداد صحیح مثبت را نشان می دهند، اما ممکن است n بزرگتر از، برابر با، یا کوچکتر از r باشد.



اصل شمول - عدم شمول؛ احتمال

در این فصل قضیه‌ای خیلی کلی را ثابت می‌کنیم و سپس آن را برای مسائلی خاص به کار می‌بریم. ایده احتمال در اواخر فصل معرفی می‌شود.

۱۰۵ يك نتیجه کلی

مناسب است که به وسیله دنباله‌ای از سه سؤال، که به ترتیب درجه مشکل بودنشان عنوان می‌شوند، به اصل شمول - عدم شمول برسیم. اولین سؤال به هیچ وجه خیلی مشکل نیست.

مسئله ۱۰۵ از ۱ تا ۶۳۰۰، چند عدد بر ۵ تقسیم‌پذیر نیستند؟ چون دقیقاً از هر پنج عدد، یکی بر ۵ تقسیم‌پذیر است، می‌بینیم که از ۶۳۰۰ عدد مورد نظر، دقیقاً $6300/5$ یا ۱۲۶۰ عدد بر ۵ تقسیم‌پذیرند. بنابراین پاسخ سؤال عبارت است از

$$6300 - 1260 = 5040.$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

مسأله ۲۰۵ بین ۱ تا ۶۳۰۰، چند عدد نه بر ۵ تقسیم پذیرند و نه بر ۳؟ برای پاسخ دادن به این سؤال می توانیم با استدلالی مشابه آنچه در مسأله ۱۰۵ ارائه شد، شروع کنیم و بگوییم که تعداد اعداد مورد نظری که بر ۵ تقسیم پذیرند برابر ۱۲۶۰ و تعداد اعدادی که بر ۳ تقسیم پذیرند برابر ۶۳۰۰/۳ یا ۲۱۰۰ است. اما

$$۶۳۰۰ - ۲۱۰۰ - ۱۲۶۰$$

پاسخ مسأله نیست، زیرا اعداد صحیحی را بیش از آنچه باید، از ۶۳۰۰ کم کرده ایم. اعدادی مانند ۱۵، ۳۰، ۴۵، ... که هم بر ۳ و هم بر ۵ تقسیم پذیرند دوبار از ۶۳۰۰ عدد صحیح مورد نظر کم شده اند. بنابراین می بینیم که دوباره باید تعداد اعدادی را که هم بر ۵ و هم بر ۳، یعنی بر ۱۵، تقسیم پذیرند* اضافه کنیم. این تعداد برابر ۶۳۰۰/۱۵ یا ۴۲۰ است. بنابراین پاسخ مسأله برابر است با:

$$۶۳۰۰ - ۲۱۰۰ - ۱۲۶۰ + ۴۲۰ = ۳۳۶۰.$$

مسأله ۳۰۵ از ۱ تا ۶۳۰۰، چند عدد صحیح بر هیچک از اعداد ۳، ۵، ۷ تقسیم پذیر نیستند؟ برای حل این مسأله می توانیم شبیه استدلال قبلی کار را شروع کنیم و ابتدا اعداد صحیحی را که بر ۳ تقسیم پذیرند، به تعداد ۲۱۰۰ عدد، آنهایی را که بر ۵ تقسیم پذیرند، به تعداد ۱۲۶۰ عدد، و آنهایی را که بر ۷ تقسیم پذیرند، به تعداد ۹۰۰ عدد از ۶۳۰۰ کم کنیم. پس

$$۶۳۰۰ - ۲۱۰۰ - ۱۲۶۰ - ۹۰۰$$

مقدمای برای ارائه پاسخ است. اما، اعدادی که هم به ۳ و هم به ۵ تقسیم پذیرند، اعدادی که هم به ۵ و هم به ۷ تقسیم پذیرند، و اعدادی که هم به ۳ و هم به ۷ تقسیم پذیرند، دوبار کنار گذاشته شده اند. از این رو باید تعداد اعداد صحیحی که هم به ۳ و هم به ۵ تقسیم پذیرند، یعنی ۶۳۰۰/۱۵ یا ۴۲۰، تعداد اعدادی که هم به ۳ و هم به ۷ تقسیم پذیرند، یعنی ۶۳۰۰/۲۱ یا ۳۰۰، و همچنین تعداد اعدادی که هم به ۵ و هم به ۷ تقسیم پذیرند، یعنی ۶۳۰۰/۳۵ یا ۱۸۰ را دوباره اضافه کنیم. اکنون داریم:

* بحثی کاملتر از ویژگیهای چنین تقسیم پذیری در فصل ۱ کتاب

I. Niven's Numbers: Rational and Irrational

که جزء مجموعه ریاضیات پیش دانشگاهی است داده شده است.

$$۱۸۰ + ۳۰۰ + ۴۲۰ + ۹۰۰ - ۱۲۶۰ - ۲۱۰۰ - ۶۳۰۰$$

که به پاسخ سؤال نزدیکتر است. اما، به دلیل وجود اعداد صحیحی که هم بر ۳ و هم بر ۵ و هم بر ۷ تقسیمپذیرند، مثل ۱۰۵، ۲۱۰، ۳۱۵ و غیره، يك اصلاح نهایی نیز باید انجام شود. چنین اعداد صحیحی در ۶۳۰۰ عدد اصلی به حساب آمده، در ۲۱۰۰ و ۱۲۶۰ و ۹۰۰ خارج شده و سپس در ۴۲۰، ۳۰۰، و ۱۸۰ دوباره به حساب آمده‌اند. پس نتیجه اینکه هرچنین عددی يك بار به حساب آمده، سه بار خارج شده و سپس سه بار به حساب آمده‌است. از این رو در اصلاح نهایی باید آنها را دوباره خارج کرد، و بنابراین ما $۱۰۵/۶۳۰۰$ یا ۶۰ را از پاسخ بالا کم می‌کنیم. بنابراین پاسخ سؤال ۳۰۵ برابر است با:

$$(۱۰۵) \quad ۶۳۰۰ - ۲۱۰۰ - ۱۲۶۰ - ۹۰۰ + ۴۲۰$$

$$+ ۳۰۰ + ۱۸۰ - ۶۰ = ۲۸۸۰.$$

پس از ۱ تا ۶۳۰۰، تعداد ۲۸۸۰ عدد صحیح وجود دارند که بر هیچیک از اعداد ۳، ۵، ۷ تقسیمپذیر نیستند.

با توسل به يك اصل کلی می‌توان به این سه سؤال مورد بحث پاسخ داد. فرض کنید N شیء داریم که بعضی از این اشیاء دارای ویژگی α بوده و بعضی این ویژگی را ندارند. فرض کنید $N(\alpha)$ معرف تعداد اشیایی باشد که دارای ویژگی α هستند. به همین ترتیب فرض کنید بعضی از اشیاء دارای ویژگی β هستند و بعضی این ویژگی را ندارند. فرض کنید $N(\beta)$ معرف تعداد اشیایی باشد که دارای ویژگی β هستند. اگر ویژگیهای دیگری مانند γ ، δ ، ...، موجود باشند، تعداد اشیایی را که دارای ویژگی γ ، تعداد اشیایی را که دارای ویژگی δ و ...، هستند با $N(\gamma)$ ، $N(\delta)$ و ... نشان می‌دهیم.

در مسائل بالا، اشیاء، اعداد صحیح از ۱ تا ۶۳۰۰ هستند و بنابراین $N = ۶۳۰۰$. ویژگیهای α ، β ، ... ویژگیهای تقسیمپذیری هستند؛ مثلاً يك عدد صحیح دارای ویژگی γ است اگر بر ۷ تقسیمپذیر باشد.

تحلیل کلی را ادامه می‌دهیم، فرض کنیم $N(\alpha, \beta)$ معرف تعداد اشیایی باشد که دارای دو ویژگی α و β هستند و $N(\alpha, \beta, \gamma)$ معرف تعداد اشیایی باشد که دارای سه ویژگی α ، β ، γ هستند. به همین طریق $N(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ معرف تعداد اشیایی باشد که دارای چهار ویژگی α ، β ، γ ، δ هستند.

حال فرض می‌کنیم این سؤال مطرح باشد: چندتا از N شیء ویژگی α را

ندارند؟ بایک تفریق ساده پاسخ $N - N(\alpha)$ حاصل می‌شود. این سؤال شبیه مسأله ۱.۵ است.

چند شیء هیچ يك از ویژگیهای α و β را ندارند؟ پاسخ برابر

$$N - N(\alpha) - N(\beta) + N(\alpha, \beta)$$

است. این شبیه مسأله ۲.۵ است.

چند شیء هیچ يك از سه ویژگی α و β و γ را ندارند؟ پاسخ برابر است با:

$$N - N(\alpha) - N(\beta) - N(\gamma) \quad (2.5)$$

$$+ N(\alpha, \beta) + N(\alpha, \gamma) + N(\beta, \gamma) - N(\alpha, \beta, \gamma).$$

حال این نتیجه را که شبیه پاسخ مسأله ۳.۵ است مورد بررسی قرار می‌دهیم. ابتدا شیئی را در نظر می‌گیریم که هیچيك از ویژگیهای α و β و γ را ندارد. چنین شیئی در جمله N به حساب می‌آید ولی در هیچ يك از جمله‌های دیگر رابطه (۲.۵) به حساب نمی‌آید. از این رو يك چنین شیئی فقط يك بار به حساب می‌آید. سپس شیئی را در نظر می‌گیریم که دقیقاً دارای یکی از سه ویژگی، مثلاً دارای ویژگی β باشد. چنین شیئی در دوتا از جمله‌های رابطه (۲.۵)، یعنی N و $N(\beta)$ ، به حساب می‌آید؛ ولی چون $N(\beta)$ دارای علامت منفی است، چنین شیئی در رابطه (۲.۵) به حساب نمی‌آید.

سپس شیئی را در نظر می‌گیریم که دقیقاً دارای دو ویژگی، مثلاً β و γ باشد. چنین شیئی در (۲.۵) در جمله‌های N ، $N(\beta)$ ، $N(\gamma)$ و $N(\beta, \gamma)$ به حساب می‌آید؛ ولی در جمله‌های دیگر به حساب نمی‌آید. بنابراین در نتیجه، به دلیل آرایش علامتهای مثبت و منفی در (۲.۵)، چنین شیئی با این فرمول ابداء به حساب نمی‌آید. سرانجام شیئی را در نظر می‌گیریم که سه ویژگی α ، β و γ را دارا باشد. این شیء در هر يك از هشت جمله رابطه (۲.۵) به حساب می‌آید، اما در واقع به دلیل آرایش علامتها این شیء اصلاً به حساب نمی‌آید.

از جمع‌بندی بحث، می‌بینیم که فرمول (۲.۵) در واقع آن اشیاء و تنها آن اشیایی را که هیچيك از ویژگیهای α ، β ، γ را ندارند به حساب می‌آورد. فرمول (۲.۵) می‌تواند به هر تعداد دلخواهی از ویژگیها تعمیم داده شود. تعداد اشیایی که هیچيك از ویژگیهای α ، β ، γ ... را ندارند برابر است با

$$N$$

$$\begin{aligned}
 & -N(\alpha) - N(\beta) - N(\gamma) - \dots \\
 & +N(\alpha, \beta) + N(\alpha, \gamma) + N(\beta, \gamma) + \dots \quad (3.5) \\
 & -N(\alpha, \beta, \gamma) - \dots \\
 & \dots \dots \dots
 \end{aligned}$$

این اصل شمول - عدم شمول است که عنوان این فصل را تشکیل می‌دهد. برای اثبات آن، نشان خواهیم داد شیئی که دارای يك یا چندتا از ویژگیهای $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ است درواقع با فرمول (۳.۵) به حساب نمی‌آید. این استدلال ثابت خواهد کرد که عبارت (۳.۵) دقیقاً آن اشیایی را که هیچیک از ویژگیها را ندارند به حساب می‌آورد، زیرا چنین اشیایی فقط در جمله N ، و نه در هیچ يك از جمله‌های دیگر (۳.۵)، به حساب می‌آیند.

شیئی مانند T را در نظر می‌گیریم که دقیقاً دارای z ویژگی باشد، که در آن z يك عدد صحیح مثبت است. در فرمول (۳.۵)، T به وسیله جمله N به حساب می‌آید. در سطر دوم،

$$-N(\alpha) - N(\beta) - N(\gamma) - \dots,$$

شیء T ، z بار، یا آنچه با آن برابر است، یعنی $C(z, 1)$ بار، به حساب می‌آید. در سطر سوم،

$$+N(\alpha, \beta) + N(\alpha, \gamma) + N(\beta, \gamma) + \dots,$$

شیء T به اندازه $C(z, 2)$ بار به حساب می‌آید، زیرا این همان تعداد جمله‌هایی با دو ویژگی از z ویژگی T است. به همین ترتیب در سطر چهارم، T درست $C(z, 3)$ بار به حساب می‌آید و قس علی‌هذا. به دلیل آرایش علامتهای مثبت و منفی در (۳.۵)، می‌بینیم که T در واقع به اندازه

$$1 - C(z, 1) + C(z, 2) - C(z, 3) + C(z, 4) - \dots$$

بار به حساب می‌آید. طبق ویژگی (۷.۳) بخش ۳.۶، مقدار این عبارت برابر صفر است. بنابراین قضیه کلی را ثابت کرده‌ایم.

مجموعه مسائل ۱۸

۱. فرمول (۳.۵) را برای حالتی با چهار ویژگی α, β, γ و δ به صورت کامل بنویسید.

۲. با فرض آنکه r ویژگی α, β, γ ، ... وجود داشته باشند، در فرمول (۳.۵) چند جمله وجود دارد؟

۳. از ۱ تا ۳۳۰۰۰، چند عدد صحیح بر هیچیک از اعداد ۳، ۵، ۱۱ تقسیم پذیر نیستند.

۴. از ۱ تا ۱۰۰۰۰۰۰۰، چند عدد صحیح وجود دارند که نه توان دوم کامل، نه توان سوم کامل، و نه توان چهارم کامل باشند؟

۵. با استفاده از نماد گذاری همانند فرمول (۳.۵)، با در نظر گرفتن دقیقاً پنج ویژگی $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ ، فرمولی برای تعداد اشیایی بنویسید که دارای سه ویژگی α, β, γ هستند ولی ویژگیهای δ و ϵ را ندارند.

۶. با فرض يك مجموعه از اشیاء و در نظر گرفتن چهار ویژگی $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ، فرمولی برای تعداد اشیایی بنویسید که دارای ویژگی β بوده ولی هیچیک از ویژگیهای α, γ, δ را ندارند.

۲.۵ کاربردها برای معادله‌ها و ترکیبهای تکرار

مسئله ۴.۵ معادله

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20 \quad (4.5)$$

با شرایط $x_1 \leq 6, x_2 \leq 7, x_3 \leq 8, x_4 \leq 9$ ، چند جواب در مجموعه اعداد صحیح مثبت دارد؟ بر حسب نماد گذاری بخش قبل فرض کنیم «اشیاء»، جوابهای معادله (۴.۵) در مجموعه اعداد صحیح مثبت باشند؛ مثلاً، مجموعه

$$x_1 = 2, x_2 = 8, x_3 = 9, x_4 = 1 \quad (5.5)$$

يك «شیء» است. گوئیم که يك جواب دارای ویژگی α است هرگاه $x_1 > 6$ ، دارای ویژگی β است هرگاه $x_2 > 7$ ، دارای ویژگی γ است هرگاه $x_3 > 8$ ، و دارای ویژگی δ است هرگاه $x_4 > 9$. می‌خواهیم تعداد جوابهایی را بیابیم که

هیچیک از ویژگیهای $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ را ندارند. بنابراین می‌توانیم از فرمول (۳.۵) بخش قبل استفاده کنیم.

بنابر فصل ۴ (بخش ۵.۴) می‌دانیم که تعداد جوابهای (۴.۵) در مجموعه اعداد صحیح مثبت برابر $C(19, 3)$ است. چون این مقدار تعداد کل N «شیء» تحت بررسی است، قرار می‌دهیم $N = C(19, 3)$. حال می‌خواهیم مقدار $N(\alpha)$ ، تعداد جوابهای معادله (۴.۵) در مجموعه اعداد صحیح مثبت با شرط $x_1 > 6$ را پیدا کنیم. مجدداً با استفاده از نتایج حاصل در فصل ۴، می‌بینیم که

$$N(\alpha) = C(20 - 6 - 1, 4 - 1) = C(13, 3).$$

با استدلالی مشابه نتیجه می‌گیریم که

$$N(\beta) = C(12, 3), N(\gamma) = C(11, 3), N(\delta) = C(10, 3).$$

سپس، $N(\alpha, \beta)$ تعداد جوابهای معادله (۴.۵) را در مجموعه اعداد صحیح مثبت نشان می‌دهد که در دو شرط $x_1 > 6$ و $x_2 > 7$ صدق می‌کنند، بنابراین

$$N(\alpha, \beta) = C(20 - 6 - 7 - 1, 4 - 1) = C(6, 3).$$

استدلالی مشابه نشان می‌دهد که

$$N(\alpha, \gamma) = C(5, 3), N(\alpha, \delta) = C(4, 3),$$

$$N(\beta, \gamma) = C(4, 3), N(\beta, \delta) = C(3, 3), N(\gamma, \delta) = C(2, 3) = 0.$$

تمام جمله‌های بعدی در فرمول (۳.۵) صفرند. مثلاً $N(\alpha, \beta, \gamma)$ را در نظر می‌گیریم. این، تعداد جوابهای معادله (۴.۵) را در مجموعه اعداد صحیح مثبت نشان می‌دهد که در شرایط $x_1 > 6, x_2 > 7$ و $x_3 > 8$ صدق می‌کنند. چنین جوابهایی وجود ندارند، زیرا $6 + 7 + 8 = 21$. بنابراین جواب مسئله (۴.۵) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned} & C(19, 3) - C(13, 3) - C(12, 3) - C(11, 3) - C(10, 3) \\ & + C(6, 3) + C(5, 3) + C(4, 3) + C(4, 3) + C(3, 3) \\ & = 969 - 286 - 220 - 165 - 120 + 20 + 10 + 4 + 4 + 1 = 217. \end{aligned}$$

در بسیاری از کاربردهای اصل شمول-عدم شمول (۳.۵)، درباره ویژگیهای

$\alpha, \beta, \gamma, \dots$ ، تقارنی وجود دارد به طوری که شرایط زیر برقرارند:

$$N(\alpha) = N(\beta) = N(\gamma) = \dots,$$

$$N(\alpha, \beta) = N(\alpha, \gamma) = N(\beta, \gamma) = \dots,$$

$$N(\alpha, \beta, \gamma) = \dots,$$

...

به صورت کلامی، گوییم اگر تعداد اشیاء با یک ویژگی برابر با تعداد اشیاء با هر یک ویژگی دیگر باشد، اگر تعداد اشیاء با دو تا از ویژگیها یکی باشد بدون توجه بداینکه کدام یک از دو ویژگی در نظر گرفته شوند، و اگر نظایر این برای سه ویژگی و چهار ویژگی و غیره برقرار باشند آن گاه گوییم که ویژگیهای $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ متقارن اند. بنابراین ویژگیها متقارن اند اگر تعداد اشیاء با z ویژگی معین (z ثابت است) برابر با تعداد اشیاء با هر گردایه ای دیگر از z ویژگی باشد؛ بعلاوه این مطلب باید برای $z=1, z=2, z=3, \dots$ ، و غیره، تا آنجا که عبارت معنی دارد، برقرار باشد.

فرض کنیم تعداد کل ویژگیهای $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ برابر m باشد. اگر این ویژگیها متقارن باشند، آن گاه فرمول (۳.۵) برای تعداد اشیایی که دارای هیچ یک از این ویژگیها نیستند، عبارت است از

$$N - C(r, 1)N(\alpha) + C(r, 2)N(\alpha, \beta) - C(r, 3)N(\alpha, \beta, \gamma) + \dots \quad (۶.۵)$$

دلیل این مطلب آن است که جمله های (۳.۵) را می توان در دسته هایی با اعضای برابر $C(r, 1)$ عضو از نوع $N(\alpha)$ ، $C(r, 2)$ عضو از نوع $N(\alpha, \beta)$ ، و غیره، گردآوری کرد.

برای تشریح مجموعه ای از ویژگیهای متقارن، مسأله زیر را در نظر می گیریم.

مسأله ۵.۵ معادله

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 26 \quad (۷.۵)$$

در مجموعه اعداد صحیح از ۱ تا ۹، چند جواب دارد؟

دوباره از مطلب بخش قبل استفاده می کنیم. «اشیاء» مورد نظر، تمام جوابهای معادله (۷.۵) در مجموعه اعداد صحیح مثبت اند. به طوری که $N = C(25, 3)$.

يك جواب معادله دارای ویژگی α است هرگاه $x_1 > 9$ ، دارای ویژگی β است هرگاه $x_2 > 9$ ، دارای ویژگی γ است هرگاه $x_3 > 9$ و دارای ویژگی δ است هرگاه $x_4 > 9$. این چهار ویژگی بدین مفهوم که از فرمول (۳.۵) بدفرمول (۶.۵) برسیم، کاملاً متقارن‌اند. از این رو تنها لازم است که مقادیر

$$N(\alpha), N(\alpha, \beta), N(\alpha, \beta, \gamma), N(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$$

را محاسبه کنیم. پیدا می‌کنیم که

$$N(\alpha) = C(26 - 9 - 1, 4 - 1) = C(16, 3);$$

$$N(\alpha, \beta) = C(26 - 9 - 9 - 1, 4 - 1) = C(7, 3);$$

$$N(\alpha, \beta, \gamma) = C(26 - 9 - 9 - 9 - 1, 3) = C(-2, 3) = 0;$$

$$N(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = 0.$$

بنابراین طبق فرمول (۶.۵)، پاسخ برابر است با

$$C(25, 3) - C(4, 1)C(16, 3) + (4, 2)C(7, 3)$$

$$= 2300 - 2240 + 210 = 270.$$

اکنون مسأله ۵.۵ را بدسؤال زیر تعمیم می‌دهیم. معادله

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_k = m \quad (8.5)$$

در مجموعه اعداد صحیح از ۱ تا c ، که در آن c يك عدد صحیح مثبت ثابت است، چند جواب دارد؟ مجدداً از نظریه بخش قبل، که در آن «اشیاء» تحت مطالعه، تمام جوابهای (۸.۵) در مجموعه اعداد صحیح مثبت‌اند، استفاده می‌کنیم. گوییم که يك جواب دارای ویژگی α است هرگاه $x_1 > c$ ، دارای ویژگی β است هرگاه $x_2 > c$ ، دارای ویژگی γ است هرگاه $x_3 > c$ ، و غیره. این ویژگیها متقارن‌اند و بنابراین می‌توانیم فرمول (۶.۵) را به‌کار ببریم. طبق نظریه صفحه ۷۰، می‌بینیم که

$$N = C(m - 1, k - 1)$$

$$N(\alpha) = C(m - c - 1, k - 1)$$

$$N(\alpha, \beta) = C(m - 2c - 1, k - 1)$$

$$N(\alpha, \beta, \gamma) = C(m - 3c - 1, k - 1),$$

.....

بنابر این فرمول (۶.۵) نتیجه زیر را به ما می دهد: فرض کنیم c يك عدد صحيح مثبت ثابت دلخواه باشد. تعداد جوابهای معادله (۸.۵) در مجموعه اعداد صحيح نابزرگتر از c برابر است با:

$$\begin{aligned} & C(m-1, k-1) - C(k, 1)C(m-c-1, k-1) \\ & + C(k, 2)C(m-2c-1, k-1) \quad (9.5) \\ & - C(k, 3)C(m-3c-1, k-1) \\ & + C(k, 4)C(m-4c-1, k-1) - \dots \end{aligned}$$

که در آن، سری تا جایی که جمله های صفر ظاهر می شوند، ادامه دارد. حالت خاص $m > kc$ جالب است، زیرا در این حالت معادله (۸.۵) می تواند در مجموعه اعداد صحيح نابزرگتر از c هیچ جوابی نداشته باشد. مثلاً اگر $m = 25$ ، $k = 4$ و $c = 6$ ، آن گاه معادله (۸.۵) به صورت $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 25$ در می آید و این معادله در مجموعه اعداد صحيح از ۱ تا ۶ جواب ندارد، زیرا تحت شرط ما، ما کسیم مقدار مجموع $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ برابر ۲۴ است. در این حالت، مقدار عبارت (۹.۵) برابر صفر است و اتحاد زیر بدست می آید.

$$\begin{aligned} & C(24, 3) - C(4, 1)C(18, 3) + C(4, 2)C(12, 3) \\ & - C(4, 3)C(6, 3) = 0. \end{aligned}$$

به عنوان مثالی دیگر برای اصل شمول-عدم شمول، سؤال زیر را در نظر بگیرید که ممکن است آن را به صورت مسأله ای درباره ترکیبهای با تکرار مطرح کرد: يك كيف پول محتوی هشت سکه يك سنتی، هفت سکه پنج سنتی، چهار سکه ده سنتی و سه سکه بیست و پنج سنتی است. فرض کنیم که سکه های همنام یکسان باشند (مثلاً هشت سکه يك سنتی یکسان اند)، به چند طریق می توان گردایه ای ارزش سکه از كيف انتخاب کرد؟

در ساختن يك گردایه از سکه ها، فرض کنیم تعداد يك سنتیها برابر x ، تعداد

پنج سستیها برابر y و تعداد ده سستیها برابر z و تعداد بیست و پنج سستیها برابر w باشد، در این صورت، مسأله به سؤال دربارهٔ تعداد جوابهای معادلهٔ

$$x + y + z + w = 6$$

در مجموعهٔ اعداد صحیح نامنفی که در شرایط

$$x \leq 8, y \leq 7, z \leq 4, w \leq 3$$

صادق اند برمی گردد. فرض کنیم تعداد تمام جوابها در مجموعهٔ اعداد صحیح نامنفی برابر N باشد. مقدار N (صفحهٔ ۶۳ را ببینید) برابر است با

$$N = C(6 + 4 - 1, 4 - 1) = C(9, 3).$$

اگر بگوییم که يك جواب دارای ویژگی α است اگر $x \geq 9$ ، دارای ویژگی β است اگر $y \geq 8$ ، دارای ویژگی γ است اگر $z \geq 5$ ، و دارای ویژگی δ است اگر $w \geq 4$ ، آن گاه بیشتر جمله‌ها در فرمول (۳.۵) از صفحهٔ ۷۷ برابر صفرند. مثلاً $N(\alpha) = 0$ ، زیرا معادلهٔ $x + y + z + w = 6$ در مجموعهٔ اعداد صحیح نامنفی با شرط $x \geq 9$ هیچ جوابی ندارد. در واقع تنها جمله‌های مخالف صفر در این فرمول عبارت‌اند از $N(\gamma)$ و $N(\delta)$. بعلاوه می‌توانیم حساب کنیم که:

$$N(\gamma) = C(6 + 4 - 5 - 1, 4 - 1) = C(4, 3);$$

$$N(\delta) = C(6 + 4 - 4 - 1, 4 - 1) = C(5, 3);$$

$$N - N(\gamma) - N(\delta) = C(9, 3) - C(4, 3) - C(5, 3) = 70.$$

مجموعه مسائل ۱۹

۰۱. تعداد جوابهای معادلهٔ $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 14$ را در مجموعهٔ اعداد صحیح از ۱ تا ۶ بیابید.

۰۲. تعداد جوابهای معادلهٔ $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 34$ را در مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت زوج نابیشتر از ۱۰ بیابید.

۰۳. تعداد جوابهایی از معادلهٔ $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$ را در مجموعهٔ اعداد صحیحی بیابید که در شرایط $1 \leq x_1 \leq 6$ ، $1 \leq x_2 \leq 7$ ، $3 \leq x_3 \leq 9$ ،

$$11 \leq x_4 \leq 4 \text{ صدق کنند.}$$

۴. تعداد جوابهای معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$ را در مجموعه اعداد صحیح از ۳- تا ۳ پیدا کنید.

۵. يك كيف پول محتوی هشت يك سنتی، هفت پنج سنتی، چهار ده سنتی و سه بیست و پنج سنتی است. فرض کنیم که سکه‌های همنام یکسان‌اند. از این كيف به چند طریق می‌توان گردایه‌ای از ده سکه انتخاب کرد؟

۶. درمسأله قبل چندتا از این گردایه‌ها شامل سکه‌های ۲۵ سنتی نیستند؟

۷. لحظه‌ای تأمل نشان می‌دهد که معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$ در مجموعه اعداد صحیح مثبت نابیشتر از ۳ دقیقاً يك جواب دارد. برای به‌دست آوردن اتحادی برحسب نمادهای $C(n, r)$ فرمول (۹.۵) به‌کار برید.

۸. تعداد جوابهای معادله $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 14$ را در مجموعه اعداد صحیح از ۱ تا ۹ بیابید.

۹. جواب عددی مسأله قبل مانند جواب مسأله ۵.۵ است. (تا اندازه‌ای مسائل مشابه به‌نظر می‌رسند. اختلاف آنها در ثابتهای معادله‌هاست، دراولی ثابت برابر ۲۶ و در دیگری ثابت برابر ۱۴ است.) نشان دهید که معادله مسأله قبل را می‌توان از آنچه درمسأله ۵.۵ حاصل شد با استفاده از تعویض متغیر

$$x_1 = 10 - y_1, \quad x_2 = 10 - y_2, \quad x_3 = 10 - y_3, \quad x_4 = 10 - y_4$$

به‌دست آورد.

۱۰. با استفاده از اصلی که در مسأله قبل مطرح شد، برای c مقدار خاصی به‌غیر از $c = 12$ بیابید که تعداد جوابهای دو معادله

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 12 \quad \text{و} \quad y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = c$$

در مجموعه اعداد صحیح مثبت از ۱ تا c یکی باشند. آن گاه برای به‌دست آوردن اتحادی بین دو عبارت برحسب $C(n, r)$ ، از (۹.۵) استفاده کنید.

۱۱. فرض کنیم k, m, c_1, c_2, c_3 اعداد صحیح مثبت باشند، برای تعیین تعداد جوابهای معادله

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \dots + x_k = m$$

در مجموعه اعداد صحیح مثبت که مقید به شرایط $x_1 \leq c_1, x_2 \leq c_2, x_3 \leq c_3$ باشند فرمولی بنویسید.

۱۲. تعداد اعداد صحیح مثبت هفت رقمی را که مجموع ارقام آنها برابر ۱۹ باشد بیابید.

۳.۵ پریشها

به عنوان کاربرد دیگری از قضیه کلی بخش ۱.۵ به مسأله کاملاً متفاوتی می پردازیم. جایگشت‌های اعداد ۱، ۲، ۳، ...، n را، که همه را با هم اختیار می کنیم، در نظر می گیریم. در میان این جایگشت‌ها، آنهایی را پریش می گویند که هیچ يك از n عدد صحیح آنها در مقام طبیعی خود ظاهر نشوند، یعنی ۱ در جای طبیعی خود (اولین مکان) نیاید، ۲ در جای طبیعی خود نیاید، ... و n در جای طبیعی خود نیاید. تعداد پریشهای n شیء را با $D(n)$ نشان خواهیم داد.

برای تشریح مطلب می نویسیم: $D(1) = 0$; $D(2) = 1$ زیرا فقط يك پریش ۱، ۲، وجود دارد. $D(3) = 2$ زیرا پریشها عبارت‌اند از: ۱، ۳، ۲ و ۲، ۱، ۳؛ $D(4) = 9$ زیرا پریشها عبارت‌اند از:

۲، ۱، ۴، ۳ ۳، ۱، ۴، ۲ ۴، ۱، ۲، ۳

۲، ۳، ۴، ۱ ۳، ۴، ۱، ۲ ۴، ۳، ۱، ۲

۲، ۴، ۱، ۳ ۳، ۴، ۲، ۱ ۴، ۳، ۲، ۱.

می خواهیم برای $D(n)$ فرمولی به دست آوریم که به ازای هر عدد صحیح n معتبر باشد. با استفاده از اصل شمول-عدم شمول و با کمی زحمت می توان این کار را انجام داد. برای طرح ایده‌ای واقعی ابتدا با محاسبه $D(7)$ شروع می کنیم. فرض کنیم تعداد جایگشت‌های ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷ را که همه را با هم اختیار می کنیم، با N نشان دهیم. بنا بر این $N = 7!$. گوییم يك جایگشت دارای ویژگی α است اگر ۱ در مکان خاص خود قرار داشته باشد، دارای ویژگی β است اگر ۲ در مکان خاص خود باشد، دارای ویژگی γ است اگر ۳ در مکان خاص خود باشد، دارای ویژگی δ است اگر ۴ در مکان خاص خود باشد، دارای ویژگی ϵ است

اگر ۵ درمکان خاص خود باشد، دارای ویژگی ζ است اگر ۶ درمکان خاص خود باشد، و دارای ویژگی η است اگر ۷ درمکان خاص خود باشد. مثلاً جایگشت

$$۷, ۲, ۶, ۱, ۵, ۳, ۴$$

دارای دو ویژگی β و ε است ولی ویژگیهای دیگر را دارا نیست. یک پریش جایگشتی است که هیچ یک از ویژگیهای $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta$ را ندارد.

$N(\alpha)$ ، یعنی تعداد آن جایگشتهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷ را که ۱ در اولین مکان قرار گیرد (صرفنظر از آنکه بقیه درمواضع طبیعی خود قرار بگیرند یا نه)، بدین طریق محاسبه می‌کنیم که ۱ را در اولین مکان قرار داده و بقیه اعداد را جایگشت می‌دهیم. نتیجه $6! = N(\alpha)$ است، به همین ترتیب اگر ۲ را در دومین مکان نگهداشته و بقیه اعداد را جایگشت دهیم، به دست می‌آوریم $6! = N(\beta)$. در واقع بدون توجه به اینکه کدام یک از هفت عدد را در مکان طبیعی خود ثابت نگهداریم؛ شش عدد باقی مانده را می‌توان به ۶ راه آرایش داد. بنابراین

$$N(\alpha) = N(\beta) = \dots = N(\eta) = 6!$$

سپس با قرار دادن ۱ و ۲ در اولین و در دومین مکان و جایگشت دادن ۵ عدد باقی مانده، $N(\alpha, \beta)$ را محاسبه می‌کنیم. این کار به ۵ آرایش مختلف منجر می‌شود. مجدداً اگر هر دو تا از اعداد را درمکان طبیعی خود نگهداریم، درحالی که پنج عدد باقی مانده را جایگشت می‌دهیم، ۵ جایگشت به دست می‌آوریم به قسمی که

$$N(\alpha, \beta) = N(\alpha, \gamma) = \dots = N(\beta, \gamma) = \dots = N(\zeta, \eta) = 5!.$$

به همین ترتیب، ثابت نگهداشتن سه عدد درمکان طبیعی خودشان، به نتیجه

$$N(\alpha, \beta, \gamma) = \dots = N(\varepsilon, \zeta, \eta) = 4!.$$

منجر می‌شود، ثابت نگهداشتن چهار عدد، به $3! = N(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \dots$ و ثابت نگهداشتن پنج عدد، به $2! = N(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon) = \dots$ و ثابت نگهداشتن هفت عدد، به $1! = N(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta) = \dots$ و ثابت نگهداشتن هشت عدد، به $0! = 1 = N(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta) = \dots$ منجر می‌شود. بدیهی است که اینها همان شرایط تقارنی هستند که در بخش ۲.۵ شرح داده شد، و بنابراین می‌توانیم برای محاسبه، فرمول (۶.۵) را به کار ببریم:

$$\begin{aligned} D(7) = & 7! - C(7, 1) \times 6! + C(7, 2) \times 5! - C(7, 3) \times 4! \\ & + C(7, 4) \times 3! - C(7, 5) \times 2! + C(7, 6) \times 1! - C(7, 7) \times 0!. \end{aligned}$$

با بیان هر $C(n, r)$ بر حسب فاکتوریلها، مثلاً

$$C(7, 4) \times 3! = \frac{7!}{4!3!} \times 3! = \frac{7!}{4!},$$

این عبارت را ساده می‌کنیم. نتیجه را می‌توان به صورت

$$\begin{aligned} D(7) &= 7! - \frac{7!}{1!} + \frac{7!}{2!} - \frac{7!}{3!} + \frac{7!}{4!} - \frac{7!}{5!} + \frac{7!}{6!} - \frac{7!}{7!} \\ &= 7! \left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} - \frac{1}{7!} \right], \quad (10.5) \end{aligned}$$

نوشت. این استدلال کامل مستقیماً به فرمولی برای $D(n)$ ، تعداد پریشهای n چیز، منجر شده و معادله زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} D(n) &= n! - C(n, 1)(n-1)! + C(n, 2)(n-2)! \\ &\quad - \dots + (-1)^n C(n, n)0! \\ &= n! - \frac{n!}{1!(n-1)!}(n-1)! + \frac{n!}{2!(n-2)!}(n-2)! \\ &\quad - \dots + (-1)^n \frac{n!}{n!0!}0! \\ &= n! - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{n!}{n!}. \end{aligned}$$

پس

$$D(n) = n! \left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right]. \quad (11.5)$$

برای $D(n)$ تعبیر دیگری وجود دارد که اکنون آن را بر حسب حالت خاص $D(7)$ شرح می‌دهیم. يك جایگشت ثابت اعداد صحیح از ۱ تا ۷ مثلاً

$$P_0: 7, 2, 6, 1, 5, 3, 4,$$

را در نظر می گیریم. گوییم که يك جایگشت اعداد صحیح از ۱ تا γ با P_0 ناسازگار است اگر نه γ در اولین مکان، نه γ در دومین مکان، نه γ در سومین مکان، نه γ در چهارمین مکان، نه γ در پنجمین مکان، نه γ در ششمین مکان و نه γ در هفتمین مکان قرار گیرد. مثلاً، $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ با P_0 ناسازگار است، در صورتی که، $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ چنین نیست. سؤال این است که: چند جایگشت وجود دارند که با P_0 ناسازگارند؟

اگر لحظه‌ای درباره‌ی تعریف سازگاری فکر کرده و آن را با تعریف پریش مقایسه کنیم متوجه می شویم که يك پریش درست يك جایگشت ناسازگار با يك ترتیب «طبیعی» $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ است. چون تعداد جایگشت‌های ناسازگار با ترتیبی ثابت، به وضوح بستگی به آن ترتیب ثابت مفروض («طبیعی» یا غیر آن) ندارد، نتیجه می گیریم که تعداد جایگشت‌های ناسازگار با P_0 ، برابر $D(\gamma)$ ، یعنی تعداد پریش‌هاست.

این مطلب را می توانیم مستقیماً با به کار بردن استدلالی که در شروع این بخش ارائه شد نیز نشان دهیم؛ می توانیم صرفاً تعبیر کنیم که

- α ، ویژگی جایگشتی است که γ در اولین مکان واقع شود،
- β ، ویژگی جایگشتی است که γ در دومین مکان واقع شود،
- γ ، ویژگی جایگشتی است که γ در سومین مکان واقع شود،
-
- η ، ویژگی جایگشتی است که γ در هفتمین مکان واقع شود.

و دوباره فرمول (۱۰.۵) را به دست می آوریم.

چیز بخصوصی درباره‌ی جایگشت P_0 مورد بحث وجود ندارد. به طور کلی می توانیم بگوییم که اگر هر جایگشت ثابت اعداد صحیح ۱ تا γ را در نظر بگیریم، تعداد جایگشت‌های ناسازگار با آن برابر $D(\gamma)$ است. پریش‌ها صرفاً تمام جایگشت‌هایی هستند که با آرایش طبیعی $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ ناسازگارند.

به طور کلیتر، می توان گزاره‌های زیر را ساخت. گوییم دو جایگشت، $a_1, a_2, \dots, a_n$ و $b_1, b_2, \dots, b_n$ از اعداد صحیح $1, 2, \dots, n$ ناسازگارند اگر $a_1 \neq b_1, a_2 \neq b_2, \dots, a_n \neq b_n$. تعداد جایگشت‌های اعداد صحیح از ۱ تا n که با يك جایگشت ثابت دلخواه ناسازگارند، برابر $D(n)$ ، تعداد پریش‌هاست. بعلاوه، پریش‌ها صرفاً جایگشت‌های اعداد صحیح از ۱ تا n هستند که با ترتیب طبیعی $1, 2, 3, \dots, n$ ناسازگارند.

مجموعه مسائل ۲۰

۰۱. $D(5)$ و $D(6)$ را محاسبه کنید.

۰۲. تمام جایگشت‌های ۱، ۲، ۳، ۴ را که با جایگشت خاص ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ سازگارند فهرست کنید.

۰۳. مطلوب است تعیین تعداد پریشهای اعداد صحیح از ۱ تا ۱۰ که در شرط زیر صدق کنند:

الف) پنج مکان اول آنها شامل اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ باشند؛ ب) پنج مکان اول آنها شامل ۱۰، ۹، ۸، ۷، ۶ باشند.

۰۴. مطلوب است تعیین تعداد جایگشت‌های ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷ که نه ۱ در اولین مکان، نه ۴ در چهارمین مکان و نه ۷ در هفتمین مکان قرار گیرد.

۰۵. از میان جایگشت‌های اعداد صحیح از ۱ تا ۹ چند جایگشت وجود دارند که دقیقاً سه عدد در مکان طبیعی خود بوده و شش عدد دیگر در مکان طبیعی خود نباشند؟

۰۶. از جایگشت دادن حرف‌های کلمه alphabet با قرار دادن هر حرفی به جای حرفی متفاوت با آن، کد ساده‌ای ساخته می‌شود. به این طریق چند کد می‌توان ساخت؟

۰۷. ثابت کنید که بد از ای $n \geq 2$ ، $D(n) - nD(n-1) = (-1)^n$.

۲۰.۵ احتمال ترکیبیاتی

احتمال، شاخه مهمی از ریاضیات با نوشتارهای فراوان است که، در این جا بدروشی بسیار محدود مورد بحث قرار خواهد گرفت. توجه محدود ما معطوف به چند سؤال است که رابطه نزدیکی با موضوع اصلی این کتاب دارند. به خاطر این محدودیت، کافی است تعریف ساده‌ای از احتمال ارائه دهیم که گرچه برای مطالعه پیشرفته‌تر موضوع نارساست ولی تمام مسائل مورد بحث ما را شامل می‌شود.

با این دیدگاه خاص، توجه خود را بدو وضعیت‌هایی معطوف می‌داریم که می‌توان آنها را حالت‌های همشانسی خواند. مثلاً، اگر سکه‌ای را پرتاب کنیم همشانسی برآمدهای شیر و خط را مسلم خواهیم گرفت. اگر تاسی را بریزیم فرض خواهیم کرد که رو آمدن شش برآمد ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ همشانسی‌اند. یا اگر کارتی به تصادف از يك دسته کارت معمولی کشیده شود فرض خواهیم نمود که تمام ۵۲ کارت برای

کشیده شدن همشانس هستند، یعنی ظاهر شدن مثلاً کارت سه دل دقیقاً همان قدر محتمل است که ظاهر شدن سایر کارتها.

احتمالی که به آمدن کارت سه دل تخصیص داده می شود $۱/۵۲$ است. به طور کلی، احتمال به صورت نسبت تعداد حالت های «مساعد» به تعداد حالت های ممکن همشانس تعریف می شود:

تعداد حالت های مساعد

تعداد حالت های ممکن همشانس

بنابراین احتمال به دست آوردن شیر در پرتاب يك سكه $۱/۲$ ، و آمدن ۴ در پرتاب يك تاس $۱/۶$ ، و آمدن عدد زوج در پرتاب يك تاس $۳/۶$ یا $۱/۲$ ، و به دست آوردن کارت يك در کشیدن تصادفی يك کارت از يك دسته کارت، $۴/۵۲$ یا $۱/۱۳$ است.

شرط مهمی که به این تعریف تحمیل می شود این است که حالت هایی که در محاسبه دخالت داده می شوند حالت های همشانس باشند. مثلاً، این سؤال را در نظر بگیرید: وقتی که دو تاس را با هم می ریزیم، احتمال به دست آوردن مجموعی برابر ۱۲ چقدر است؟ می توانیم به غلط استدلال کنیم که مجموع دو عددی که بایك جفت تاس ظاهر می شوند ممکن است ۲، ۳، ۴، ... یا ۱۲ بوده، و لذا مجموع حالت ها ۱۱ و احتمال داشتن ۱۲ برابر $۱/۱۱$ است. این جواب درست نیست، زیرا این ۱۱ حالت، همشانس نیستند. شانس داشتن ۱۲ در يك پرتاب، به بزرگی شانس (مثلاً) داشتن ۸ نیست، زیرا برای داشتن ۱۲ باید هر دو تاس ۶ بیایند در حالی که برای داشتن ۸ ممکن است هر دو تاس ۴ بیایند، یا یکی ۳ و دیگری ۵، و یا یکی ۲ و دیگری ۶ بیایند. وقتی که دو تاس پرتاب می شوند تعداد درست برآمدهای همشانس را می توان با در نظر گرفتن دو تاس مانند دو شیء متمایز مستقل، مثلاً يك تاس سفید و يك تاس آبی، به دست آورد. ۶ امکان برای تاس سفید و ۶ امکان برای تاس آبی وجود دارد، و بنا بر این طبق اصل ضرب فصل ۲، کلاً ۳۶ حالت همشانس به شرح زیر وجود دارند:

۱، ۱	۱، ۲	۱، ۳	۱، ۴	۱، ۵	۱، ۶
۲، ۱	۲، ۲	۲، ۳	۲، ۴	۲، ۵	۲، ۶
۳، ۱	۳، ۲	۳، ۳	۳، ۴	۳، ۵	۳، ۶
۴، ۱	۴، ۲	۴، ۳	۴، ۴	۴، ۵	۴، ۶
۵، ۱	۵، ۲	۵، ۳	۵، ۴	۵، ۵	۵، ۶
۶، ۱	۶، ۲	۶، ۳	۶، ۴	۶، ۵	۶، ۶

از این ۳۶ حالت، تنها یک ۶ و ۶، وجود دارد که مجموع ۱۲ را می‌دهد. از این رو احتمال به دست آوردن مجموعی برابر ۱۲، مساوی ۱/۳۶ است.

این سؤال را در نظر بگیرید: احتمال آمدن مجموع ۸ در پرتاب دو تاس چیست؟ از روی جدول ۳۶ حالت بالا می‌بینیم که یک مجموع ۸ در ۵ حالت ۶، ۲، ۵، ۳، ۴، ۴، ۳، ۵، ۲، ۶ حاصل می‌شود. بنابراین جواب ۵/۳۶ است.

این سؤال را در نظر بگیرید: احتمال به دست آوردن یک شیر و دو خط، وقتی که سه سکه پرتاب می‌شوند، چیست؟ برای به دست آوردن تعداد کل حالت‌های ممکن همشانس، سه سکه را متمایز تصور می‌کنیم، آن‌گاه اصل ضرب فصل ۲ را به کار می‌بریم، و درمی‌یابیم که $2 \times 2 \times 2$ یا هشت حالت وجود دارد، یعنی

HHH HTH THH TTH

HHT HTT THT TTT

که در آنها H نمایش شیر و T نمایش خط است. بنابراین پاسخ سؤال برابر ۳/۸ است، زیرا حالت‌های مساعد عبارت‌اند از TTH، THT، HTT.

مسئله ۶.۵ اگر ده سکه به‌زمین بیفتند، احتمال اینکه پنج شیر و پنج خط ظاهر شوند چقدر است؟

حل: ما سکه‌ها را متمایز تصور می‌کنیم، اولین سکه، دومین سکه، و غیره. ۲^{۱۰} برآمد وجود دارند، زیرا هر سکه می‌تواند به دو صورت ممکن، شیر یا خط، بنشیند. یک برآمد می‌تواند به صورت رشته‌ای از ده حرف معین شود که هر کدام یا یک H (برای شیرها) و یا یک T (برای خطها) است؛ مثلاً

TTHTHTHHHTT, (۱۴.۵)

بدین معنی است که سکه اول خط، سکه دوم خط، سکه سوم شیر، و غیره باشد. بنابراین تعداد حالت‌های مساعد برابر تعداد راه‌هایی است که پنج H و پنج T را می‌توان در یک ردیف نوشت، و طبق آنچه در فصل ۳ آمد این عدد برابر C(۱۰, ۵) است. لذا پاسخ سؤال برابر است با:

$$\frac{C(10, 5)}{2^{10}} = \frac{63}{256}$$

مسئله ۷.۵ احتمال آنکه شش کارتت که به تصادف از یک دسته کارت ۵۲ تایی می‌کشیم قرمز باشند چقدر است؟

حل: تعداد کل حالت‌های ممکن برابر تعداد راه‌های انتخاب شش کارت از ۵۲ کارت است که برابر با $C(۵۲, ۶)$ است. چون در یک دسته کارت، ۲۶ کارت قرمز وجود دارند، تعداد حالت‌های مساعد برابر $C(۲۶, ۶)$ ، یعنی تعداد راه‌های انتخاب شش از ۲۶ است. بنابراین پاسخ برابر است با:

$$\frac{C(۲۶, ۶)}{C(۵۲, ۶)}$$

مسئله ۸۰۵ وقتی که چهار تاس ریخته می‌شوند، احتمال به دست آوردن مجموعی برابر ۱۳ چقدر است؟

حل: چون هر تاس به شش راه می‌تواند ظاهر شود، پس تعداد کل حالت‌ها برابر ۶^۴ است. فرض کنیم تاس‌ها به طریقی مثلاً به وسیله رنگ قبلاً از هم متمایز شده باشند، به طوری که بتوانیم به تاس اول، به تاس دوم و غیره اشاره کنیم. اگر عددی که برای تاس اول ظاهر می‌شود برابر x_1 ، برای تاس دوم برابر x_2 ، برای تاس سوم برابر x_3 و برای تاس چهارم برابر x_4 باشد، آن گاه تعداد حالت‌های مساعد برابر تعداد جواب‌های معادله

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 13$$

در مجموعه اعداد صحیح مثبت از ۱ تا ۶ است. طبق (۹۰۵) تعداد جواب‌ها برابر است با

$$C(12, 3) - C(4, 1)C(6, 3) = 220 - 80 = 140.$$

بنابراین پاسخ برابر با $140/6^4$ یا $35/324$ است.

مسئله ۹۰۵ اگر به تصادف جایگشتی از اعداد صحیح $1, 2, 3, \dots, n$ را اختیار کنیم، احتمال آنکه این جایگشت یک پریش باشد چقدر است؟

حل: تعداد کلی جایگشت‌ها برابر $n!$ و تعداد حالت‌های مساعد همان‌طور که در (۱۱۰۵) داده شد برابر $D(n)$ است. بنابراین احتمال برابر است با:

$$\frac{D(n)}{n!} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{1}{n!}. \quad (13.5)$$

این احتمال جنبه‌های جالبی دارد که به بعضی از آنها در اینجا اشاره می‌شود. (سایر جنبه‌ها در مجموعه مسائل بعدی داده خواهند شد.) به ازای، $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ ، مقادیر $D(n)/n!$ با تقریب چهار رقم اعشار برابر است با

$$0, 05000, 03333, 03750, 03667, 03681,$$

$$03679, 03679 \quad (14.5)$$

توجه کنید که تقریب چهار رقم اعشار برای مقادیر $D(n)/n!$ با تغییر $n = 7$ به $n = 8$ عوض نمی‌شود. جالب است که وقتی n از ۸ بیشتر می‌شود مقدار $D(n)/n!$ تغییر نمی‌کند، به طوری که 03679 با درستی چهار رقم اعشار، برای تمام مقادیر n از ۷ به بعد، $n = 7$ ، $n = 8$ ، $n = 9$ و غیره عوض نمی‌شود. به عبارت دیگر هر چقدر n بزرگ شود، $D(n)/n!$ بیشتر از 050005 از 03679 تجاوز نمی‌کند. وقتی n بدون کران زیاد می‌شود، سمت راست (۱۳.۵) جمله‌های بیشتر و بیشتری دارد، و $D(n)/n!$ به مقدار حدی $1/e$ ، که در آن e يك ثابت پایه‌ای ریاضی است، میل می‌کند.

در محاسبه احتمال رخداد يك پیشامد، بعضی مواقع مناسبتر است که کار را با محاسبه «احتمال متمم»، یعنی احتمال اینکه پیشامد رخ ندهد، شروع کنیم. احتمال يك پیشامد به صورت

$$p = \frac{\text{تعداد حالت‌های مساعد}}{\text{تعداد حالت‌های ممکن همشانس}}$$

تعریف می‌شود، بنا بر این احتمال متمم به صورت

$$q = \frac{\text{تعداد حالت‌های نامساعد}}{\text{تعداد حالت‌های ممکن همشانس}}$$

تعریف می‌شود. چون مجموع تعداد حالت‌های مساعد و تعداد حالت‌های نامساعد برابر تعداد کل حالت‌های ممکن است، می‌بینیم که

$$p + q = 1 \quad \text{یا} \quad p = 1 - q$$

مجموعه مسائل ۲۱

۰۱. محاسباتی که مقادیر (۱۴.۵) را می دهند واریسی کنید.
۰۲. اگر دوسکه پرتاب شوند، احتمال به دست آوردن دوخط را تعیین کنید.
۰۳. اگر دو تاس باهم ریخته شوند، احتمال به دست آوردن مجموعی برابر ۷ چیست؟
۰۴. دو تاس، یکی قرمز و یکی سفید، باهم ریخته می شوند. احتمال آنکه عددی که تاس سفید نشان می دهد بزرگتر از عددی باشد که تاس قرمز نشان می دهد چقدر است؟
۰۵. اگر چهار تاس باهم ریخته شوند، احتمال آنکه تاسها چهار عدد مختلف را نشان دهند چقدر است؟
۰۶. اگر هفت تاس باهم ریخته شوند، احتمال آنکه دقیقاً سه تا ۶ بیاید چقدر است؟
۰۷. نشان دهید که جمله های بسط دو جمله ای $\left(\frac{1}{6} + \frac{5}{6}\right)^7$ به ترتیب برابری احتمال آمدن ۵، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷ بار عدد ۶ در ریختن هفت تاس است.
۰۸. وقتی که پنج تاس ریخته می شوند احتمال به دست آوردن مجموعی برابر ۱۵ چقدر است؟
۰۹. وقتی که هشت سکه پرتاب می شوند احتمال آمدن (الف) دقیقاً پنج شیر؛ (ب) حداقل پنج شیر، چقدر است؟
۰۱۰. احتمال آنکه چهار کارتی که به تصادف از يك دسته کارت معمولی ۵۲ تایی کشیده می شود، هر کدام از يك خال مثلاً يك دل، يك پيك، يك خشت، و يك خاج باشد چقدر است؟
۰۱۱. احتمال آنکه در ۱۳ کارتی که از يك دسته کارت معمولی ۵۲ تایی کشیده می شود (الف) حداقل دو صورت وجود داشته باشد؛ (ب) يك تك وجود داشته باشد (پ) حداقل يك تك وجود داشته باشد، چقدر است؟
۰۱۲. حروف الفبا به ترتیب تصادفی نوشته شده اند. احتمال آنکه x و y مجاور هم قرار بگیرند چقدر است؟
۰۱۳. اگر يك عدد صحیح پنج رقمی به تصادف انتخاب شود، احتمال آنکه (الف)

مجموع ارقام آن برابر ۲۰ باشد؛ (ب) حاصلضرب ارقام آن ۲۰ باشد، چقدر است؟

۱۴. معلمی می‌خواهد با استخراج پنج اسم از کلاهی که محتوی ده اسم است ده نفر را به دو تیم پنج نفری برای بازی بسکتبال تقسیم کند. در شروع قرعه‌کشی، پسری به دوستش می‌گوید «امیدوارم ما در یک تیم باشیم». دوستش جواب می‌دهد «بسیار خوب، ما شانس پنجاه-پنجاه داریم». آیا جواب او، بدین مفهوم که احتمال بودن دو پسر در یک تیم $1/2$ است، درست است؟

۱۵. شخصی هشت شمع اتومبیلش را برای تمیز کردن درمی‌آورد. او قصد دارد که هر شمع را از هر سیلندری که برداشته، در همان سیلندر قرار دهد، ولی او آنها را قاطی کرده است. به فرض آنکه شمعها به طور تصادفی گذاشته شوند، احتمال آنکه حداقل یک شمع، در همان سیلندری که بوده است، قرار بگیرد چقدر است؟ احتمال آنکه حداقل دو شمع در همان سیلندرهایی که بوده‌اند قرار بگیرند چقدر است؟

۱۶. یک نوع بازی یک نفره با کارت به شرح زیر است: بازیکن دارای دودست کارت برزده است که هر کدام دارای ۵۲ کارت معمولی است. از این کارتها که پشت و رو هستند بازیکن یک جفت کارت، از هر دسته یک کارت، برمی‌دارد. اگر این کارتها جور باشند (مثلاً، اگر هر دو هفت پیک باشند) بازیکن بازی را باخته است. اگر کارتها جور نباشند او به بازی ادامه می‌دهد و یک جفت کارت دیگر، از هر دسته یک کارت، برمی‌دارد. دوباره اگر آنها یک جفت جور باشند، او بازنده است. اگر او بتواند تمام ۵۲ جفت کارت را طوری بردارد که هیچ جفتی جور نباشد، برنده است. احتمال برد چقدر است؟

۱۷. در مسئله قبل فرض کنیم بازی با دو دسته کارت ۱۳ تایی، مثلاً با خالهای پیک و دودسته کارت، انجام شود. در این حالت احتمال برد چقدر است؟

۱۸. در مسئله ۱۶ فرض کنیم برنده بودن به صورت دیگری تعریف شود: اگر در ۵۲ جفت، فقط یک جفت جور باشد بازیکن برنده است. در این حالت احتمال برد چقدر است؟

۵.۵ خلاصه

گردایه‌ای از N شیء متفاوت را در نظر بگیرید که بعضی دارای ویژگی α ، بعضی دارای ویژگی β ، بعضی دارای ویژگی γ و غیره باشند. فرض کنیم $N(\alpha)$

تعداد اشیایی است که دارای ویژگی α ، $N(\beta)$ تعداد اشیایی است که دارای ویژگی β ، $N(\alpha, \beta, \gamma)$ ، ...، $N(\alpha, \beta, \gamma)$ تعداد اشیایی است که دارای دو ویژگی α ، β ، γ و غیره باشند. در این صورت تعداد اشیایی که هیچ يك از این ویژگیها را ندارند برابر است با

$$\begin{aligned} & N \\ & - N(\alpha) - N(\beta) - N(\gamma) - \dots \\ & + N(\alpha, \beta) + N(\alpha, \gamma) + N(\beta, \gamma) + \dots \\ & - N(\alpha, \beta, \gamma) - \dots \\ & \dots \end{aligned}$$

فرض کنیم که r ویژگی، مورد نظر باشند. همچنین فرض کنیم تعداد اشیاء با يك ویژگی برابر با تعداد اشیاء با هر يك ویژگی دیگر بوده، تعداد اشیاء با دو تا از ویژگیها، بدون توجه به اینکه کدام يك از دو ویژگی در نظر گرفته شوند، با هم یکی باشند، و به همین ترتیب برای سه ویژگی، چهار ویژگی و غیره. در این صورت می توانیم تعداد اشیایی را که هیچ کدام از این ویژگیها را ندارند به شکل ساده تری تعیین کنیم.

$$N - C(r, 1)N(\alpha) + C(r, 2)N(\alpha, \beta) - C(r, 3)N(\alpha, \beta, \gamma) + \dots$$

همان طوری که گفته شد، با استفاده از اصل شمول-عدم شمول، بحث معادله

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_k = m \quad (15.5)$$

در ادامه فصل قبل است. اکنون قادریم تعداد جوابهای معادله ای از نوع (۱۵.۵) را تحت شرایطی که هر يك از متغیرها به مجموعه خاصی از مقادیر اعداد صحیح متوالی محدود می شود، تعیین کنیم. ضمن اینکه فرمولهای تفصیلی به طور کلی داده نشده اند از حالت زیر بحث شده است: فرض کنیم c يك عدد صحیح مثبت ثابت باشد؛ تعداد جوابهای معادله (۱۵.۵) در مجموعه اعداد صحیح مثبت از ۱ تا c برابر است با

$$\begin{aligned} & C(m-1, k-1) - C(k, 1)C(m-c-1, k-1) \\ & + C(k, 2)C(m-2c-1, k-1) \end{aligned}$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

$$-C(k, 3)C(m-3c-1, k-1) \\ +C(k, 4)C(m-4c-1, k-1)-\dots,$$

که در آن، سری تاحصول جمله‌هایی برابر صفر ادامه دارد.

بحث ترکیبها با تکرارها از فصل قبل، دوباره با استفاده از اصل شمول-عدم شمول به انواع وسیعتری از حالتها، ادامه یافته است.

$D(n)$ را برابر تعداد پریشهای n ، $1, 2, 3, \dots, n$ ، یعنی برابر تعداد جایگشتیایی که 1 در اولین مکان، 2 در دومین مکان و ... و n در n امین مکان قرار نگیرد تعریف می‌کنیم. ثابت شد که

$$D(n) = n! \left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right].$$

گوییم که دو جایگشت از n شیء ناسازگارند اگر در دو آرایش، تمام زوجهای اشیایی که در موقعیتهای متناظرند عبارت از اشیایی متمایز باشند. اگر P یک جایگشت ثابت از اعداد صحیح 1 تا n باشد، تعداد جایگشتهای ناسازگار با P برابر $D(n)$ است. پریشها عبارت اند از جایگشتهای ناسازگار با ترتیب طبیعی $1, 2, 3, \dots, n$.

در وضعیتهای ترکیبیاتی ساده، احتمال به صورت نسبت تعداد حالتهای مساعد به تعداد حالتهای ممکن همشانس تعریف شد. معنی «حالتهای همشانس» در وضعیتهای پایه‌ای معین به طور شهودی واضح فرض شد، و سپس به حالتهای پیچیده‌تر، با استفاده از اصل ضرب فصل ۳، تعمیم داده شد.

افرازهای يك عدد صحیح

در این فصل از افرازهای يك عدد صحیح، یا از آنچه که با گردایه‌ای از اشیاء یکسان هم ارز است بحث می‌کنیم. در حالتی که اشیاء یکسان نباشند، مسأله تحت عنوان «افرازهای يك مجموعه» در می‌آید که در بخش ۲.۸ مورد بحث واقع می‌شود.

افرازهای يك عدد صحیح مثبت، راههای نوشتن آن عدد به صورت مجموع اعداد صحیح مثبت است. مثلاً افرازهای ۵ عبارت‌اند از:

$$\begin{array}{cccc}
 5 & 4+1 & 3+1+1 & 2+1+1+1 \\
 3+2 & 2+2+1 & 1+1+1+1+1 &
 \end{array}$$

چون تعداد افرازهای ۵ برابر ۷ است، می‌نویسیم $p(5)=7$ ؛ به‌طور کلی فرض کنیم $p(n)$ تعداد افرازهای عدد صحیح مثبت n را نشان دهد. در افسرازی مانند $3+2$ ی بالا هر يك از اعداد ۳ و ۲ را يك جمعوند می‌گویند. بنا براین عدد ۵

دارای يك افراز با يك جمعوند، دو افراز با دو جمعوند، دو افراز با سه جمعوند، يك افراز با چهار جمعوند، و يك افراز با پنج جمعوند است.

درحالی که ۵ دارای دو افراز با سه جمعوند است، معادله $x_1 + x_2 + x_3 = 5$ در مجموعه اعداد صحیح مثبت دارای شش جواب است که عبارت اند از

$$(3, 1, 1), (1, 3, 1), (1, 1, 3), (2, 2, 1), (2, 1, 2), (1, 2, 2).$$

در شمردن تعداد جوابهای يك معادله، ترتیب در نظر گرفته می شود؛ ولی در شمردن تعداد افرازاها، ترتیب جمعوندها مفهومی ندارد.

۱.۶ نمودارهای افرازاها

به افرازهای ۶ توجه می کنیم:

$$\begin{array}{lll} 1+1+1+1+1+1 & 4+1+1 & 5+1 \\ 2+1+1+1+1 & 3+2+1 & 4+2 \quad (1.6) \\ 3+1+1+1 & 2+2+2 & 3+3 \\ 2+2+1+1 & & 6 \end{array}$$

یازده افراز وجود دارد، بنابراین می نویسیم $p(6) = 11$. همچنین می بینیم که تعداد افرازهای ۶

$$\begin{array}{ll} \text{به ۶ جمعوند، برابر ۱؛} & \\ \text{به ۵ جمعوند، برابر ۱؛} & \\ \text{به ۴ جمعوند، برابر ۲؛} & (2.6) \\ \text{به ۳ جمعوند، برابر ۳؛} & \\ \text{به ۲ جمعوند، برابر ۳؛} & \\ \text{به ۱ جمعوند، برابر ۱؛} & \end{array}$$

است.

تعداد افرازهای n را که تعداد جمعوندهای آنها کوچکتر یا مساوی k است با نماد

$q_k(n)$ نشان خواهیم داد. به ازای $n=6$ ، فهرست (۲.۶) ی بالا نشان می دهد که :

$$\begin{array}{lll} q_1(6)=1 & q_2(6)=7 & q_5(6)=10 \\ q_3(6)=4 & q_4(6)=9 & q_6(6)=11. \end{array} \quad (3.6)$$

چون عدد ۶ نمی تواند به بیشتر از شش جمعوند افراز شود، انتظار داریم که $q_6(6)$ همان $p(6)$ باشد. به همین ترتیب $q_n(n)$ ، به معنای تعداد افرازهای n است که دارای n جمعوند یا کمتر از n جمعوند است و بنا براین

$$q_n(n) = p(n). \quad (4.6)$$

همچنین می توان افرازها را بر حسب اندازه جمعوندها رده بندی کرد. فهرست (۱.۶) نشان می دهد که تعداد افرازهای ۶،

با ۶ به عنوان بزرگترین جمعوند، برابر ۱ است،

با ۵ به عنوان بزرگترین جمعوند، برابر ۱ است،

با ۴ به عنوان بزرگترین جمعوند، برابر ۲ است،

با ۳ به عنوان بزرگترین جمعوند، برابر ۳ است،

با ۲ به عنوان بزرگترین جمعوند، برابر ۳ است،

با ۱ به عنوان بزرگترین جمعوند، برابر ۱ است.

به شباهت این فهرست با فهرست (۲.۶) توجه کنید. همان طوری که خواهیم دید این امر تصادفی نیست. بعلاوه اگر $p_k(n)$ را تعداد افرازهایی از n تعریف کنیم که هیچیک از جمعوندهای آن از k بزرگتر نباشد، نتیجه می گیریم که:

$$\begin{array}{lll} p_1(6)=1 & p_2(6)=7 & p_5(6)=10 \\ p_3(6)=4 & p_4(6)=9 & p_6(6)=11. \end{array} \quad (6.6)$$

این فهرست مشابه فهرست (۳.۶) است. به طور کلی درست است که $p_k(n) = q_k(n)$. اکنون توجه خود را به بعضی از حالت های خاص معطوف می داریم که بینیم چرا این رابطه برقرار است.

افرازهای ۶ با سه جمعوند عبارت اند از:

$$(۷۰۶) \quad ۲+۲+۲, \quad ۳+۲+۱, \quad ۴+۱+۱,$$

افرازهای ۶ که بزرگترین جمعوند آنها ۳ است عبارت اند از:

$$(۸۰۶) \quad ۳+۳, \quad ۳+۲+۱, \quad ۳+۱+۱+۱,$$

برای اینکه بینیم تساوی تعداد افسرازه‌های فهرستهای (۷۰۶) و (۸۰۶) (یعنی سه) تصادفی نیست، از آنچه نمودار افرازاها نسامیده شده است استفاده می‌کنیم. نمودار افراز ۴+۱+۱ عبارت است از:

$$\begin{array}{c} \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array}$$

به همین ترتیب نمودارهای ۳+۲+۱ و ۲+۲+۲ به صورت زیرند:

$$\begin{array}{ccc} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \end{array} \quad \begin{array}{c} \cdot \cdot \\ \cdot \cdot \\ \cdot \cdot \end{array}$$

بنابراین نمودار يك افراز n با k جمعوند، صرفاً شامل k سطر از نقطه‌ها، هر سطر برای يك جمعوند است؛ سطر i کسه بزرگترین جمعوند را نشان می‌دهد در بالا ظاهر می‌شود، نمایش بزرگترین جمعوند بعدی در زیر آن ظاهر می‌شود و قس علی هذا. تعداد سطرها برابر تعداد جمعوندهاست، و تعداد نقطه‌ها در هر سطر برابر با اندازه هر جمعوند است. تعداد کل نقطه‌ها در نمودار يك افراز، مساوی n است. با عوض کردن سطرهای افقی و عمودی عکس نمودار به دست می‌آید. مثلاً

عکس نمودار نمودار

$$\begin{array}{ccc} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} ۳+۱+۱+۱ & & ۴+۱+۱ \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \\ \cdot & & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} ۳+۲+۱ & & ۳+۱+۱+۱ \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \\ \cdot & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} ۳+۲+۱ & & ۳+۲+۱ \end{array}$$

$$2 + 2 + 2$$

$$r + r$$

9 + 4 + 1 + 1

$$2 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1$$

عکس نمودار يك افزاز n ، مجدداً نمودار يك افزاز n است. اگر نمودار اولیه افزازی با k جمعوند را نشان دهد (یعنی دارای k سطر باشد)، آن گاه عکس نمودار در اولین (بزرگترین) سطر دارای k نقطه است و بنابراین افزازی با k ما کسیم جمعوند k را نشان می دهد. مثلاً، افزاز ۱۲ به ۴ جمعوند، یعنی $۱ + ۱ + ۳ + ۶$ ، نمودار زیر را دارد

و نمودار عکس آن، یعنی

افراز ۱+۱+۲+۳+۴ عدد ۱۲ را نشان می‌دهد که بزرگترین جمعوند آن ۴ است. بنابراین می‌توان تناظر يك به يكي را كه بين نمودارها و نمودارهای

عکس وجود دارد به عنوان يك تناظر يك به يك بين افرازهایی از n با k جمعوند و افرازهایی از n با بزرگترین جمعوند k تعبیر کرد. در نتیجه تعداد افرازهایی از n به k جمعوند با تعداد افرازهایی از n که ما کسیمم جمعوند آنها مساوی k است، برابر است. بعلاوه چون تعداد افرازهایی از n به ۱، یا ۲، یا ۳، ...، یا k جمعونده مساوی با تعداد افرازهایی از n است که ما کسیمم جمعوندهای آن برابر ۱، یا ۲، یا ۳، ...، یا k است، می توان گفت:

تعداد افرازهایی از n به k یا کمتر از k جمعوند، برابر با تعداد افرازهایی از n است که بزرگترین جمعوند آنها از k بزرگتر نیست؛ به صورت نمادی،

$$q_k(n) = p_k(n). \quad (9.6)$$

این نتیجه برای حالت خاص $n=6$ در فهرستهایی از معادله‌های (۳.۶) و (۶.۶) تشریح شده است.

مجموعه مسائل ۲۲

۱. مقدار $p(1)$ و $p(2)$ و $p(3)$ و $p(4)$ و $p(5)$ را محاسبه کنید.
۲. مقدار $p_1(n)$ و $q_1(n)$ را محاسبه کنید.
۳. مقدار $q_2(8)$ ، $q_2(9)$ و به طور کلی مقدار $q_x(n)$ را محاسبه کنید.
۴. مقدار $p_{99}(99) - p_{98}(99)$ را بیابید.
۵. مقدار $p_{67}(67) - p_{66}(67)$ را محاسبه کنید.
۶. ثابت کنید که $p_n(n) = p_{n+1}(n)$ ، و به طور کلی ثابت کنید که اگر $k > n$ ، $p_k(n) = p_n(n)$.
۷. ثابت کنید که $p_n(n) = p_{n-1}(n) + 1$.

۲.۶ تعداد افرازاها

تعداد افرازهایی از n را با $p(n)$ ، و تعداد افرازهایی از n را که دارای k یا کمتر از k جمعوند هستند با $q_k(n)$ ، و تعداد افرازهایی از n را که جمعوندی بزرگتر از k ندارند با $p_k(n)$ نشان دادیم. روابطی که تا حال به دست آمده‌اند عبارت‌اند از

$$p(n) = q_n(n) = p_n(n) \text{ و } p_k(n) = q_k(n) \quad (10.6)$$

برای محاسبه مقادیر عددی این افرازها، نتیجه دیگری را ثابت می کنیم:

$$p_k(n) = p_{k-1}(n) + p_k(n-k). \quad (11.6)$$

برای اثبات این رابطه به ازای اعداد صحیح n و k که در $1 < k < n$ صدق می کنند، $p_k(n)$ ، یعنی افرازهایی از n را که جمعوندی بزرگتر از k ندارند به دو نوع تقسیم می کنیم:

(الف) آنهایی که دارای جمعوند k هستند؛

(ب) آنهایی که جمعوند k را ندارند.

ابتدا می بینیم که افرازهای نوع (ب) دقیقاً $p_{k-1}(n)$ افراز از n هستند که جمعوندی بزرگتر از $1-k$ ندارند. سپس توجه می کنیم که چون جمعوند k حداقل يك بار در هر افراز از نوع (الف) ظاهر می شود، می توان از هر يك از افرازها يك جمعوند k را برداشت. اگر این عمل را انجام دهیم، افرازهای حاصل دقیقاً افرازهای $n-k$ به جمعوندهایی هستند که بزرگتر از k نیستند، و تعداد آنها برابر $p_k(n-k)$ است. بنابراین (11.6) به ازای اعداد صحیح n و k ، با شرط $1 < k < n$ ثابت شده است. برای روشن شدن این استدلال، حالت $n=6$ و $k=4$ را در نظر می گیریم، به قسمی که فرمول (11.6) به صورت $p_4(6) = p_4(2) + p_4(6)$ درمی آید. تمام افرازهای عدد 6 در (10.6) بخش قبل فهرست شده اند. عدد 6 دارای نه افراز است که جمعوندی بزرگتر از 4 ندارند، بنابراین $p_4(6) = 9$. این نه افراز به دو نوع (الف)، آنهایی که دارای جمعوند 4 هستند، و نوع (ب)، آنهایی که دارای جمعوند 4 نیستند، تقسیم می شوند:

نوع (الف)	نوع (ب)
$4+1+1$	$1+1+1+1+1+1$
$4+2$	$2+1+1+1+1$
	$3+1+1+1$
	$2+2+1+1$
	$3+2+1$
	$2+2+2$
	$3+3$

افرازه‌های نوع (ب) تمام افرازهایی از ε هستند که جمع‌وندی بزرگتر از ۳ ندارند؛ تعداد اینها برابر $p_3(6)$ است. وقتی که جمع‌وند ε را از هر افراز نوع (الف) برداریم، افرازه‌های $1+1$ و 2 به دست می‌آیند. تعداد اینها برابر $p_4(2)$ است، زیرا

$$p_4(2) = p_2(2) = p(2) = 2.$$

فرمول (۱۱.۶) برای اعداد صحیح مثبت k و n که در رابطه $1 < k < n$ صدق می‌کنند معتبر است. برای تشکیل جدولی از مقادیر $p_k(n)$ ، به مشاهداتی اضافی احتیاج داریم. ابتدا به ازای $k=1$ توجه می‌کنیم که:

$$p_1(n) = 1, n \geq 1 \quad (12.6)$$

زیرا تنها يك افراز n وجود دارد که جمع‌وندی بزرگتر از ۱ ندارد. بعلاوه، افرازی برای n وجود ندارد که جمع‌وندی بزرگتر از n داشته باشد، بنابراین

$$p_k(n) = p_n(n), k \geq n \quad \text{اگر} \quad (13.6)$$

در حالت $n=1$ ، رابطه بالا نتیجه می‌دهد که

$$1 = p_1(1) = p_2(1) = p_3(1) = \dots$$

همچنین تنها يك افراز برای n وجود دارد که دارای جمع‌وند n است و بنابراین

$$p_n(n) = 1 + p_{n-1}(n). \quad (14.6)$$

با استفاده از این نتایج، تشکیل جدول مقادیر $p_k(n)$ مطلب ساده‌ای است. برای شروع، به دلیل فرمولهای (۱۲.۶) و (۱۳.۶) می‌توان ۱ها را در اولین سطر افقی و اولین ستون عمودی قرار داد. آن گاه شاید برای ادامه عمل، بهترین راه این باشد که با استفاده از فرمولهای (۱۱.۶)، (۱۳.۶) و (۱۴.۶)، مقادیر $p_2(n)$ به ازای $n=2, 3, 4, \dots$ سپس $p_3(n)$ به ازای $n=2, 3, 4, \dots$ و سپس $p_4(n)$ به ازای $n=2, 3, 4, \dots$ و غیره را در جدول قرار دهیم.

جدول مقادير $p_k(n)$

	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$
$n=1$	1	1	1	1	1	1	1
$n=2$	1	2	2	2	2	2	2
$n=3$	1	2	3	3	3	3	3
$n=4$	1	3	4	5	5	5	5
$n=5$	1	3	5	6	7	7	7
$n=6$	1	4	7	9	10	11	11
$n=7$	1	4	8	11	13	14	15

مجموعه مسائل ۲۳

۱. جدول مقادير $p_k(n)$ را تا $n=12$ و $k=12$ گسترش دهيد.

۲. مقادير $q_v(9)$ ، $q_v(7)$ ، $q_v(5)$ را محاسبه كنيد.

۳. مقادير $p(10)$ و $p(9)$ ، $p(8)$ ، $p(7)$ را محاسبه كنيد.

۳.۶ خلاصه

تعداد افرازهای عدد صحيح مثبت n ، که با $p(n)$ نشان داده شد، تعداد راههایی است که می توان n را به صورت مجموع اعداد صحيح مثبت نوشت. در افرازی نظير $7=4+2+1$ سه جمعونند ۴ و ۲ و ۱ وجود دارند. ترتيب جمعووندها اهمیتی ندارد، بنابراین $7=2+1+4$ همان افراز قبلی است. $q_k(n)$ ، به معنای تعداد افرازهایی از n است که تعداد جمعووندهای آن، k یا کمتر از k است، $p_k(n)$ ، به معنای تعداد افرازهایی از n است که جمعوندی بزرگتر از k ندارند. نتایج زیر اثبات شد:

$$p_k(n) = q_k(n),$$

$$p(n) = p_n(n) = p_{n+1}(n) = p_{n+2}(n) = p_{n+3}(n) = \dots,$$

$$p_k(n) = p_{k-1}(n) + p_k(n-k), \quad 1 < k < n$$

با استفاده از این نتایج و ملاحظات ساده

$$p_n(n) = 1 + p_{n-1}(n) \text{ و } p_1(n) = 1$$

جدول مختصر افرازاها گسترش داده شد.



چند جمله‌ای‌های مولد

در این فصل برای «تولید کردن» جوابهای یک‌درده از مسائل، از چند جمله‌ایها استفاده خواهیم کرد. مثلاً، مسألهٔ ۵.۱ فصل ۱ را حل خواهیم کرد، مسأله بدین قرار بود: به چند طریق اسکناسی یک‌دلاری را می‌توان خرد کرد؟ روشی که در این فصل معرفی می‌شود، در سطحی پیشرفته، درست یک قدم بالاتر از شمارش حالتهاست.

برای تعیین تعداد راههای خرد کردن یک اسکناس یک‌دلاری، ابتدا تکنیک معروف ضرب چند جمله‌ایها را بررسی می‌کنیم. خصوصاً به ضرب چند جمله‌ایهایی که ضرایب آنها ۱ است توجه می‌کنیم. مثلاً،

$$\begin{aligned} & (1+x+x^2+x^3+x^4)(1+x^2+x^4+x^6+x^8) \\ &= 1+x+x^2+x^3+2x^4+x^5+x^6+2x^7 \\ & \quad +2x^8+x^9+2x^{10}+2x^{11}+x^{13}+x^{14}+x^{17}. \end{aligned}$$

اکنون فرض کنیم در جمله‌های حاصل ضرب، تنها به جمله‌هایی تا x^9 توجه کنیم. بنابراین جمله‌هایی با توانهای بالاتر x را در نظر نمی‌گیریم و می‌نویسیم:

دانلود از سایت ریاضی سرا

$$(1+x+x^2+x^4+x^8)(1+x^3+x^6+x^9)$$

$$= 1+x+x^2+x^3+2x^4+x^5+x^6+2x^7+2x^8+x^9+\dots$$

درفرایند ضرب به محاسبه توانهای بالاتر از x^9 نیازی نیست. برای روشن کردن این نکته، بسط حاصلضرب

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)(1+x^6)(1+x^7),$$

را تا جمله x^7 پیدا می‌کنیم. می‌توانیم فرایند ضرب را از انتهای سمت راست به صورت زیر بنویسیم:

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)(1+x^6)(1+x^7)$$

$$= (1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)(1+x^6+x^7+\dots)$$

$$= (1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5+x^6+x^7+\dots)$$

$$= (1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4+x^5+x^6+x^7+\dots) \quad (107)$$

$$= (1+x)(1+x^2)(1+x^3+x^4+x^5+x^6+2x^7+\dots)$$

$$= (1+x)(1+x^2+x^3+x^4+2x^5+2x^6+3x^7+\dots)$$

$$= 1+x+x^2+2x^3+2x^4+3x^5+4x^6+5x^7+\dots$$

بدین طریق به مقدار قابل ملاحظه‌ای در کار صرفه‌جویی می‌شود، زیرا بسط کامل، جمله‌هایی تا x^{28} را شامل است. البته اگر جمله‌هایی با توانهای بالاتر از ۷ مورد نظر نباشند، این صرفه‌جویی در کار را می‌توان انجام داد. همان‌طوری که خواهیم دید در مسائل این فصل چنین محدودیتی قابل قبول خواهد بود.

مجموعه مسائل ۲۴

۱. حاصلضرب $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})$ را تا جمله x^{16} بسط دهید.

۲. حاصلضرب

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)(1+x^6)(1+x^7)(1+x^8)$$

را تا جمله x^8 بسط دهید.

۳. حاصلضرب

$$(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7)(1+x^2+x^4+x^6)(1+x^3+x^6) \\ \times (1+x^4)(1+x^5)(1+x^6)(1+x^7)$$

را تا جمله x^7 به دست آورید.

۱.۷ افزایش و حاصلضربهای چندجمله‌ایها

در بسط حاصلضرب (۱.۷) دوجمله‌ایهایی به صورت $(1+x^n)$ ، $n=1, 2, \dots, 7$ ، به جمله $5x^7$ توجه می‌کنیم. ضریب ۵ به ما می‌گوید که در واقع x^7 پنج بار در فرایند ضرب ظاهر می‌شود. از رویایی این پنج حالت می‌بینیم که x^7 از حاصلضربهای

$$x^7, x^6x, x^5x^2, x^4x^3, x^4x^2x,$$

به وجود می‌آید، که در آنها برای سادگی عاملهای ۱ حذف شده‌اند. در این پنج حالت، توانها با برابریهای

$$7=7, 7=6+1, 7=5+2, 7=4+3, 7=4+2+1,$$

مقابلند. می‌بینیم که این پنج برابری دقیقاً افزایشهای از عدد ۷ با جمعوندهای متمایزند. به عنوان دومین مثال، تمام افزایشهای ۶ را که دارای جمعوندهای متمایزند در نظر می‌گیریم

$$6=6, 6=5+1, 6=4+2, 6=3+2+1.$$

در این جا چهار برابری و یا چهار افزایش وجود دارند که با ضریب ۴ در جمله $4x^6$ از بسط (۱.۷) مقابلند.

اگر می‌خواستیم برای تعیین تعداد افزایشهای ۸ با جمعوندهای متمایز، از حاصلضربهای چند جمله‌ای استفاده کنیم، بسط (۱.۷) نامناسب بود، زیرا این بسط پس از $(1+x^7)$ متوقف می‌شود. به ضریب x^8 در بسط

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)(1+x^6)(1+x^7)(1+x^8), \quad (2.7)$$

توجه می‌کنیم. (مسئله ۲ از مجموعه مسائل ۲۴ را ببینید.)

نکته دیگری را می‌توان عنوان کرد. ضرایب $x, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6, x^7$ در بسط (۱.۷) به ترتیب تعداد افزایشهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷ با جمعوندهای متمایزند.

به‌همین ترتیب ضرایب $x, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6, x^7, x^8$ در بسط حاصلضرب (۲.۷) به ترتیب تعداد افرازاها ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ با جمعوندهای متمایزند. نتیجه می‌شود که بسطهای (۱.۷) و (۲.۷) تا جمله‌ای که شامل x^7 است یعنی تا $x^7 5$ یکی هستند.

آیا برای به‌دست آوردن افرازاهاى معمولی يك عدد بدون وجود شرط «جمعوندهای متمایز» می‌توان از ضرب چندجمله‌ایها استفاده کرد؟ به شرط آنکه، چندجمله‌ایهای صحیحی برای ضرب انتخاب کنیم، می‌توانیم این عمل را انجام دهیم. حاصلضرب زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{aligned} & (1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7) \\ & \times (1+x^2+x^4+x^6)(1+x^3+x^6) \\ & \times (1+x^4)(1+x^5)(1+x^6)(1+x^7). \end{aligned} \quad (3.7)$$

عاملهای سوم، دوم و اول را به‌صورتهاى

$$\begin{aligned} 1+x^3+x^6 &= 1+x^3+x^{3+3}, \\ 1+x^2+x^4+x^6 &= 1+x^2+x^{2+2}+x^{2+2+2}, \\ 1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7 &= 1+x^1+x^{1+1}+x^{1+1+1} \\ &+x^{1+1+1+1}+x^{1+1+1+1+1}+x^{1+1+1+1+1+1}+x^{1+1+1+1+1+1+1} \end{aligned}$$

درمی‌آوریم. با در نظر گرفتن این عاملها به‌صورت بالا (بدون تغییر عاملهای $1+x^4, 1+x^5, 1+x^6, 1+x^7$)، می‌بینیم که می‌توان ضریب x^7 در بسط کامل حاصلضرب را مساوی تعداد راههای نوشتن ۷ به‌صورت مجموع اعدادی گرفت که از يك یا چندتا از دسته‌های زیر انتخاب می‌شوند، و در آنها حداکثر يك عضو ممکن است از يك دسته اختیار شود.

$$\begin{aligned} & \text{دسته اول: } 1, 1+1, 1+1+1, 1+1+1+1, 1+1+1+1+1, 1+1+1+1+1+1, \\ & \quad 1+1+1+1+1+1+1, 1+1+1+1+1+1+1+1, \\ & \text{دسته دوم: } 2, 2+2, 2+2+2; \\ & \text{دسته سوم: } 3, 3+3; \\ & \text{دسته چهارم: } 4; \\ & \text{دسته پنجم: } 5; \end{aligned}$$

دسته ششم: ۶؛

دسته هفتم: ۷؛

اما این فقط توضیحی طولانی و پر زحمت از تعداد افزاهای ۷ است.

بنابراین می‌بینیم که ضرایب $x, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6, x^7$ در بسط حاصلضرب (۳.۷) به ترتیب فقط تعداد افزاهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷ است. با نمادگذاری فصل قبل، این ضرایب مقدارهای عددی $p(1), p(2), p(3), p(4), p(5), p(6), p(7)$ هستند.

به عنوان مثالی دیگر، حاصلضرب

$$(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8+x^9) \quad (۴.۷)$$

$$\times (1+x^3+x^6+x^9)(1+x^5)(1+x^7)(1+x^9),$$

را در نظر می‌گیریم. استدلالی شبیه آنچه که در حاصلضرب (۳.۷) به کار رفت، نشان می‌دهد که ضریبهای $x, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6, x^7, x^8, x^9$ تعداد افزاهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، تنها با جمعوندهای فردند.

این مثالها اصل کلی زیر را القا می‌کنند. فرض کنیم a, b, c, d و e اعداد صحیح مثبت نابرابری باشند. بنابراین ضریب x^n در بسط

$$(1+x^a+x^{2a}+x^{3a}+\dots)(1+x^b+x^{2b}+x^{3b}+\dots) \quad (۵.۷)$$

$$\times (1+x^c+x^{2c}+x^{3c}+\dots)(1+x^d+x^{2d}+x^{3d}+\dots)$$

$$\times (1+x^e+x^{2e}+x^{3e}+\dots)$$

برابر با تعداد افزاهای n با جمعوندهایی محدود به a, b, c, d و e است. در (۵.۷) هر عامل باید تمام توانهایی را که از n تجاوز نمی‌کنند شامل شود. برای روشن شدن آخرین نکته، حالت $n=۳۴$ و $a=۶$ را در نظر می‌گیریم؛ در (۵.۷) اولین عامل برابر خواهد بود با

$$1+x^6+x^{12}+x^{18}+x^{24}+x^{30}.$$

حضور توانهای بالاتری مانند x^{36} و x^{42} و نظایر آنها هیچ گونه ضرری ندارد، ولی در حالت $n=۳۴$ ضرورتی هم ندارد.

البته دلیلی هم موجود نیست که جمعوندها را به پنج شیء a, b, c, d, e محدود کنیم. بسط فرمول (۵.۷) به جمعوندهای بیشتر، صرفاً شامل عاملهای اضافی مربوط است، و ادغام به جمعوندهای کمتر صرفاً شامل حذف عاملهای مربوط است.

سؤال: برای ارائه تعداد افرازهای ۲۰ با جمعوندهای ۳، ۴، ۵، ۶، از چه حاصلضربی می‌توان استفاده کرد؟ پاسخ: تعداد چنین افرازهایی برابر ضرب x^{20} در بسط حاصلضرب

$$(1+x^3+x^6+x^9+x^{12}+x^{15}+x^{18}) \\ \times (1+x^4+x^8+x^{12}+x^{16}+x^{20}) \quad (6.7) \\ \times (1+x^5+x^{10}+x^{15}+x^{20})(1+x^6+x^{12}+x^{18}),$$

است.

سرانجام، توجه می‌کنیم که در این بسط، تعبیر دیگری از ضرب x^{20} وجود دارد. این تعبیر، تعداد جوابهای معادله

$$3y + 4z + 5u + 6v = 20,$$

در مجموعه اعداد صحیح نامنفی است، زیرا هر يك از چنین جوابهایی با يك افراز ۲۰ با جمعوندهای ۳، ۴، ۵ و ۶ متناظر است. مثلاً جواب $y=1, z=3, u=1, v=0$ با افراز $20 = 3 + 4 + 4 + 4 + 5$ متناظر است.

مجموعه مسائل ۲۵

۰۱. برای هر يك از قسمتهای زیر تعبیری بر حسب افرازها ارائه دهید.
(الف) ضرب x^{12} در بسط

$$(1+x^2+x^4+x^6+x^8+x^{10}+x^{12})(1+x^4+x^8+x^{12})(1+x^6+x^{12}) \\ \times (1+x^8)(1+x^{10})(1+x^{12});$$

(ب) ضرب x^9 در بسط

$$(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8+x^9) \\ \times (1+x^2+x^4+x^6+x^8)(1+x^3+x^6+x^9);$$

(پ) ضرب x^6 در بسط

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)(1+x^6).$$

۰۲. ضرایبی را که در مسأله قبل به آنها اشاره شد محاسبه کنید.

۰۳. يك حاصلضرب چندجمله‌ای بنویسید که بتوان از بسط آن برای تعیین
الف) تعداد افرازه‌های ۳۸ با جمعوندهای محدود به ۶، ۷، ۱۲، ۲۰؛
ب) تعداد افرازه‌های ۱۵ با جمعوندهای بزرگتر از ۲؛
پ) تعداد افرازه‌های ۹ با جمعوندهای متمایز (یعنی نابرابر)؛
استفاده کرد. در هر حالت تعداد افرازه‌ها را محاسبه کنید.

۰۴. معادله

$$2y + 3z + 5w + 7t = 18,$$

در مجموعه اعداد صحیح نامنفی چند جواب دارد؟

۰۵. معادله

$$3u + 5v + 7w + 9t = 40,$$

در مجموعه اعداد صحیح مثبت چند جواب دارد؟

۲.۷ خورد کردن اسکناس يك دلاری

اینک در پرتو اصل کلی فرمولبندی شده بخش قبل، تعیین تعداد راههای ممکن برای
خرد کردن يك اسکناس يك دلاری مشکل نیست. چون سکه‌ها به ۱، ۵، ۱۰، ۲۵،
۵۰ سنتی نامگذاری شده‌اند، کار ما تعیین تعداد افرازه‌های ۱۰۰ با جمعوندهایی
محدود به ۱، ۵، ۱۰، ۲۵، ۵۰ است. پس می‌توانیم با:

$$a=1, \quad b=5, \quad c=10, \quad d=25, \quad e=50$$

فرمولبندی (۵.۷) را به کار ببریم. پاسخ سؤال برابر ضریب x^{100} در بسط حاصلضرب
 $P_1 P_5 P_{10} P_{25} P_{50}$ است که در آن P ها چندجمله‌ایهای

$$P_1 = 1 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^{99} + x^{100},$$

$$P_5 = 1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + x^{20} + \dots + x^{95} + x^{100},$$

$$P_{10} = 1 + x^{10} + x^{20} + x^{30} + x^{40} + \dots + x^{90} + x^{100},$$

$$P_{25} = 1 + x^{25} + x^{50} + x^{75} + x^{100},$$

$$P_{50} = 1 + x^{50} + x^{100},$$

هستند.

تمام محاسبات، تا x^{100} انجام خواهند شد. حساب می‌کنیم که

$$P_4 P_5 = 1 + x^{25} + 2x^{50} + 2x^{75} + 3x^{100} + \dots,$$

$$P_3 P_4 P_5 = 1 + x^{10} + x^{20} + x^{25} + x^{30} + x^{35} + x^{40} + x^{45} + 3x^{50} \\ + x^{55} + 3x^{60} + x^{65} + 3x^{70} + 3x^{75} \\ + 3x^{80} + 3x^{85} + 3x^{90} + 3x^{95} + 6x^{100} + \dots,$$

$$P_2 P_3 P_4 P_5 = 1 + x^5 + 2x^{10} + 2x^{15} + 3x^{20} + 4x^{25} + 5x^{30} + 6x^{35} \\ + 7x^{40} + 8x^{45} + 11x^{50} + 12x^{55} + 15x^{60} + 16x^{65} + 19x^{70} \\ + 22x^{75} + 25x^{80} + 28x^{85} + 31x^{90} + 34x^{95} + 40x^{100} + \dots.$$

چون فقط ضریب x^{100} مورد نظر ماست، لازم نیست که ضرب آخری به تفصیل انجام شود. توجه می‌کنیم که هر جمله از حاصلضرب چند جمله‌ای $P_2 P_3 P_4 P_5$ برای شرکت در تشکیل ضریب x^{100} دقیقاً فقط یک بار در ضرب $P_2 P_3 P_4 P_5$ دخالت دارد. نتیجه می‌شود که این ضریب را به‌سادگی می‌توان با جمع کردن تمام ضریبها در $P_2 P_3 P_4 P_5$ (که شامل جمله ثابت نیز هست) محاسبه کرد:

$$1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 11 + 12 \\ + 15 + 16 + 19 + 22 + 25 + 28 + 31 + 34 + 40.$$

این مجموع برابر ۲۹۲ است، و بنابراین به ۲۹۲ راه می‌توان یک اسکناس یک دلاری را خرید کرد.

مجموعه مسائل ۲۶

۰۱. تعداد راههای خرید کردن یک اسکناس صد دلاری به اسکناسهای کوچکتر یعنی ۱، ۵، ۱۰، ۲۰، ۵۰ دلاری را بیابید.

۰۲. به‌چند راه می‌توان مبلغ ۵۳ سنت را با سکه‌های ۱، ۵، ۱۰، ۲۵ سنتی تأمین کرد؟

۰۳. تعداد جوابهای معادله

$$5y + 10z + 25w + 50t = 95,$$

را در مجموعه اعداد صحیح نامنفی تعیین کنید.

۴. تعداد جوابهای معادله

$$5y + 10z + 25w + 50t = 155,$$

را در مجموعه اعداد صحیح مثبت تعیین کنید.

۳.۷ خلاصه

ضرب ناتمام چند جمله‌ایها با ضرایب واحد - ناتمام به معنای نتیجه‌ای که تنها تا توان معینی از متغیر x به دست می‌آید - برای تعیین تعداد افزایشهای معین و جوابهای معادلات به کار رفته است.

برای پنج جمعو، شیوه کار به وسیله اصل کلی زیر نشان داده شده است. فرض کنیم a, b, c, d, e اعداد صحیح مثبت نابرابر باشند. در این صورت ضریب x^n در بسط

$$\begin{aligned} & (1 + x^a + x^{2a} + x^{3a} + \dots)(1 + x^b + x^{2b} + x^{3b} + \dots) \\ & \times (1 + x^c + x^{2c} + x^{3c} + \dots)(1 + x^d + x^{2d} + x^{3d} + \dots) \\ & \times (1 + x^e + x^{2e} + x^{3e} + \dots) \end{aligned}$$

برابر با تعداد افزایشهای n با جمعوتهایی محدود به a, b, c, d, e است. (هر يك از پنج عاملی که به صورت پرانتز در حاضرب آمده‌اند باید شامل تمام توانهایی باشند که از n تجاوز نمی‌کنند.) همچنین این ضریب تعداد جوابهای معادله

$$ay + bz + cw + du + ev = n$$

در مجموعه اعداد صحیح نامنفی y, z, w, u, v است. این نظریه برای تعیین مثلاً تعداد راههای خرد کردن اسکناس يك دلاری به کار رفته است.



توزیع اشیایی که همگی همانند نیستند

بسیاری از مسائل آنالیز ترکیبیاتی را می‌توان برحسب تعداد راههای توزیع اشیاء در جعبه‌ها بیان کرد. بعضی از این مسائل توزیع در فصلهای قبل مورد بررسی قرار گرفتند. اکنون مختصراً انواع مختلف مسائل را رده‌بندی می‌کنیم.

ابتدا ممکن است که اشیاء را همانند و جعبه‌ها را نامتمایز از یکدیگر در نظر گرفت. اینها مسائل افرازند. مثلاً، تعداد راههای توزیع نه شیء در چهار جعبه درست برابر تعداد افرازهای ۹ به‌حداکثر چهار جمع‌وند است. مسائلی از این نوع در فصلهای ۶ و ۷ مورد بحث واقع شدند.

سپس ممکن است اشیاء را همانند، ولی جعبه‌ها را متفاوت در نظر گرفت. تحت این شرایط، تعداد راههای توزیع نه شیء در چهار جعبه، برابر با تعداد جوابهای معادله

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9$$

در مجموعه اعداد صحیح نامنفی است. اگر هیچ جعبه‌ای تهی نباشد، جوابها در داندلود از سایت ریاضی سرا

مجموعه اعداد صحیح مثبت در نظر گرفته می شوند. به همین ترتیب محدودیتهای دیگر روی تعداد عناصر جعبه ها، متناظر با محدودیتهای جوابهای معادله هاست. معادله هایی از این نوع نیز در فصلهای ۴ و ۵ مطالعه شدند.

در این فصل توزیع اشیایی را که همگی همانند نیستند مطالعه می کنیم. اصطلاح «همگی همانند نیستند» به دو صورت تعبیر می شود. (۱) تمام اشیاء بدین مفهوم متفاوت اند که هیچ دوشیئی مانند هم نیستند؛ (۲) گردایه ای آمیخته از اشیاء هستند، مثل سکه ها، که بعضی همانند و بعضی متفاوت اند. در بخش اول از حالتی که اشیاء همگی متفاوت و جعبه ها نیز همگی متفاوت اند؛ در بخش دوم از حالتی که اشیاء همگی متفاوت و جعبه ها یکسان اند؛ و در بخش سوم از حالتی که بعضی از اشیاء همانند و بعضی متفاوت ولی جعبه ها متفاوت اند بحث می کنیم.

۱۰.۸ اشیاء متفاوت، جعبه ها متفاوت

اگر m شیء که هیچ دوتایی از آنها همانند نیستند، در k جعبه ای که هیچ دوتای آنها همانند نیستند توزیع شوند، تعداد راههایی که می توان این عمل را انجام داد برابر k^m است، زیرا k راه برای اختیار اولین شیء، k راه برای اختیار دومین شیء و غیره وجود دارد.

اما اکنون فرض می کنیم این شرط اضافی که هیچ جعبه ای تهی نباشد به مسأله تحمیل شود، یعنی تنها آن توزیعهایی را می شماریم که در آنها هر جعبه حداقل یک شیء دریافت می کند. البته اکنون باید حداقل تعداد اشیاء با تعداد جعبه ها برابر باشد، $m > k$ ؛ در غیر این صورت هیچ يك از چنین توزیعهایی نمی تواند انجام شود. فرض کنیم $f(m, k)$ تعداد راههای قراردادن m شیء متفاوت در k جعبه متفاوت، بدون وجود هیچ جعبه تهی، را نشان دهد. مثلاً $f(3, 2) = 6$. برای راحتی تعریف می کنیم، اگر $m < k$ ، $f(m, k) = 0$.

با استفاده از اصل شمول-عدم شمول فصل ۵، برای $f(m, k)$ فرمولی به دست می آوریم. با محاسبه $f(m, 1)$ این روش را تشریح می کنیم. 1^m ، یعنی تعداد کل آرایشهای m شیء متفاوت در هفت جعبه متفاوت، را در نظر می گیریم. گوییم که هر يك از چنین آرایشهایی در حالتی که جعبه اول تهی باشد دارای ویژگی α است، و در حالتی که جعبه دوم تهی باشد دارای ویژگی β است، و به ترتیب پنج جعبه دیگر متشابهاً دارای ویژگی $\gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \eta$ هستند. برای تعیین تعداد توزیعهایی با هیچ جعبه تهی، تنها توزیعهایی را که صرفاً هیچ يك از ویژگیهای α, β, γ و غیره را

ندارند می‌شماریم. به دلیل تقارن هفت و یژگی، می‌توان فرمول (۶.۵) صفحه ۸۰ را به کار برد. در اینجا تعداد کل توزیعها برابر $N = 7^m$ است. منظور ما از $N(\alpha)$ ، تعداد توزیعهایی است که در آنها جعبه اول تهی است، و بنا بر این $N(\alpha) = 6^m$. به همین ترتیب تعداد توزیعهایی که در آنها جعبه‌های اول و دوم تهی‌اند برابر $N(\alpha, \beta)$ است. اما این برابر تعداد توزیعها در پنج جعبه است، و لذا $N(\alpha, \beta) = 5^m$. بنا بر این می‌توانیم بنویسیم

$$N = 7^m, \quad N(\alpha) = 6^m, \quad N(\alpha, \beta) = 5^m, \quad N(\alpha, \beta, \gamma) = 4^m,$$

$$N(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = 3^m, \quad N(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon) = 2^m,$$

$$N(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta) = 1^m, \quad N(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \eta) = 0.$$

با به کار بردن فرمول (۶.۵) صفحه ۸۰، به ازای $r = 7$ ، به دست می‌آوریم

$$f(m, 7) = 7^m - C(7, 1)6^m + C(7, 2)5^m - C(7, 3)4^m \\ + C(7, 4)3^m - C(7, 5)2^m + C(7, 6)1^m.$$

با قراردادن k به جای 7 به وسیله تعمیمی مستقیم از رابطه بالا، می‌بینیم که

$$f(m, k) = k^m - C(k, 1)(k-1)^m + C(k, 2)(k-2)^m \quad (1.8) \\ - C(k, 3)(k-3)^m + \dots + (-1)^{k-1}C(k, k-1)1^m.$$

اگر $m < k$ ، آن گاه $f(m, k) = 0$. در چنین حالتی می‌توان برای رسیدن به اتحادهایی درخصوص $C(n, r)$ ، از فرمول (۱.۸) استفاده کرد. مثلاً اگر $m = 6$ و $k = 7$ ، آن گاه فرمول (۱.۸) می‌گوید که

$$7^6 - C(7, 1)6^6 + C(7, 2)5^6 - C(7, 3)4^6 + C(7, 4)3^6 \\ - C(7, 5)2^6 + C(7, 6)1^6 = 0.$$

مجموعه مسائل ۲۷

۱. مطلوب است تعیین تعداد توزیعهای پنج شیء متفاوت در سه جعبه متفاوت، به طوری که هیچ جعبه‌ای تهی نماند.

۲. مقدار $f(5, 2)$ را تعیین کنید.

۳. در متن آمده است که $f(3, 2) = 6$. هم با شمارش دقیق حالتها و هم با استفاده از فرمول (۱.۸)، درستی این تساوی را تحقیق کنید.

۴. به چند طریق مختلف ممکن است که k شیء متمایز را طوری در k جعبه متمایز توزیع کرد که هیچ جعبه‌ای تهی نماند؟ پاسخ این سؤال را به دو راه، یعنی با بررسی مستقیم و با استفاده از فرمول (۱.۸) به دست آورید و اتحادی را نتیجه بگیرید.

۵. ثابت کنید که اگر m ، يك عدد صحیح مثبت کوچکتر از ۸ باشد،

$$8^m - C(8, 1)7^m + C(8, 2)6^m - C(8, 3)5^m + C(8, 4)4^m - C(8, 5)3^m + C(8, 6)2^m - C(8, 7) = 0$$

۲.۸ اشیاء متفاوت، جعبه‌ها همانند (افرازهای يك مجموعه)

اگر مجموعه‌ای شامل m عنصر باشد، همواره به عنوان قسمتی از مفهوم واژه «مجموعه» از پیش فرض می‌شود که عناصر از یکدیگر متمایزند. پس، تعداد راههایی که می‌توان m شیء متفاوت را در k جعبه همانند قرار داد، برابر تعداد افرازهای يك مجموعه m عنصری به k زیرمجموعه است. توجه کنید که درباره تعداد عناصر در k زیرمجموعه چیزی نمی‌توان گفت. اما در بعضی مسائل تصریح خواهد شد که زیرمجموعه‌ها تهی نیستند.

فرض می‌کنیم $G(m, k)$ ، تعداد توزیعهای m شیء متفاوت در k جعبه همانند را نشان دهد که جعبه‌ها مرتب نشده و به هیچ طریقی متمایز از هم نباشند. به بیان دیگر $G(m, k)$ ، تعداد تفکیکهای m شیء متفاوت به k یا کمتر از k دسته است، واژه «یا کمتر» را بدین دلیل آورده‌ایم که ممکن است يك یا چند دسته تهی باشند. مثلاً $G(3, 2)$ را در نظر می‌گیریم. سه شیء را با A, B, C نشان می‌دهیم، می‌بینیم که چهار حالت وجود دارد:

A, B ، و C همگی در يك جعبه، جعبه دیگر خالی؛

A در يك جعبه، B و C در جعبه دیگر؛ (۲.۸)

B در يك جعبه، A و C در جعبه دیگر؛

C در يك جعبه، A و B در جعبه دیگر.

بنابراین $G(3, 2) = 4$.

حال فرض کنیم $g(m, k)$ ، تعداد توزیعهای m شیء متفاوت در k جعبه همانند را نشان دهد، بدون آنکه جعبه‌ای تهی باشد. بنابراین $g(m, k)$ برابر تعداد راههای جدا کردن m شیء متفاوت به k دسته ناتهی، یا تعداد راههای جدا کردن يك مجموعه m عنصری به k زیرمجموعه ناتهی است. بانگاهی به حالتیابی که در (۲.۸) فهرست شده‌اند، می‌بینیم که

$$g(3, 2) = 3 \text{ و } g(3, 1) = 1$$

به‌طور کلی، می‌توان $G(m, k)$ توزیع را به، آنهایی که دارای جعبه تهی نیستند، آنهایی که درست يك جعبه تهی دارند، آنهایی که دارای دو جعبه تهی هستند و غیره تفکیک کرد، تا به دست آوریم

$$G(m, k) = g(m, k) + g(m, k-1) + g(m, k-2) + g(m, k-3) + \dots + g(m, 1). \quad (3.8)$$

سپس برای $g(m, k)$ فرمولی به دست می‌آوریم. رابطه ساده‌ای بین $g(m, k)$ و $f(m, k)$ وجود دارد. این رابطه نظیر بستگی موجود بین ترکیبها و جایگشتها در نظریه مقدماتی است. برای درك این مطلب، توزیع دلخواهی را که به وسیله $g(m, k)$ محاسبه می‌شود در نظر می‌گیریم؛ چون به منظور تعویض جعبه‌ها از وضع همانند بودن به متمایز بودن $k!$ راه برای شماره گذاری جعبه‌ها وجود دارد، هر توزیع، $k!$ توزیع از نوع $f(m, k)$ را تولید خواهد کرد، نتیجه می‌شود که

$$g(m, k) = \frac{f(m, k)}{k!} \text{ یا } f(m, k) = g(m, k) \times k!$$

با توجه به معادله (۱.۸) بخش قبل، این آخرین معادله را دوباره می‌توان به صورت

$$g(m, k) = \frac{1}{k!} [k^m - C(k, 1)(k-1)^m + C(k, 2)(k-2)^m - \dots + (-1)^{k-1} C(k, k-1)1^m], \quad (4.8)$$

نوشت.

تعیین مقدار $g(m, k)$ از روی (۴.۸) و سپس محاسبه $G(m, k)$ از روی

(۳.۸) مطلب ساده‌ای است. همچنین، چون فرمول (۴.۸) تعداد افرازه‌های يك مجموعه m عنصری را به k زیر مجموعه ناتهی می‌دهد، تعداد کل افرازه‌های يك مجموعه m عنصری را می‌توان با اضافه کردن مقادیر $g(m, k)$ به ازای تمام مقادیر مربوطه k ، یعنی $k=1, k=2, \dots, k=m$ به دست آورد. پس تعداد کل افرازه‌های يك مجموعه m عنصری برابر است با

$$g(m, 1) + g(m, 2) + g(m, 3) + \dots + g(m, m),$$

که هر جمله این مجموع را می‌توان با استفاده از (۴.۸) محاسبه کرد.

مجموعه مسائل ۲۸

۱. به چند طریق ممکن است نه حرف $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ را به سه دسته ناتهی تفکیک کرد؟

۲. اگر چهار شیء متمایز را به چهار دسته ناتهی تفکیک کنیم، واضح است که این عمل فقط به يك صورت انجام می‌شود. تحقیق کنید که فرمول (۴.۸) این نتیجه را می‌دهد.

۳. به چند طریق می‌توان m شیء متمایز را به دو دسته ناتهی تفکیک کرد؟

۴. به چند طریق ممکن است عدد 30×30 را به سه عامل صحیح مثبت تجزیه کرد؟ (الف) اگر مجاز باشیم ۱ را به عنوان يك عامل در نظر بگیریم. (ب) اگر هر عامل از ۱ بزرگتر باشد. (ترتیب در نظر گرفته نمی‌شود: یعنی $30 \times 77 \times 13$ و $77 \times 30 \times 13$ ، يك تجزیه به حساب می‌آیند.)

۵. تعداد کل راه‌های افراز کردن مجموعه‌ای از پنج عنصر (متمايز) را تعیین کنید.

۶. بدون استفاده از فرمولهای متن کتاب، با استفاده از مفهوم نماد گذاری، ثابت کنید که $g(m, m) = 1$ از آنجا، اتحاد

$$\begin{aligned} m! &= m^m - C(m, 1)(m-1)^m + C(m, 2)(m-2)^m \\ &\quad - C(m, 3)(m-3)^m + \dots + (-1)^{m-1} C(m, m-1)(1)^m \end{aligned}$$

را ثابت کنید.

۷. بدون استفاده از فرمول متن کتاب، ثابت کنید که

$$g(m, m-1) = C(m, 2).$$

آنگاه، نوع مشابهی از تحلیل را برای محاسبه $g(m, m-2)$ به کار برید.

۳.۸ اشیاء آمیخته، جعبه‌ها متفاوت

چندین شیء مختلف را در نظر می‌گیریم که ممکن است از هر کدام بیشتر از یک نمونه موجود باشد؛ مثلاً گردهای از تمبرها یا کتابها. فرض کنیم از شیء اول a نمونه، از شیء دوم b نمونه، از شیء سوم c نمونه و غیره وجود داشته، و تعداد کل اشیاء برابر n باشد. بنا براین

$$a + b + c + \dots = n. \quad (5.8)$$

این اشیاء به طریق زیر در چند جعبه ناهمبند توزیع می‌شوند: در جعبه اول α شیء، در جعبه دوم β شیء، در جعبه سوم γ شیء و غیره. در هر توزیع در جعبه‌ها، تمام اشیاء مورد استفاده قرار خواهند گرفت، بنابراین مجموع α, β, γ ، و غیره برابر n است:

$$\alpha + \beta + \gamma + \dots = n. \quad (6.8)$$

برای نشان دادن تعداد توزیعهای اشیاء در جعبه‌ها به گونه‌ای که توصیف شد، از نمادگذاری* زیر استفاده خواهیم کرد.

$$[a, b, c, \dots, \square \alpha, \beta, \gamma, \dots] \quad (7.8)$$

به عنوان یک مثال، نمادگذاری $[1, 2, 2 \square 2, 3]$ را، که در آن $n=5$ در نظر می‌گیریم. یک راه برای در نظر گرفتن این پنج شیء، تصور پنج توپ رنگی مثلاً یکی قرمز، دو تا آبی و دو تا سفید است. دو توپ آبی همانندند؛ دو توپ سفید نیز همانندند. مسأله، تعیین تعداد راههای قراردادن دو توپ در داخل اولین

* باکسب اجازه، از اثر

H. Rademacher and O. Toeplitz, *The Enjoyment of Mathematics*, Princeton, 1957

اقتباس شده است.

جعبه، و سه توپ در داخل دومین جعبه است. تحقیق در این باره که پنج راه برای انجام این کار وجود دارد مشکل نیست، یعنی

$$[1, 2, 2 \square 2, 3] = 5.$$

برای تعداد توزیعهایی که با (۷.۸) نشان داده شده‌اند فرمولی کلی به دست نخواهیم آورد. مسأله تعیین این تعداد توزیع مشکلت‌ر است و بنابراین تنها به تحلیل بعضی از حالت‌های خاص می‌پردازیم. ابتدا دو ویژگی پایه‌ای عدد توزیعی (۷.۸) را بررسی می‌کنیم. ویژگی اول آن است که ترتیب جمله‌ها در دو طرف نماد جداکننده بی‌اهمیت است. مثلاً

$$[1, 2, 2 \square 2, 3] = [2, 1, 2 \square 2, 3] = [2, 2, 1 \square 3, 2].$$

ویژگی دوم، که کمتر واضح است، آن است که دو طرف را همان‌طور که در مثال‌های زیر نشان داده شده‌است، می‌توان جابه‌جا کرد،

$$[1, 2, 2 \square 2, 3] = [2, 3 \square 1, 2, 2]$$

$$[4, 5, 6 \square 2, 2, 3, 8] = [2, 2, 3, 8 \square 4, 5, 6]. \quad (8.8)$$

اکنون درستی گزاره دوم یعنی معادله (۸.۸) را ثابت می‌کنیم. نماد $[4, 5, 6 \square 2, 2, 3, 8]$ ، به معنای تعداد راه‌های قراردادن ۴ توپ قرمز، ۵ توپ، آبی و ۶ توپ سفید در چهار جعبه است، که در جعبه اول ۲ توپ، در جعبه دوم ۲ توپ در جعبه سوم ۳ توپ و در جعبه چهارم هشت توپ قرار گیرد. توپ‌ها تنها به وسیله رنگ از هم متمایزند. در هر توزیع، تعداد توپ‌های قرمز موجود در جعبه اول را به x_1 ، همچنین تعداد توپ‌های قرمز موجود در جعبه‌های دوم و سوم و چهارم را به ترتیب با x_2, x_3, x_4 نشان می‌دهیم. به همین طریق فرض می‌کنیم تعداد توپ‌های آبی موجود در جعبه‌ها را به ترتیب با y_1, y_2, y_3, y_4 و تعداد توپ‌های سفید موجود در جعبه‌های اول، دوم، سوم و چهارم را با z_1, z_2, z_3, z_4 نشان دهیم. بنابراین نماد $[4, 5, 6 \square 2, 2, 3, 8]$ را می‌توان به عنوان تعداد جواب‌های دستگاه معادله‌های

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 4 & x_1 + y_1 + z_1 &= 2 \\ y_1 + y_2 + y_3 + y_4 &= 5 & x_2 + y_2 + z_2 &= 2 \\ z_1 + z_2 + z_3 + z_4 &= 6 & x_3 + y_3 + z_3 &= 3 \\ x_4 + y_4 + z_4 &= 8 \end{aligned} \quad (9.8)$$

در مجموعه اعداد صحیح نامنفی تعبیر کرد.

اکنون سمت راست معادله (۸.۸) را در نظر می‌گیریم. نمادگذاری
 $[۴, ۵, ۶] \square [۲, ۲, ۳, ۸]$ ، معرف تعداد راههای قراردادن ۲ توپ سبز، ۲ توپ نارنجی، ۳ توپ زرد و ۸ توپ سیاه در ۳ جعبه است که درجعه اول ۴ توپ، در جعبه دوم ۵ توپ و در جعبه سوم ۶ توپ است. فرض کنیم در هر توزیع، تعداد توپهای سبز موجود درجعه اول، دوم و سوم به ترتیب برابر t_1, t_2, t_3 باشد. همچنین فرض کنیم در جعبه‌های اول و دوم و سوم تعداد توپهای نارنجی به ترتیب برابر u_1, u_2, u_3 ، تعداد توپهای زرد به ترتیب برابر v_1, v_2, v_3 و تعداد توپهای سیاه به ترتیب برابر w_1, w_2, w_3 باشد. پس نماد $[۴, ۵, ۶] \square [۲, ۲, ۳, ۸]$ را می‌توان به معنای تعداد جوابهای دستگاه معادله‌های

$$\begin{aligned} t_1 + t_2 + t_3 &= 2 & t_1 + u_1 + v_1 + w_1 &= 4 \\ u_1 + u_2 + u_3 &= 2 & t_2 + u_2 + v_2 + w_2 &= 5 \\ v_1 + v_2 + v_3 &= 3 & t_3 + u_3 + v_3 + w_3 &= 6 \\ w_1 + w_2 + w_3 &= 8 \end{aligned} \quad (10.8)$$

در مجموعه اعداد صحیح نامنفی تعبیر کرد.

برای آنکه بینیم دستگاه معادله‌های (۱۰.۸) همان دستگاه معادله‌های (۹.۸) است، فرض کنیم

$$\begin{aligned} t_1 &= x_1, & u_1 &= x_2, & v_1 &= x_3, & w_1 &= x_4, \\ t_2 &= y_1, & u_2 &= y_2, & v_2 &= y_3, & w_2 &= y_4, \\ t_3 &= z_1, & u_3 &= z_2, & v_3 &= z_3, & w_3 &= z_4. \end{aligned}$$

این روابط نشان می‌دهند که (۸.۸) برقرار است. برای اثبات برابری

$$[a, b, c, \dots] \square [\alpha, \beta, \gamma, \dots] = [\alpha, \beta, \gamma, \dots] \square [a, b, c, \dots] \quad (11.8)$$

به‌ازای هر عدد صحیح که در

$$a + b + c + \dots = \alpha + \beta + \gamma + \dots = n$$

صدق می‌کند، می‌توان از استدلالی مشابه و از دستگاه معادله‌هایی که مفصلترند

استفاده کرد. در ریاضیات نتیجه‌ای از این نوع را اصل دوگانی می‌نامند. به عنوان حالت خاصی از (۱۱۰۸)، وضعیتی را که در آن $\alpha = 1$ ، $\beta = 1$ و $\gamma = 1$ و غیره است در نظر می‌گیریم:

$$[a, b, c, \dots \mid 1, 1, 1, \dots, 1] = [1, 1, 1, \dots, 1 \mid a, b, c, \dots]; \quad (12.8)$$

در این جا هر بلوک از ۱ها دارای n عضو است، و $a + b + c + \dots = n$. نماد سمت چپ (۱۲۰۸) را می‌توان به معنای تعداد جایگشت‌های n شیء تغییر کرد که همگی را یک جا در نظر گرفته و در آن a شیء همانند، b شیء دیگر همانند و c شیء دیگر همانند، ... هستند. تعداد چنین جایگشتهایی، همان طوری که در خلاصه فصل ۳ آمده است، برابر است با

$$\frac{n!}{a! b! c! \dots} \quad (13.8)$$

اکنون می‌توانیم ادعا کنیم که عضو سمت راست (۱۲۰۸) هم دارای همان مقدار (۱۳۰۸) است. بدین معنا که (۱۳۰۸) تعداد راه‌های توزیع n شیء متمایز در جعبه‌هاست که در اولین جعبه a شیء، در دومین جعبه b شیء، در سومین جعبه c شیء، و غیره قرار گیرند.

مجموعه مسائل ۲۹

۰۹. مقادیر عددی زیر را به دست آورید.

$$[1, 1, 1, 1 \mid 1, 1, 1, 1] \quad (\text{الف})$$

$$[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 \mid 4, 5] \quad (\text{ب})$$

$$[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 \mid 1, 1, 1, 1, 1, 1, 4] \quad (\text{پ})$$

$$[30, 10 \mid 10, 10, 10, 10] \quad (\text{ت})$$

$$[2, 1, 1 \mid 2, 1, 1] \quad (\text{ث})$$

$$[2, 2, 2 \mid 2, 2, 2] \quad (\text{ج})$$

$$[4, 4, 4 \mid 6, 6] \quad (\text{ح})$$

۲. هریک از عبارت‌های زیر را برحسب نماد گذاری فصل‌های قبل بیان کنید:

(الف) $[1, 1, 1, \dots, 1 \square 1, 1, 1, \dots, 1]$ ، که در هر طرف علامت جداکننده n تا یک وجود دارند؛

(ب) $[1, 1, 1, \dots, 1 \square 1, 1, 1, \dots, 1, n-r]$ ، که درست چپ علامت جداکننده n تا یک، و درست راست r تا یک وجود دارند؛

(پ) $[1, 1, 1, \dots, 1 \square r, n-r]$ ، که در سمت چپ علامت جداکننده n تا یک وجود دارند؛

(ت) $[a_1, a_2, a_3, \dots, a_k \square r, n-r]$ ، که در آن $1 + a_1 + a_2 + \dots + a_k = n$ و هیچکدام از a ها کوچکتر از r نیست.

۳. مقدار $[2, 1, 1, 1, \dots, 1 \square 2, 1, 1, 1, \dots, 1]$ را، که در آن در هر طرف علامت جداکننده، k تا یک وجود دارد، محاسبه کنید.

۴.۸ خلاصه

تعداد توزیع‌های m شیء متفاوت در k جعبه متفاوت برابر k^m است. اگر هیچ جعبه‌ای تهی نباشد، تعداد توزیع‌ها را با نماد $f(m, k)$ نشان می‌دهند، و در حالتی که $m < k$ ، $f(m, k) = 0$ ، نشان داده شد که

$$f(m, k) = k^m - C(k, 1)(k-1)^m + C(k, 2)(k-2)^m - C(k, 3)(k-3)^m + \dots + (-1)^{k-1} C(k, k-1)1^m.$$

اگر m شیء متفاوت و k جعبه‌ای که از یکدیگر متمایز نیستند داشته باشیم، برای نشان دادن تعداد کل توزیع‌های اشیاء در جعبه‌ها نماد $G(m, k)$ ، و برای تعداد توزیع‌هایی که در آنها هیچ جعبه‌ای تهی نیست، نماد $g(m, k)$ به کار می‌رود. ثابت شد که:

$$g(m, k) = \frac{f(m, k)}{k!}$$

و

$$G(m, k) = g(m, k) + g(m, k-1) + g(m, k-2) + \dots + g(m, 1).$$

تعبیر دیگر $G(m, k)$ ، تعداد افرازهای مجموعه‌ای از m عنصر (متمايز) به k

زیرمجموعه (نامرتب) است؛ توجه کنید که روی تعداد عناصر زیرمجموعه‌ها هیچ محدودیتی وجود ندارد. اما اگر لازم باشد که زیرمجموعه‌ها ناتهی باشند، تعداد افراهای مجموعه برابر $g(m, k)$ است. تعداد کل راههای افراز يك مجموعه از m عنصر (متمايز) برابر $G(m, m)$ است. برای محاسبه این تعداد به ازای هر مقدار بخصوص m ، نتیجه

$$G(m, m) = g(m, m) + g(m, m-1) + g(m, m-2) + \dots + g(m, 1),$$

و رابطه $g(m, k) = \frac{f(m, k)}{k!}$ و فرمول بالا برای $f(m, k)$ را به کار می‌بریم.

فرض کنیم $a, b, c, \dots$ و $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ دو مجموعه از اعداد صحیح مثبت باشند که مجموع عناصر هر مجموعه برابر n است:

$$a + b + c + \dots = n, \quad \alpha + \beta + \gamma + \dots = n$$

فرض کنیم n شیء وجود دارند که در آنها a تا همانند، b تای دیگر همانند، c تای دیگر همانند باشند و قس علی هذا. تعداد توزیعیهای این اشیاء در جعبه‌ها را به طوری که در جعبه اول α شیء، در جعبه دوم β شیء، در جعبه سوم γ شیء و غیره باشد با $[a, b, c, \dots] \square [\alpha, \beta, \gamma, \dots]$ نشان می‌دهیم. نشان داده شد که:

$$[a, b, c, \dots] \square [\alpha, \beta, \gamma, \dots] = [\alpha, \beta, \gamma, \dots] \square [a, b, c, \dots].$$

۹

مسائل پیکربندی

مسائلی که در این فصل مورد بحث واقع می‌شوند به الگوهای هندسی یا به یک یا چند نوع از پیکربندیها ارتباط دارند. با اصل لانه کبوتر، مفهومی که در ریاضیات کاربرد وسیعی دارد، کار را شروع می‌کنیم.

۱.۹ اصل لانه کبوتر

اگر هشت کبوتر به طرف هفت لانه کبوتر پرواز کنند، حداقل یکی از لانه‌ها شامل دو یا چند کبوتر خواهد بود. به‌طور کلیتر اگر $n+1$ کبوتر در داخل n لانه باشند، حداقل یکی از لانه‌ها شامل دو یا چند کبوتر است.

این صورت ساده اصل لانه کبوتر را می‌توان به‌صورت زیر تعمیم داد: اگر $2n+1$ کبوتر در داخل n لانه باشند، حداقل یکی از لانه‌ها شامل سه یا تعداد بیشتری کبوتر خواهد بود. در اینجا حتی عبارتی قویتر وجود دارد که تمام حکمهای قبلی را به‌عنوان حالت‌های خاص شامل می‌شود: اگر $kn+1$ کبوتر در n لانه باشند، حداقل یکی از لانه‌ها شامل $k+1$ یا تعداد بیشتری کبوتر خواهد بود.

دانلود از سایت ریاضی سرا

اثبات این مطلب مشکل نیست؛ زیرا اگر حکم درست نباشد، آن گاه هر لانه شامل k یا تعداد کمتری کبوتر است. بنابراین n لانه وجود دارد و در هر لانه k یا تعداد کمتری کبوتر موجود است و لذا در کل حداکثر nk کبوتر می توانند در لانه ها جا بگیرند. اما این يك تناقض است، زیرا جمعاً $kn+1$ کبوتر وجود دارند، بنابراین با برهانی غیرمستقیم قضیه را ثابت کرده ایم.

مجموعه مسائل ۳۰

۱. اطلاعاتی در دست است که هیچ شخصی درسش بیش از ۳۰۰۰۰۰۰ مو ندارد، و طبق يك سرشماری جدید، جمعیت شهر نیویورک ۷۷۸۱۹۸۴ نفر است، ملاحظه می شود که در شهر نیویورک حداقل دو نفر وجود دارند که تعداد موهای سرشان برابر است. بزرگترین عدد صحیحی که می توان در ادعای زیر به جای n قرار داد چقدر است؟ در شهر نیویورک n شخص وجود دارند که تعداد موهای سرشان برابر است.

۲. فرض کنیم اطلاع داریم که حداقل یکی از a_1 و b_1 دارای ویژگی P و حداقل یکی از a_2 و b_2 دارای ویژگی P ، و حداقل یکی از a_3 و b_3 دارای ویژگی P هستند. ثابت کنید حداقل دو تا از a_1, a_2, a_3 و یا حداقل دو تا از b_1, b_2, b_3 دارای ویژگی P هستند.

۳. همان اطلاعات مسأله قبل را در نظر می گیریم و همچنین فرض می کنیم که حداقل یکی از a_4 و b_4 دارای ویژگی P و حداقل یکی از a_5 و b_5 دارای ویژگی P باشند. ثابت کنید که حداقل سه تا از a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 و یا حداقل سه تا از b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 دارای ویژگی P هستند.

۴. فرض کنیم حداقل یکی از a_1, b_1, c_1 دارای ویژگی Q و نیز حداقل یکی از a_2, b_2, c_2 ، یکی از a_3, b_3, c_3 و ... و یکی از a_1, b_1, c_1 دارای خاصیت Q باشند. برای آنکه ادعای زیر صحیح باشد بزرگترین عدد صحیحی که می توان به جای k به کار برد چقدر است؟ حداقل k تا از $a_1, a_2, a_3, \dots, a_1$ و یا حداقل k تا از $b_1, b_2, b_3, \dots, b_1$ و یا حداقل k تا از $c_1, c_2, c_3, \dots, c_1$ دارای ویژگی Q هستند.

۵. فرض کنیم حداقل دو تا از a_1, b_1, c_1 دارای ویژگی T و نیز حداقل دو تا از

a_1, b_1, c_1 و ... و حداقل دوتا از a_5, b_5, c_5 دارای ویژگی T باشند. مطلوب است تعیین بزرگترین عدد صحیحی که می توان به جای r گذاشت تا ادعای زیر صحیح باشد؟ حداقل r تا از a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 و یا حداقل r تا از b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 و یا حداقل r تا از c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 دارای ویژگی T هستند.

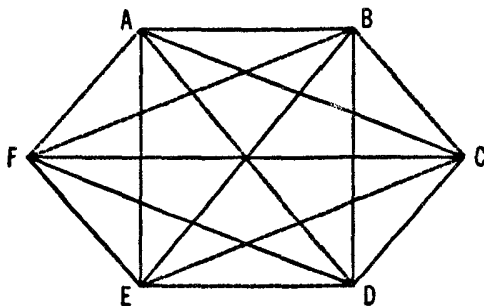
۲.۹ مثلهای رنگی

شش نقطه واقع در يك صفحه را در نظر می گیریم که هیچ سه نقطه ای از آنها همخط (یعنی بر يك خط مستقیم) نباشند. $C(6, 2)$ یا پانزده پاره خط وجود دارند که این نقطه ها را به هم وصل می کنند. فرض می کنیم این پانزده پاره خط به طریق دلخواهی با استفاده از دو رنگ، مثلاً قرمز و سفید، رنگ شوند؛ ممکن است تمام پاره خطها قرمز، یا تمام پاره خطها سفید و یا بعضی قرمز و بقیه سفید باشند. هر مثالی را که از وصل سه نقطه حاصل می شود رنگی گویند اگر سه ضلع آن دارای يك رنگ باشند.

ثابت خواهیم کرد که طرز رنگ کردن این پانزده پاره خط هر چه باشد، همواره می توان يك مثلث رنگی پیدا کرد. این يك ویژگی عدد ۶ است که ۶ کوچکترین تعداد نقاطی در صفحه است که (با شرط همخط نبودن هیچ سه نقطه ای) وقتی هر پاره خط واصل بین زوجهای نقاط را به دلخواه به یکی از دو رنگ، رنگ کنیم، همواره می توانیم يك مثلث رنگی به دست آوریم.

برهان این که همواره می توان يك مثلث رنگی به دست آورد: یکی از شش نقطه مثلاً A را انتخاب می کنیم، و پنج پاره خط AB, AC, AD, AE, AF را که از A خارج می شوند در نظر می گیریم. (شکل ۱.۹ را ببینید). طبق اصل لانه کبوتر حداقل سه تا از این پنج پاره خط باید دارای يك رنگ باشند. بدون آنکه به کلیت مسئله لطمه وارد شود فرض می کنیم سه پاره خطی که دارای يك رنگ اند عبارت از AB, AC, AD باشند. (در شکل ۱.۹ که در آن يك رنگ با خط چین و رنگ دیگر با خط ممند مشخص شده است، در واقع AB, AC, AD دارای يك رنگ اند. اما چون می توان جای حرفهای نقاط B, C, D, E, F را عوض کرد - در حالت مورد بحث برچسبهای نقاط D و E را عوض خواهیم کرد - همواره می توانیم چنین عملی را انجام دهیم تا قطعه خطهای AB, AC, AD دارای يك رنگ باشند.)

سپس، بدون آنکه به کلیت امر لطمه ای وارد شود، از قبل فرض می کنیم که سه



قرمز

سفید

شکل ۱.۹

پاره خط AB ، AC ، AD قرمزند. زیرا اگر سفید باشند، فقط رنگ هر يك از پانزده پاره خط را عوض می کنیم بدون اینکه هیچ اثری بوجود مثلث رنگی داشته باشد؛ هر مثلث قرمز رنگ به يك مثلث سفید تبدیل می شود و برعکس، بعلاوه در فرایند، هیچ مثلث رنگی جدیدی به وجود نخواهد آمد.

اکنون سه پاره خط AB ، AC ، و AD را که از A خارج می شوند، و مثلث BCD را که به وسیله سه نقطه انتهایی آنها به وجود می آید در نظر می گیریم. دو امکان وجود دارد: یا سه ضلع مثلث BCD سفیدند و یا حداقل يك ضلع آن قرمز است. اگر سه ضلع BCD سفید باشند آن گاه BCD مثلثی رنگی است. از طرف دیگر اگر حداقل يك ضلع BCD قرمز باشد آن گاه این ضلع قرمز با دوتا از سه پاره خط قرمز مناسب AB ، AC ، و AD يك مثلث رنگی می سازد. به تفصیل اگر BC قرمز باشد، آن گاه مثلث ABC مثلثی رنگی است؛ اگر BD قرمز باشد، آن گاه ABD مثلثی رنگی است؛ اگر CD قرمز باشد، آن گاه ACD مثلثی رنگی است و این مطلب برهان را کامل می کند.

به دو راه دیگر بیان همان اصل دقت می کنیم. در میان هر شش نفر ممکن است سه نفر را یافت که دو به دو باهم آشنا هستند، یا ممکن است سه نفر را یافت که هیچ دوتایی از آنها باهم آشنا نباشند. در میان هر شش نفر ممکن است سه نفر را یافت که هر کدام از آنها با دو نفر دیگر دست داده باشد و یا ممکن است سه نفر را یافت که هیچ دوتایی از آنها باهم دست نداده باشند.

مجموعه مسائل ۳۱

۰۱ ثابت کنید که ۶، کمترین تعداد نقاط صفحه است که دارای ویژگی مثلث رنگی است؛ یعنی: ۵ نقطه را در صفحه مشخص کنید که هیچ سه تایی آنها همخط نباشند،

دانلود از سایت ریاضی سرا

وهریک از ۱۰ پاره خطی را که هر زوج از نقاط را به هم وصل می کند بایکی از دو رنگ قرمز یا سفید رنگ کنید. با چنین پیکربندی، هیچ مثلث رنگی به وجود نخواهد آمد. (توجه کنید که اگر تعداد چنین نقاطی ۵ تا باشد نتیجه می شود که ۶، کمترین تعداد است).

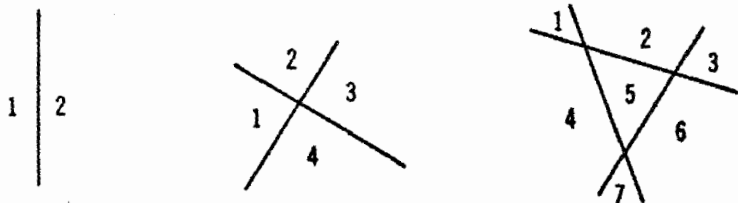
۱۷.۴ نقطه را که هیچ سه تایی آنها همخط نباشند در نظر بگیرید که هر یک از پاره خطهایی که این نقاط را به هم وصل می کند قرمز، سفید یا آبی باشند. ثابت کنید که الگوی رنگی موجود هر چه باشد، یک مثلث رنگی وجود دارد. (خواننده ممکن بود بخواهد مسأله مشابهی را برای یک عدد صحیح بزرگتر از ۱۷ حل کند، عدد ۱۷ کوچکترین عددی است که می توان در این مسأله به کار برد، بدین معنا که این حکم برای ۱۶ نقطه یا کمتر از آن درست نیست. اما برهان اینکه ۱۷ کوچکترین عدد است در سال ۱۹۵۵ توسط گرین وود^۱ و گلیسن^۲ داده شده است، که از سطح این کتاب بالاتر است).

مسائل اضافی مربوط به مثلثهای رنگی در مسائل گوناگون که در دنباله فصل ۱۱ آمده اند گنجانده شده اند.

۳.۹ تفکیک صفحه

در صفحه ای n خط مستقیم را طوری در نظر می گیریم که در شرایط زیر صدق کنند: (۱) هر خط در هر دو جهت نامتناهی باشد. (۲) هیچ دو خطی موازی نباشند. (۳) هیچ سه خطی متقارب نباشند، یعنی از یک نقطه نگذرند. صفحه به وسیله این n خط به چند ناحیه تفکیک می شود؟ فرض کنیم $f(n)$ تعداد ناحیه هایی باشد که به وسیله این n خط در صفحه ایجاد می شوند؛ بایک بررسی ساده درمی یابیم که $f(1) = 2$ ، $f(2) = 4$ ، $f(3) = 7$. (شکل ۲.۹ را ببینید). در حالت کلی، مسأله عبارت از محاسبه $f(n)$ است.

برای حل این مسأله از تکنیکی که قبلاً در بخش ۸.۳ به کار رفت استفاده می کنیم. این روش عبارت از تعیین تفاضلهای $f(k) - f(k-1)$ به ازای $k = 2, 3, \dots, n$ و تعیین مجموع آنهاست. این مجموع درست برابر $f(n) - f(1)$ است، زیرا هر جمله میانی ابتدا کم و سپس اضافه می شود. چنین مجموعی را مجموع «تلسکوپی» گویند. در این حالت برای تعیین عبارات مربوطه، $n-1$ خط مستقیمی



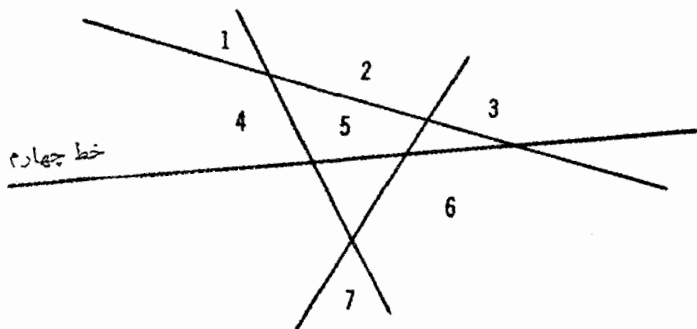
شکل ۲.۹

را که صفحه را به $f(n-1)$ ناحیه تقسیم می کند در نظر می گیریم. اکنون n امین خط را دخالت می دهیم. این n امین خط در دوردست - دورتر از هر نقطه تقاطع - هر ناحیه را به دو قسمت تقسیم می کند. آن گاه اگر در طول خط حرکت کنیم می بینیم هر وقت که این n امین خط، یکی از خطهای دیگر را قطع می نماید ناحیه دیگری را به دو قسمت تقسیم می کند، مثلاً؛ فرض کنیم $n=4$ ؛ اگر در امتداد خط چهارم در شکل ۳.۹ از چپ به راست حرکت کنیم می بینیم این خط به ترتیب که سه خط دیگر را قطع می کند ناحیه «۲» و سپس ناحیه های «۵» و «۶» و «۳» را تقسیم می کند. بنابراین خط چهارم ۴ ناحیه جدید به وجود می آورد. با همین استدلال نتیجه می گیریم که خط n ام n ناحیه جدید ایجاد می کند، و این واقعیت را با معادله

$$f(n) = n + f(n-1),$$

$$f(n) - f(n-1) = n, \quad (1.9)$$

بیان می کنیم.



شکل ۳.۹

اکنون روش مجموع «تلسکوپی» را به کار می‌بریم؛ یعنی معادله (۱.۹)، و به دنبال آن همتهایی را که از قرارداد متوالی $1, n-1, n-2, \dots, 3, 2$ به جای n در (۱.۹) حاصل می‌شوند، می‌نویسیم

$$f(n) - f(n-1) = n,$$

$$f(n-1) - f(n-2) = n-1,$$

$$f(n-2) - f(n-3) = n-2,$$

.....

$$f(3) - f(2) = 3,$$

$$f(2) - f(1) = 2.$$

وقتی که این معادله‌ها با هم جمع می‌شوند، مجموع تمام اعضای سمت چپ فقط برابر $f(n) - f(1)$ است. پس داریم:

$$f(n) - f(1) = 2 + 3 + \dots + (n-2) + (n-1) + n.$$

سمت راست این معادله مجموع اعداد طبیعی متوالی از ۲ تا n است. حال طبق بخش ۸.۳، مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا n برابر $n(n+1)/2$ است، و بنابراین:

$$f(n) - f(1) = \frac{n(n+1)}{2} - 1.$$

سپس به جای $f(1)$ مقدار آن یعنی ۲ را قرار داده، و برای به دست آوردن جواب نهایی به دو طرف برابری عدد ۲ را اضافه می‌کنیم،

$$f(n) = \frac{n(n+1)}{2} + 1 = \frac{n^2 + n + 2}{2}. \quad (2.9)$$

به عنوان تشریح دیگری از روش «مجموع تلسکوپی»، مسأله زیر را در نظر می‌گیریم.

مسأله فرض کنیم $n+k$ خط مستقیم در صفحه وجود دارند که در این شرایط صدق می‌کنند: (۱) k تا از این خطوط با یکدیگر موازی اند. (۲) حالت‌های دیگری

از خطوط موازی وجود ندارند. (۳) هیچ سه خطی از این $n+k$ خط، متقارب نیستند. به وسیله این $n+k$ خط، صفحه به چند ناحیه تقسیم می شود؟

حل: فرض کنیم $G(n, k)$ تعداد ناحیه های جدا از هم را نشان دهد. مثلاً $G(1, 2) = 6$ ، $G(2, 2) = 10$. در این حالت می توان در استدلالی که به معادله (۱.۹) منجر شد تغییری صورت داد تا نوعی معادله مشابه به دست آید، یعنی اثر دخالت دادن k امین خط موازی را بررسی کرده، سپس تعداد ناحیه های جدا از هم را از $G(n, k-1)$ به $G(n, k)$ تغییر می دهیم. k امین خط موازی، n خط را قطع می کند و بنابراین $n+1$ ناحیه جدید به وجود می آورد. بنابراین:

$$G(n, k) = n + 1 + G(n, k - 1),$$

یا

$$G(n, k) - G(n, k - 1) = n + 1. \quad (3.9)$$

دوباره این معادله و همتهای آن را که از قراردادن مقادیر $k-1$ ، $k-2$ ، $\dots$ ، 1 به جای k به دست می آیند به دنبال یکدیگر می نویسیم:

$$G(n, k) - G(n, k - 1) = n + 1,$$

$$G(n, k - 1) - G(n, k - 2) = n + 1,$$

$$G(n, k - 2) - G(n, k - 3) = n + 1,$$

.....

$$G(n, 3) - G(n, 2) = n + 1,$$

$$G(n, 2) - G(n, 1) = n + 1,$$

$$G(n, 1) - G(n, 0) = n + 1.$$

در این جا k معادله داریم که مقدار سمت راست هر کدام برابر $n+1$ است. وقتی این معادله ها را با هم جمع می کنیم، مجموع اعضای سمت راست برابر $k(n+1)$ ، و مجموع اعضای سمت چپ برابر $G(n, k) - G(n, 0)$ است. بنابراین

$$G(n, k) - G(n, 0) = k(n + 1).$$

نماد $G(n, 0)$ تعداد ناحیه هایی را نشان می دهد که به وسیله n خطی که هیچکدام

باهم موازی نبوده و هیچ سه‌تای آنها متقارب نیستند ایجاد شده‌اند؛ این تعداد برابر $f(n)$ در مسئله قبل است، و بنا بر این می‌توانیم با استفاده از معادله (۲.۹) به دست آوریم

$$G(n, k) - \frac{n^2 + n + 2}{2} = k(n+1),$$

یا

$$G(n, k) = \frac{n^2 + 2nk + n + 2k + 2}{2}.$$

مجموعه مسائل ۳۲

۱. n خط مستقیم در صفحه در نظر بگیرید که هیچ دو‌تای آنها موازی نباشند. اما سه‌تا و فقط سه‌تا از این خطها متقارب باشند. صفحه به وسیله این خطها به چند ناحیه تقسیم می‌شود؟

۲. مجموعه‌ای از k خط موازی در یک صفحه به وسیله مجموعه دیگری از m خط موازی قطع می‌شود. صفحه به چند ناحیه تقسیم می‌شود؟

۳. در مسئله قبل خط دیگری را دخالت می‌دهیم که نه با هیچیک از خطهای قبلی موازی است و نه از هیچیک از mk نقطه تلاقی قبلی می‌گذرد. صفحه به چند ناحیه تقسیم می‌شود؟

۴. فرض کنیم در صفحه‌ای $t+q$ خط مستقیم وجود دارند که در شرایط زیر صدق می‌کنند: هیچ دو خطی موازی باهم نیستند؛ q تا از این خطها از نقطه معین A می‌گذرند؛ t تا از این خطها از نقطه دیگر B می‌گذرند؛ هیچ خطی از دو نقطه A و B نمی‌گذرد. صفحه به چند ناحیه تقسیم می‌شود؟

۵. فرض کنیم در صفحه $k+q$ خط مستقیم وجود دارند که در شرایط زیر صدق می‌کنند: k تا از این خطها باهم موازی‌اند؛ هیچ موارد دیگری از خطهای موازی وجود ندارند؛ q خط که با هیچیک از k خط موازی نیستند از نقطه معین A می‌گذرند. صفحه به چند ناحیه تقسیم می‌شود؟

۶. علاوه بر $k+q$ خط مسئله قبلی، n خط مستقیم دیگر را در صفحه فرض می‌کنیم

به طوری که حالت‌های دیگری از توازی غیر از آن k خط موازی، و حالت‌های دیگری از تقارب غیر از آن q خط که از نقطه A می‌گذرد وجود ندارند. صفحه به چند ناحیه تقسیم می‌شود؟

۴.۹ خلاصه

در ساده‌ترین صورت، اصل لانه کبوتر بیان می‌کند که اگر $n+1$ کبوتر در n لانه قرار بگیرند، آن گاه حداقل یکی از لانه‌ها شامل دو یا چند کبوتر است. به طور کلیتر اگر $kn+1$ کبوتر در n لانه قرار بگیرند، آن گاه حداقل یکی از لانه‌ها شامل $k+1$ یا تعداد بیشتری کبوتر است.

با استفاده از اصل لانه کبوتر ثابت می‌شود که وقتی شش نقطه در صفحه‌ای مفروض بوده و هیچ سه تایی از آنها هم‌خط نباشند، اگر هر يك از ۱۵ پاره خطی را که زوج‌های نقاط را به هم وصل می‌کنند با یکی از دو رنگ رسم کنیم، آن گاه برای هر الگوی رنگی ممکن، يك مثلث رنگی موجود است. منظور از «مثلث رنگی» مثلی است که سه ضلع آن دارای يك رنگ‌اند.

با استفاده از روش «مجموع تلسکوپی» ثابت می‌شود که هر صفحه به وسیله n خط مستقیمی که در شرایط زیر صدق کنند، به $(n^2+n+2)(1/2)$ ناحیه تقسیم می‌شود:

(الف) هیچ دو خطی موازی نباشند، و (ب) هیچ سه خطی متقارب نباشند. حالت نسبتاً کلی‌تری به وسیله همین روش مطرح شده است، و تعمیم‌های دیگری در مسائل ارائه شده‌اند.



استقرای ریاضی

مجموع اعداد صحیح فرد را در نظر می گیریم:

$$1 = 1,$$

$$1 + 3 = 4,$$

$$1 + 3 + 5 = 9,$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16,$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25,$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36.$$

(۱۰۱۰)

الگوی روشنی در مجموعه‌های ۱، ۴، ۹، ۱۶، ۲۵، ۳۶ ظاهر می‌شود: این اعداد مربعهای اعداد طبیعی ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ هستند. این برابریها حکمی کلی را القا می‌کنند که مجموع n عدد فرد صحیح مثبت برابر n^2 است، یا، به زبان نمادها:

$$1+3+5+7+\dots+(2n-1)=n^2 \quad (2.10)$$

البته تحقق چند حالت اول برابریهای (۱.۱۰)، صحیح بودن فرمول کلی (۲.۱۰) را برای هر عدد صحیح مثبت به هیچ وجه تضمین نمی کند. شاید ساده ترین راه برای اثبات فرمول (۲.۱۰)، که به ازای هر عدد صحیح مثبت n معتبر است، استفاده از استقرای ریاضی باشد.

۱.۱.۰ اصل استقرای ریاضی

برای نشان دادن برابری (۲.۱۰) از نماد P_n استفاده می کنیم. به هر عدد صحیح مثبت n ، برابری به صورت (۲.۱۰) متناظر می شود؛ مثلاً، برابریهای که در (۱.۱۰) فهرست شده اند، برابریهای از این نوع اند، و ما آنها را با P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 و P_6 نشان می دهیم. بعلاوه با محاسبه واقعی می توان گفت که تمام شش گزاره برابری راست هستند. حکم «به ازای هر عدد صحیح مثبت n ، P_n راست است» واقعاً تمام بینهایت حکم « P_1 راست است، P_2 راست است، P_3 راست است، ...» را شامل است. تا کنون تنها ثابت کرده ایم که $P_1, P_2, P_3, \dots, P_6$ راست اند، و می خواهیم ثابت کنیم که تمام این (بینهایت) گزاره راست هستند. اصل استقرای ریاضی بیان می کند که می توانیم راست بودن هرچنین دنباله نامتناهی از گزاره ها را ثابت کنیم اگر بتوانیم اثبات نماییم که

(i) P_1 راست است؛

(ii) به ازای هر عدد صحیح مثبت k ، از P_k نتیجه می شود.

راه دیگری برای بیان (ii) عبارت است از « P_k, P_{k+1} را نتیجه می دهد» و یا « P_{k+1} از P_k نتیجه می شود».

منظور آن است که اگر بتوانیم (ii) را، یعنی، P_{k+1} از P_k نتیجه می شود، را ثابت کنیم آن گاه می توانیم نتیجه بگیریم که:

P_1, P_2 را نتیجه می دهد،
 P_2, P_3 را نتیجه می دهد،
 P_3, P_4 را نتیجه می دهد،
 P_4, P_5 را نتیجه می دهد،

و غیره. بنا براین اگر (i) را ثابت کنیم اولین حلقه این زنجیر را به دست خواهیم

آورد، و راست بودن $P_۲, P_۳, P_۴, P_۵$ و غیره به وسیله (ii) از راست بودن $P_۱$ نتیجه می شوند.

حال به حالت خاصی که در آن حکم P_n ، برابری (۲.۱۵) است برمی گردیم. در این جا برای (i) مشکلی وجود ندارد، زیرا $P_۱$ صرفاً $۱ = ۱$ است. برای اثبات (ii) باید نشان دهیم که رابطه

$$P_k: 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2k - 1) = k^2$$

نتیجه می دهد:

$$P_{k+1}: 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2k - 1) + (2k + 1) = (k + 1)^2;$$

یعنی باید P_k را فرض گرفته و P_{k+1} را از آن نتیجه بگیریم. با فرض حکم P_k ، به دو طرف برابری، $۲k + ۱$ را اضافه می کنیم:

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2k - 1) + (2k + 1) &= k^2 + (2k + 1) \\ &= k^2 + 2k + 1 \\ &= (k + 1)^2. \end{aligned}$$

بنابراین P_{k+1} از P_k نتیجه می شود، و ما به ازای تمام اعداد صحیح مثبت n ، معتبر بودن برابری (۲.۱۵) را ثابت کرده ایم، به عنوان مثال دوم، مجموع مکعبهای اعداد طبیعی را در نظر می گیریم:

$$\begin{aligned} 1^3 &= 1, \\ 1^3 + 2^3 &= 9, \\ 1^3 + 2^3 + 3^3 &= 36, \\ 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 &= 100, \\ 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 &= 225, \\ 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 &= 441. \end{aligned} \quad (3.15)$$

اعداد ۱، ۹، ۳۶، ۱۰۰، ۲۲۵، ۴۴۱، در طرف راست برابریهای بالا، همگی مربع اند، یعنی مربع اعداد ۱، ۳، ۶، ۱۰، ۱۵، ۲۱ هستند. اگر به مثلث پاسکال در

صفحه ۴۴ نظری بیفکنیم، توجه می‌کنیم که این اعداد در سومین ستون قائم قرار دارند، و بنا بر این می‌توانیم آنها را بر حسب نمادهای ترکیب بنویسیم:

$$C(2, 2), C(3, 2), C(4, 2), C(5, 2), C(6, 2), C(7, 2).$$

آیا $C(n+1, 2)$ عدد بخصوصی است که مربع آن برابر مجموع مکعبهای اعداد طبیعی از ۱ تا n است؟ چون

$$C(n+1, 2) = \frac{1}{2}n(n+1),$$

این حدس می‌تواند به وسیله

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + n^3 = [C(n+1, 2)]^2 \quad (4.10)$$

$$= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2,$$

بیان شود.

اکنون (۴.۱۰) را به عنوان گزاره P_n ، یا به عنوان يك گردایه نامتناهی از گزاره‌ها، اولی برای $n=1$ ، دومی برای $n=2$ ، سومی برای $n=3$ و غیره، در نظر می‌گیریم. در این صورت برابریهای (۳.۱۰)، گزاره‌های P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 و P_6 هستند. برای اثبات P_n ، با استفاده از استقرای ریاضی، باید (i)، یعنی P_1 راست است است را و (ii)، یعنی به ازای هر عدد صحیح مثبت k از P_k ، نتیجه می‌شود را ثابت کنیم. اکنون P_1 ، اولین برابری (۳.۱۰) صرفاً بیان می‌کند که $1^3 = 1$ و این، به وضوح راست است.

قبل از اثبات (ii)، با قراردادن k به جای n ، و سپس $k+1$ به جای n در (۴.۱۰)، P_k و P_{k+1} را به تفصیل می‌نویسیم،

$$P_k: 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + k^3 = \frac{1}{4}k^2(k+1)^2;$$

$$P_{k+1}: 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{1}{4}(k+1)^2(k+2)^2.$$

P_k را می‌پذیریم و P_{k+1} را ثابت می‌کنیم. به دو طرف برابری P_k ، مقدار

$(k+1)^3$ را اضافه می‌کنیم، به دست می‌آوریم،

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{1}{4}k^2(k+1)^2 + (k+1)^3.$$

سؤال این است که آیا این رابطه همان P_{k+1} است یا نه؟ با استفاده از جبر پایه‌ای خواهیم دید که این رابطه همان P_{k+1} است.

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}k^2(k+1)^2 + (k+1)^3 &= (k+1)^2 \left[\frac{1}{4}k^2 + (k+1) \right] \\ &= (k+1)^2 \left[\frac{k^2 + 4k + 4}{4} \right] \\ &= \frac{1}{4}(k+1)^2(k+2)^2. \end{aligned}$$

و بنابراین برهان (۴.۱۰) کامل می‌شود.

مجموعه مسائل ۳۳

۱. با استقرای ریاضی ثابت کنید که $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = (1/2)n(n+1)$.

۲. با استقرای ریاضی ثابت کنید که

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

۳. فرض کنیم $K(n)$ معرف تعداد زوجهای نامرتب اعداد صحیح منتخب از ۱، ۲، ۳، ...، n ، با این محدودیت که هیچ زوجی دو عدد متوالی نیستند، باشد. مثلاً $K(5)$ تعداد زوجهای

$$1, 3 \quad 1, 4 \quad 1, 5 \quad 2, 4 \quad 2, 5 \quad 3, 5$$

است و بنابراین $K(5) = 6$. با چنین شمارشی می‌توان تعیین کرد که:

$$K(3) = 1 \quad K(4) = 3 \quad K(5) = 6$$

$$K(6) = 10 \quad K(7) = 15 \quad K(8) = 21.$$

از روی این اطلاعات، برای $K(n)$ مقداری را حدس بزنید و اگر امکان دارد حدس خود را با استفاده از استقرای ریاضی ثابت کنید.

۴. بعضی از برابریهای زیر به ازای تمام اعداد صحیح مثبت n برقرارند. سعی کنید با استقرای ریاضی آنها را ثابت نمایید.

$$1 + 4 + 7 + 10 + \dots + (3n - 2) = n^2 + n - 1; \quad (\text{الف})$$

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + n(n+1) = \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{3}; \quad (\text{ب})$$

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{4n^3 - n}{3}; \quad (\text{پ})$$

$$1 \times 3 + 3 \times 5 + 5 \times 7 + \dots + (2n-1)(2n+1) = \frac{5n^3 + 10n - 6}{3}; \quad (\text{ت})$$

$$1 \times 2 + 3 \times 3 + 5 \times 4 + 7 \times 5 + \dots + (2n-1)(n+1) = \frac{n^2 + 5n^2 - 4n + 2}{2}; \quad (\text{ث})$$

$$1 \times 1 \times 2 + 2 \times 2 \times 3 + 3 \times 3 \times 4 + \dots + n \times n \times (n+1) = \frac{n(3n^3 + 10n^2 + 9n + 2)}{12}; \quad (\text{ج})$$

۲.۱۰ نمادگذاری برای مجموعه‌ها و حاصلضربها

برای نوشتن معادله‌ای مانند

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

بر حسب نماد، مشکلی وجود دارد. در حالی که به ازای $n=10$ ، در معنای $1 + 2 + 3 + \dots + n$ هیچ شک و تردیدی موجود نیست، در حالت $n=2$ باید

$1+2+3+\dots+n$ را تنها به صورت $1+2$ تفسیر کنیم. برای اجتناب از این ابهام و درعین حال به دلیل جمع و جور بودن زیاد، نمادی به صورت

$$\sum_{j=1}^n j \text{ به جای } 1+2+3+\dots+n$$

وجود دارد. این نماد به صورت «سیگما j ، j مساوی ۱ تا n » خوانده می‌شود. و به معنای «مجموع تمام مقادیر j از $j=1$ تا $j=n$ » است. چند مثال دیگر ارائه می‌شوند:

$$\sum_{j=1}^n j^2 \text{ به معنای } 1^2+2^2+3^2+\dots+n^2$$

$$\sum_{j=1}^{100} j(j+3) \text{ به معنای } 1 \times 4 + 2 \times 5 + 3 \times 6 + 4 \times 7 + \dots + 100 \times 103$$

$$\sum_{j=1}^n (j^3+1) \text{ به معنای } (1^3+1)+(2^3+1)+(3^3+1)+\dots+(n^3+1)$$

$$\sum_{j=4}^{n-1} (j^3+1) \text{ به معنای } ((n-1)^3+1)+\dots+(4^3+1)$$

هستند. توجه می‌کنیم که عاملهای ثابت را می‌توان به سمت چپ سیگما انتقال داد:

$$\sum_{j=1}^n 4j^2 = 4 \sum_{j=1}^n j^2, \quad \sum_{j=1}^n 5(j^3+1) = 5 \sum_{j=1}^n (j^3+1); \quad (6.10)$$

دلیل، این است که عامل ثابت در هر يك از جمله‌های مجموع ضرب می‌شود و بنابراین می‌تواند به صورت يك عامل در جلوی مجموع کل قرار گیرد. همچنین توجه می‌کنیم عبارتهایی را که شامل چندین جمله‌اند می‌توان به صورت مجموعه‌های جمله‌ها نوشت. مثلاً:

$$\sum_{j=1}^n (j^2+3j) = \sum_{j=1}^n j^2 + \sum_{j=1}^n 3j, \quad (7.10)$$

$$\sum_{j=1}^n (j^3+3j^2-j) = \sum_{j=1}^n j^3 + \sum_{j=1}^n 3j^2 - \sum_{j=1}^n j.$$

و این فقط پیامد دسته‌بندی مجدد جمله‌هاست.

مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا n و مجموع مربعات آنها در فصل ۳، صفحه ۵۱

محاسبه شد. مجموع (۴۰۱۵) که مجموع مکعبهای اعداد طبیعی از ۱ تا n بود در بخش قبل با استفاده از استقرای ریاضی به دست آمد. با استفاده از نماد سیگما، این مجموعه را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\sum_{j=1}^n j = \frac{1}{2}n(n+1),$$

$$\sum_{j=1}^n j^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1), \quad (۸.۱۵)$$

$$\sum_{j=1}^n j^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2.$$

توجه کنید که نماد $\sum$ يك نماد «ظاهری» است و به جای دو فرمول اول در (۸.۱۵) می توان فرمولهای

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1), \quad \sum_{r=1}^n r^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

را نوشت. اکنون می خواهیم برای محاسبه مجموع

$$1 \times 1 \times 2 + 2 \times 2 \times 3 + 3 \times 3 \times 4 + \dots + n \times n \times (n+1),$$

نماد سیگما را به کار ببریم. مجموع فوق را به صورت زیر می نویسیم:

$$\sum_{j=1}^n (j^3 + j^2) \quad \text{یا} \quad \sum_{j=1}^n j^2(j+1).$$

با استفاده از ویژگی که در (۷.۱۵) شرح داده شده است و با استفاده از فرمولهای (۸.۱۵)، به دست می آوریم

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n (j^3 + j^2) &= \sum_{j=1}^n j^3 + \sum_{j=1}^n j^2 \\ &= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 + \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \\ &= n(n+1)(n+2)(3n+1)/12, \end{aligned}$$

که در آن محاسبات جبری ساده‌ای را که برای رسیدن به فرمول آخر لازم است حذف کرده‌ایم.

به عنوان مثالی دیگر، مجموع

$$1 + 2 + 7 + 10 + \dots + (3n - 2)$$

را در نظر می‌گیریم که با استفاده از نماد سیگما، می‌توان آن را به صورت

$$\sum_{j=1}^n (3j - 2)$$

نوشت. مجدداً با استفاده از (۸.۱۰) و با استفاده از ویژگیهای پایه‌ای مشروح بالا، داریم:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n (3j - 2) &= \sum_{j=1}^n 3j - \sum_{j=1}^n 2 = 3 \sum_{j=1}^n j - \sum_{j=1}^n 2 \\ &= \frac{3n(n+1)}{2} - 2n = \frac{n(3n-1)}{2}. \end{aligned}$$

مجموعه‌هایی که جمله‌های آنها متناوباً علامت بعلاوه و منها دارند با کمک $(-1)^j$ به صورت نماد سیگما نوشته می‌شوند؛ مثلاً

$$\sum_{j=1}^8 (-1)^j j^2 = -1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - 5^2 + 6^2 - 7^2 + 8^2,$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^7 (-1)^j C(7, j) &= C(7, 0) - C(7, 1) + C(7, 2) - C(7, 3) \\ &\quad + C(7, 4) - C(7, 5) + C(7, 6) - C(7, 7). \end{aligned}$$

به عنوان مثالی دیگر، فرمولی را که در فصل ۸، برای تعداد توزیعهای m شیء متمایز در داخل k جعبه متمایز بدون وجود هیچ جعبه تهی، داده شد در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} f(m, k) &= k^m - C(k, 1)(k-1)^m + C(k, 2)(k-2)^m \\ &\quad - C(k, 3)(k-3)^m + \dots + (-1)^{k-1} C(k, k-1)(1)^m. \end{aligned}$$

این فرمول را می‌توان به صورت فشرده

$$f(m, k) = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j C(k, j) (k-j)^m$$

نوشت.

همچنین در فصل ۸ تعداد افرازهای يك مجموعه از m عنصر (متمايز) را، به k زیر مجموعه (نامتمايز) که هيچيك از زیر مجموعه ها تهی نباشند، با $g(m, k)$ نشان دادیم، و رابطه

$$g(m, k) = \frac{f(m, k)}{k!}$$

را به دست آوردیم. لذا شکل فشرده $g(m, k)$ به صورت

$$g(m, k) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^j C(k, j) (k-j)^m}{k!}$$

خواهد بود. اگر در این فرمول به جای $C(k, j)$ از صورت فاکتوریل آن استفاده کنیم، $k!$ حذف شده و نتیجه به صورت

$$g(m, k) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^j (k-j)^m}{j! (k-j)!},$$

در می آید.

برای حاصلضربها نیز نماد اختصاری مناسب وجود دارد؛ به جای حرف بزرگ سیگما، در اینجا حرف بزرگ یونانی $\prod$ به کار می رود. مثلاً، $n!$ را می توان به صورت

$$n! = \prod_{j=1}^n j$$

نوشت.

مثالهای دیگری از این قرارند:

$$\prod_{j=1}^n (j^2 + 1) \text{ به معنای } (1^2 + 1)(2^2 + 1)(3^2 + 1) \dots (n^2 + 1)$$

$$\prod_{j=1}^n (3j - 1) \text{ به معنای } 2 \times 5 \times 8 \times 11 \times \dots \times (3n - 1)$$

$$\prod_{j=1}^7 (1+x^j) \text{ به معنای}$$

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)(1+x^6)(1+x^7)$$

هستند.

مجموعه مسائل ۳۴

۱. بدون استفاده از نماد سیگما مجموعه‌های زیر را بیان کنید:

$$\text{الف) } \sum_{j=1}^5 j^2 \quad \text{ب) } \sum_{j=1}^4 (2j^2 - 1) \quad \text{پ) } \sum_{k=3}^6 (k^2 + 2)$$

۲. با استفاده از نماد سیگما و فرمولهای (۸.۱۰) مجموعه‌های زیر را محاسبه کنید:

$$\text{الف) } 3 + 6 + 9 + 12 + \dots + 3n;$$

$$\text{ب) } 2 + 5 + 8 + 11 + \dots + (3n - 1);$$

$$\text{پ) } 1 \times 3 + 3 \times 5 + 5 \times 7 + 7 \times 9 + \dots + (2n - 1)(2n + 1);$$

$$\text{ت) } 1 \times 2 + 3 \times 3 + 5 \times 4 + 7 \times 5 + \dots + (2n - 1)(n + 1);$$

$$\text{ث) } 5 + 9 + 13 + 17 + 21 + \dots + (4n + 1).$$

۳. برای مجموعه‌های زیر فرمولهایی مشابه فرمولهای (۸.۱۰) بنویسید

$$\text{الف) } 1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1);$$

$$\text{ب) } 1 + 2 + 3 + \dots + (n + 1);$$

$$\text{پ) } 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n + 1)^2.$$

۴. مقدار عددی

$$\sum_{j=-1}^{100} (-1)^j \cdot j$$

را تعیین کنید.

۰۵ معادله

$$C(n, 0) + C(n, 1) + C(n, 2) + C(n, 3) + \dots + C(n, n) = 2^n$$

را برحسب نماد سیگما بنویسید.

۰۶ مجموع

$$\sum_{j=0}^n (-1)^j C(n, j)$$

را به صورت یکی از مجموعه‌هایی که قبلاً در این کتاب مورد بحث قرار گرفته است مشخص کنید، و سپس مقدار آن را به دست آورید.

۰۷ با استقرای ریاضی ثابت کنید که:

$$\sum_{j=0}^n 2^j = 2^{n+1} - 1$$

سپس ثابت کنید که در مثلث پاسکال (صفحه ۴۴)، مجموع عناصر هر سطر مساوی با مجموع عناصر سطر قبلی به علاوه یک است.

۰۸ حاصلضرب $\prod_{j=2}^6 (j+1)$ را محاسبه کنید.۰۹ حاصلضرب $\prod_{j=1}^n (2j)$ را برحسب نماد فاکتوریل بیان کنید.

۰۱۰ درستی برابری

$$\prod_{j=1}^n (2j-1) = \frac{(2n)!}{2^n \cdot n!}$$

را تحقیق کنید.

۰۱۱ فرض کنیم $f(n)$ با

$$f(n) = \sum_{j=1}^n j \cdot j!$$

تعریف شده باشد. تحقیق کنید که $f(1) = 1$ ، $f(2) = 5$ ، $f(3) = 23$ ، و مقادیر

عددی $f(4)$ ، $f(5)$ و $f(6)$ را تعیین کنید. آن گاه این مقادیر را با مقادیر عددی $2!$ ، $3!$ ، $4!$ ، $5!$ ، $6!$ و $7!$ مقایسه کرده، فرمولی برای $f(n)$ حدس بزنید و سعی کنید با استقرای ریاضی آن را ثابت کنید.

۳.۱۰ خلاصه

روش اثباتی را که به نام استقرای ریاضی معروف است می توان برای اثبات دنباله ای نامتناهی از گزاره های P_1 ، P_2 ، P_3 ، ...، به کار برد، به شرط آنکه بتوانیم ثابت کنیم که

(i) P_1 راست است،

(ii) P_{k+1} به ازای هر عدد صحیح مثبت k از P_k نتیجه می شود.

نماد سیگما برای مجموعه ها، و نماد پی برای حاصلضربها توضیح داده شده اند.

تعبیرهای حاصلضرب شرکت ناپذیر

عبارت ریاضی

۲۳۴

را در نظر بگیرد. به نظر می‌رسد که دو راه تعبیر برای این عبارت وجود دارد - یکی، شروع با ۲۳ سپس تعبیر عبارت به صورت $۸^۴$ ؛ و دیگری، شروع با $۳^۴$ و سپس تعبیر عبارت به صورت $۲^{۸۱}$. این دو راه به دو نتیجه متفاوت می‌رسند، زیرا $۸^۴$ برابر ۴۰۹۶ است در صورتی که $۲^{۸۱}$ عددی بسیار بزرگتر است. این دو تعبیر را می‌توان با استفاده از پراتز مشخص کرد؛ بنابراین

$$(۱۰۱۱) \quad ۸^۴ = (۲^۳)^۴, \quad ۲^{۸۱} = ۲^{(۳^۴)}, \quad \text{و} \quad ۲^{(۳^۴)} \neq (۲^۳)^۴.$$

حال واقعیت آن است که قرارداد یا توافقی در ریاضی وجود دارد که به چه صورتی دقیقاً باید $۲^{۳۴}$ را تعبیر کرد، و آن، صورت دوم در (۱۰۱۱) است،

$$۲^{۲۴} = ۲^{(۳^۴)} = ۲^{۸۱}.$$

برای هدفهای این فصل این قرارداد را نادیده می گیریم. رابطه‌های (۱.۱۱) را به عنوان اثباتی برای شرکت پذیر نبودن عمل به توان رساندن، درمقابل با مثلاً جمع و ضرب، مورد توجه قرار می دهیم؛

$$(۲+۳)+۴=۲+(۳+۴), \quad (۲ \times ۳) \times ۴ = ۲ \times (۳ \times ۴).$$

با نادیده گرفتن مفهومی قراردادی برای عبارتهایی مانند

$$a^{b^{c^d}} \quad \text{یا} \quad ۲^{۳^{۴^۵}} \quad (۲.۱۱)$$

از خود می پرسیم وقتی ۴ عدد بدین طریق به صورت نمایی در بالای هم قرار می گیرند، چند تعبیر برای آنها وجود دارد؟ به طور کلیتر، وقتی n عدد به صورت نمایی بالای هم قرار می گیرند چند تعبیر برای آنها وجود دارد؟

۱.۱۱ رابطه بازگشتی

برای ساده کردن نحوه نوشتن، دومین عبارت (۲.۱۱) را آن چنان می نویسیم که گویی «حاصلضرب $abcd$ » است. از قبل فرض می کنیم که چنین «حاصلضربهایی» شرکت پذیر نباشند، بنا بر این حاصلضرب سه تایی $a(bc)$ و $(ab)c$ متفاوت اند. تمام تعبیرهای ممکن يك حاصلضرب چهار تایی را می توان به آسانی شمارش کرد:

$$a((bc)d), a(b(cd)), (ab)(cd), (a(bc))d, ((ab)c)d. \quad (۳.۱۱)$$

فرض کنیم $F(n)$ تعداد تعبیرهای يك حاصلضرب n تایی شرکت ناپذیر باشد؛ در این صورت شمارش (۳.۱۱) نشان می دهد که $F(۴) = ۵$. همچنین به دلیل دو حالت $a(bc)$ و $(ab)c$ ، می دانیم که $F(۳) = ۲$. برای حاصلضرب دو تایی ab تنها يك تعبیر وجود دارد و همچنین برای حاصلضرب يك تایی a ، تنها يك تعبیر وجود دارد، و بنا بر این می توانیم بنویسیم $F(۲) = ۱$ و $F(۱) = ۱$.

مسئله کلی این فصل محاسبه $F(n)$ ، تعداد تعبیرهای حاصلضرب n تایی

$$x_1 x_2 x_3 \cdots x_n \quad (۴.۱۱)$$

است، که ویژگی شرکت پذیری را ندارد. می توان تصور کرد که $F(n)$ برابر تعداد

راههای قراردادن پرانتزها در (۴.۱۱) است به طوری که عبارت مبهم نباشد. برای تشریح آنچه در این باره انجام می‌دهیم، حالت خاص $n=6$ را در نظر می‌گیریم. برای پرانتزگذاری در يك حاصلضرب شش تایی، اولین قدم ممکن تفكيك حاصلضرب به دو بخش است. این عمل می‌تواند به هر يك از پنج راه زیر انجام شود:

$$\begin{aligned}
 & x_1(x_2x_3x_4x_5x_6), & \text{(الف)} \\
 & (x_1x_2)(x_3x_4x_5x_6), & \text{(ب)} \\
 & (x_1x_2x_3)(x_4x_5x_6), & \text{(پ)} \quad (5.11) \\
 & (x_1x_2x_3x_4)(x_5x_6), & \text{(ت)} \\
 & (x_1x_2x_3x_4x_5)x_6. & \text{(ث)}
 \end{aligned}$$

به چند طریق می‌توان پرانتزهای دیگر را قرار داد؟ در عبارت (الف)، $F(5)$ تعبیر از $x_2x_3x_4x_5x_6$ وجود دارند. در عبارت (ب)، $F(4)$ تعبیر از $x_3x_4x_5x_6$ موجود است. در عبارت (پ)، برای هر يك از $x_1x_2x_3$ و $x_4x_5x_6$ ، $F(3)$ تعبیر وجود دارد و بنابراین در كل برای این حالت $F(3) \times F(3)$ تعبیر موجود است. عبارت‌های (ت) و (ث) به ترتیب با عبارت‌های (ب) و (الف) مشابه‌اند. از جمع کردن كل این اطلاعات می‌بینیم که

$$F(6) = F(5) + F(4) + F(3) \times F(3) + F(4) + F(5).$$

چون $F(1) = 1$ و $F(2) = 1$ ، این رابطه را می‌توان به شکل متقارن‌تر زیر نوشت:

$$\begin{aligned}
 F(6) = & F(1)F(5) + F(2)F(4) + F(3)F(3) \\
 & + F(4)F(2) + F(5)F(1).
 \end{aligned}$$

با استدلالی مشابه می‌توانیم نتیجه بگیریم که

$$\begin{aligned}
 F(7) = & F(1)F(6) + F(2)F(5) + F(3)F(4) + F(4)F(3) \\
 & + F(5)F(2) + F(6)F(1),
 \end{aligned}$$

و به طور کلی نتیجه بگیریم که

$$F(n) = F(1)F(n-1) + F(2)F(n-2) + F(3)F(n-3) + \dots + F(n-1)F(1). \quad (6.11)$$

با استفاده از نماد سیگما برای مجموعه‌ها، رابطه بازگشتی (۶.۱۱) را می‌توان به صورت

$$F(n) = \sum_{j=1}^{n-1} F(j)F(n-j)$$

نوشت، و آن را برای محاسبه مقادیر متوالی $F(n)$ وقتی n مقادیر صعودی اعداد طبیعی را می‌گیرد به کار برد. مثلاً اگر $F(1) = 1$ و $F(2) = 1$ را به عنوان مقادیر آغاز کار در نظر بگیریم، می‌توانیم به دست آوریم که:

$$F(3) = F(1)F(2) + F(2)F(1) = 1 + 1 = 2,$$

$$F(4) = F(1)F(3) + F(2)F(2) + F(3)F(1) = 2 + 1 + 2 = 5,$$

$$F(5) = F(1)F(4) + F(2)F(3) + F(3)F(2) + F(4)F(1)$$

$$= 5 + 2 + 2 + 5 = 14,$$

وقس علی‌هذا.

مجموعه مسائل ۳۵

۱. تعداد تعبیرهای (i) يك حاصلضرب ۶ تایی، (ii) يك حاصلضرب ۷ تایی، (iii) يك حاصلضرب ۸ تایی را در يك دستگاه شرکت نا پذیر بیابید.

۲. معنی قرارداد نامبهم $5^{4^{3^2}}$ چیست؟

۳. چهارده تعبیر يك حاصلضرب ۵ تایی را که با فرمول‌بندی (۳.۱۱) متن کتاب مشابه‌اند شمارش کنید.

۲.۱۱ گسترش يك فرمول صریح

حاصلضرب شرکت نا پذیری مانند

$$(((x_1 x_2)(x_3 x_4))x_5)((x_6 x_7)x_8)x_9 \quad (7.11)$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

را در نظر بگیرید. پرانتزها، کسه برای نشان دادن آرایش شرکت عناصر به کار می روند به صورت زوج، با پرانتزی درچپ و پرانتزی در راست درهرزوج، ظاهر می شوند. به هر حاصلضرب مانند (۷.۱۱) دو عدد کسه با n و k نشان داده می شوند همراه می کنیم؛ n تعداد عناصر در حاصلضرب را نشان می دهد. [در مثال (۷.۱۱)، $n=9$] و k معرف تعداد عناصر قبل از سمت راست ترین پرانتز چپ - باز است. (در مثال (۷.۱۱) سمت راست ترین پرانتز چپ - باز بلافاصله قبل از x_9 قرار دارد و بنا براین $k=5$). به عنوان مثالی دیگر

$$x_1(x_2(((x_3(x_4x_5))x_6)x_7)) \quad (۸.۱۱)$$

را در نظر بگیرید، که در آن $n=7$ و $k=3$. در چنین حاصلضربی*، بعد از سمت راست ترین پرانتز چپ - باز، دو عنصر و پرانتز متناظرش می آیند؛ ایسن الگو در (۷.۱۱)، (x_6x_7) و در (۸.۱۱) (x_4x_5) است.

سپس تبدیلی را تعریف می کنیم که هر حاصلضربی را اختیار می کند و آن را به حاصلضربی بایک عنصر کمتر تبدیل می نماید. این تبدیل، سمت راست ترین پرانتز چپ - باز و عنصر بعد از آن و پرانتز سمت راست متناظر آن را حذف می کند، بنا براین (۷.۱۱) به

$$(((x_1x_2)(x_3x_4))x_5)((x_7x_8)x_9) \quad (۹.۱۱)$$

و (۸.۱۱) به

$$x_1(x_2(((x_3x_5)x_6)x_7)) \quad (۱۰.۱۱)$$

تبدیل می شود. در (۹.۱۱) می بینیم که $n=8$ و $k=5$ و در (۱۰.۱۱) $n=6$ و $k=2$ است.

به طور کلی، یک حاصلضرب n تایی که تعداد عناصر قبل از سمت راست ترین پرانتز چپ - باز آن برابر k است به یک حاصلضرب $(n-1)$ تایی تبدیل می شود، زیرا یک عنصر آن حذف می گردد. عبارتی که تبدیل شده است، یا قبل از سمت راست ترین پرانتز چپ - باز دارای k عنصر است (این حالتی است که آن پرانتز با پرانتز چپ - باز دیگری مجاور است)، و یا حاصلضربی که تبدیل شده است قبل از

* منظور ما از «چنین حاصلضرب»، حاصلضربی است که با درج به اندازه کافی از پرانتزها، نامبهم باشد.

آن دارای کمتر از k عنصر است.

فرض کنیم تعداد حاصلضربهای n تایی شرکت ناپذیری را که قبل از سمت راست ترین پراونز چپ - باز دقیقاً دارای k عنصرند به $F(n, k)$ نشان دهیم. نتیجه می شود که رابطه زیر برقرار است:

$$F(n, k) = F(n-1, k) + F(n-1, k-1) + F(n-1, k-2) + \dots + F(n-1, 0) \quad (11.11)$$

این مطلب را در حالت $n=5$ و $k=3$ تشریح می کنیم. پنج حاصلضرب، متناظر با این مقادیر خاص n و k وجود دارند؛ یعنی می توان گفت $F(5, 3)=5$. این پنج حاصلضرب را در ستون سمت چپ و حاصلضربهای تبدیل شده متناظر آنها را در ستون سمت راست فهرست می کنیم:

حاصلضرب	حاصلضرب تبدیل شده	n	k
$(x_1 x_2)(x_3(x_4 x_5))$	$(x_1 x_2)(x_3 x_5)$	۴	۲
$x_1(x_2(x_3(x_4 x_5)))$	$x_1(x_2(x_3 x_5))$	۴	۲
$x_1((x_2 x_3)(x_4 x_5))$	$x_1((x_2 x_3) x_5)$	۴	۱
$(x_1(x_2 x_3))(x_4 x_5)$	$(x_1(x_2 x_3)) x_5$	۴	۱
$((x_1 x_2) x_3)(x_4 x_5)$	$((x_1 x_2) x_3) x_5$	۴	۰

دو حاصلضرب تبدیل شده اولی از نوع $F(4, 2)$ ، و دو حاصلضرب بعدی از نوع $F(4, 1)$ و حاصلضرب آخری از نوع $F(4, 0)$ است. در واقع این گردهای انواع، کامل هستند، بنابراین $F(4, 2)=2$ ، $F(4, 1)=2$ ، $F(4, 0)=1$. بعلاوه هیچ حاصلضربی از نوع $F(4, 3)$ وجود ندارد و بنابراین $F(4, 3)=0$. پس، با شمارش واقعی، برابری زیر را که حالت خاص (۱۱.۱۱) است مورد تحقیق قرار داده ایم

$$F(5, 3) = F(4, 3) + F(4, 2) + F(4, 1) + F(4, 0).$$

با این مثال برهانی برای (۱۱.۱۱) القا می شود. اولاً، اگر هر حاصلضربی

از نوع $F(n, k)$ بنا بر شیوه‌ای که در بالا توصیف شد، تبدیل شود، حاصلضربی از نوعی که در سمت راست (۱۱.۱۱) فهرست شده است نتیجه می‌شود. ثانیاً، تبدیل به صورت زیر برگشت پذیر است: حاصلضربی از نوعی که در سمت راست (۱۱.۱۱) فهرست شده است اختیار کنید؛ به جای $(k+1)$ امین عنصر آن، مثل y ، دو عنصر را در پرانتز، مثل (yz) قرار دهید؛ این شیوه، حاصلضربی از نوع $F(n, k)$ به دست می‌دهد. بنا بر این بین انواع حاصلضربهایی که در دو طرف معادله (۱۱.۱۱) فهرست شده‌اند تناظری یک به یک وجود دارد، و به وسیله آن نتیجه ثابت می‌شود.

حال اگر در فرمول (۱۱.۱۱) ، $k-1$ را به جای k قرار دهیم نتیجه عبارت است از:

$$F(n, k-1) = F(n-1, k-1) + F(n-1, k-2) + F(n-1, k-3) + \dots + F(n-1, 0).$$

با کم کردن این برابری از فرمول (۱۱.۱۱) ، به دست می‌آوریم

$$F(n, k) - F(n, k-1) = F(n-1, k)$$

یا

$$F(n, k) = F(n, k-1) + F(n-1, k). \quad (۱۲.۱۱)$$

این فرمول تا اندازه‌ای به نتیجه

$$C(n, r) = C(n-1, r) + C(n-1, r-1)$$

شباهت دارد. بین توابع $F(n, k)$ و $C(n, r)$ ، ارتباطی وجود دارد که ما اکنون به وسیله مقایسه با جدولهای عددی خلاصه، این ارتباط را ظاهر می‌کنیم.

برای تهیه جدولی از مقادیر $F(n, k)$ ، (۱۲.۱۱) را همراه با برخی نتایج پایه‌ای به کار می‌بریم. چون در حالت‌های ساده $n=1$ و $n=2$ به پرانتزها احتیاجی نیست، توجه خود را به مقادیر $n \geq 3$ معطوف می‌داریم. به ازای هر مقدار n ، مقادیر متناظر k عبارت از $0, 1, 2, \dots, n-1$ هستند. (نتیجه می‌شود که مناسب است در فرمولها از حالت $k=n$ صرف نظر کنیم، زیرا برای آن هیچ حاصلضربی وجود ندارد.) مقادیر $F(n, 0)$ و $F(n, n-1)$ را به آسانی می‌توان از روی تعریف $F(n, k)$ تعیین کرد. اولاً، $F(n, 0)$ به معنای تعداد حاصلضربهای n تایی است که قبل از سمت راست‌ترین پرانتز چپ - باز، هیچ عنصری ندارند.

برای حالت $n = ۸$ ، يك چنین حاصلضربی با

$$((((((x_1 x_2) x_3) x_4) x_5) x_6) x_7) x_8,$$

نشان داده می‌شود، و بنابراین $F(n, ۰) = ۱$. حال بعد از سمت راست‌ترین پرانتز چپ - باز حداقل دو عنصر وجود دارد. (زیرا يك عنصر تنها را در داخل پرانتز قرار نمی‌دهیم)، و بنابراین از نوع $F(n, n-1)$ هیچ حاصلضربی وجود ندارد. پس داریم:

$$F(n, ۰) = ۱ \quad F(n, n-1) = ۰ \quad n \geq ۳ \quad (۱۳.۱۱)$$

با این اطلاعات و نتیجه $F(۳, ۱) = ۱$ که به‌سادگی ثابت می‌شود، اکنون می‌توان برای تهیه جدول مقادیر، از (۱۲.۱۱) استفاده کرد.

این جدول با جدول مقادیر $C(n, r)$ یعنی با مثلث پاسکال مقایسه می‌شود. در هر سطر مثلث پاسکال تفاضلهای مقادیر زوجهای مجاور را فهرست می‌کنیم، بدین طریق که مقدار سمت چپ را از مقدار سمت راست کم می‌کنیم و تفاضل را در پرانتزی بین این زوج می‌نویسیم؛ ولی تفاضلهای منفی را نمی‌نویسیم. (جدول صفحه ۱۶۱ را ببینید.)

مقایسه این جدولها نشان می‌دهد که درایدها در جدول $F(n, k)$ به عنوان تفاضلهای در جدول $C(n, r)$ ظاهر شده‌اند، مثلاً،

$$F(۷, ۳) = C(۸, ۳) - C(۸, ۲),$$

$$F(۸, ۴) = C(۱۰, ۴) - C(۱۰, ۳),$$

$$F(۹, ۶) = C(۱۳, ۶) - C(۱۳, ۵),$$

$$F(۱۲, ۳) = C(۱۳, ۳) - C(۱۳, ۲).$$

پس این نتایج گزاره کلی زیر را القاء می‌کند.

$$F(n, k) = C(n+k-۲, k) - C(n+k-۲, k-1) \quad (۱۴.۱۱)$$

این حدس صحیح است ولی البته نمی‌توان با امتحان چند حالت خاص در جدولها، آن را ثابت کرد.

جدول مقادیر $F(n, k)$

$k \backslash n$	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۳	۱	۱	۰							
۴	۱	۲	۲	۰						
۵	۱	۳	۵	۵	۰					
۶	۱	۴	۹	۱۴	۱۴	۰				
۷	۱	۵	۱۴	۲۸	۴۲	۴۲	۰			
۸	۱	۶	۲۰	۴۸	۹۰	۱۳۲	۱۳۲	۰		
۹	۱	۷	۲۷	۷۵	۱۶۵	۲۹۷	۴۲۹	۴۲۹	۰	
۱۰	۱	۸	۳۵	۱۱۰	۲۷۵	۵۷۲	۱۰۰۱	۱۴۳۰	۱۴۳۰	۰
۱۱	۱	۹	۴۴	۱۵۴	۴۲۹	غیره				
۱۲	۱	۱۰	۵۴	۲۰۸	۶۳۷					
۱۳	۱	۱۱	۶۵	۲۷۳	۹۱۰					
۱۴	۱	۱۲	۷۷	۳۵۰	۱۲۶۰					

جدول مقادیر $C(n, r)$ ، تفاضلها در برانترها

www.riazisara.ir

$n \backslash r$	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
۱	۱(۰)	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰
۲	۱(۱)	۲	۱	۰	۰	۰	۰	۰
۳	۱(۲)	۳(۰)	۳	۱	۰	۰	۰	۰
۴	۱(۳)	۴(۲)	۶	۴	۱	۰	۰	۰
۵	۱(۴)	۵(۵)	۱۰(۰)	۱۰	۵	۱	۰	۰
۶	۱(۵)	۶(۹)	۱۵(۵)	۲۰	۱۵	۶	۱	۰
۷	۱(۶)	۷(۱۴)	۲۱(۱۴)	۳۵(۰)	۳۵	۲۱	۷	۱
۸	۱(۷)	۸(۲۰)	۲۸(۲۸)	۵۶(۱۴)	۷۰	۵۶	۲۸	۸
۹	۱(۸)	۹(۲۷)	۳۶(۴۸)	۸۴(۴۲)	۱۲۶(۰)	۱۲۶	۸۴	۳۶
۱۰	۱(۹)	۱۰(۳۵)	۴۵(۷۵)	۱۲۰(۹۰)	۲۱۰(۴۲)	۲۵۲	۲۱۰	۱۲۰
۱۱	۱(۱۰)	۱۱(۴۴)	۵۵(۱۱۰)	۱۶۵(۱۶۵)	۳۳۰(۱۳۲)	۴۶۲(۰)	۴۶۲	۳۳۰
۱۲	۱(۱۱)	۱۲(۵۴)	۶۶(۱۵۴)	۲۲۰(۲۷۵)	۴۹۵(۲۹۷)	۷۹۲(۱۳۲)	۹۲۴	۷۹۲
۱۳	۱(۱۲)	۱۳(۶۵)	۷۸(۲۰۸)	۲۸۶(۴۲۹)	۷۱۵(۵۷۲)	۱۲۸۷(۴۲۹)	۱۷۱۶(۰)	۱۷۱۶

۳.۱۱ برهان حدس

قبل از اثبات حدس (۱۴.۱۱)، با انجام محاسبه‌ای جبری آن را به صورت دیگری می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} C(n+k-2, k) - C(n+k-2, k-1) \\ &= \frac{(n+k-2)!}{k!(n-2)!} - \frac{(n+k-2)!}{(k-1)!(n-1)!} \\ &= \frac{(n+k-2)!}{k!(n-1)!} [(n-1) - k]. \end{aligned}$$

بنابراین (۱۴.۱۱) را می‌توان به صورت

$$F(n, k) = \frac{(n+k-2)!}{k!(n-1)!} (n-k-1) \quad (15.11)$$

نوشت. توجه می‌کنیم که این رابطه به‌ازای $k=0$ نیز درست است، زیرا

$$F(n, 0) = \frac{(n-2)!}{0!(n-1)!} (n-1) = 1,$$

بامقدار محاسبه شده قبلی مطابقت دارد. همچنین توجه می‌کنیم که رابطه (۱۵.۱۱) نتایج صحیح $F(3, 1) = 1$ و $F(3, 2) = 0$ را به‌دست می‌دهد.

اکنون در وضعیتی هستیم که می‌توانیم با استقرای ریاضی رابطه (۱۵.۱۱) را ثابت کنیم. چون اینک دو متغیر n و k وجود دارند، لازم است که کمی پیچیده‌تر از برهان‌هایی که در فصل قبل به‌طریق استقرا انجام گرفتند استدلال کنیم. اما می‌توانیم با طرح زیر، این مسأله را به مسأله‌ای بایک متغیر برگردانیم. فرض کنیم تمام حالت‌های (۱۵.۱۱) را، با $n+k=m$ ، نشان دهد. چون $n \geq 3$ ، با $m=3$ شروع می‌کنیم:

P_3 معادله (۱۵.۱۱) است درحالت $n=3$ ، $k=0$ ؛

P_4 معادله (۱۵.۱۱) است درحالت‌های $n=4$ ، $k=0$ و $n=3$ ، $k=1$ ؛

P_5 معادله (۱۵.۱۱) است درحالت‌های $n=5$ ، $k=0$ ؛ $n=4$ ، $k=1$ ؛

و $n=3$ ، $k=2$.

به طور مشابه P_m شامل ۴ حالت، P_p شامل ۵ حالت است و غیره. اثبات استقرایی (۱۵.۱۱) عبارت است از اثبات (i) یعنی P_3 راست است، و اثبات (ii) یعنی P_{m+1} از P_m نتیجه می شود.

قبلاً بررسی کردیم که P_3 برقرار است، بنابراین به اثبات (ii) می پردازیم. فرض کنیم که P_m برقرار باشد، می خواهیم P_{m+1} ؛ یعنی معادله (۱۵.۱۱) را به ازای هر زوج از اعداد صحیح n و k که مجموع آنها برابر $m+1$ است، ثابت کنیم. لذا در آنچه که در زیر می آید n و k را دو عدد صحیحی در نظر می گیریم که $n+k=m+1$. البته، برای اثبات آنکه از P_m ، P_{m+1} نتیجه می شود، از P_m استفاده می کنیم و بنا بر این رابطه (۱۵.۱۱) را برای $F(n, k-1)$ و $F(n-1, k)$ به کار می بریم، زیرا از $n+k=m+1$ نتیجه می شود که $n+(k-1)=m$ و $(n-1)+k=m$. بنا بر این P_m شامل دو حکم

$$F(n, k-1) = \frac{(n+k-3)!}{(k-1)!(n-1)!} (n-k),$$

و

$$F(n-1, k) = \frac{(n+k-3)!}{k!(n-2)!} (n-k-2)$$

است. با استفاده از (۱۲.۱۱) به دست می آوریم

$$\begin{aligned} F(n, k) &= F(n, k-1) + F(n-1, k) \\ &= \frac{(n+k-3)!}{(k-1)!(n-1)!} (n-k) + \frac{(n+k-3)!}{k!(n-2)!} (n-k-2) \\ &= \frac{(n+k-3)!}{k!(n-1)!} [k(n-k) + (n-1)(n-k-2)] \\ &= \frac{(n+k-3)!}{k!(n-1)!} (n+k-2)(n-k-1) \\ &= \frac{(n+k-2)!}{k!(n-1)!} (n-k-1), \end{aligned}$$

ولذا، (۱۵.۱۱) ثابت می شود.

۲.۱۱ فرمولی برای $F(n)$

اکنون هدف ما پاسخ دادن به سؤالی است که در مقدمه این فصل مطرح شد: در یک دستگاه شرکت ناپذیر، عدد $F(n)$ ، تعداد حاصلضربهای n تایی چقدر است؟ اینک با استفاده از نتایج بخشهای قبل، فرمول ساده‌ای برای $F(n)$ به دست می‌آوریم. اولاً مشاهده می‌کنیم که تعداد کل حاصلضربهای n تایی عبارت از آنهایی است که هیچ عنصری قبل از سمت راست‌ترین پراتز چپ - باز ندارند، بعلاوه آنهایی که یک عنصر قبل از آن دارند، بعلاوه آنهایی که دو عنصر قبل از آن دارند، ...، بعلاوه آنهایی که تمام عناصرشان به غیر از یکی قبل از آن هستند، بعلاوه آنهایی که تمام عناصرشان قبل از آن هستند. به صورت نمادی

$$F(n) = F(n, 0) + F(n, 1) + F(n, 2) + \dots + F(n, n-2) + F(n, n-1) + F(n, n) \quad (16.11)$$

نظر به فرمول (۱۳.۱۱) و این واقعیت که $F(n, 0) = 0$ ، فرمول (۱۶.۱۱) را می‌توانیم به صورت

$$F(n) = \sum_{j=0}^{n-2} F(n, j) \quad (16'.11)$$

بنویسیم.

سپس، فرمول (۱۱.۱۱) را که در بخش ۲.۱۱ به دست آمد و در آن $n+1$ را به جای n و $n-1$ را به جای k قرار داده‌ایم می‌نویسیم. نتیجه می‌شود

$$F(n+1, n-1) = F(n, n-1) + F(n, n-2) + \dots + F(n, 0). \quad (17.11)$$

اما $F(n, n-1)$ صفر است، بنابراین (۱۷.۱۱) را می‌توانیم به صورت

$$F(n+1, n-1) = \sum_{j=0}^{n-2} F(n, j)$$

بنویسیم، و از مقایسه آن با (۱۶'.۱۱) می‌بینیم که

$$F(n) = F(n+1, n-1). \quad (18.11)$$

سرانجام فرمول (۱۵.۱۱) را که در بخش ۳.۱۱ به دست آمد در مورد عضو سمت

داست رابطه (۱۸.۱۱) به کار می‌بریم؛ به عبارت دیگر، در (۱۵.۱۱)، $n+1$ را به جای n و $n-1$ را به جای k قرار می‌دهیم و به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} F(n+1, n-1) &= \frac{[(n+1)+(n-1)-2]!}{(n-1)!n!} [(n+1)-(n-1)-1] \\ &= \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!} \end{aligned}$$

با قراردادن این رابطه در (۱۸.۱۱)، نتیجه مطلوب

$$F(n) = \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}$$

برای تعداد راههای درج با معنای پرانتزها در عبارتی به صورت $x_1 x_2 x_3 \dots x_n$ به دست می‌آید.

۵.۱۱ خلاصه

يك «حاصلضرب» ریاضی، شرکت ناپذیر است اگر $a(bc) = (ab)c$ در همه موارد برقرار نباشد. کلمه «حاصلضرب» به این دلیل در داخل علامت نقل قول آمده است که برای هدفهای این فصل، ab می‌تواند نتیجه هر عمل دوتایی روی عناصر a و b از يك دستگاه شرکت ناپذیر را نشان دهد. مثالی برای این مطلب از تعبیر ab به عنوان صورت نمایی a^b حاصل می‌شود.

در يك دستگاه شرکت ناپذیر، برای حاصلضرب سه تایی abc ، دو تعبیر، یعنی $a(bc)$ و $(ab)c$ وجود دارد. موضوع این فصل تعداد تعبیرهای يك حاصلضرب n تایی شرکت ناپذیر $x_1 x_2 x_3 \dots x_n$ است، که با $F(n)$ نشان داده شده است. اولاً رابطه بازگشتی

$$F(n) = \sum_{j=1}^{n-1} F(j)F(n-j)$$

ثابت شده است، و آنگاه فرمول صریح

$$F(n) = \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}$$

به دست آمده است. با جداسازی $F(n)$ به چند بخش، و با نمایش $F(n, k)$ به عنوان تعداد حاصلضربهای n تایی که قبل از سمت راست ترین پرانتز چپ - باز دارای k عنصرند این نتیجه را ثابت کردیم. ویژگیهای $F(n, k)$ در فرمولهای (۱۱.۱۱) و (۱۲.۱۱) که به جدول مقادیر این تابع منتج شد، ارائه شده اند. از مقایسه این مقادیر با تفاضلها در مثلث پاسکال، حدس رابطه بین $F(n, k)$ و $C(m, j)$ آسان بود. این حدس، یعنی حدس (۱۴.۱۱)، با استقرای ریاضی ثابت، و سپس مقدار $F(n)$ محاسبه شده است.

مسائل گوناگون

۱. به کلاسی يك آزمون دوجوابی شامل ۱۲ سؤال داده می شود. یکی از دانشجویانی که برای آزمون آماده نیست درباره پاسخها باخطمشی زیر تصمیم می گیرد. او به ۳ سؤالی که درباره درستی پاسخ آنها احساس اطمینان مطلق دارد پاسخ می دهد و سپس درباره ۹ سؤال دیگر با پرتاب يك سکه در هر مورد تصمیم می گیرد. با فرض آنکه دانشجو به آن ۳ سؤال پاسخ صحیح داده باشد، ثابت کنید احتمال اینکه حداقل به نصف سؤالاتها جواب صحیح بدهد بزرگتر از $9/10$ است.

۲. چند جمله از دنباله اعداد طبیعی ۱، ۲، ۳، ۴، ... را باید باهم جمع کرد تا مجموع آنها از يك میلیون تجاوز کند؟

۳. دنباله ۲، ۲۲، ۸۴، ۲۱۲، ... را در نظر بگیرید که جمله های آن با قرارداد $z=1, z=2, z=3, \dots$ در عبارت $z + z^2 + z^3 - z^4$ به دست می آیند. برای تعیین مجموع n جمله اول آن فرمولی به دست آورید.

۴. اگر ۱۲ پسر به تصادف به ۳ دسته چهارتایی تقسیم شوند، احتمال آنکه ۲ پسر به خصوص در دو دسته متفاوت قرار بگیرند چقدر است؟

۵. در سؤال قبلی، احتمال آنکه ۳ پسر به خصوص هر يك در ۳ دسته متفاوت قرار بگیرند چقدر است؟

۶. يك مجموعه N عنصری داده شده است که $N(\alpha)$ عنصر آن دارای ویژگی معین

α و $N(\alpha, \beta)$ عنصر آن دارای دو ویژگی α و β و غیره هستند. ثابت کنید که

$$3N + N(\alpha, \beta) + N(\alpha, \gamma) + N(\beta, \gamma) \geq 2N(\alpha) + 2N(\beta) + 2N(\gamma).$$

۷. يك حاصلضرب چند جمله‌ای بنویسید به قسمی که در آن ضریب x^{100} معرف تعداد افزایندهای ۱۰۰ به اعداد صحیح فرد مثبت نامساوی باشد.

۸. در يك کشور خیالی تمبرهای پست به طریق زیر نامگذاری می‌شوند: ۳ نوع تمبر يك سنتی (يك نوع تمبر معمولی و دو نوع تمبر یادبود)، ۳ نوع تمبر دو سنتی، ۲ نوع تمبر سه سنتی و يك نوع تمبر چهارسنتی، پنج سنتی، ده سنتی و بیست سنتی. يك حاصلضرب چند جمله‌ای بنویسید که در آن ضریب x^{20} ، برابر تعداد راههای به دست آوردن تمبرهایی به ارزش بیست سنت باشد.

۹. ثابت کنید که اعداد فیبوناچی $1, F(0) = 1, F(1) = 2, F(2) = 3, F(3) = 5, F(4) = 8$ و غیره دارای ویژگی

$$F(n) = 2 + \sum_{j=0}^{n-2} F(j) \quad \text{اگر } n > 2$$

هستند.

۱۰. به ازای هر عدد صحیح مثبت مفروض n ، ثابت کنید

$$\sum_{j+k=n+1} C(j, k) = 1 + \sum_{j+k < n} C(j, k),$$

که در آن مجموع سمت چپ، شامل تمام جمله‌های $C(j, k)$ است که در آنها اعداد صحیح نامنفی j و k در رابطه $j+k = n+1$ صدق می‌کنند، و مجموع سمت راست، شامل جمله‌هایی است که در آنها $j+k < n$. (پیشنهاد: از نتیجه مسئله قبل استفاده کنید.)

۱۱. از $30!$ جایگشت اعداد صحیح $1, 2, 3, \dots, 30$ ، چند جایگشت دارای این ویژگی اند که مضربهای ۳ در مجاورت هم قرار نمی‌گیرند، یعنی، هیچ دوعده‌ای از اعداد صحیح $3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30$ در مجاورت یکدیگر نیستند.

۱۲. مطلوب است تعداد جایگشت‌های ۸ حرف a, b, c, d, e, f, g, h که باهم اختیار می‌شوند، به شرط آنکه در آنها b بلافاصله بعد از a ، c بلافاصله بعد از b ، و $\dots$ و h

بلافاصله بعد از g قرار نگیرد.

۱۳. گردایه ای از ۱۰۰۰ سکه، که ۲۰ تایی آنها یک سنتی، ۲۰ تایی آنها پنج سنتی، ۲۰ تایی آنها ده سنتی، ۲۰ تایی آنها بیست و پنج سنتی و ۲۰ تایی آنها پنجاه سنتی اند، در ۵ جعبه متمایز گذاشته می شوند. اگر هیچ یک از جعبه ها تهی نباشد، به چند طریق می توان این عمل را انجام داد؟ (فرض کنید که هر ۲۰ سکه ای که از یک نوع اند غیر قابل تمیزند.)

۱۴. مطلوب است تعداد جایگشت های ۸ حرف $AABBCCDD$ ، که با هم اختیار شوند، و در جایگشت ها هیچ دو حرف مجاوری یکسان نباشند.

۱۵. چند جایگشت از ۹ حرف $F, F, F, E, E, E, D, D, D$ ، که همه آنها با هم اختیار می شوند، وجود دارد به شرط آنکه در آنها هیچ دو حرف D پهلوی هم قرار نگیرند.

۱۶. اگر در مسأله قبل این شرط اضافی را تحمیل کنیم که هیچ دو حرف E پهلوی هم قرار نگیرند، جواب مسأله چه خواهد بود؟

۱۷. اگر علاوه بر شرایط قبلی، این شرط دیگر را تحمیل کنیم که هیچ دو حرف F پهلوی هم قرار نگیرند، جواب مسأله چه خواهد بود؟

۱۸. مطلوب است تعداد ۵ تایی های (x, y, z, u, v) از اعداد صحیح مثبت که در هر دو معادله

$$x + y + z + v = 27 \text{ و } x + y + z + u = 30$$

صدق می کنند.

۱۹. در مجموعه اعداد صحیح مثبت چند تا از جواب های معادله $x + y + z + w = 26$ دارای ویژگی $x > y$ هستند؟

۲۰. مطلوب است مقدار $[n, n, n, n] \mid 2n, 2n$ ، یعنی، تعداد راه هایی که می توان $4n$ شیء را که در دسته های n تایی مشابه هستند بین دو نفر به طور مساوی تقسیم کرد.

۲۱. به چند طریق ممکن است nj شیء متفاوت را به n دسته تقسیم کرد به طوری که در هر دسته j شیء وجود داشته باشد؟

۲۲. آیا انتظار دارید که تعداد افرازه های ۱۰۰۰ به ۳ عدد صحیح مثبت زوج

بیشتر باشد یا تعداد افرازهای ۱۰۰۰ به ۳ عدد صحیح مثبت فرد؟ برهانی برای حدس خود ارائه دهید.

۲۳. آیا انتظار دارید که تعداد افرازهای ۱۰۰۰ به ۴ عدد صحیح مثبت زوج بیشتر باشد، یا تعداد افرازهای ۱۰۰۰ به ۴ عدد صحیح مثبت فرد؟ برای حدس خود برهانی ارائه دهید.

۲۴. آیا انتظار دارید که تعداد افرازهای ۱۰۰۰ به اعداد صحیح مثبت زوج بیشتر باشد، یا تعداد افرازهای ۱۰۰۰ به اعداد صحیح مثبت فرد؟ برای حدس خود برهانی ارائه کنید. (این سؤال، از لحاظ اینکه برای تعداد جمعوندها محدودیتی وجود ندارد، با دو سؤال قبلی متفاوت است.)

۲۵. بین ۱ تا ۱۰۰۰۰۰۰۰ چند عدد صحیح با این ویژگی وجود دارند که حداقل دو رقم متوالی آنها مساوی باشند؟ (مثلاً ۱۰۰۷ دارای این ویژگی است، ولی ۱۰۱۷ این ویژگی را ندارد.)

۲۶. مطلوب است تعیین تعداد جایگشهای حرفهای الفبای لاتین، که همه آنها باهم اختیار می‌شوند، به طوری که (i) هیچ حرفی در جای طبیعی خود قرار نگیرد و (ii) حرفهای A و B مجاور یکدیگر باشند.

۲۷. مطلوب است تعیین تعداد جایگشهای ۶ حرف a, b, c, d, e, f که همه باهم اختیار می‌شوند، به شرط آنکه حروفی که در الفبا متوالی‌اند، مجاور هم قرار نگیرند. (مثلاً، a مجاور b ، b مجاور c و غیره نباشد.)

۲۸. ثابت کنید تعداد افرادی که در طول تاریخ (با افراد دیگر)، به تعداد فردی از دفعات، دست داده‌اند عددی زوج است.

۲۹. در هر گروه از افراد، ثابت کنید که دو نفر وجود دارند که تعداد آشنا یا نشان در بین افراد گروه یکی است. (البته، فرض بر این است که اگر A با B آشنا باشد، آن‌گاه B نیز با A آشناست.)

۳۰. n نقطه در صفحه‌ای مفروض‌اند، هیچ سه‌تایی از این نقاط همخط نیستند و فرض می‌کنیم پاره‌خطهایی که زوجهای نقاط را به هم وصل می‌کنند با یکی از دو رنگ مثلاً قرمز و سفید رسم شده باشند. در این صورت از هر نقطه، $1 - n$ پاره‌خط خارج می‌شود که بعضی سفید و بعضی قرمزند. ثابت کنید پیکر بندی رنگهای استفاده شده

هر چه باشد، دو نقطه وجود دارند که تعداد پاره‌خطهای قرمزی که از آنها خارج شده‌اند یکی است، و لذا تعداد پاره‌خطهای سفیدی هم که از آنها خارج شده‌اند یکی است.

۳۱. فرض می‌کنیم $m+1$ خط مستقیم همفاصله موازی به وسیله $k+1$ خط همفاصله موازی به زاویه قائمه قطع می‌شوند. با فرض $m \leq k$ ، تعداد کل مربعاتی که در این شبکه به وجود می‌آیند چقدر است؟

۳۲. برج معماری هانوی ۸ قرص مدور روی یکی از سه گل میخ عمودی قرار دارند. شعاعهای این ۸ قرص نابرابرند، و بزرگترین قرص در ته گل میخ، و قرصهای کوچکتر به ترتیب روی آن قرار می‌گیرند، به قسمی که کوچکترین قرص در بالا واقع می‌شود. مسأله، انتقال این قرصها از گل میخی که بدو روی آن قرار دارند به یکی از دو گل میخ دیگر است. قاعده این است که قرصها ممکن است آزادانه، هر بار یک قرص از یک گل میخ به گل میخ دیگر، حرکت کنند بجز آنکه هیچ قرصی نمی‌تواند روی یک قرص کوچکتر قرار بگیرد. سؤال این است که آیا تحت این قاعده حرکت ممکن است برج قرصها را از یک گل میخ به گل میخ دیگر انتقال داد و اگر ممکن است چند حرکت لازم است تا این انتقال انجام شود.

۳۳. ۶ نقطه در صفحه‌ای مفروض‌اند به‌طوری‌که هیچ سه‌تای آنها همخط نیستند، فرض می‌کنیم، هر پاره‌خطی که یک زوج از این نقاط را به هم وصل می‌کند بایکی از دو رنگ، مثلاً قرمز یا سفید رسم شود. ثابت کنید از هر پیکربندی رنگها که استفاده شود، همیشه حداقل دو مثلث رنگی، یعنی دو مثلثی که هر سه ضلع آن دارای یک رنگ‌اند وجود دارند. (لازم نیست که هر دو مثلث هم‌رنگ باشند؛ ممکن است یک مثلث رنگی، قرمز و دیگری سفید باشد.)

۳۴. در مسأله قبل ثابت کنید لازم نیست که ۳ مثلث رنگی موجود باشند. یعنی از پاره‌خطهای رنگی، پیکربندی ارائه دهید که تنها ۲ مثلث رنگی داشته باشد.

۳۵. ۷ نقطه که هیچ سه‌تای آنها همخط نیستند، در صفحه‌ای مفروض‌اند. فرض می‌کنیم هر کدام از پاره‌خطهایی که این نقاط را به هم وصل می‌کند بایکی از دو رنگ سفید یا قرمز رسم شده باشند. ثابت کنید از هر پیکربندی رنگها که استفاده شود، همواره حداقل سه مثلث رنگی وجود دارند.

۳۶. ۶۶ نقطه را که هیچ سه‌تای آنها همخط نیستند روی صفحه‌ای در نظر بگیرید.

هر پاره خطی را که دو نقطه را به هم وصل می کند بایکی از ۴ رنگ رسم می کنیم. ثابت کنید آرایش رنگها هر چه باشد همواره يك مثلث رنگی، یعنی مثالی که رنگ هر سه ضلع آن یکی است، وجود دارد. (این اطلاع که با ۱۷ نقطه و ۳ رنگ، يك مثلث رنگی وجود دارد ممکن است مفید باشد.)

۰۳۲. ۱۷ نقطه را که هیچ سه تایی آن همخط نیستند روی صفحه ای در نظر می گیریم. هر پاره خطی را که دو نقطه را به هم وصل می کند بایکی از سه رنگ قرمز، سفید یا آبی رسم می کنیم. ثابت کنید که در پیکربندی حداقل دو مثلث رنگی وجود دارند.

۰۳۸. ۲۴ نقطه را که هیچ سه تایی آنها همخط نیستند روی صفحه ای در نظر می گیریم و هر يك از پاره خطهایی را که این نقاط را به هم وصل می کند بایکی از دو رنگ مثلاً قرمز یا سفید رسم می کنیم. ثابت کنید توزیع رنگها هر چه باشد، همواره می توان ۴ نقطه پیدا کرد که ۶ پاره خطی که آنها را به هم وصل می کند دارای يك رنگ باشند. (خواننده باید مسأله را برای عدد صحیح بزرگتری که به جای ۲۴ قرار می گیرد حل کند. کوچکترین عددی که می تواند به جای ۲۴ قرار گیرد عدد ۱۸ است. بدین معنا که این گزاره به ازای ۱۷ و اعداد کوچکتر از آن برقرار نیست. در هر حال، برهان اینکه ۱۸، کوچکترین عدد است در سال ۱۹۵۵ به وسیله گرین وود و گلیسن داده شده است که سطح آن از سطح این کتاب بالاتر است.)

۰۳۹. n نقطه بر روی محیط دایره ای قرار دارند، $C(n, 2)$ یا $n(n-1)/2$ پاره خط وجود دارند که زوجهای نقاط را به هم وصل می کنند. فرض کنیم که این n نقطه طوری قرار گرفته اند که هیچ سه پاره خطی در داخل دایره با هم نقطه تلاقی مشترک ندارند. $I(n)$ ، تعداد کل نقاط تلاقی در داخل دایره (و به روی محیط آن) چقدر است؟ مثلاً $I(4)=1$ ، $I(5)=5$ ، $I(6)=15$.

۰۴۰. در مسأله قبل، پاره خطهایی که n نقطه را به هم وصل می کنند، داخل دایره را به چند ناحیه تقسیم می کنند؟ فرض کنیم تعداد این نواحی $R(n)$ باشد؛ مثلاً $R(2)=2$ ، $R(3)=4$ ، $R(4)=8$ ، $R(5)=16$.

۰۴۱. n نقطه همفاصله روی محیط دایره ای (رأسهای يك n ضلعی منتظم) داده شده اند؛

$$C(n, 3) = \frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$$

مثلثهایی را که از وصل این نقاط به وسیله پاره خطهای مستقیم تشکیل می شوند در نظر

می گیریم. چندتا از این مثالها متساوی الساقین اند؟

۴۳. اگر n تاس یکسان ریخته شوند، چند برآمد ممکن وجود دارند؟ (دو برآمد را یکی گویند اگر دارای يك تعداد يك، يك تعداد دو،...، و يك تعداد شش باشند.)

۴۳. n صفحه در فضای سه بعدی را در نظر می گیریم که در شرایط زیر صدق کنند. هیچ دو تایی از آنها موازی نباشند؛ هیچ دو فصل مشترکی موازی نباشند؛ هیچ چهار صفحه ای از يك نقطه نگذرند. این صفحه ها فضا را به چند ناحیه تقسیم می کنند؟

۴۴. احتمال آنکه در يك جایگشت $1, 2, 3, \dots, n$ که به تصادف انتخاب شده است، «۲» بین «۱» و «۳» قرار بگیرد چقدر است؟

۴۵. تعداد جایگشتهای $2n$ شیء، که از هر شیء يك زوج یکسان وجود دارد (مثلاً $AABBCCDDEE\dots$) و همگی باهم اختیار می شوند، چقدر است، به شرطی که در جایگشتها هیچ دو شیئی که مجاورند یکسان نباشند؟

۴۶. جایگشتی از $1, 2, 3, \dots, n$ را که همگی باهم اختیار می شوند، به تصادف انتخاب می کنیم، احتمال آنکه درست j عدد در جای طبیعی خود نباشند چقدر است؟

۴۷. $n+k$ حرف

$$AAA\dots ABBB\dots B,$$

که در آنها n حرف A و k حرف B وجود دارد، دارای چند جایگشت هستند، به شرطی که سه حرف A مجاور هم نباشند؟

۴۸. مطلوب است تعیین تعداد جایگشتهای $1, 2, 3, \dots, n$ ، که همگی باهم اختیار می شوند، به شرط آنکه هیچ عدد فردی در جای طبیعی خود قرار نگیرد.

۴۹. فرض کنیم در تجزیه عدد صحیح n به اعداد اول، دقیقاً m عامل متمایز وجود داشته باشند. چند تجزیه n به k عامل، که در آن k عددی است صحیح و نابزرگتر از m ، وجود دارد (i) اگر هر عامل الزاماً از ۱ بزرگتر باشد، (ii) اگر مجاز باشیم ۱ را به عنوان يك عامل در نظر بگیریم؟ (تجزیه هایی که تنها در ترتیب عاملها اختلاف دارند متمایز از هم به حساب نمی آیند.)

۵۰. اعداد صحیح $1, 2, 3, \dots, n$ را در نظر می گیریم. فرض کنیم $K(n, j)$ معرف تعداد زیر مجموعه های این n عدد صحیح باشند که در شرایط زیر صدق می کنند.

(i) هر زیرمجموعه شامل j عدد صحیح است، (ii) هیچ زیرمجموعه‌ای شامل يك زوج از اعداد صحیح متوالی نیست. مثلاً $K(5, 3) = 1$ ، زیرا تنها زیرمجموعه‌ای از ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ که در شرایط فوق صدق می‌کند ۱، ۳، ۵ است. اگر زیرمجموعه‌هایی را که با $K(n, j)$ شمرده می‌شوند به دو نوع تقسیم کنیم، آنهایی که شامل n هستند و آنهایی که نیستند، برای $K(n, j)$ يك فرمول بازگشتی به دست می‌آید. در این صورت با استفاده از این فرمول، جدول خلاصه‌ای برای مقادیر $K(n, j)$ ، مثلاً تا $n = 100$ و $j = 10$ بنا می‌شود. وقتی که این جدول را با مثلث پاسکال مقایسه کنیم می‌توان برای مقدار $K(n, j)$ حدسی زد. حدس مناسب را بیابید و آن گاه با استقرای ریاضی آن را ثابت کنید.

۵۱. سه نفر که باهم نا آشنا هستند وارد اطاقی می‌شوند که در آن ۳ نفر که دو به دو آشنا هستند وجود دارند. ثابت کنید در بین این ۶ نفر حداقل ۳ سه‌تایی دیگر موجودند که عبارت‌اند از ۳ نفر نا آشنا، یا سه نفر دو به دو آشنا. بیان واضحتری برای مسأله چنین است: گوئیم که مجموعه‌ای از ۳ نفر دارای ویژگی α است درحالتی که افراد دو به دو نا آشنا باشند، دارای ویژگی β است درحالتی که دو به دو آشنا باشند. ۶ نفر A, B, C, D, E, F را در نظر بگیرید که A, B, C ، دارای ویژگی α و D, E, F دارای ویژگی β باشند. ثابت کنید مجموع تعداد سه‌تاییهایی که دارای ویژگی α و تعداد سه‌تاییهایی که دارای ویژگی β هستند حداقل ۵ است.

۵۲. پلکانی ۱۴ پله دارد. پسر می‌تواند پله‌ها را یکی یکی، دوتا دوتا، یا با هر ترکیبی از يك و دو، بالا برود. این پسر به چند طریق می‌تواند از پله‌ها بالا برود؟

۵۳. بین ۱ تا ۱۰۰۰۰۰۰۰ چند عدد دارای این ویژگی‌اند که هیچ کدام از رقمهای آنها از رقم سمت چپش کوچکتر نیست؟ (مثلاً عدد ۱۴۶۸ این ویژگی را دارد، ولی ۱۶۴۸ دارای این ویژگی نیست.)

پاسخها و راه حلها

تقریباً پاسخ تمام مسائل و راه حل بسیاری از آنها ارائه شده است، هرچند اساساً «راه حل» فقط به صورت يك طرح آمده است، ولی در بسیاری از موارد چیزی بیشتر از يك یا دو پیشنهاد نیست. اگر پاسخ خواننده به يك مسأله همان پاسخی نباشد که در این جا داده شده است، باید این امکان را در نظر بگیرد که اختلاف فقط در ظاهر است. او باید به خاطر داشته باشد که برای اکثر مسائل بیشتر از يك راه حل وجود دارد و دو پاسخ بدون آنکه ظاهراً مساوی به نظر آیند می توانند، باهم مساوی باشند.

مسأله ۱.۱ صفحه ۳. ۱، ۲ یا ۳

در این جا برای سالهایی که دارای ۳۶۵ روزند تحلیلی می آوریم؛ برای سالهای ۳۶۶ روزه نیز تحلیلی مشابه وجود دارد. ابتدا فرض کنیم یکشنبه را روزی از نوع ۵، دوشنبه را روزی از نوع ۱، سه شنبه را روزی از نوع ۲، ...، و شنبه را روزی از نوع ۶ بنامیم. اگر ۱۳ ژانویه از نوع ۵ باشد، آن گاه ۱۳ فوریه از نوع ۳ است زیرا این روز ۳۱ یا $۳+۲۸$ روز بعد است، ۱۳ مارس از نوع ۳، ۱۳ آوریل از نوع ۶، ۱۳ مه از نوع ۱، ...، ۱۳ دسامبر از نوع ۵ است. فهرست کامل نوعها از ۱۳ ژانویه تا ۱۳ دسامبر عبارت است از

۵، ۳، ۳، ۶، ۱، ۴، ۶، ۲، ۵، ۵، ۳، ۵.

دو جمعه سیزدهم وجود دارد زیرا جمعه از نوع ۵ است. تحلیل ما تاکنون براین

فرض بوده است که ۱۳ ژانویه روز یکشنبه است. آسانترین راه برای ادامه کار آن است که معنی نوع صفر را تغییر دهیم. مثلاً، اگر دوباره دوشنبه را از نوع صفر تعریف کنیم، آن گاه جمعه از نوع ۴ می‌شود و فهرست بالا نشان می‌دهد که در چنین سالی تنها يك جمعه سیزدهم وجود دارد. بنابراین با در نظر گرفتن تمام هفت تعبیر درباره معنی نوع صفر، فهرست حاصل، پاسخ مسأله را مشخص می‌کند. برای سالی ۳۶۶ روزه، فهرست متناظر عبارت است از ۵، ۳، ۴، ۵، ۲، ۵، ۳، ۶، ۱، ۴، ۶.

مسأله ۲۰۱ صفحه ۳۰۳

۱ نوع بلوك با شش وجه آبی؛ ۱ نوع بلوك با پنج وجه آبی؛ ۲ نوع بلوك با چهار وجه آبی وجود دارند، زیرا دو وجه قرمز ممکن است دو وجه مقابل یا دو وجه مجاور باشند؛ ۲ نوع بلوك با سه وجه آبی موجودند، زیرا ممکن است دو وجه آبی مقابل یکدیگر باشند و ممکن است مقابل یکدیگر نباشند. تعداد انواع مختلف بلوكها با دو وجه آبی برابر تعداد بلوكها با چهار وجه آبی است؛ تعداد بلوكها با يك وجه آبی برابر تعداد بلوكها با پنج وجه آبی است؛ تعداد بلوكهایی که وجه آبی ندارند با تعداد بلوكهایی که هر شش وجه آنها آبی است مساوی است.

مسأله ۳۰۱، صفحه ۴، در صفحه ۳۵ حل شده است.

مسأله ۴۰۱، صفحه ۵، در صفحه ۶۵ حل شده است.

مسأله ۵۰۱، صفحه ۵، در صفحه ۱۱۴ حل شده است.

مجموعه مسائل ۱ صفحه ۶

$$h+1.6 \quad k-r+1.5 \quad n+r-1.4 \quad 185.3 \quad 138.2 \quad 55.1$$

۷۰۸ عدد صحیح از $x=145$ تا $x=224$.

۰۸ (الف) ۴۹ (ب) ۴۴ (پ) ۳۵.

استدلال قسمت (پ). از هر يك از اعداد، عدد ۱۱ را کم کنید تا به دست آید:

۶، ۱۲، ۱۸، ۲۴، ...، ۲۱۰. هر يك از اینها را بر ۶ تقسیم کنید تا به دست آید:

۱، ۲، ۳، ۴، ...، ۳۵. این عملها تعداد عنصرها را تغییر نمی‌دهند.

۰۹ (الف) ۱۸۱: اعداد صحیح ۱۱، ۲۲، ۳۳، ...، ۱۹۹۱؛

(ب) ۱۲۱: از اعداد صحیح قسمت (الف) اعداد ۳۳، ۶۶، ۹۹، ...، ۱۹۸۰ را

که تعدادشان برابر ۶۰ است، حذف کنید؛ بنابراین ۱۸۱-۶۰؛

پ) ۱۶۷: از اعداد صحیح ۶، ۱۲، ۱۸، ۲۴، ...، ۱۹۹۸، اعداد صحیح ۱۲، ۲۴، ۳۶، ...، ۱۹۹۲ را حذف کنید؛ بنابراین ۱۶۶-۳۳۳.

۹.۱۰: چهار ۱ سنتی، دو ۵ سنتی، یک ۱۰ سنتی، یک ۲۵ سنتی، یک ۵۰ سنتی. (متناوباً به جای دو ۵ سنتی و یک ۱۰ سنتی، یک ۵ سنتی و دو ۱۰ سنتی قرار دهید.)
۳۹.۱۱

فرض کنید a, b, c ، معرف a تا یک سنتی، b تا پنج سنتی، c تا ده سنتی باشند. در این صورت بدون استفاده از سکه ۲۵ سنتی، جوابها به صورت سه تاییهای a, b, c عبارت اند از:

۴۷, ۰, ۰	۴۲, ۱, ۰	۳۷, ۲, ۰	۳۷, ۰, ۱	۳۲, ۳, ۰
۳۲, ۱, ۱	۲۷, ۴, ۰	۲۷, ۲, ۱	۲۷, ۰, ۲	۲۲, ۵, ۰
۲۲, ۳, ۱	۲۲, ۱, ۲	۱۷, ۶, ۰	۱۷, ۴, ۱	۱۷, ۲, ۲
۱۷, ۰, ۳	۱۲, ۷, ۰	۱۲, ۵, ۱	۱۲, ۳, ۲	۱۲, ۱, ۳
۷, ۸, ۰	۷, ۶, ۱	۷, ۴, ۲	۷, ۲, ۳	۷, ۰, ۴
۲, ۹, ۰	۲, ۷, ۱	۲, ۵, ۲	۲, ۳, ۳	۲, ۱, ۴

با استفاده از یک سکه ۲۵ سنتی جوابها عبارت اند از

۲۲, ۰, ۰	۱۷, ۱, ۰	۱۲, ۲, ۰	۱۲, ۰, ۱	۷, ۳, ۰
۷, ۱, ۱	۲, ۴, ۰	۲, ۲, ۱	۲, ۰, ۲	

۷.۱۲

۳.۱۳

۳.۱۴: ۳, ۴, ۵, ۶, ۸, ۹, ۱۰, ۱۲, ۱۵, ۱۸, ۲۰, ۲۴, ۳۰, ۳۶, ۴۰, ۴۵, ۶۰, ۷۲, ۹۰, ۱۲۰, ۱۸۰, ۳۶۰

زاویه خارجی یک n ضلعی منتظم برابر $360/n$ درجه است، و بنابراین یک زاویه داخلی آن برابر $(360/n) - 360$ درجه است. لذا تمام اعداد صحیح مثبت n بجز $n=1$ و $n=2$ را انتخاب می‌کنیم به قسمی که $360/n$ یک عدد صحیح باشد.

۳۶.۱۵

فرض کنیم رنگهای قرمز، سبز، آبی و سفید را مثلاً به ترتیب با B, G, R و W نشان دهیم. اگر هر جسم را تماماً با يك رنگ، رنگ آمیزی کنیم چهار حالت به وجود می‌آید. تمام وجوه به رنگ R ، تمام وجوه به رنگ G ، تمام وجوه به رنگ B و تمام وجوه به رنگ W . اگر اجسام با دو رنگ رنگ آمیزی شوند ۱۸ حالت به وجود می‌آید: اگر رنگها R و G باشند ۳ حالت وجود دارد، زیرا ممکن است تعداد وجوهی که با R رنگ شده‌اند برابر ۱، ۲ و یا ۳ باشد؛ به همین ترتیب برای هر کدام از ترکیبهای رنگی دیگر RB, RW, GB, GW و BW ۳ حالت وجود دارد. با استفاده از سه رنگ، ۱۲ نوع مختلف از اجسام رنگ شده وجود دارند: اگر رنگها B, G, R باشند سه حالت وجود دارد، مثلاً، یکی از حالتها وقتی است که دو وجه به رنگ R ، يك وجه به رنگ G و يك وجه به رنگ B باشد. ۲ نوع جسم وجود دارند که با چهار رنگ رنگ آمیزی شده‌اند: چهار وجهی را در جهتی قرار دهیم که کف آن به رنگ R بوده، وجهی که با G رنگ شده‌است به طرف خودتان باشد؛ بنابراین دو وجه دیگر می‌توانند به صورت BW یا WB باشند.

۶.۱۶

۳۶.۱۷

مجموعه مسائل ۲، صفحه ۱۲

$$۳۰.۵ \text{ (یا } ۵ \times ۶)$$

$$۶۷۶.۱ \text{ (یا } ۲۶ \times ۲۶)$$

$$۶۴.۶ \text{ (یا } ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۸)$$

$$۶۰۰.۲ \text{ (یا } ۲۴ \times ۲۵)$$

$$۴۹۶۸.۷ \text{ (یا } ۶ \times ۳ \times ۱۲ \times ۲۳)$$

$$۳۳۸۰.۳ \text{ (یا } ۵ \times ۲۶ \times ۲۶)$$

$$۳۰۰۰.۴ \text{ (یا } ۲۴ \times ۲۵ \times ۵)$$

$$۲۴۳.۸ \text{ (یا } ۳ \times ۳ \times ۳ \times ۳ \times ۳)؛ ۷۶۸ \text{ (یا } ۴ \times ۴ \times ۴ \times ۴ \times ۳)$$

مجموعه مسائل ۳، صفحه ۱۳

$$۲۵.۴$$

$$۶۰۱؛ ۱۲۰؛ ۴۰۳۲۰$$

$$۶.۵$$

$$۲؛ ۳۰؛ ۵۰۴۰؛ ۱۳۲$$

$$۲.۶$$

$$۱۲۰.۳$$

۷۲۰.۰۷

۲۱۰.۰۹

۱۵۱۲۰۰؛ ۱۱۸۸۰.۰۸

۱۰- (ب) و (پ) غلط اند.

مجموعه مسائل ۴، صفحه ۱۹

۳۸۰، ۲۱۰، ۱۶۸۰ و ۳۸۰.۰۱

$$P(n+m, 1) = n+m ; P(m, 1) = m ; P(n, 1) = n. ۰۳$$

$$P(n, n-1) = n(n-1)(n-2) \dots 2 = n! \text{ و } P(n, n) = n!. ۰۴$$

$$(۱۲۱۴۴ \text{ یا } ۲۴ \times ۲۳ \times ۲۲) ۰۵$$

$$(۱۳۸۲۴ \text{ یا } ۲۴ \times ۲۴ \times ۲۴)؛ ۱۴۴۰۰ (با افزودن ۲۴ \times ۲۴ \text{ به } ۱۳۸۲۴) ۰۶$$

۰۷ ۴۵۳۶ (یا $۹ \times ۹ \times ۸ \times ۷$)؛ ۲۲۴۰، زیرا برای رقم یکان (رقمی که در انتهای سمت راست قرار دارد) ۵ انتخاب، برای رقم هزارگان ۸ انتخاب، برای رقم صدگان ۸ انتخاب و برای رقم دهگان ۷ انتخاب وجود دارد.

$$(۱۲۰ \text{ یا } ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲)؛ ۷۲ (۴ \times ۳ \times ۲ \times ۳) ۰۸$$

$$(۷۲۰ \text{ یا } ۶ \times ۶ \times ۵ \times ۴)؛ ۴۲۰ ۰۹$$

۱۰۳۹۲۰.۱۰

$P(۸, ۸) = ۴۰۳۲۰$ عدد صحیح ۸ رقمی موجودند؛ $P(۸, ۷) = ۴۰۳۲۰$ عدد صحیح ۷ رقمی موجودند؛ $P(۸, ۶) = ۲۰۱۶۰$ عدد صحیح ۶ رقمی موجودند. اعداد صحیح ۵ رقمی بر حسب رقم سمت چپ آنها به دو دسته تقسیم می شوند؛ اگر رقم سمت چپ آنها ۵ باشد $۶۰۰ = ۴ \times ۵ \times ۶ \times ۵ \times ۱$ امکان وجود دارد، بدین دلیل که اگر رقمها را از سمت چپ به راست در نظر بگیریم يك امکان برای اولین رقم، ۵ امکان برای دومین رقم (یعنی رقمهای ۳، ۴، ۶، ۷، ۸، زیرا اگر رقمهای ۵، ۱، ۲ در این محل قرار گیرند این عدد از ۵۳۰۰۰ کوچکتر می شود.) وجود دارد؛ اگر اولین رقم ۷، ۶ و یا ۸ باشد، $۲۵۲۰ = ۴ \times ۵ \times ۶ \times ۷ \times ۳$ امکان وجود دارد. از جمع نتایج مختلف، پاسخ به دست می آید.

۹۰۳۶۰.۱۱

راه حل مسئله قبل را می توان به عنوان يك مدل به کار برد، اما باید اینك به دلیل حضور رقم صفر در آن تغییری صورت داد. این رقم نمی تواند در يك عدد

صحیح به عنوان رقم اول یا آخرین رقم سمت چپ به کار رود. با تفکر درباره تعداد امکانات موضع هر رقم از چپ به راست، می توان تعداد امکانات را به دست آورد. بنابراین:

$$7 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 35280 \quad \text{اعداد ۸ رقمی:}$$

$$7 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 35280 \quad \text{اعداد ۷ رقمی:}$$

$$7 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 17640 \quad \text{اعداد ۶ رقمی:}$$

$$1 \times 4 \times 6 \times 4 \times 5 = 480 \quad \text{اعداد ۵ رقمی که با ۵ شروع می شوند:}$$

$$0.2 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 1680 \quad \text{اعداد ۵ رقمی که با ۶ یا ۷ شروع می شوند:}$$

مجموعه مسائل ۵، صفحه ۲۴

$$۸۴، ۳۵، ۱۵، ۰۱$$

$$۳. (الف) ۴۵ = C(10, 8) = C(10, 2); (ب) ۴۵$$

$$۰.۴ \quad C(720, 10) \quad \text{یا} \quad \frac{720!}{10!710!}$$

$$۰.۶ \quad C(20, 2) \quad \text{یا} \quad ۱۹۰; C(20, 3) \quad \text{یا} \quad ۱۱۴۰$$

$$۰.۷ \quad ۱۰! - ۲ \times ۹! = ۸ \times ۹!$$

تعداد آرایشهای نامشروط برابر $۱۰!$ است. تعداد آرایشهایی که در آنها دونفر مشخص در کنار هم قرار بگیرند برابر $۲ \times ۹!$ است، زیرا می توان آن دونفر را به دو طریق به عنوان يك فرد در نظر گرفت.

۰.۸ فرض کنیم در دنباله پنج عدد صحیح، بزرگترین عدد برابر n باشد، بنابراین باید ثابت کنیم که $(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n$ بر $5!$ تقسیمپذیر است. اکنون با توجه بداینکه $C(n, 5)$ عدد صحیحی است که با فرمول

$$C(n, 5) = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!}$$

داده می شود، مسأله را حل می کنیم. به طور کلیتر فرمول مربوط به عدد صحیح $C(n, r)$ نشان می دهد که حاصلضرب r عدد صحیح متوالی بر $r!$ تقسیمپذیر است.

$$۰.۹ \quad (الف) ۳۶۲۸۸۰ \quad \text{یا} \quad ۹!; (ب) ۵۷۶۰ \quad \text{یا} \quad ۲(5! \times 4!); (پ) ۱۷۲۸۰ \quad \text{یا} \quad ۴! \times ۶!;$$

(ت) ۲۸۸۰ یا ۵!۴۱.

در قسمت (پ) می توان کتابهای قرمز را به عنوان يك واحد در نظر گرفت، بنابراین باید ۶ کتاب جایگشت داده شوند. در نتیجه عدد ۶ به دست می آید. اما در هر کدام از این آرایشهای می توان به ۴ طریق کتابهای قرمز را جایگشت داد. در قسمت (ت) کتابهای سبز را می توان در وضعهای تخصیص یافته به ۵ راه و کتابهای قرمز را می توان به ۴ راه جایگشت داد.

۰۹۰ (الف) ${}^2C(30, 3)C(30, 5) + C(30, 4)C(30, 4)$ نتایج سه حالت، یعنی ۳ استاد، ۴ استاد یا ۵ استاد را با هم جمع کنید. مثلاً، حالت وجود ۳ استاد، وجود ۵ نفر را که در کار تجارت اند ایجاب می کند، و بنابراین $C(30, 3)C(30, 5)$ امکان وجود دارد.

(ب) $C(60, 8) - C(30, 8)$ اگر هیچک از هشت نفر در کار تجارت نباشند، تعداد امکانات برابر $C(30, 8)$ خواهد بود. لذا این مقدار از تعداد کل امکانات نامشروط کم می شود.

$$۰۹۱.۷۹ \text{ (یا } ۴ \times ۵ \times ۴ - ۱ \text{)}$$

۴۰۱۲

تعداد صفرها برابر تعداد رخ دادهای ۱۰ به عنوان يك عامل است. اکنون ۵ به عنوان يك عامل، چهار بار، یعنی در ۵، ۱۰، ۱۵، ۲۰ ظاهر می شود و ۲ به عنوان يك عامل در دفعات بیشتری ظاهر می شود.

۱۲۰۱۳

استدلال شبیه استدلال مسأله قبل است با این تفاوت که: در حاصل ضرب، جمله های ۲۵ و ۵۰ دارای دو عامل ۵ هستند.

۰۱۴.۷۵، زیرا برای هر پرچم ۷ انتخاب وجود دارد.

$$۰۱۵ \text{ (الف) } ۷ \times ۶^۴ \text{؛ (ب) } P(7, 5) = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 2520$$

۲۰۲۴۰۱۶

تعداد کل زیر مجموعه های نامشروط برابر $C(26, 3) = 2600$ است. از این تعداد، حالت هایی را که در آنها سه حرف متوالی مانند J، K و L وجود دارند کم می کنیم. این تعداد برابر ۲۴ است. آن گاه، تعداد حالت هایی را که در آنها دو حرف متوالی، نه سه حرف متوالی، وجود دارند کم می کنیم؛ اگر، حروف A و B باشند،

۲۳ حالت؛ اگر B و C باشند، ۲۲ حالت؛ ...؛ X و Y باشند، ۲۲ حالت؛ Y و Z باشند، ۲۳ حالت موجود است؛ بنا بر این کلاً ۵۵۲ حالت وجود دارد. پس جواب برابر با ۵۵۲ - ۲۴ - ۲۶۰۰ است.

$$k!/(k-n)!$$

۱۷. ابتدا n جعبه از k جعبه را انتخاب می‌کنیم که در داخل هر کدام يك شیء قرار بگیرد؛ این کار را می‌توان به $C(k, n)$ راه انجام داد. در هر يك از این انتخابها می‌توان به $n!$ راه، اشیاء را در داخل جعبه‌ها قرارداد. بنا بر این جواب برابر $C(k, n)n!$ است.

مجموعه مسائل ۶، صفحه ۲۸

$$۵۰۴۰۰۱ \text{ یا } ۷!$$

$$۳۶۰۰۰۳$$

باجواب مسأله قبل شروع کنید و تعداد حالت‌هایی را که در آنها دو نفر مانند A و B روی صندلیهای مجاور قرار بگیرند از آن کم کنید. اگر A و B به عنوان يك واحد اختیار شوند می‌بینیم وقتی که A سمت چپ B است، ۱۶ حالت و در حالت دیگر نیز ۱۶ حالت وجود دارند. بنا بر این جواب ۱۶ - ۱۶ - ۷! است.

$$۱۴۴۰۳$$

زن‌ها به ۳! راه می‌توانند روی صندلیهای متناوب بنشینند. پاسخ مسأله از ضرب این مقدار در ۴!، یعنی تعداد راههایی که مردان، با هر آرایش ثابت زن‌ها، می‌توانند روی صندلیها بنشینند، به دست می‌آید.

$$۱۲۰۴$$

به ازای هر ۳! آرایش نشستن زن‌ها، مردها می‌توانند دقیقاً به دو طریق بنشینند.

$$۱۲۰۰۵$$

تعداد ترتیبهای جرقه زدن، صرفاً برابر تعداد راههای آرایش ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ روی يك دایره است.

$$۳۰۰۶$$

فرض کنیم یکی از رنگها سفید باشد. در این صورت چون باید يك وجه سفید باشد، فرض کنید که وجه پایینی سفید است. وجه بالا را می‌توان با یکی از ۵ رنگ

باقیمانده رنگ کرد. بعد از انجام این کار، وجوه قائم با ۴ رنگ باقیمانده رنگ می شوند. حال به مسأله جایگشتهای دوری می رسیم، زیرا اکنون می توان بلوک مکعبی را بدون تغییر رنگهای وجوه بالا و پایین، حول محوری قائم که از مرکز بلوک می گذرد دوران داد. بنابراین برای رنگ کردن وجوه قائم ۳۱ راه وجود دارد، و برای به دست آوردن پاسخ باید این عدد را در ۵ ضرب کرد.

۲۰۷

با يك جعبه خالی شروع کنید، به دو وجه مقابل شماره های ۱ و ۶ را بدهید و جعبه را طوری قرار دهید که شماره ۶ در بالا واقع شود. چهار وجه قائم با شماره های ۲، ۳، ۴ و ۵ شماره گذاری می شوند. وجه جلویی را با ۲ و وجه عقبی را با ۵ شماره گذاری کنید. برای شماره های ۳ و ۴ فقط دو انتخاب وجود دارد.

مجموعه مسائل ۷، صفحه ۳۳

$$۰۱. (الف) ۱۶۸ \text{ یا } ۸!/(۵!۲!) \quad (ب) (۲!۲!۲!۲!۳!۹!)/۲۱!$$

۰۲. از بین n شیء ابتدا a شیء، سپس از بین $n-a$ شیء، b شیء و آن گاه از بین $n-a-b$ شیء، c شیء انتخاب کنید. تعداد انتخابها، $C(n, a)C(n-a, b)C(n-a-b, c)$ است، که می توان آن را به صورت پاسخی فاکتوریلی محاسبه کرد.

۵۰۳۵۰۳

از تعداد کل ۴۳۵ مسیر نامشروط، تعداد مسیرهایی را که شامل خیابان E هستند و از خیابان پنجم به خیابان ششم می روند کم می کنیم. از تقاطع خیابان اول و A تا تقاطع خیابان پنجم و E ، $C(۸, ۴)$ مسیر و از تقاطع خیابان ششم و E تا تقاطع خیابان نهم و H ، $C(۶, ۳)$ مسیر وجود دارد. پس از ۴۳۵، مقدار $C(۸, ۴) \times C(۶, ۳)$ را کم می کنیم.

$$۰۴. (۱۵!/(۴!۵!۶!))$$

اگر حرکت در امتداد يك واحد به سمت راست، عقب، و بالا را به B ، R ، و U نشان دهیم، می بینیم که مسأله همان مسأله تعیین تعداد جایگشتهای پانزده حرف

RRRRBBBBBUUUUUU

است که همه يك جا در نظر گرفته می شوند.

دانلود از سایت ریاضی سرا

$$۱۷!/(۴!۵!۶!۲!) \cdot ۵$$

مجموعه مسائل ۸، صفحه ۳۶

$$C(۴۹, ۱۰) \cdot ۳ \quad C(۱۰, ۴) \cdot ۲ \quad ۵, ۱۰, ۱۵, ۰۱$$

$$C(n-۱, r) = C(n-۲, r) + C(n-۲, r-۱) \quad ۴. (الف)$$

$$C(n-۱, r-۱) = C(n-۲, r-۱) + C(n-۲, r-۲) \quad (ب)$$

$$C(n-۱, r) = \frac{(n-۱)!}{r!(n-r-۱)!} \quad ۵. (الف)$$

$$C(n-۱, r-۱) = \frac{(n-۱)!}{(r-۱)!(n-r)!} \quad (ب)$$

۶. از جمع نتایج مسأله قبل، به دست می آوریم

$$\begin{aligned} C(n-۱, r) + C(n-۱, r-۱) &= \frac{(n-۱)!}{r!(n-r-۱)!} + \frac{(n-۱)!}{(r-۱)!(n-r)!} \\ &= \frac{(n-۱)!(n-r) + (n-۱)!r}{r!(n-r)!} = \frac{(n-۱)!n}{r!(n-r)!} \\ &= \frac{n!}{r!(n-r)!} = C(n, r). \end{aligned}$$

$$C(n, r) = C(n-۲, r-۲) + ۲C(n-۲, r-۱) + C(n-۲, r) \quad ۷$$

$$n=r=۰ \quad ۰.۸$$

مجموعه مسائل ۹، صفحه ۴۰

$$n+۱ \quad ۱.۶$$

$$(x+y)^۶ = C(۶, ۰)x^۶ + C(۶, ۱)x^۵y + C(۶, ۲)x^۴y^۲ \quad ۲.$$

$$+ C(۶, ۳)x^۳y^۳ + C(۶, ۴)x^۲y^۴ + C(۶, ۵)xy^۵ + C(۶, ۶)y^۶;$$

به ازای $x=y=۱$ ، این مجموع برابر $۲^۶$ یا ۶۴ است.

$$(1-1)^6 = 0.3$$

$$C(10, 7) = 120.4$$

$$u^7 + 7u^6v + 21u^5v^2 + 35u^4v^3 + 35u^3v^4 + 21u^2v^5 + 7uv^6 + v^7 \quad 0.5$$

۰.۸ ۱۸۰ جمله؛ $bfsu$ و $bdsu$ جمله‌های واقعی هستند.

مجموعه مسائل ۱۰، صفحه ۲۳

$$x^4 + y^4 + z^4 + 4x^3y + 4xy^3 + 4x^3z + 4xz^3 + 4y^3z + 4yz^3 \quad 0.1$$

$$+ 6x^2y^2 + 6x^2z^2 + 6y^2z^2 + 12x^2yz + 12xy^2z + 12xyz^2$$

$$4. 3^8, 17 \quad 0.3 \quad 10! / (2!2!2!2!) \quad 0.2$$

۰.۵ ۳۱۲، زیرا اعداد دقیقاً ضرایب بسط $(x+y+z)^{12}$ هستند.

مجموعه مسائل ۱۱، صفحه ۲۵

$$1, 9, 36, 84, 126, 126, 74, 36, 9, 1 \quad 0.1$$

$$1, 10, 45, 120, 210, 252, 210, 120, 45, 10, 1$$

$$1, 11, 55, 165, 330, 462, 462, 330, 165, 55, 11, 1$$

$$1, 12, 66, 220, 495, 792, 924, 792, 495, 220, 66, 12, 1$$

$$1, 13, 78, 286, 715, 1287, 1716, 1716, 1287, 715, 286, 78, 13, 1$$

۰.۲ بنابر فرمول (6.3) ، مجموع عنصرهای سطر نهم برابر 2^8 است. به همین ترتیب مجموعه‌های عنصرهای سطرهای قبلی برابر $2^7, 2^6$ و غیره هستند. بنابراین باید تحقیق کرد که

$$2^8 = 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 + 1.$$

بنابر اتحاد

$$a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + a^0),$$

$$\text{داریم } 2^8 - 1 = (2 - 1)(2^7 + 2^6 + \dots + 2^0), \text{ یا}$$

$$2^8 - 1 = 2^7 + 2^6 + \dots + 2^0$$

که با برابری که می‌خواستیم درستی آن را تحقیق کنیم هم‌ارز است.

۳. این مطلب را می‌توان از معادله (۷.۳)، با بردن جمله‌های با علامت منفی به طرف دیگر، نتیجه گرفت.

مجموعه مسائل ۱۲، صفحه ۴۷

$$۶۳۰۱ \text{ یا } ۲۶ - ۱$$

۳. ۵۶۵۰ یا ۱ - ۳۸، زیرا يك عضو در رأی دادن به هر موضوع، سه انتخاب دارد: بله، نه، یا ممتنع.

$$۱۰۲۳۰۳ \text{ یا } ۲۱۰ - ۱$$

۴. ۲۵۴۰۴، زیرا ۲۷ نوع از خانواده‌هایی که دارای ۷ فرزندند، ۲۶ نوع از خانواده‌هایی که دارای ۶ فرزندند و غیره وجود دارند.

مجموعه مسائل ۱۳، صفحه ۵۱

$$۵۰۵۰۰۱ \text{ یا } \frac{1}{2}(100)(101)$$

۲. اگر مجموع را با S نشان دهیم، داریم: $2S = 101 + 101 + \dots + 101$ که در آن ۱۰۰ جمع‌وند وجود دارد. بنابراین $2S = 10100$ و $S = 5050$

۳. اگر مجموع را با S نشان دهیم، داریم:

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-2) + (n-1) + n$$

$$S = n + (n-1) + (n-2) + \dots + 3 + 2 + 1$$

$$2S = (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) = n(n+1)$$

$$S = \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$۰۴. ۳۳۸۳۵۰ یا (۲۰۱)(۱۰۱)(۱۰۰) \frac{1}{6}$$

$$۰۵. (الف) ۹۹ \quad (ب) ۱۰۱$$

$$۰۶. (الف) n-۱ \quad (ب) n+۱$$

$$۰۷. ۴۸۵۱؛ ۵۱۵۱$$

به ازای $x=۱$ ، معادله به صورت $y+z=۹۹$ درمی‌آید که در مجموعه اعداد صحیح مثبت دارای ۹۸ جواب است؛ به ازای $x=۲$ داریم $y+z=۹۸$ که در مجموعه اعداد صحیح مثبت دارای ۹۷ جواب است؛ ...؛ و به ازای $x=۹۸$ داریم $y+z=۲$ که دارای ۱ جواب است. پس تعداد کل جوابها در مجموعه اعداد صحیح مثبت برابر است با:

$$۹۸+۹۷+\dots+۲+۱=\frac{1}{2}(۹۸)(۹۹).$$

$$۰۸. \frac{1}{2}(n+۱)(n+۲)؛ \frac{1}{2}(n-۲)(n-۱)$$

$$۰۹. ۱۵؛ ۱۰؛ \frac{1}{2}(n+۱)(n+۲)$$

در بسط $(x+y+z)^۴$ تعداد جمله‌ها برابر با تعداد جوابهای معادله $a+b+c=۴$ در مجموعه اعداد صحیح نامنفی است.

۱۰. به ازای $r=۴$ معادله (۸.۳) را بنویسید و در آن $m+۳, m+۲, m+۱, \dots, ۵, ۶, \dots$ را به جای n قرار دهید تا به دست آید

$$C(m+۲, ۳)=C(m+۳, ۴)-C(m+۲, ۴)$$

$$C(m+۱, ۳)=C(m+۲, ۴)-C(m+۱, ۴)$$

$$C(m, ۳)=C(m+۱, ۴)-C(m, ۴)$$

$$\dots\dots\dots$$

$$C(۵, ۳)=C(۶, ۴)-C(۵, ۴)$$

$$C(۴, ۳)=C(۵, ۴)-C(۴, ۴)$$

از جمع این روابط به دست می آوریم

$$C(4, 3) + C(5, 3) + \dots + C(m, 3) + C(m+1, 3) + C(m+2, 3) \\ = C(m+3, 4) - C(4, 4)$$

$$\frac{1}{6}(4)(3)(2) + \frac{1}{6}(5)(4)(3) + \dots + \frac{1}{6}(m+2)(m+1)(m) \\ = \frac{1}{24}(m+3)(m+2)(m+1)(m) - 1.$$

جمله ۱ - را به طرف اول برده، همه را درع ضرب می کنیم تا به دست آید

$$(3)(2)(1) + (4)(3)(2) + (5)(4)(3) + \dots + (m+2)(m+1)(m) \\ = \frac{1}{4}(m+3)(m+2)(m+1)(m).$$

جمله $(m+2)(m+1)(m)$ را می توان به صورت $m^3 + 3m^2 + 2m$ نوشت، بنابراین تمام جمله های سمت چپ را می توان به سه مجموع تفکیک کرد

$$(1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + m^3) + 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + m^2) \\ + 2(1 + 2 + 3 + \dots + m).$$

اگر مجموع مکعبهای از 1^3 تا m^3 را به S نشان دهیم و به جای مجموعهای دیگر فرمولهای آنها را بگذاریم، به دست می آوریم

$$S + \frac{1}{4}m(m+1)(2m+1) + m(m+1) \\ = \frac{1}{4}(m+3)(m+2)(m+1)m.$$

این برابری به $S = 1/4 m^2(m+1)^2$ خلاصه می شود، و بنا براین پاسخ برابر است با:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + m^3 = \frac{1}{4}m^2(m+1)^2.$$

مجموعه مسائل ۱۴، صفحه ۵۹

$$F(11) = 233 \cdot 1$$

۲. اگر $n = 1, 4, 7, 10, 13, 16, \dots$ زوج $F(n)$ زوج است. به طور کلی $F(n)$ زوج است اگر n به صورت $3k+1$ باشد، و در بقیه حالتها $F(n)$ فرد است. این پیامدی فوری از فرمول (۴.۴) و از این واقعیت است که مجموع دو عدد صحیح، تنها وقتی فرد است که یکی فرد و دیگری زوج باشد.

$$F(n+1) = F(n) + F(n-1) \quad ۳.$$

۴. نتیجه مسئله قبل را با فرمول (۴.۴) جمع کنید.

$$C(11, 6) \quad ۵.$$

$$C(15, 5)C(16, 6) \quad ۶.$$

با چشم‌پوشی موقت از B ها، مشاهده می‌کنیم که A ها و C ها می‌توانند به یکی از $C(15, 5)$ راه مرتب شوند. در این صورت بین A ها و C ها و در انتهای آنها ۱۶ مکان وجود دارد که B ها را می‌توان در آنها درج کرد. بنا بر این به ازای هر آرایش A ها و C ها، $C(16, 6)$ راه برای درج B ها وجود دارد.

$$7350 \quad ۷.$$

با چشم‌پوشی موقت از z ها، متوجه می‌شویم که حروف دیگر را می‌توان به $105 = 7!/(4!2!) = 105$ راه مرتب کرد. در این صورت، بین این حروف و در انتهای آنها ۸ مکان وجود دارد که می‌توان z ها را در آنها درج کرد. بنا بر این $C(8, 4)$ یا ۷۰ راه برای درج z ها موجود است. پاسخ برابر 105×70 است.

مجموعه مسائل ۱۵، صفحه ۶۳

$$C(53, 3); C(49, 3) \quad ۱.$$

$$C(8, 3) = C(8, 5) \quad ۲.$$

۴. کافی است ثابت کنیم که $C(m-1, k-1) = C(m-1, m-k)$ ، و این از فرمول (۴.۲) نتیجه می‌شود.

$$۱۰۰۴) \text{ را به کار برید.} \quad ۵.$$

$$C(11, 6) \quad ۶. \text{ (الف)}$$

صرفنظر از عدد صحیح ۱۰۰۰۰۰۰ که مجموع ارقام آن برابر ۶ نیست،

با احتساب صفر به عنوان يك رقم، هر عدد صحیح بین ۱ تا ۹۹۹۹۹۹ را به صورت عددی که شش رقم دارد تعبیر می‌کنیم. مثلاً عدد صحیح ۸۳۶۵ را می‌توان به صورت ۰۵۸۳۶۵ نوشت. اگر شش رقم را به صورت $x_6, x_5, x_4, x_3, x_2, x_1$ بنویسیم، می‌توانیم مسأله را به صورت مسأله تعیین تعداد جوابهای معادله

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 6$$

در مجموعه اعداد صحیح نامنفی تعبیر کنیم.

$$(ب) \quad C(10, 5) + C(9, 4) + C(8, 3) + C(7, 2) + C(6, 1) + 1$$

$$۷. (الف) \quad C(21, 17)$$

هر جمله بسط به صورت $\alpha_1^x \alpha_2^x \alpha_3^x \alpha_4^x \alpha_5^x$ (با يك ضریب مناسب) است، که در آن مجموع توانها برابر ۱۷ است؛ لذا $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 17$. بنا براین، پاسخ برابر با تعداد جوابهای این معادله در مجموعه اعداد صحیح نامنفی است.

$$(ب) \quad C(t+k-1, t)$$

مجموعه مسائل ۱۶، صفحه ۶۵

$$۱. \quad C(11, 6) \cdot 2 \quad ۳. \quad C(12, 10) \quad ۴. \quad C(16, 12)$$

$$۱۰۵ - C(16, 7)$$

مسأله به سؤال درباره تعداد ترکیبهای ۱۰ رقم ۱، ۲، ۳، ...، ۹، که هر بار هفت تایی آنها در نظر گرفته می‌شوند و ممکن است هر کدام در ترکیب تکرار شود، برمی‌گردد. «۱-» در پاسخ، به این علت به حساب آمده است که وقتی هر هفت رقم صفر باشند، این ترکیب با هیچ عدد صحیحی متناظر نیست.

مجموعه مسائل ۱۷، صفحه ۷۰

۱. یکی از بیست قسمت پاسخ عبارت است از: ۶، ۸، ۷، ۶ که با ۱، ۲، ۳، ۴ متناظر است.

$$۲. \quad C(71, 3)$$

$$۳. (الف) \quad C(37, 4) \quad (ب) \quad C(30, 4)$$

$$۴. \quad C(16, 3)$$

$$۵. (الف) \quad C(13, 3) \quad (ب) \quad C(7, 3) \quad (پ) \quad \text{هیچکدام}$$

$$۰۶. (الف) C(۱۷, ۳) \quad (ب) C(۱۱, ۳)$$

$$۰۷. (الف) C(m - c_1 + ۳, ۳) \quad (ب) C(m - c_1 - c_2 + ۳, ۳)$$

$$۰۸. C(۱۸, ۵) - ۶C(۸, ۵)$$

عدد صحیح ۱۰۰۰۰۰۰۰ را که مجموع ارقام آن ۱۳ نیست کنار می گذاریم. با احتساب صفر به عنوان رقم، اعداد صحیح از ۱ تا ۹۹۹۹۹۹ را به صورت شش رقمی تعبیر می کنیم. اگر شش رقم را به صورت $x_1, \dots, x_6$ بنویسیم می توان مسأله را به عنوان تعداد جوابهای معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = ۱۳$ در مجموعه اعداد صحیح نامنفی نابیشتر از نه تعبیر کرد. اگر از شرط «نابیشتر بودن از نه» موقتاً چشم پوشی کنیم، متوجه می شویم که معادله در مجموعه اعداد صحیح نامنفی، $C(۱۸, ۵)$ جواب دارد. سپس دیده می شود که تعداد جوابها در مجموعه اعداد صحیح نامنفی با شرط $x_1 > ۹$ برابر $C(۸, ۵)$ است. این مقدار و مقادیر مشابهی برای حالت های $x_2 > ۹$ و $x_3 > ۹$ و غیره از $C(۱۸, ۵)$ کم می شوند.

مجموعه مسائل ۱۸، صفحه ۷۸

$$۰۱. N - N(\alpha) - N(\beta) - N(\gamma) - N(\delta) + N(\alpha, \beta) + N(\alpha, \gamma)$$

$$+ N(\alpha, \delta) + N(\beta, \gamma) + N(\beta, \delta) + N(\gamma, \delta) - N(\alpha, \beta, \gamma)$$

$$- N(\alpha, \beta, \delta) - N(\alpha, \gamma, \delta) - N(\beta, \gamma, \delta) + N(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$$

$$۰۲. ۲، تعداد کل زیر مجموعه های مجموعه ای از ۳ شیء.$$

$$۰۳. ۱۶۰۰۰$$

فرض کنید که تقسیم پذیری بر ۳، ۵، ۱۱ را به ترتیب با α, β, γ نشان دهیم. در این صورت فرمول (۳.۵) نتیجه می دهد که

$$۰۴. ۲۰۰ - ۶۰۰ + ۱۰۰۰ + ۲۲۰۰ - ۳۰۰۰ - ۶۶۰۰ - ۱۱۰۰۰ + ۳۳۰۰۰$$

$$۰۴. ۹۹۸۹۱۰$$

توانهای چهارم در میان مربعها گنجانده می شوند، بنابراین می توان آنها را در نظر نگرفت. گوییم يك عدد صحیح دارای ویژگی α است اگر آن عدد مربع کامل باشد، دارای ویژگی β است اگر مکعب کامل باشد، دارای هر دو ویژگی α

و β است اگر توان شش کامل باشد. بنابراین محاسبه زیر را انجام می‌دهیم

$$N - N(\alpha) - N(\beta) + N(\alpha, \beta) = 1000000 - 1000 - 100 + 10.$$

$$N(\alpha, \beta, \gamma) - N(\alpha, \beta, \gamma, \delta) - N(\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon) \quad ۰۵$$

$$+ N(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)$$

$$N(\beta) - N(\beta, \alpha) - N(\beta, \gamma) - N(\beta, \delta) + N(\beta, \alpha, \gamma) \quad ۰۶$$

$$+ N(\beta, \alpha, \delta) + N(\beta, \gamma, \delta) - N(\beta, \alpha, \gamma, \delta)$$

مجموعه مسائل ۱۹، صفحه ۸۳

$$C(13, 3) - 4C(7, 3) \cdot ۰۱$$

$$C(16, 5) - 6C(11, 5) + 15C(6, 5) \cdot ۰۲$$

مسئله به‌سؤال درباره تعداد جوابهای معادله $y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_6 = 17$ در مجموعه اعداد صحیح مثبت نا بیشتر از ۵ برمی‌گردد، زیرا هر عدد صحیح زوج x_1 را می‌توان به صورت $2y_1$ نوشت، که در آن y_1 نیز يك عدد صحیح است.

$$C(14, 3) - C(8, 3) - 2C(7, 3) - C(6, 3) \cdot ۰۳$$

تعداد جوابهای معادله‌ای را که در شرایط $x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 2, x_4 > 3$ صدق می‌کند با N نشان می‌دهیم. لذا، بتایر فرمول $N = C(14, 3) - (22.4)$. اگر یکی از جوابها دارای ویژگی $x_1 > 6$ باشد گوییم این جواب ویژگی α را دارد. همین‌طور فرض کنیم $x_2 > 7, x_3 > 9, x_4 > 11$ با ویژگی β, γ, δ متناظر باشند. بنابراین می‌خواهیم تعیین کنیم که چندتا از $C(14, 3)$ جواب دارای هیچیک از ویژگیهای α و β و γ و δ نیستند. با استفاده از فرمول (22.4) نتیجه می‌گیریم که

$$N(\alpha) = C(8, 3), N(\beta) = C(7, 3), N(\gamma) = C(7, 3), N(\delta) = C(6, 3)$$

تمام جمله‌های بعدی فرمول (3.5) صفرند.

$$C(16, 3) - 4C(9, 3) \cdot ۰۴$$

$$C(13, 3) - C(4, 3) - C(5, 3) - C(8, 3) - C(9, 3) + C(4, 3) \quad ۰۵$$

جواب به تعیین تعداد جوابهای معادله

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$$

در مجموعه اعداد صحیح نامنفی که مقید به شرایط $x_1 \leq 8, x_2 \leq 7, x_3 \leq 4, x_4 \leq 3$ هستند برمی‌گردد.

$$C(12, 2) - C(3, 2) - C(4, 2) - C(7, 2) \quad .6$$

جواب به تعیین جوابهای معادله $x_1 + x_2 + x_3 = 10$ در مجموعه اعداد صحیح که در شرایط $x_1 \leq 8, x_2 \leq 7, x_3 \leq 4$ صدق می‌کنند برمی‌گردد.

$$C(11, 3) - 4C(8, 3) + 6C(5, 3) = 107$$

$$C(13, 3) - 4C(4, 3) \cdot 8$$

$$c = 23.10$$

$$C(11, 4) - 5C(5, 4) = C(22, 4) - 5C(16, 4)$$

$$+ 10C(10, 4) - 10C(4, 4)$$

جایگذاری یا تبدیل $x_j = 7 - y_j$ به‌ازای $j = 1, 2, 3, 4, 5$ مسئله را حل خواهد کرد.

.11

$$C(m-1, k-1) - C(m-1-c_1, k-1) - C(m-1-c_2, k-1)$$

$$- C(m-1-c_3, k-1) + C(m-1-c_1-c_2, k-1)$$

$$+ C(m-1-c_1-c_3, k-1) + C(m-1-c_2-c_3, k-1)$$

$$- C(m-1-c_1-c_2-c_3, k-1).$$

$$C(24, 6) - C(15, 6) - 6C(14, 6) \quad .12$$

رقمها را از چپ به راست با $x_1, x_2, x_3, \dots, x_v$ نشان می‌دهیم. در این صورت، پاسخ برابر با تعداد جوابهای معادله $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_v = 19$ در مجموعه اعداد صحیح نامنفی نایب‌تر از ۹، و با شرط اضافی مثبت بودن x_1 است.

مجموعه مسائل ۲۰، صفحه ۸۹

$$D(6) = 265; D(5) = 44.1$$

۰۳ ۳۴۱۲ ۲۴۱۳ ۱۴۳۲ ۳۲۱۴ ۲۱۴۳ ۱۲۴۳ ۳۱۴۲ ۲۱۳۴ ۱۲۳۴

۰۳ (الف) ۱۹۳۶

اعداد صحیح ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ را می توان به $D(5)$ راه در پنج مکان اول قرار داد، زیرا برای پنج شیء، $D(5)$ پریش وجود دارد؛ اعداد صحیح باقیمانده از ۶ تا ۱۰ را می توان به $D(5)$ راه در پنج مکان آخر قرار داد، بنابراین جواب برابر $D(5) \times D(5)$ است.

(ب) $(5!)^2 = 14400$

هر آرایش ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰ در پنج مکان اول، يك پریش است، بنابراین ۵ امکان وجود دارد، همین مطلب برای اعداد صحیح ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ که در پنج مکان آخر قرار گیرند صادق است.

۰۴ ۳۲۱۶

اصل شمول - عدم شمول را با این سه ویژگی جایگشتها که: ۱ در اولین مکان؛ ۴ در چهارمین مکان؛ ۷ در هفتمین مکان قرار گیرند به کار می بریم. بنابراین پاسخ برابر است یا:

$$7! - 6! - 6! - 6! + 5! + 5! + 5! - 4!.$$

۰۵ ۲۲۲۶۰

برای انتخاب سه عددی که در مکان طبیعی خود قرار گیرند $C(9, 3) = 84$ راه وجود دارد؛ به ازای هر چنین انتخابی، $D(6) = 265$ پریش از شش عدد دیگر موجود است. حاصلضرب ۸۴ و ۲۶۵ پاسخ مسأله است.

$$۰۶ \quad D(26) \quad \text{یا} \quad \left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{26!} \right] 26!$$

$$۰۷ \quad D(n) - nD(n-1) = n! \left[1 - \frac{1}{1!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \right]$$

$$- n! \left[1 - \frac{1}{1!} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \right]$$

بعد از انجام عمل تفریق، تنها جمله ای که باقی می ماند جمله $n! \left[\frac{(-1)^n}{n!} \right]$ است.

مجموعه مسائل ۲۱، صفحه ۹۴

$$\frac{1}{6} \cdot 3 \quad \frac{1}{4} \cdot 2$$

$$\frac{5}{12} \cdot 4$$

۳۶ حالت همشانس وجود دارند. در ۱۵ حالت از این حالتها، شماره روی تاس سفید بزرگتر است.

$$\frac{5}{18} \cdot 5$$

۴۶ حالت همشانس وجود دارند. برای سهولت فرض می‌کنیم که تاسها دارای رنگهای مختلف، مثلاً سفید، قرمز، آبی و سبز باشند. وقتی که تاسها را می‌ریزیم، می‌توانیم استدلال کنیم که هر برآمد تاس سفید رضایت بخش خواهد بود، بنابراین ۶ امکان وجود دارد؛ اما برآمد تاس سفید هر چه باشد، برآمد متفاوتی را برای تاس قرمز می‌خواهیم، بنابراین ۵ امکان وجود دارد؛ به همین ترتیب برای تاس آبی ۴ امکان و برای تاس سبز ۳ امکان موجود است. لذا تعداد حالتهای مساعد برابر $3 \times 4 \times 5 \times 6$ است. (راه دیگر محاسبه تعداد حالتهای مساعد، شمارش تعداد اعداد صحیح ۴ رقمی است که رقمهای آنها تماماً از ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ تشکیل شده و همه رقمهای آنها از هم متمایز باشند. هر چنین عدد صحیحی، مثل ۳۵۱۶، را می‌توان به این صورت تعبیر کرد که تاس سفید «۳»، تاس قرمز «۵»، تاس آبی «۱»، و تاس سبز «۶» بیاید.)

$$7 \times \frac{55}{6} \cdot 6$$

تعداد حالتهای همشانس برابر ۶۷ است. برای محاسبه تعداد حالتهای مساعد، تعداد اعداد هفت رقمی (برای هر تاس يك رقم) را که تماماً از رقمهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ ساخته می‌شوند و دقیقاً دارای سه عدد شش هستند می‌شماریم. دیده می‌شود که این تعداد برابر $C(7, 3) \times 5 \times 5 \times 5 \times 1 \times 1 \times 1$ است.

$$\frac{C(14, 4) - 5C(8, 4)}{6^5} \text{ یا } \frac{651}{6^5} \cdot 8$$

تعداد حالت‌های همشانس برابر ۵۶ است. تعداد حالت‌های مساعد برابر تعداد جواب‌های معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 15$ در مجموعه اعداد صحیح از ۱ تا ۵ است.

$$0.9 \quad \text{الف)} \quad \frac{7}{32}$$

تعداد حالت‌های همشانس برابر ۲۸ است. از این تعداد، تعداد حالت‌های مساعد برابر $C(8, 5)$ است، زیرا مسأله به تعداد راه‌های انتخاب پنج سکه از هشت سکه برمی‌گردد.

$$\text{ب)} \quad \frac{C(8, 5) + C(8, 6) + C(8, 7) + C(8, 8)}{2^8} \quad \text{یا} \quad \frac{93}{256}$$

$$0.10 \quad \frac{134}{C(52, 4)}$$

تعداد انتخاب‌های چهارکارت از یک دسته کارت برابر $C(52, 4)$ است. تعداد انتخاب‌های چهارکارت، هر کدام از یک خال، برابر $[C(13, 1)]^4$ یا ۱۳۴ است.

$$0.11 \quad \text{الف)} \quad 1 - \frac{C(40, 13) + 12C(40, 12)}{C(52, 13)}$$

احتمال متمم را محاسبه کنید. تعداد کل حالت‌های همشانس برابر $C(52, 13)$ است. تعداد انتخاب‌های ۱۳ کارت بدون صورت از یک دسته کارت برابر $C(40, 13)$ ؛ و با یک صورت برابر $C(40, 12) \times C(12, 1)$ است.

$$\text{ب)} \quad \frac{C(4, 1)C(48, 12)}{C(52, 13)}$$

$$\text{پ)} \quad 1 - \frac{C(48, 13)}{C(52, 13)}$$

این پاسخ با محاسبه احتمال متمم به دست می‌آید. (به نظر می‌رسد که باروش مستقیم جواب متفاوتی حاصل می‌شود.) تعداد انتخاب‌های ۱۳ کارت از یک دسته کارت بدون تک برابر $C(48, 13)$ است.

$$12 \cdot \frac{1}{13}$$

جمعاً ۲۶! ترتیب وجود دارند. در 2×25 حالت از اینها، x و y مجاورند.

$$13. (الف) [C(23, 4) - C(14, 4) - 4C(13, 4) + 4C(4, 4)] / 90000$$

۹۰۰۰۰ عدد صحیح پنج رقمی وجود دارند. تعداد حالت‌های مساعد برابر تعداد

جواب‌های معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20$ در مجموعه اعداد صحیح نامنفی
نابیشتر از ۹ است، به شرط آنکه قید اضافی $x_1 > 0$ را اضافه کنیم. بنابراین اصل
شمول - عدم شمول را همراه با فرمول (۲۲.۴) می‌توان به کار برد.

$$(ب) \frac{1}{1800}$$

۵۰ عدد صحیح پنج رقمی وجود دارند که در شرایط مسأله صدق می‌کنند.

بیست‌تای این اعداد دارای رقم‌های ۵، ۴، ۱، ۱، ۱ و سی تا از آنها دارای رقم‌های
۵، ۲، ۲، ۱، ۱ هستند.

۱۴. نه، احتمال برابر $4/9$ است.

تعداد $C(10, 5)/2$ حالت هم‌شانس وجود دارند، زیرا این تعداد برابر
تعداد راه‌های تقسیم ۱۰ نفر به دو تیم ۵ تایی است. برای محاسبه تعداد حالت‌های
مساعد، دو نفر رفیق را کنار گذاشته و از میان هشت نفر سه نفر را برای اینکه با هم در
«تیم دلخواهشان» باشند انتخاب می‌کنیم؛ پس تعداد حالت‌های مساعد برابر $C(8, 3)$
است.

$$15. 1 - \frac{D(8) + 8D(7)}{8!}; 1 - \frac{D(8)}{8!}$$

در هر قسمت، پاسخهایی که داده شده‌اند، از احتمال متمم به دست آمده‌اند.
تعداد حالت‌های هم‌شانس برابر $8!$ است. تعداد راه‌هایی که در آن هیچ يك از شمعی‌های
اتومبیل نمی‌تواند در سیلندر اصلی خود قرار بگیرد برابر $D(8)$ ، تعداد پریشهای
۸ شیء است. بعلاوه تعداد آرایش‌هایی که در آنها درست يك شمع در سیلندر اصلی
خود قرار بگیرد برابر $8D(7)$ است.

۱۶. احتمال يك برد برابر احتمال آن است که آرایش کارتهای يك دسته کارت با
آرایش کارتهای دسته دیگر سازگار باشد. چون $52!$ آرایش ممکن، و $D(52)$

پیش وجود دارند، نسبت تعداد حالت‌های مساعد به تعداد کل حالت‌های همشانس برابر است با

$$\frac{D(52)}{52!} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{52!} \quad (\text{تقریباً } 0.3679)$$

$$1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots - \frac{1}{13!} \quad 0.17$$

(این پاسخ تا چهار رقم دهدهی همان پاسخ مسئله ۱۶ است.)

۱۸. احتمال يك برد برابر احتمال آن است كه يك دسته کارت بر خورده، بجز برای يك کارت، پیشی کلی تولید کند. برای آنكه يك کارت ثابت نگه داشته شود ۵۲ راه وجود دارد و برای ۵۱ کارت باقیمانده $D(51)$ پیش موجود است. بنابراین پاسخ برابر است با:

$$52 \frac{D(51)}{52!} = \frac{D(51)}{51!} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots - \frac{1}{51!}.$$

(این پاسخ به اندازه $1/52!$ ، كه عدد بسیار كوچكى است، با پاسخ مسئله ۱۶ اختلاف دارد.)

مجموعه مسائل ۲۲، صفحه ۱۰۳

$$1, 2, 3, 5, 7$$

$$q_1(n) = 1, \quad p_1(n) = 1.2$$

$$q_2(9) = 5, \quad q_2(8) = 5.3 \quad \text{اگر } n \text{ زوج باشد } q_2(n) = 1 + \frac{1}{2}n \quad \text{اگر } n$$

$$q_2(n) = \frac{1}{2}(n+1) \quad \text{فرد باشد،}$$

$$2.5 \quad 1.4$$

۶. در میان تمام افرازهای n ، بزرگترین جمع‌وندی كه رخ می‌دهد خود n است، و بنا بر این هیچ افزازی وجود ندارد كه اگر قبلاً به وسیله $p_n(n)$ به حساب نیامده باشد، اکنون به وسیله $p_{n+1}(n)$ به حساب بیاید، به همین ترتیب برای $p_k(n)$ به ازای $k > n$.
۷. تنها يك افراز، یعنی خود n ، وجود دارد كه به وسیله $p_n(n)$ به حساب می‌آید ولی در $p_{n-1}(n)$ به حساب نمی‌آید.

مجموعه مسائل ۲۳، صفحه ۱۰۶

۰۱ جواب جزئی:

$k \backslash n$	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
۸	۱	۵	۱۰	۱۵	۱۸	۲۰	۲۱	۲۲	۲۲	۲۲	۲۲	۲۲
۹	۱	۵	۱۲	۱۸	۲۳	۲۶	۲۸	۲۹	۳۰	۳۰	۳۰	۳۰
۱۰	۱	۶	۱۴	۲۳	۳۰	۳۵	۳۸	۴۰	۴۱	۴۲	۴۲	۴۲
۱۱	۱	۶	۱۶	۲۷	۳۷	۴۴	۴۹	۵۲	۵۴	۵۵	۵۶	۵۶
۱۲	۱	۷	۱۹	۳۴	۴۷	۵۸	۶۵	۷۰	۷۳	۷۵	۷۶	۷۷

۲۸، ۱۵، ۷، ۰، ۲

۴۲، ۳۰، ۲۲، ۱۵، ۰، ۳

مجموعه مسائل ۲۴، صفحه ۱۰۹

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9 + x^{10} + x^{11} + x^{12} + x^{13} + x^{14} + x^{15} + x^{16} + \dots \quad ۰۱$$

$$1 + x + x^2 + 2x^3 + 2x^4 + 3x^5 + 4x^6 + 5x^7 + 6x^8 + \dots \quad ۰۲$$

$$1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 7x^5 + 11x^6 + 15x^7 + \dots \quad ۰۳$$

مجموعه مسائل ۲۵، صفحه ۱۱۳

۰۱ (الف) تعداد افرازهای ۱۲ با جمعوندهای زوج؛

(ب) تعداد افرازهای ۹ با جمعوندهای نابیشتر از ۳؛

(پ) تعداد افرازهای ۶ با جمعوندهای متمایز.

۰۲ (الف) ۱۱ (ب) ۱۲ (پ) ۴

$$\begin{aligned}
 & ۳. الف) (1+x^6+x^{12}+x^{18}+x^{24}+x^{30}+x^{36}) \\
 & \times (1+x^7+x^{14}+x^{21}+x^{28}+x^{35})(1+x^{12}+x^{24}+x^{36})(1+x^{20}); \\
 & ب) (1+x^3+x^6+x^9+x^{12}+x^{15})(1+x^4+x^8+x^{12}) \\
 & \times (1+x^5+x^{10}+x^{15})(1+x^6+x^{12})(1+x^7+x^{14})(1+x^8) \\
 & \times (1+x^9)\dots(1+x^{15}); \\
 & پ) (1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)(1+x^6)(1+x^7) \\
 & \times (1+x^8)(1+x^9);
 \end{aligned}$$

به ترتیب ۵، ۱۷ و ۸ افراز.

۱۴.۴

ضریب x^{18} را در بسط

$$\begin{aligned}
 & (1+x^2+x^4+x^6+\dots+x^{18})(1+x^3+x^6+\dots+x^{18}) \\
 & \times (1+x^5+x^{10}+x^{15})(1+x^7+x^{14})
 \end{aligned}$$

محاسبه کنید.

۳.۵

به طوری که با استفاده از تبدیل $w=1+W$, $v=1+V$, $u=1+U$ $t=1+T$ می‌توان دید، پاسخ برابر با تعداد جوابهای معادله

$$3U+5V+7W+9T=16$$

در مجموعه اعداد صحیح نامنفی است. این تعداد برابر ضریب x^{16} در بسط

$$\begin{aligned}
 & (1+x^3+x^6+x^9+x^{12}+x^{15})(1+x^5+x^{10}+x^{15}) \\
 & \times (1+x^7+x^{14})(1+x^9)
 \end{aligned}$$

است.

مجموعه مسائل ۲۶، صفحه ۱۱۵

در این راه‌حلها P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 چند جمله‌ایهایی هستند که در صفحه ۱۱۵ کتاب داده شده‌اند.

۳۴۳.۱

ضریب x^{100} را در بسط $P_1 P_2 P_3 Q P_5$ که در آن

$$Q = 1 + x^{20} + x^{40} + x^{60} + x^{80} + x^{100}$$

محاسبه کنید.

۴۹.۲

ضریب x^{53} را در بسط $P_1 P_2 P_3 P_4 P_5$ محاسبه کنید. هر چند جمله‌ای را می‌توان با حذف توانهای بیشتر از x^{53} مختصر کرد.

۳۴.۳

این عدد ضریب x^{95} در بسط $P_2 P_3 P_4 P_5$ است.

۱۶.۴

برای به دست آوردن معادله $5Y + 10Z + 25W + 50T = 65$ تبدیل جوابهای این معادله را در مجموعه اعداد صحیح نامنفی پیدا کنید. این عدد برابر ضریب x^{65} در بسط $P_2 P_3 P_4 P_5$ است.

مجموعه مسائل ۲۷، صفحه ۱۱۹

$$۱۵۰.۱ \text{ یا } ۳ \times ۲۵ - ۳۵$$

$$f(5, 2) = 25 - 2 = 30.2$$

$$k! = k^k - C(k, 1)(k-1)^k + C(k, 2)(k-2)^k \quad .۴$$

$$- C(k, 3)(k-3)^k + \dots + (-1)^{k-1} C(k, k-1)$$

۰۵. برابری که در این مسأله آمده است از فرمول (۱.۸) به ازای $k=8$ نتیجه می‌شود؛ زیرا به هیچ راهی نمی‌توان تعداد کمتر از ۸ شیء را در داخل ۸ جعبه طوری توزیع کرد که هیچ جعبه‌ای تهی نماند، به ازای $m < 8$ ، $f(m, 8) = 0$.

مجموعه مسائل ۲۸، صفحه ۱۲۲

$$\frac{۳^۹ - ۳ \times ۲^۹ + ۳}{۳!} \text{ یا } ۳۰۲۵.۱$$

$$0.2 \quad \frac{4^4 - 4 \times 3^4 + 6 \times 2^4 - 4}{4!} = 1$$

$$0.3 \quad 1 - 2^{m-1}$$

$$0.4 \quad (الف) 122 \quad (ب) 90$$

عدد ۳۰۰۳۰ شش عامل اول متمایز دارد، و می‌خواهیم این عاملها را به سه مجموعه تفکیک کنیم. نماد برای قسمت (الف)، $G(6, 3)$ و برای قسمت (ب)، $g(6, 3)$ است.

$$0.5 \quad 52$$

$$0.7 \quad g(m, m-2) = C(m, 3) + 3C(m, 4)$$

مجموعه مسائل ۲۹، صفحه ۱۲۶

$$0.1 \quad (الف) 24 \quad (ب) 126 \quad (پ) C(9, 4) \quad (ب) 151200 \quad (پ) P(10, 6)$$

$$(ت) 286 \quad (ث) 7 \quad (ج) 21 \quad (ع) 19$$

راه حل (ت). پاسخ، برابر $C(13, 3)$ ، تعداد جوابهای $x + y + z + w = 10$ در مجموعه اعداد صحیح نامنفی است.

راه حل (ج). پاسخ، برابر $3C(3, 2) - C(8, 2)$ ، تعداد جوابهای $x + y + z = 6$ در مجموعه اعداد صحیح نامنفی نایبتر از ۴ است.

$$0.2 \quad (الف) n! \quad (ب) P(n, r) \quad (پ) C(n, r) \quad (ت) C(r+k-1, r)$$

راه حل (ت). این پاسخ، برابر جوابهای معادله

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = r$$

در مجموعه اعداد صحیح نامنفی است.

$$0.3 \quad \frac{1}{4}(k^2 + 3k + 4) \times k!$$

دوشیء یکسان را به A ، نشان می‌دهیم. جعبه اول شامل دوشیء است. تعداد توزیعهایی با حداقل يك A در جعبه اول برابر $(k+1)!$ است. تعداد توزیعها با A هایی در جعبه‌ای به غیر از جعبه اول برابر $(k-2)!C(k, 2)C(k, 2)$ است، زیرا در انتخاب دوشیء برای قراردادن در جعبه اول، $C(k, 2)$ راه، و در انتخاب

۲ جعبه برای A ها $C(k, 2)$ راه و برای توزیع $(k-2)$ شیء دیگر $(k-2)!$ راه وجود دارد.

مجموعه مسائل ۳۰، صفحه ۱۳۰

$$k = 4$$

فرض کنید که حداکثر سه تا از $a_1, a_2, \dots, a_4$ و حداکثر سه تا از $b_1, b_2, \dots, b_4$ و حداکثر سه تا از $c_1, c_2, \dots, c_4$ دارای ویژگی Q باشند. در این صورت بایک جمع ساده حداکثر نه تا از تمام سی جمله دارای ویژگی Q هستند. این با اطلاعاتی که داده شده است متناقض است.

$$r = 4.5$$

مجموعه مسائل ۳۱، صفحه ۱۳۲

۰۱. راهی برای بحث در این مسئله آن است که AB, BC, CD, DE و EA را با رنگ آبی و بقیه پاره‌خطها را با رنگ قرمز رسم کنید.

۰۲. یکی از هفده نقطه را با A و بقیه را با $B_1, B_2, \dots, B_{16}$ نشان می‌دهیم. شانزده پاره‌خطی که از A خارج می‌شوند، یعنی $AB_1, AB_2, \dots, AB_{16}$ را در نظر می‌گیریم. طبق اصل لانه کبوتر حداقل شش تا از این پاره‌خطها دارای يك رنگ، مثلاً آبی، هستند. می‌توان این شش پاره‌خط آبی را $AB_1, AB_2, \dots, AB_6$ اختیار کرد. اکنون اگر در بین شانزده پاره‌خطی که $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ را به هم وصل می‌کنند حداقل يك پاره خط آبی وجود داشته باشد، آن گاه يك مثلث رنگی آبی داریم. (مثلاً، اگر پاره خط B_3B_5 آبی باشد آن گاه مثلث AB_3B_5 يك مثلث آبی است.) از طرف دیگر اگر در بین این دسته شانزده تایی هیچ پاره‌خطی آبی نباشد، این بدان معناست که تمام پاره خطهایی که نقطه‌های $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ را به هم وصل می‌کنند قرمز و یا سفیدند. در این حالت از نتیجه اصلی که در بخش ۲.۹ ثابت شده است استفاده می‌کنیم.

مجموعه مسائل ۳۲، صفحه ۱۳۷

$$0.1 (n^2 + n) \frac{1}{2}$$

از جواب $(n^2 + n + 2)(1/2)$ که در متن کتاب برای تعداد ناحیه‌های حاصل

از n خطی داده شد که هیچ دو تای آنها موازی، و هیچ سه‌تای آنها متقارب نیستند، این نتیجه را می‌توان به دست آورد. زیرا اگر در این حالت یکی از خطها را در امتداد صفحه طوری بلغزانیم که از نقطه تقاطع دو خط دیگر بگذرد آن گاه يك ناحیه از بین می‌رود.

$$0.2 \quad (m+1)(k+1)$$

$$0.3 \quad (m+1)(k+1) + m + k + 1$$

خط جدید، $m+k+1$ ناحیه جدید به وجود می‌آورد.

$$0.4 \quad qt + 2q + 2t - 1$$

تعداد ناحیه‌ها را با $F(q, t)$ نشان می‌دهیم. اگر یکی از q خط‌ها برداریم می‌بینیم که $2+t$ ناحیه از بین می‌روند، و بنابراین $F(q, t)$ به اندازه $2+t$ از $F(q-1, t)$ بیشتر است. بنابراین داریم

$$F(q, t) - F(q-1, t) = 2+t,$$

$$F(q-1, t) - F(q-2, t) = 2+t,$$

$$F(q-2, t) - F(q-3, t) = 2+t,$$

.....

$$F(2, t) - F(1, t) = 2+t,$$

$$F(1, t) - F(0, t) = 1+t.$$

(به اختلاف جزیی در آخرین معادله توجه کنید.) از جمع این معادله‌ها و استفاده از $F(0, t) = 2t$ پاسخ را به دست می‌آوریم.

$$0.5 \quad kq + 2q + k$$

تعداد ناحیه‌ها را با $H(q, k)$ نشان دهیم. اگر یکی از k خط موازی را برداریم، تعداد این ناحیه‌ها به اندازه $q+1$ کم می‌شود. بنابراین می‌بینیم که $H(q, k) - H(q, k-1) = q+1$. با تشکیل يك مجموع تلسکوپی مانند مسأله قبل و با استفاده از $H(q, 0) = 2q$ ، پاسخ را به دست می‌آوریم.

$$0.6 \quad kq + 2q + k + nk + nq + n(n+1)/2$$

تعداد ناحیه‌ها را با $H(q, k, n)$ نشان می‌دهیم، به قسمی که $H(q, k, 0)$

همان $H(q, k)$ مسأله قبل است. اگر یکی از n خط برداشته شود، تعداد ناحیه‌ها به اندازه $n+k+q$ کم می‌شود. بنابراین،

$$H(q, k, n) - H(q, k, n-1) = k + q + n,$$

و با استفاده از این رابطه می‌توانیم مانند دو مسأله قبل عمل کنیم.

مجموعه مسائل ۳۳، صفحه ۱۴۳

۰۳. از مقایسه با مثلث پاسکال، حدس

$$K(n) = C(n-1, 2) = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

القا می‌شود. ثابت می‌شود که این حدس صحیح است، زیرا برابری $K(n+1) = K(n) + n - 1$ با توجه به مطلب زیر برقرار است: $K(n+1)$ نه تنها زوجی‌ها را که به وسیله $K(n)$ محاسبه می‌شوند به حساب می‌آورد، بلکه زوجهای

$$1, n+1 \quad 2, n+1 \quad 3, n+1 \quad \dots \quad n-1, n+1$$

را نیز به حساب می‌آورد.

۰۴. (الف) دروغ (ب) راست (پ) راست (ت) دروغ (ث) دروغ (ج) راست

مجموعه مسائل ۳۴، صفحه ۱۴۹

$$\sum_{j=1}^n 3j = \frac{3n(n+1)}{2} \quad \text{(الف) } ۰۲$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n (2j-1)(2j+1) &= \sum_{j=1}^n (4j^2 - 1) = 4 \sum_{j=1}^n j^2 - n \quad \text{(ب)} \\ &= \frac{4n(n+1)(2n+1)}{3} - n \\ &= \frac{n(4n^2 + 6n - 1)}{3} \end{aligned}$$

$$\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \quad (\text{ب}) \quad \frac{n(n-1)}{2} \quad (\text{الف}) \quad ۳$$

$$f(n) = (n+1)! - 1 \cdot 11 \quad 2^n n! \cdot ۰۹ \quad 2520 \cdot ۰۸ \quad ۰ \cdot ۰۶ \quad 50 \cdot ۰۴$$

مجموعه مسائل ۳۵، صفحه ۱۵۵

$$۴۲۹ \quad (\text{iii}) \quad ۱۳۲ \quad (\text{ii}) \quad ۴۲ \quad (\text{i}) \quad ۰۱$$

$$۵۲۶۲۱۴۴ \cdot ۳$$

راه حل‌های مسائل گوناگون

۰۱ احتمال متمم، یعنی شانس به دست آوردن کمتر از نصف پاسخهای صحیح را در نظر می‌گیریم. تعداد امکانات همشانس، ۲۹ است. دانشجو در $C(9, 0) + C(9, 1) + C(9, 2)$ حالت در به دست آوردن حداقل سه پاسخ درست از نه تا موفق نمی‌شود. جمله‌های این مجموع، متناظر با هیچ، يك یا دو پاسخ درست است. توجه کنید که این مجموع، برابر $۴۶ = ۱ + ۹ + ۳۶$ است، می‌بینیم که احتمال متمم $۴۶/۵۱۲$ است که از $۱/۱۰$ کمتر است.

$$۱۴۱۴ \cdot ۳$$

پاسخ سؤال، کوچکترین عدد صحیح مثبت n است که به ازای آن $(1/2)(n^2 + n) > ۱۰۰۰۰۰۰$. معادله متناظر،

$$\frac{1}{2}(n^2 + n) = ۱۰۰۰۰۰۰$$

است که دارای يك ریشه مثبت بین ۱۴۱۳ و ۱۴۱۴ است.

$$n^3(n+1) \cdot ۳$$

مسأله، محاسبه

$$۴ \sum_{j=1}^n j^3 - ۳ \sum_{j=1}^n j^2 + \sum_{j=1}^n j \quad \text{یا} \quad \sum_{j=1}^n (۴j^3 - ۳j^2 + j)$$

است. فرمول این مجموعه‌ها را می‌توان در خلاصه فصل ۳ و پاسخ سؤال ۱۰ از

مجموعه مسائل ۱۳ یافت. بنا براین به دست می آوریم

$$n^2(n+1)^2 - \frac{1}{4}n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{4}n(n+1),$$

که به صورت پاسخی که داده شده است خلاصه می شود.

۸/۱۱۰۴

اینکه دسته‌ها را «نامگذاری» کنیم، یعنی برجسته‌های مشخصی نظیر دسته قرمز، دسته آبی و دسته سبز به آنها بدهیم، یا نامگذاری نکنیم تفاوتی ندارد. در اینجا راه حلی را با استفاده از دسته‌های نامگذاری شده ارائه می دهیم. با انتخاب ابتدا چهار پسر برای دسته قرمز و سپس چهار پسر برای دسته آبی، تعداد کل راههای تشکیل دسته‌ها برابر $C(12, 4)C(8, 4)$ است. دو پسر به خصوص را A و B می نامیم؛ تعداد راههای تشکیل دسته‌ها، با A برای دسته قرمز و B برای دسته آبی، برابر $C(10, 3)C(7, 3)$ است. در نتیجه، پاسخ عبارت است از

$$6C(10, 3)C(7, 3)/[C(12, 4)C(8, 4)]$$

۱۶/۵۵۰۵

با استفاده از زمینه راه حل مسأله قبل، با نامگذاری پسرها با A ، B و C ، توجه می کنیم که برای تشکیل دسته‌ها با A در دسته قرمز، B در دسته آبی و C در دسته سبز، $C(9, 3)C(6, 3)$ راه وجود دارد. بنا براین پاسخ، برابر $6C(9, 3)C(6, 3)/[C(12, 4)C(8, 4)]$ است.

۶. تعداد اشیایی که دارای هیچیک از ویژگیهای α و β نیستند برابر $N - N(\alpha) - N(\beta) + N(\alpha, \beta)$ است. این عدد منفی نیست و بنا براین

$$N - N(\alpha) - N(\beta) + N(\alpha, \beta) \geq 0$$

یا

$$N + N(\alpha, \beta) \geq N(\alpha) + N(\beta).$$

به همین ترتیب داریم

$$N + N(\beta, \gamma) \geq N(\beta) + N(\gamma) \text{ و } N + N(\alpha, \gamma) \geq N(\alpha) + N(\gamma)$$

از جمع این نابرابریها، پاسخ نتیجه می شود.

$$\prod_{j=1}^{\Delta_0} (1+x^{2j-1}) \leq (1+x)(1+x^3)(1+x^5)\dots(1+x^{99}) \quad ۰.۷$$

$$\left\{ \sum_{j=0}^{20} x^j \right\}^2 \left\{ \sum_{j=0}^{10} x^{2j} \right\}^2 \left\{ \sum_{j=0}^6 x^{2j} \right\}^2 \times \sum_{j=0}^{\Delta} x^{2j} \times \sum_{j=0}^6 x^{2j} \quad ۰.۸$$

$$\times \sum_{j=0}^6 x^{10j} \times \sum_{j=0}^1 x^{20j}$$

$$F(n) - F(n-1) = F(n-2), \quad ۰.۹ \text{ معادله‌های}$$

$$F(n-1) - F(n-2) = F(n-3),$$

$$F(n-2) - F(n-3) = F(n-4),$$

.....

$$F(2) - F(1) = F(0),$$

را باهم جمع کنید.

۰.۱۰ رابطه $F(n) = C(n+1, 0) + C(n, 1) + C(n-1, 2) + \dots$ از خلاصه فصل ۴ را می‌توان به صورت

$$F(n) = \sum_{j+k=n+1} C(j, k)$$

نوشت. به همین ترتیب می‌بینیم که

$$F(n-2) = \sum_{j+k=n-1} C(j, k), \quad F(n-3) = \sum_{j+k=n-2} C(j, k),$$

$$\dots, \quad F(0) = \sum_{j+k=1} C(j, k).$$

اگر مجموع این رابطه‌ها را به برابری $1 = C(0, 0)$ اضافه کنیم، به دست می‌آوریم

$$F(n-2) + F(n-1) + \dots + F(0) + 1 = \sum_{j+k \leq n} C(j, k).$$

بنابراین، نتیجه با استفاده از مسأله قبل حاصل می‌شود.

$$(201)(21!)/11! \cdot 11$$

مضربهای ۳ را موقتاً کنار بگذارید؛ بیست عدد صحیح باقی ماندهٔ دیگر را می‌توان به ۲۰۱ راه جایگشت داد. به‌ازای هر يك از این جایگشتها، در بین اعداد صحیح و در انتهای آنها ۲۱ مکان وجود دارد. برای درج مضربهای ۳، ۱۰ تا از این مکانها را انتخاب کنید؛ بنابراین $C(21, 10)$ انتخاب وجود دارند. اما می‌توان این مضربهای ۳ را به ۱۰! راه درج کرد. لذا پاسخ برابر است با

$$(201) \times C(21, 10) \times (10!)$$

$$16687 \cdot 12$$

گوییم جایگشتی دارای ویژگی α_1 است درحالتی که بعد از α ، بلافاصله b قرار گیرد، دارای ویژگی α_2 است درحالتی که بعد از b ، بلافاصله c قرار گیرد، ...، دارای ویژگی α_7 است درحالتی که بعد از c ، بلافاصله h قرار گیرد. مسأله، تعیین تعداد جایگشتهایی است که دارای هیچ‌یک از این ویژگیها نباشند، و این مسأله را می‌توان با استفاده از اصل شمول-عدم شمول حل کرد. می‌توان دید که

$$N(\alpha_1, \alpha_2) = 6!, N(\alpha_1) = N(\alpha_2) = \dots = N(\alpha_7) = 7!$$

$$N(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 5!$$

و غیره. بنابراین پاسخ، برابر است با

$$8! - C(7, 1) \times 7! + C(7, 2) \times 6! - C(7, 3) \times 5! + C(7, 4) \times 4!$$

$$- C(7, 5) \times 3! + C(7, 6) \times 2! - C(7, 7) \times 1!$$

$$\{C(24, 4)\}^5 - 5\{C(23, 3)\}^5 + 10\{C(22, 2)\}^5 \quad 13$$

$$- 10\{C(21, 1)\}^5 + 5\{C(20, 0)\}^5$$

شرط تهی نبودن جعبه‌ها را موقتاً در نظر نمی‌گیریم. جعبه‌ها را با A, B, C, D و E برچسب می‌زنیم. بنابراین تعداد توزیعهای سنتها برابر $C(24, 4)$ ، یعنی تعداد جوابهای معادلهٔ $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20$ در مجموعهٔ اعداد صحیح نامنفی است، که در آن x_i را می‌توان به عنوان تعداد سنتهای موجود در جعبهٔ A تعبیر کرد و قس علی‌هذا. بنابراین تعداد توزیعهای تمام سکه‌ها برابر $\{C(24, 4)\}^5$ است. اکنون شرط تهی نبودن جعبه‌ها را در نظر گرفته و از اصل شمول-عدم شمول استفاده می‌کنیم. گوییم يك توزیع دارای ویژگی α است درحالتی که A تهی باشد،

دارای ویژگی β است درحالتی که B تهی باشد و غیره. بنابراین می‌بینیم که

$$N = \{C(24, 4)\}^5, \quad N(\alpha) = \{C(23, 3)\}^5, \quad N(\alpha, \beta) = \{C(22, 2)\}^5$$

و غیره، که پاسخ مطلوب را می‌دهد.

۸۶۴۰۱۴

ابتدا این شرط را نادیده می‌گیریم که دوشیء مشابه در مجاورت همدیگر قرار نگیرند. بنابراین تعداد کل جایگشتها برابر است با

$$N = \frac{8!}{2!2!2!2!} = 2520$$

اکنون اصل شمول - عدم شمول را به کار می‌گیریم که در آن يك جایگشت دارای ویژگی α است درحالتی که A ها مجاور هم باشند، دارای ویژگی β است درحالتی که B ها مجاور هم باشند و غیره. می‌توان محاسبه کرد که

$$N(\alpha) = \frac{7!}{2!2!2!} = 630, \quad N(\alpha, \beta) = \frac{6!}{2!2!} = 180,$$

$$N(\alpha, \beta, \gamma) = 60, \quad N(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = 24.$$

بنابراین پاسخ برابر است با

$$N - 4N(\alpha) + 6N(\alpha, \beta) - 4N(\alpha, \beta, \gamma) + N(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = 864.$$

۷۰۰۰۱۵

ابتدا برای به دست آوردن $(3!3!)/6!$ یا ۲۰ جایگشت، E ها و F ها را جایگشت دهیم. آن گاه در هر يك از این ۲۰ جایگشت در هر ۳ مکان از ۷ مکان واقع بین حرفها و یا در انتهای حرفها، D ها را درج کنید. بنابراین پاسخ برابر $20C(7, 3)$ است.

۳۴۰۰۱۶

در حل مسأله قبل ۲۰ جایگشت E ها و F ها را به سه دسته تقسیم کنید: در ۴ جایگشت، E ها مجاور هم قرار ندارند؛ در ۱۲ جایگشت، دقیقاً دو E مجاور هم هستند؛ در ۴ جایگشت هر سه E مجاور هم اند. در هر يك از این سه نوع، D ها به ترتیب

به $C(5, 1)$ ، $C(6, 2)$ ، $C(7, 3)$ راه می‌توانند درج شوند. بنابراین، پاسخ برابر است با $4C(7, 3) + 12C(6, 2) + 4C(5, 1)$.

۱۷۴۰۱۷

ابتدا تمام آرایشهایی را در نظر می‌گیریم که DE در انتهای چپ و هفت حرف دیگر دنبال آن هستند. با حذف F ها تعداد این آرایشها شش‌تاست، یعنی

$$\begin{array}{lll} (1) DEDDEE & (2) DEDEDE & (3) DEDEED \\ (4) DEEEDD & (5) DEEDED & (6) DEEDDE \end{array}$$

در این شش آرایش، F ها را می‌توان به تعداد: $C(3, 1)$ ، $C(5, 3)$ ، $C(4, 2)$ ، $C(3, 3)$ ، $C(4, 2)$ ، $C(3, 1)$ راه درج کرد. مجموع این راهها برابر ۲۹ است، و پاسخ از ضرب این عدد در ۶ به دست می‌آید تا علاوه بر DE زوجهای دیگر حروف نیز در انتهای چپ منظور شوند.

۲۶۰۰۰۱۸

به ازای هر جواب $x + y + z + v = 27$ در مجموعه اعداد صحیح مثبت، برای معادله دیگر جواب یکنای متناظری وجود دارد، زیرا

$$u = 30 - x - y - z.$$

از این‌رو مسأله به سؤال درباره تعداد جوابهای معادله

$$x + y + z + v = 27$$

در مجموعه اعداد صحیح مثبت برمی‌گردد. پاسخ، برابر $C(26, 3)$ است.

۱۰۷۸۰۱۹

بنابر تقارن، تعداد جوابها با شرط $x > y$ با تعداد جوابها با شرط $x < y$ مساوی است. تعداد کل جوابها برابر $C(25, 3)$ یا ۲۳۰۰ است. تعداد جوابها با شرط $x = y$ برابر است با

$$\sum_{x=1}^{12} C(25 - 2x, 1) = \sum_{x=1}^{12} (25 - 2x) = 144,$$

زیرا به ازای هر مقدار ثابت x ، معادله $2x + z + w = 26$ یا $z + w = 26 - 2x$

در مجموعه اعداد صحیح مثبت، $(1, 2x-25)C$ جواب دارد. بنا براین پاسخ، برابر $2/(144-2300)$ است.

$$30.2(n+1)(2n^2+4n+3)/3$$

مسأله به سؤال درباره تعداد انتخابهای $2n$ شیء از $4n$ شیء، که $4n$ شیء به صورت مجموعه‌های n تایی مشابه‌اند (که بنا براین ۴ نوع مختلف از اشیاء وجود دارند) برمی‌گردد. این همان سؤال درباره تعداد جوابهای معادله $x_1+x_2+x_3+x_4=2n$ در مجموعه اعداد صحیح نامنفی نایب‌تر از n است. طبق محاسبه فصل ۵ این تعداد برابر $3C(n+2, 3)-3C(2n+3, 3)$ است.

$$21.0 \cdot \{(j!)^n n!\} / (nj)!$$

اولین دسته‌زتایی از اشیاء را می‌توان به $C(nj, j)$ راه انتخاب کرد، دومین دسته‌زتایی را می‌توان به $C(nj-j, j)$ راه انتخاب کرد و غیره. چون ترتیب دسته‌ها اهمیتی ندارد، پاسخ برابر است با

$$C(nj, j)C(nj-j, j)C(nj-2j, j) \dots C(3j, j)C(2j, j)/n!$$

۲۲. افزایشی به اعداد صحیح مثبت زوج.

هیچ افزایشی از ۱۰۰۰، به سه عدد صحیح مثبت فرد، وجود ندارد.

۲۳. افزایشی به چهار عدد صحیح مثبت فرد.

فرض کنیم $a+b+c+d$ با شرط $a \leq b \leq c \leq d$ ، افزایشی از ۱۰۰۰ به چهار عدد صحیح مثبت زوج باشد. در این صورت

$$(a-1)+(b-1)+(c-1)+(d+3)$$

افزایشی از ۱۰۰۰ به چهار عدد صحیح مثبت فرد است. به علاوه این افزایش، بین تمام افزایشهای ۱۰۰۰ به چهار عدد صحیح مثبت زوج و بعضی از افزایشهای ۱۰۰۰ به چهار عدد صحیح مثبت فرد يك تناظر يك به يك به دست می‌دهد. این تناظر تنها «بعضی» از افزایشهای ۱۰۰۰ به چهار عدد صحیح فرد را می‌دهد زیرا $d+3$ حداقل ۴ تا از $1-C$ بیشتر است، و لذا در این تناظر افزایشی نظیر $251+251+249+249$ وجود ندارد.

۲۴. افزایشی به اعداد صحیح مثبت فرد.

هر افزایشی با جمعوندهای زوج را می‌توان با تقسیم هر جمعوند زوج $2j$

به دو قسمت ۱ و ۱-۲، به افرازی با جمعوندهای فرد تبدیل کرد. مثلاً
 $۵۰۰ + ۳۰۰ + ۲۰۰$ به افراز $۴۹۹ + ۲۹۹ + ۱۹۹ + ۱ + ۱ + ۱$ تبدیل
 می‌شود. بنابراین هرافراز با جمعوندهای زوج تنها به یک افراز با جمعوندهای فرد
 تبدیل می‌شود، اما این شیوه نمی‌تواند تمام افرازهای با جمعوندهای فرد را
 به دست دهد.

$$۴۰۲۱۳۰۰۲۵$$

اعداد صحیحی که ویژگی مذکور را نداشتند بشمارید. مثلاً $۹^۶$ عدد صحیح
 با ۶ رقم وجود دارند به‌طوری‌که هیچ دو رقم متوالی آنها مساوی نیستند. بنابراین
 پاسخ، برابر است با

$$۱۰۰۰۰۰۰ - (۹^۶ + ۹^۵ + ۹^۴ + ۹^۳ + ۹^۲ + ۹).$$

$$-۲۴ + \sum_{j=0}^{۲۲} (-1)^j \{C(۲۴, j) + C(۲۳, j) \quad ۰۲۶$$

$$+ ۴۶(C(۲۲, j))\}(۲۴-j)!$$

ابتدا آن جایگشتهایی را در نظر می‌گیریم که B در اولین مکان و A در دومین
 مکان قرار می‌گیرند. تعداد این جایگشتها برابر

$$\sum_{j=0}^{۲۴} (-1)^j C(۲۴, j)(۲۴-j)! \quad \text{یا} \quad D(۲۴)$$

است، زیرا این جایگشتها همان پریشها هستند. سپس جایگشتهایی را در نظر می‌گیریم
 که A در دومین مکان و B در سومین مکان قرار می‌گیرند. بنا بر استدلالی با استفاده
 از اصل شمول-عدم شمول، نظیر استدلالی که در نظریهٔ پریشها به کار رفت، تعداد
 این جایگشتها برابر است با،

$$\sum_{j=0}^{۲۳} (-1)^j C(۲۳, j)(۲۴-j)!$$

سرانجام، تعداد امکانها برای اینکه A و B در هر دو مکان مجاور بخصوص دیگری
 قرار گیرند، برابر است با

$$\sum_{j=0}^{۲۲} (-1)^j C(۲۲, j)(۲۴-j)!$$

۹۰.۲۷

با اختیار α به‌عنوان این ویژگی که a و b مجاورند، β به‌عنوان این ویژگی که b و c مجاورند و γ به‌عنوان این ویژگی که a و c مجاورند، اصل شمول - عدم شمول را برای $\{a, b, c\}$ جایگشت نامشروط به‌کار برید.

۲۸. هر وقت دو نفر باهم دست می‌دهند، تعداد افرادی که به دفعات فرد باهم دست داده‌اند به اندازه ۲، ۵ یا ۷ - تغییر می‌کند.

۲۹. تعداد آشنایان هر فرد در یک گروه n نفره یکی از n عدد صحیح $0, 1, 2, \dots, n-1$ است. اگر هیچ دو نفری دارای یک تعداد آشنا نباشند، آن گاه تمام n عدد صحیح برای نمایش تعداد آشنایان به‌کار برده می‌شوند. اما دو عدد ۰ و $n-1$ نمی‌توانند همزمان اتفاق بیفتند، زیرا این بدان معنی است که یک فرد با تمام افراد آشناست، و دیگری با هیچکس آشنا نیست.

۳۰. این صرفاً صورتی دیگر از مسأله قبل است.

$$m(3mk - m^2 + 3k + 1)/6 \quad ۳۱$$

تعداد مربعهای ردیف اول را به $s_1(k, m)$ ، سپس تعداد مربعهای ردیف دوم را با $s_2(k, m)$ و غیره نشان می‌دهیم. پس تعداد کل مربعهای شبکه برابر است با

$$S(k, m) = \sum_{i=1}^m s_i(k, m).$$

حال $s_1(k, m) = mk$ ، $s_2(k, m) = m(k-1)$ ؛ به همین ترتیب،

$$s_3(k, m) = (m-1)s_2(k, 2) = (m-1)(k-1)$$

و غیره. محاسبه می‌کنیم که

$$S(k, m) = mk + (m-1)(k-1) + (m-2)(k-2) + \dots + 1(k-m+1).$$

اگر در این حاصلجمع ترتیب جمله‌ها را تغییر دهیم، داریم

$$S(k, m) = k - m + 1 + 2(k - m + 2) + 3(k - m + 3) + \dots + m(k - m + m)$$

$$\begin{aligned}
 &= (k-m)(1+2+3+\dots+m) \\
 &\quad + (1^2+2^2+3^2+\dots+m^2) \\
 &= (k-m)\frac{m(m+1)}{2} + \frac{m(m+1)(2m+1)}{6},
 \end{aligned}$$

و این همان عددی است که در بالا داده شده است.

۳۲. با ۲۵۵ حرکت می‌توان این انتقال را انجام داد.

مسئله را می‌توان برای n قرص بیان کرد، که مثلاً مستلزم $f(n)$ حرکت است. یک تحلیل ساده نشان می‌دهد که $f(n) = 2f(n-1) + 1$.

۳۳. فرض کنیم نقاط را با A, B, C, D, E و F نشان دهیم. طبق روش بخش ۲.۹ می‌توان فرض کرد که (مثلاً) ABC یک مثلث رنگی قرمز است. اگر DEF مثلث رنگی نباشد، آن گاه یک ضلع آن مثلاً DE سفید است. اگر ADE رنگی نباشد، آن گاه حداقل یکی از اضلاع AD و AE قرمز است. همین‌طور اگر BDE و CDE رنگی نباشند، حداقل یکی از BD و BE و حداقل یکی از CD و CE قرمز است. بنابراین حداقل دوتا از AD, BD, CD و یا حداقل دوتا از AE, BE, CE قرمزند. در حالت اول مثلثهای ABD, ACD, BCD ، و در حالت دوم مثلثهای ABE, ACE, BCE را در نظر بگیرید.

۳۴. الگویی برای حل مسئله بدین شرح است. فرض کنید اضلاع ABC قرمز و اضلاع DEF نیز قرمز باشند و فرض کنید بقیه پاره‌خطها همگی سفیدند.

۳۵. طبق راه حل مسئله ۳۳، می‌توان شش نقطه دلخواه را اختیار کرد و دو مثلث رنگی به دست آورد. فرض کنید A رأسی از یکی از این مثلثها باشد. آن گاه راه حل مسئله ۳۳ را برای شش نقطه غیر از A به کار ببرید.

۳۶. از هر یک از نقاط، مثلاً A ، ۵ پاره خط خارج می‌شود. از اینها، حداقل ۱۷ تا دارای یک رنگ اند. مثلاً $AB_1, AB_2, \dots, AB_{17}$ قرمزند. اگر هر پاره خطی که دوتا از نقاط $B_1, B_2, \dots, B_{17}$ را به هم وصل می‌کند قرمز باشد، یک مثلث رنگی وجود دارد. در غیر این صورت می‌توان نتیجه مسئله ۲ از مجموعه مسائل ۳۱ را در مورد ۱۷ نقطه و ۳ رنگ به کار برد.

۳۷. این مسئله را می‌توان با دقیق‌تر کردن استدلالی که در حل مسئله ۲ از مجموعه

۳۱ داده شد حل کرد. A را نه به عنوان یکی از نقطه‌ها، بلکه به عنوان نقطه‌ای که رأس يك مثلث رنگی نیست در نظر بگیرید و نتیجه مسئله ۳۳ همین مجموعه را به کار برید.

۳۸. از هر کدام از نقاط، ۲۳ پاره خط که حداقل ۱۲ تای آنها دارای يك رنگ‌اند خارج می‌شوند. مثلاً پاره خطهای $AB_1, AB_2, \dots, AB_{12}$ قرمزند. اگر بین ۱۲ نقطه از B_1 تا B_{12} يك مثلث رنگی قرمز موجود باشد آن گاه چنین مثلثی با نقطه A جواب مطلوب است. در غیر این صورت، ۱۱ پاره خط $B_1B_2, B_1B_3, \dots, B_1B_{12}$ را در نظر می‌گیریم؛ حداقل ۶ تا از اینها، مثلاً $B_1B_3, B_1B_4, \dots, B_1B_6$ دارای يك رنگ‌اند. اگر این رنگ، قرمز باشد، نقاط B_3, B_4, B_5 و B_6 ، جواب مسئله است. اگر این رنگ، سفید باشد آن گاه شش نقطه $B_3, B_4, \dots, B_6$ را در نظر می‌گیریم. در بین این ۶ نقطه يك مثلث رنگی، که الزاماً سفید است، وجود دارد. این مثلث با نقطه B_1 جواب مسئله است.

$$n(n-1)(n-2)(n-3)/24 \quad ۳۹$$

هر چهار نقطه روی يك دایره، يك نقطه تقاطع یکتا را تعیین می‌کند. بنابراین $C(n, 4)$ پاسخ مسئله است.

$$C(n, 4) + 1 + \frac{1}{4}n(n-1) \quad ۴۰$$

هر بار يك نقطه را اضافه می‌کنیم، وقتی از $j-1$ نقطه به j نقطه می‌رسیم نمو تعداد ناحیه‌ها، $R(j) - R(j-1)$ ، را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم j امین نقطه P و یکی از $j-1$ نقطه، Q باشد. اگر خط PQ دارای k نقطه تقاطع در داخل دایره باشد، آن گاه خط PQ ، $k+1$ ناحیه جدید به وجود می‌آورد. اما تمام خطهای PQ (که P ثابت و Q هر يك از $j-1$ نقطه است) طبق نتیجه مسئله قبل $C(j, 4) - C(j-1, 4)$ نقطه تقاطع به وجود می‌آورند. بنابراین داریم

$$R(j) - R(j-1) = j-1 + C(j, 4) - C(j-1, 4),$$

و با جمع این مقادیر به ازای $j=2$ تا $j=n$ می‌توان مسئله را حل کرد.

۴۱. $(n^2 - n)/2$ ، اگر n فرد بوده و مضربی از ۳ نباشد؛ $(n^2 - 2n)/2$ اگر n زوج بوده و مضرب ۳ نباشد؛ وقتی n مضرب ۳ باشد در هر حالت $2n/3$ را کم کنید.

$$C(n+5, 5) \cdot 42$$

این، تعداد جوابهای معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_6 = n$ در مجموعه اعداد صحیح نامنفی است که در آن x_1 تعداد تاسهایی است که عدد یک را نشان می‌دهند، x_2 تعداد تاسهایی است که عدد دو را نشان می‌دهند و غیره.

$$(n^2 + 5n + 6) / 6 \cdot 42$$

از تعداد ناحیه‌های تقسیم یک صفحه به وسیله n خطی که هیچ دو تای آنها موازی نیستند و هیچ سه تای آنها متقارب نمی‌باشند استفاده می‌کنیم. این تعداد را در بخش ۲۰۹ به $f(n)$ نشان دادیم و ثابت شد که

$$f(n) = \frac{1}{2}(n^2 + n + 2).$$

اکنون در مسئله حاضر، اگر هر دفعه یک صفحه را دخالت دهیم و اگر j امین صفحه در تعدادنواحی فضا نمو $g(j) - g(j-1)$ را سبب شود، آن گاه، می‌توان استدلال کرد که

$$g(j) - g(j-1) = f(j-1).$$

با جمع این معادله به ازای $j=2$ تا $j=n$ پاسخ به دست می‌آید.

$$1/3 \cdot 42$$

هر آرایشی از n عدد صحیح را در نظر می‌گیریم: ۱، ۲، ۳ به ترتیب در مکانی مثلاً در i امین، j امین و k امین مکان رخ می‌دهند. اکنون بقیه اعداد صحیح را در جای خود ثابت نگه می‌داریم، ولی ۱، ۲ و ۳ را جایگشت می‌دهیم. برای قرار دادن ۱، ۲، ۳ در i امین، j امین و k امین مکان ۶ راه وجود دارد؛ دو راه از اینها مساعدند، بدین معنا که در دو راه ۲ بین ۱ و ۳ رخ می‌دهد. چون در هر انتخاب مکانهای i, j, k ممکن است همین دلیل را به کار برد، می‌بینیم که احتمال برابر $2/6$ یا $1/3$ است.

$$\sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j C(n, j) (2n-j)!}{2^{n-j}} \cdot 45$$

با اختیار ویژگی α_1 با این معنا که A ها مجاور یکدیگرند، ویژگی α_2 با این معنا که B ها مجاور هم‌اند و غیره، اصل شمول - عدم شمول را برای جایگشت‌های نامشروط

به کار برید.

$$C(n, j)D(j)/n! \quad ۰۴۶$$

$n - j$ عدد صحیح را انتخاب کنید که در جای طبیعی خود قرار گیرند، و آن گاه بقیه می‌توانند به $D(j)$ راه، که در آن $D(j)$ پریشها را نشان می‌دهد، مرتب شوند.

$$\sum_{j=0}^n C(k+1, j)C(k+1-j, n-2j) \quad ۰۴۷$$

ابتدا B ها را، با $k+1$ فضای بین و انتهای آنها در یک سطر بچینید. آن گاه تعداد جایگشتهایی را در نظر بگیرید که دارای j جفت A در j فضا و $n-2j$ تک A در $n-2j$ فضای دیگر هستند.

$$\sum_{j=0}^n (-1)^j C(n, j)(2n-j)! \quad ۰۴۸$$

از اصل شمول-عدم شمول که برای تعداد کل $(2n)!$ جایگشت به کار رفت استفاده کنید. یعنی یک جایگشت دارای ویژگی α_1 است درحالتی که ۱ در مکان طبیعی خود باشد، دارای ویژگی α_2 است درحالتی که ۳ در مکان طبیعی خود باشد و غیره.

$$g(n, k) \text{ ی فصل } ۸; \quad ۰۴۹$$

$$G(n, k) \text{ ی فصل } ۸. \quad (ii)$$

۵۰. رابطه بازگشتی عبارت است از

$$K(n, j) = K(n-2, j-1) + K(n-1, j).$$

$$K(n, j) = C(n-j+1, j) \text{ از عبارت است}$$

۵۱. جدول

ستون اول	ستون دوم	ستون سوم	
AD	BD	CD	سطر اول:
AE	BE	CE	سطر دوم:
AF	BF	CF	سطر سوم:

را در نظر بگیرید. اگر سطری شامل دوجفت نا آشنا باشد، سه‌تایی دیگری را با ویژگی α به دست می‌آوریم. اگر سطری شامل سه جفت نا آشنا باشد، سه سه‌تایی با ویژگی α به دست می‌آوریم. دو مشاهده مشابه می‌توانند درمورد ستونی که شامل دو یا سه جفت از آشناسهاست انجام شود. سپس اگر جدول شامل هفت جفت یا جفتهای بیشتری از نا آشناها باشد، باید سطری با سه جفت نا آشنا وجود داشته باشد و مسأله حل می‌شود. اگر جدول شامل هفت جفت یا جفتهای بیشتری از افراد آشنا باشد، استدلال مشابهی به کار می‌رود. اگر جدول شامل شش جفت نا آشنا و سه جفت آشنا باشد، آن‌گاه یا سطری دارای سه جفت نا آشناست و یا هر سطر دارای دو جفت نا آشناست. در هر حالت مسأله حل می‌شود. بقیه استدلال را به عهده خواننده می‌گذاریم.

۶۱۰.۵۲

فرض کنیم پسر می‌تواند n پله را به $f(n)$ طریق بالا رود، بنابراین باید $f(14)$ را تعیین کنیم. حال $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$ ، زیرا پسر می‌تواند برای رسیدن به n امین پله مستقیماً از یکی از دو پله قبلی حرکت کند. این رابطه بازگشتی، همان رابطه $F(n)$ اعداد فیبوناچی بخش ۱.۴ است، اما مقادیر آغازکننده، در اینجا عبارت‌اند از $f(1) = 1$ و $f(2) = 2$ ؛ بنا براین $f(n) = F(n-1)$ و در نتیجه $f(14) = F(13)$.

$$\sum_{j=1}^9 (10-j)C(j+4, 4) \text{ یا } 4995.053$$

اگر از عدد صحیح ۱۰۰۰۰۰۰ صرف‌نظر کنیم، توجه می‌کنیم که تمام اعداد دیگر را می‌توان به صورت شش عدد صحیح با رقمهای $x_6, x_5, \dots, x_2, x_1$ از چپ به راست تصور کرد که در آنها ۰ می‌تواند به عنوان یک رقم منظور شود و $d_5, \dots, d_4, d_1$ به عنوان تفاضل ارقام مجاور، به صورت $d_5 = x_6 - x_5, d_4 = x_5 - x_4, d_3 = x_4 - x_3, d_2 = x_3 - x_2, d_1 = x_2 - x_1$ تعریف می‌کنیم؛ برای اعداد صحیح با ویژگی مطلوب، تفاضلهای d_5 تا d_1 دارای مقادیر نامنفی‌اند. بعلاوه، رقمهای آنها به صورت یکتا از روی هر مجموعه‌ای از مقادیر $x_6, x_5, d_5, d_4, d_3, d_2, d_1, x_1$ تعیین می‌شوند و هر چنین مجموعه‌ای در معادله $d_5 + d_4 + d_3 + d_2 + d_1 = x_6 - x_1$ صدق می‌کند. تعداد جوابهای این معادله در مجموعه اعداد صحیح نامنفی، برابر $C(x_6 - x_1 + 4, 4)$ است. با نوشتن j به جای $x_6 - x_1$ ، می‌توانیم جواب حاصل را جمع‌وجور کنیم، به‌خاطر داشته باشید که $0 \leq x_1 \leq x_6 \leq 9$.

فهرست راهنما

- احتمال ۸۹
- ترکیببای ۸۹
- متمم ۹۳
- استقرای ریاضی ۱۳۹
- اصل
- استقرای ریاضی ۱۴۵
- جمع ۱۹
- شمول - عدم شمول ۷۳
- ضرب ۱۵
- لانه کبوتر ۱۲۹
- اعداد صحیح ۶
- اعداد فیبوناچی ۵۵
- فرمول - ۵۷
- ویژگی - ۱۶۸
- افرازهای يك عدد صحیح ۹۸، ۱۱۵
- تعداد - ۱۵۳
- نمودارهای - ۹۹
- افرازهای يك مجموعه ۱۲۵
- برج معمای هانوی ۱۷۱
- بسط چندجمله ای ۴۱
- بسط دوجمله ای ۳۷
- پیشها ۸۵
- ترکیبها ۲۵
- باتکرارها ۶۴، ۸۲
- تفکیکهای صفحه ۱۳۳
- توزیعها ۱۱۷، ۱۱۸
- جایگشتها ۱۴
- اشیاای که همه آنها
- یکسان نیستند ۳۱
- دوری ۲۶
- ناسازگار ۸۸
- جمعوندها ۹۸
- چندجمله ایهای مولد ۱۵۸
- حاصلضرب شرکت ناپذیر ۱۵۲
- تعداد تعبیرهای - ۱۶۵
- خرد کردن اسکناس يك دلاری ۱۱۴

مجموع	رقم ۱۷
- تلسکوپی ۱۳۵، ۴۹	زیر مجموعه‌ها ۴۶
توانهای اعداد طبیعی ۴۷	- ی سره ۴۶
نماد $\sum$ برای - ۱۴۵	فاکتوریل صفر ۱۹
مسائل پیکربندی ۱۲۹	فاکتوریلها ۱۳
معادله‌های خطی	فرمول پاسکال برای $C(n, r)$ ۳۴
- باجوابهای مشروط ۶۶، ۸۱	قضیه دو جمله‌ای ۳۷
- باضریبهای واحد ۶۰	
نماد	
- برای حاصلضربها ۱۴۸	مثالت پاسکال ۴۴
- برای حاصلجمعها ۱۴۵	کاربردهای - ۱۵۹
	مثلهای رنگی ۱۳۱

نمادها

۹۸	$p(n)$	۱۳	$n!$
۱۰۰	$q_k(n)$	۱۵	$P(n, r)$
۱۰۰	$p_k(n)$	۱۹	$o!$
۱۲۳	$[a, b, c, \dots] \square \alpha, \beta, \gamma, \dots]$	۲۰	$C(n, r)$
۱۴۵	$\sum$	۲۲	$\binom{r}{n}$
۱۴۸	Π	۸۵	$D(n)$

مراجع

- [1] H. Hadwiger, H. Debrunner and V. Klee, *Combinatorial Geometry in the Plane*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1964.
- [2] John Riordan, *An Introduction to Combinatorial Analysis*, John Wiley, New York, 1958.
- [3] H. J. Ryser, *Combinatorial Mathematics*, Carus Monograph No.14, John Wiley, New York, 1963.
- [4] W. A. Whitworth, *Choice and Chance*, Hafner, New York, 1959.

مسائل ترکیبیاتی کلی در مراجع [۲]، [۳] و [۴] مورد بحث واقع شده‌اند، در صورتی که مرجع [۱] در رابطه با مطالب بخش ۹ این کتاب است. مراجع [۱]، [۲] و [۳] کتابهای پیشرفته‌ای هستند. مرجع [۴]، چاپ تازه‌ای از کتاب قدیمی است، مطالعه آن آسان است، ولی خیلی روزآمد نیست.

www.riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا